

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXXVII

1930 (VIII)

SERIE SESTA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI



ROMA

DOTT. GIOVANNI BARDI

TIPOGRAFO DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1930 (VIII)

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 5 gennaio 1930 (Anno VIII)

Presidenza del Socio anziano sen. prof. G. FANO

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Meccanica. — *Caratteristiche e bicaratteristiche delle equazioni gravitazionali di Einstein.* Nota I⁽¹⁾ del Socio T. LEVI-CIVITA.

Le equazioni gravitazionali di Einstein costituiscono notoriamente un sistema di dieci equazioni alle derivate parziali del 2° ordine con altrettante funzioni incognite di quattro variabili indipendenti x^0, x^1, x^2, x^3 . Le funzioni sono i dieci coefficienti $g_{ik} = g_{ki}$ del

$$ds^2 = \sum_{i,k} g_{ik} dx^i dx^k$$

quadridimensionale che definisce la metrica del cronotopo.

D'altra parte, per un sistema qualsivoglia di equazioni alle derivate parziali, Volterra e Hadamard hanno sviluppata una teoria generale delle caratteristiche, collegata intimamente sia al problema d'integrazione di Cauchy, sia al comportamento di eventuali superficie di discontinuità, o comunque singolari, il che, sotto l'aspetto fisico, con riferimento al fenomeno rappresentato dalle equazioni stesse, si interpreta come propagazione delle cosiddette fronti d'onda.

Naturalmente la teoria generale delle caratteristiche può in particolare applicarsi alle equazioni gravitazionali della relatività. Io mi sono appunto proposta tale applicazione, e ne riferisco nella presente Nota, prevalentemente preparatoria, e in altra che tosto la seguirà.

(1) Presentata nella seduta del 5 gennaio 1930.

Si vedrà che, nel campo reale, le varietà caratteristiche $\chi = 0$ (ipersuperficie a tre dimensioni del cronotopo) sono definite (con evidente significato delle notazioni) dalla equazione alle derivate parziali del 1° ordine

$$H \equiv \frac{1}{2} \sum_{i,k} g^{ik} p_i p_k = 0,$$

più precisamente anzi dal sussistere di tale equazione per $\chi = 0$, designandosi, come si vede, con H la funzione caratteristica hamiltoniana che corrisponde al ds^2 einsteiniano.

Fondamentale importanza hanno, come rilevò l'Hadamard⁽¹⁾, le bicaratteristiche, cioè le linee caratteristiche (secondo Cauchy) della equazione del 1° ordine $H = 0$, le quali (introducendo un parametro ausiliario t) sono a loro volta definite dal sistema canonico

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 0, 1, 2, 3),$$

colla specificazione che sia zero il valore di H (costante per qualsiasi soluzione del sistema). Tali linee coincidono classicamente colle geodetiche del ds^2 einsteiniano; anzi, in virtù di $H = 0$, colle geodetiche di lunghezza nulla.

La conclusione appare significativa, anche come riprova della perfetta coerenza di due postulati fondamentali della relatività generale:

a) il principio che la luce si propaga secondo geodetiche di lunghezza nulla;

b) le equazioni gravitazionali che definiscono il ds^2 .

Ecco perchè. Con a) si assegna la legge del moto di una generica perturbazione luminosa. D'altra parte (Hadamard) le eventuali singolarità del campo, cioè delle equazioni gravitazionali, si propagano secondo le bicaratteristiche delle equazioni stesse. Infine (essendo inclusa nel ds^2 anche l'ottica geometrica) una superficie di discontinuità che si propaga nel campo implica altresì il trasporto di una qualche perturbazione luminosa.

Si hanno così per la propagazione della luce due diverse impostazioni, una fornita direttamente dal postulato a), cioè dalle geodetiche di lunghezza nulla, e l'altra derivante dalle equazioni gravitazionali e relative bicaratteristiche. Le due impostazioni debbono di necessità condurre alle stesse conseguenze, le quante volte coesistano effettivamente a) e b) come leggi di natura. Da questo punto di vista, cioè considerando la costruzione einsteiniana come definitiva, anche nella sua struttura formale, la nostra constatazione di coincidenza era ben prevedibile. Viceversa, sotto l'aspetto mate-

(1) Cfr. in particolare *Leçons sur la propagation des ondes*, Paris, Hermann, 1903, Chap. VII.

matico, occorre proprio dimostrare l'identità, almeno nel campo reale, delle bicaratteristiche con le geodetiche di lunghezza nulla per rendere leggittima la simultanea ammissione di a) e di b).

I. — DEFINIZIONE DI VARIETÀ CARATTERISTICA SECONDO HADAMARD.

Sia dato un sistema di m equazioni

$$(1) \quad F_{\mu} = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, m)$$

alle derivate parziali, in altrettante incognite, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ di $n + 1$ variabili indipendenti x^0, x^1, \dots, x^n .

Sia $\chi(x^0, x^1, \dots, x^n)$ una ulteriore funzione delle x , e si ponga al solito

$$p_i = \frac{\partial \chi}{\partial x^i} \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Se si immagina per un momento di associare alla χ altre n combinazioni indipendenti $\chi^1, \chi^2, \dots, \chi^n$ delle x , ogni φ si può pensare anche come funzione delle χ , e si hanno, per le successive derivate, formule di trasformazione del tipo

$$(2) \quad \frac{\partial \varphi_v}{\partial x^i} = \frac{\partial \varphi_v}{\partial \chi} p_i + \dots \quad (v = 1, 2, \dots, m),$$

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \varphi_v}{\partial x^i \partial x^k} = \frac{\partial^2 \varphi_v}{\partial \chi^2} p_i p_k + \dots \quad (i, k = 0, 1, \dots, n),$$

.....

dove si sono scritti ciascuna volta solamente i termini in cui figurano le derivate rapporto a χ dell'ordine massimo: il primo nelle (2), il secondo nelle (3), ecc.

Supponiamo, per fissare le idee (sarà il caso che ci interessa), che le F siano del secondo ordine, e lineari rispetto alle derivate seconde delle φ , sia cioè

$$(4) \quad F_{\mu} = \sum_1^m \sum_0^n F_{\mu\nu}^{ik} \frac{\partial^2 \varphi_{\nu}}{\partial x^i \partial x^k} + \Phi_{\mu} \quad (\mu = 1, 2, \dots, m),$$

dove i coefficienti $F_{\mu\nu}^{ik}$ e la Φ_{μ} sono funzioni delle x , delle φ e delle loro derivate prime.

Introducendo in F_{μ} , al posto delle derivate seconde delle φ , le loro espressioni (3), ed esplicitando soltanto i termini che contengono le derivate seconde delle φ rapporto all'argomento χ , le (1) si presentano sotto la forma

$$(1') \quad \sum_1^m D_{\mu\nu} \frac{\partial^2 \varphi_{\nu}}{\partial \chi^2} + \dots = 0,$$

avendo posto per brevità di scrittura

$$(5) \quad D_{\mu\nu} = \sum_{i,k}^n F_{\mu\nu}^{ik} p_i p_k \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, m).$$

Se il determinante

$$(6) \quad D = \|D_{\mu\nu}\|$$

non si annulla identicamente rispetto agli argomenti p , cioè se la condizione $D = 0$ costituisce una effettiva equazione (alle derivate parziali, del prim'ordine e di grado complessivo $2m$) nella funzione χ , il sistema (1) si dice *normale*, in quanto, sopra una superficie $\chi = 0$, non scelta in modo particolare (cioè non soddisfacente a $D = 0$), esso è risolubile rispetto alle m derivate seconde delle φ rapporto alle χ . E d'altra parte si dice caratteristica ogni varietà $\chi = \text{cost.}$ sulla quale si abbia

$$D = 0.$$

Ma la nozione di varietà caratteristica si estende ovviamente anche ai sistemi non normali, a quelli cioè per cui il determinante D si annulla identicamente. Basta formularla come segue. In generale, cioè lasciando indeterminate le p (nonchè ben s'intende i valori delle variabili indipendenti), il determinante D , che per ipotesi si annulla, possederà una certa caratteristica (algebrica) $K < m$. Si dirà caratteristica (nel senso di Hadamard) ogni varietà $\chi = 0$, sopra la quale la caratteristica (algebrica) di D si abbassa, divenendo inferiore a K .

2. — LE EQUAZIONI GRAVITAZIONALI DI EINSTEIN.

PARTE DI SECONDO ORDINE RISPETTO AD UN ARGOMENTO GENERICO.

Il tensore di Einstein che figura nei primi membri delle sue equazioni gravitazionali è, colle solite notazioni della relatività generale, definito dalle componenti ⁽¹⁾

$$(7) \quad E_{ik} = E_{ki} = G_{ik} - \frac{1}{2} G g_{ik} \quad (i, k = 0, 1, 2, 3).$$

Queste dipendono linearmente dalle derivate seconde delle g_{ik} , i coefficienti essendo funzioni delle g_{ik} stesse.

Procuriamoci l'espressione esplicita della parte delle E che contiene derivate seconde delle g , ricordando che

$$G_{ik} = \sum_b^3 \{ i h, h k \}.$$

(1) Cfr. per es. i miei *Fondamenti di meccanica relativistica* (redatti dal prof. Persico), Bologna, Zanichelli, 1928, p. 96.

Partiamoci perciò dalle definizioni dei simboli di Christoffel delle due specie, e di quelli di Riemann di seconda specie, tralasciando (in questi ultimi) di scrivere per disteso ciò che certo non contiene derivate seconde delle g .

Si ha successivamente:

$$\left\{ \begin{smallmatrix} i & k \\ h \end{smallmatrix} \right\} = \sum_0^3 g^{jh} \left[\begin{smallmatrix} i & k \\ j \end{smallmatrix} \right] = \frac{1}{2} \sum_0^3 g^{jh} \left[\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \right],$$

$$ih, hk \left\{ \begin{smallmatrix} i & h \\ h \end{smallmatrix} \right\} = \frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} i & h \\ h \end{smallmatrix} \right\}}{\partial x^k} - \frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} i & k \\ h \end{smallmatrix} \right\}}{\partial x^h} + \dots = \frac{1}{2} \sum_0^3 g^{jh} \left[\frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^h} - \frac{\partial^2 g_{ih}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^h} \right] + \dots$$

e quindi

$$8) \quad G_{ik} = \frac{1}{2} \sum_0^3 g^{jh} \left[\frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^h} - \frac{\partial^2 g_{ih}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^h} \right] + \dots,$$

$$G = \sum_0^3 g^{ik} G_{ik} = \frac{1}{2} \sum_0^3 g^{ik} g^{jh} \left[\frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^h} - \frac{\partial^2 g_{ih}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^h} \right] + \dots.$$

Il terzo e quarto termine dell'ultima sommatoria, ove vi si scambi i con j e h con k , vengono rispettivamente a coincidere col secondo e col primo, sicchè, scrivendo anche l ed r in luogo di i e k , si ha pure

$$(9) \quad G = \sum_0^3 g^{lhr} g^{jh} \left[\frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial x^l \partial x^r} - \frac{\partial^2 g_{jr}}{\partial x^l \partial x^h} \right] + \dots.$$

Le cercate espressioni delle E sono pertanto, in base alle (7), (8) e (9),

$$(10) \quad E_{ik} = E_{ki} = \frac{1}{2} \sum_0^3 g^{jh} \left[\frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^h} - \frac{\partial^2 g_{ih}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^h} \right] - \\ - \frac{1}{2} g^{ik} \sum_0^3 g^{lhr} g^{jh} \left[\frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial x^l \partial x^r} - \frac{\partial^2 g_{jr}}{\partial x^l \partial x^h} \right] + \dots.$$

Siamo ormai in grado di applicare al sistema delle equazioni gravitazionali nelle g

$$E_{ik} = \dots \quad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

(che sono in numero di dieci, la coppia (ik) non differendo dalla coppia (ki)) le considerazioni del numero precedente. Si dovrà far intervenire una funzione $\chi(x^0, x^1, x^2, x^3)$ e le sue derivate

$$p_i = \frac{\partial \chi}{\partial x^i} \quad (i = 0, 1, 2, 3),$$

sostituendo materialmente in (10), al posto di una generica $\frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial x^r \partial x^i}$,

$$\frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial x^2} p_r p_l.$$

Per dar forma abbastanza concisa al risultato della sostituzione, giova in primo luogo interpretare le p_i come componenti covarianti di un vettore cronotopico $\mathbf{p} = \text{grad } \chi$, designando in conformità con

$$p^i = \sum_k g^{ik} p_k$$

le componenti contravarianti, e con

$$(11) \quad H = \frac{1}{2} \sum_{ik} g^{ik} p_i p_k = \frac{1}{2} \sum_i p_i p^i$$

il semiquadrato della lunghezza, chè, riguardato come forma quadratica delle p_i , coi coefficienti g^{ik} , è altresì la funzione caratteristica di Hamilton corrispondente al ds^2 .

Ove si ponga ulteriormente

$$(12) \quad \chi = \frac{1}{2} \sum_{jh} g^{jh} \frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial \chi^2},$$

$$(13) \quad \gamma_k = \frac{1}{2} \sum_{jh} g^{jh} p_h \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial \chi^2} = \frac{1}{2} \sum_j p^j \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial \chi^2},$$

$$(14) \quad \gamma = \frac{1}{2} \sum_{jr} p^j p^r \frac{\partial^2 g_{jr}}{\partial \chi^2} = \sum_k p^k \gamma_k,$$

si ricava subito dalle (10), scrivendone i termini nell'ordine in cui si presentano,

$$E_{ik} = p_i p_k \chi - (p_i \gamma_k + p_k \gamma_i) + H \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial \chi^2} - g_{ik} H \chi + g_{ik} \gamma + \dots$$

Perciò la parte E'_{ik} delle E_{ik} che contiene derivate seconde delle g rapporto alla χ , si può scrivere

$$(15) \quad E'_{ik} = E'_{ki} = H \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial \chi^2} + \{p_i p_k - H g_{ik}\} \chi - (p_i \gamma_k + p_k \gamma_i) + g_{ik} \gamma,$$

e le questioni concernenti le caratteristiche dipendono essenzialmente, se non esclusivamente, dalle circostanze di risolubilità del sistema di equazioni

$$E'_{ik} = \dots \quad (i, k = 0, 1, 2, 3),$$

lineari rispetto agli argomenti $\frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial \chi^2}$; anzi (per quanto abbiamo in vista) unicamente dal comportamento delle forme lineari E'_{ik} dei suddetti argomenti $\frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial \chi^2}$.

Attesa la simmetria delle E_{ik} (e quindi anche delle E'_{ik}) e delle g_{jh} rispetto ai loro due indici, si ha a che fare con 10 forme lineari di altrettanti

argomenti, rimanendo contrassegnata una forma E'_{ik} e così un argomento $\frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial \chi^2}$ dalle varie combinazioni semplici di due indici, suscettibili ciascuno di prendere i valori 0, 1, 2, 3.

3. — RELAZIONI LINEARI FRA LE E'_{ik} DERIVANTI DALL'ANNULARSI DELLA DIVERGENZA DEL TENSORE GRAVITAZIONALE. IL DETERMINANTE D DEI COEFFICIENTI E LA SUA CARATTERISTICA $K = 6$ (PER χ GENERICA).

Sussistono notoriamente le quattro identità differenziali

$$(16) \quad \sum_k^3 E_{ik}^{[k} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3),$$

le quali esprimono che il tensore gravitazionale E_{ik} ha divergenza nulla. Il simbolo $^{[k}$ di derivazione contravariante è un operatore la cui parte differenziale si riduce a

$$\sum_i^3 g^{li} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Per procurarsi le derivate d'ordine massimo nei primi membri delle equazioni (16) basta manifestamente applicare l'operatore suaccennato alle derivate seconde delle g che figurano in E_{ik} . In particolare, se si fissa l'attenzione sulle sole derivate seconde rapporto a χ , la parte delle E_{ik} che ne dipende è data dalle E'_{ik} e l'operatore da applicarsi alle derivate seconde si riduce a

$$\sum_i^3 g^{kl} p_l \frac{\partial}{\partial \chi} = p^k \frac{\partial}{\partial \chi}.$$

Perciò le identità (16) assumono la forma

$$(16') \quad \sum_k^3 p^k E_{ik}'' + \dots = 0,$$

dove i termini non scritti sono esenti da derivate terze delle g , e con E_{ik}'' va inteso ciò che diverrebbero le espressioni lineari E'_{ik} , sostituendovi dappertutto (quindi anche in χ , γ_k e γ) le derivate terze $\frac{\partial^3 g_{jk}}{\partial \chi^3}$ al posto delle corrispondenti derivate seconde.

Siccome le (16) sono identità, cioè sussistono per determinazioni arbitrarie delle x , delle g e delle loro derivate, devono in particolare annullarsi in (16') i coefficienti delle singole derivate terze $\frac{\partial^3 g_{jk}}{\partial \chi^3}$. Ma questi coincidono coi coefficienti delle omologhe derivate seconde in $\sum_k^3 p^k E'_{ik}$. Sussistono

quindi le quattro identità

$$(17) \quad \sum_k p^k E'_{ik} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Queste ci mostrano in primo luogo che il sistema delle equazioni gravitazionali non è normale (cioè non è risolubile rispetto alle derivate seconde di tutte le g rapporto ad uno stesso argomento χ). Più precisamente anzi, essendo le quattro relazioni (17) indipendenti⁽¹⁾, va ritenuto che il determinante D delle E'_{ik} rispetto alle $\frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial \chi^2}$ (a dieci righe e dieci colonne) ha per caratteristica $10 - 4 = 6$, al più.

Non è difficile dimostrare che per una χ reale generica, più precisamente in corrispondenza a valori reali delle p , che rendono $H \neq 0$ sulla ipersuperficie $\chi = 0$, la detta caratteristica è proprio 6. La dimostrazione si consegue comodamente con qualche accorgimento di calcolo assoluto.

In primo luogo, essendo per ipotesi $H \neq 0$ sulla $\chi = 0$, si può costruire, e rimane, nel campo reale, univocamente determinato a meno del segno, un integrale $f(x^0, x^1, x^2, x^3)$ della equazione alle derivate parziali

$$\Delta f = \sum_{ik} g^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^k} = \frac{H}{|H|} = \pm 1,$$

il quale si annulla sulla $\chi = 0$.

In corrispondenza a tale f , l'equazione $f = \text{cost.}$ definisce una famiglia di ipersuperficie parallele (nella geometria cronotopica). Assumiamole come ipersuperficie coordinate x^a , convenendo di attribuire all'indice a il valore zero se $H > 0$ (sopra $\chi = 0$, nell'intorno che si considera) e il valore 1 se $H < 0$: così si rispetta la consuetudine che l'indice zero sia temporale, e l'indice 1 (al pari di 2 e 3) spaziale, risultando $g^{aa} = e_a$, con $e_0 = 1$ ed $e_i = -1$.

Si possono poi scegliere (e in infiniti modi) le altre tre famiglie di ipersuperficie coordinate x^i ($i \neq a$) ortogonali alle x^a . Ne consegue $g^{ai} = 0$ ($i \neq a$), e quindi complessivamente anche $g_{aa} = e_a$, $g_{ai} = 0$ ($i \neq a$).

Così, delle dieci funzioni g_{jh} , quattro, g_{ai} ($i = 0, 1, 2, 3$), si sono

(1) Per verificarlo materialmente basta notare che una almeno delle p , sia per es. p^0 , è certo diversa da zero. Si considerino allora nelle quattro relazioni (17) i coefficienti di $E'_{00}, E'_{01} = E'_{10}$, $E'_{02} = E'_{20}$, $E'_{03} = E'_{30}$, e il relativo determinante

$$\begin{vmatrix} p^0 & p^1 & p^2 & p^3 \\ 0 & p^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p^0 \end{vmatrix}$$

che si riduce a $(p^0)^4 \neq 0$, e ciò assicura l'indipendenza delle (17) stesse.

potute ridurre a costanti ben determinate. Tenendo conto di tale circostanza, si perviene in modo ovvio a riconoscere che, delle dieci equazioni gravitazionali, sei (quelle i cui indici hanno valori diversi da a) sono risolubili rispetto alle altrettante $\frac{\partial^2 g_{jb}}{\partial (x^a)^2} (j, b \neq a)$; mentre le rimanenti quattro equazioni riescono esenti da derivate seconde e compatibili colle prime sei, costituendone delle relazioni invarianti, le quali implicano in definitiva unicamente condizioni cui devono ottemperare i valori iniziali (cioè per $x^a = 0$) delle funzioni $g_{jb} (j, b \neq a)$ e loro derivate prime.

Con ciò non soltanto rimane acquisito che la caratteristica del determinante D è proprio 6, ma emerge altresì la più precisa conclusione che, per le equazioni gravitazionali, si può risolvere il problema di Cauchy, a partire da $x^a = 0$, cioè dalla originaria $\chi = 0$ (che era una ipersuperficie reale qualunque, sottoposta all'unica restrizione che risulti sopra di essa $H = 0$).

Meccanica (Idromeccanica). — *Azioni dinamiche di correnti circolatorie intorno a una lastra bilatera e intorno a una lastra arcuata.* Nota del Corrisp. U. CISOTTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *L'importanza dei momenti di cerniera nella sicurezza del volo meccanico.* Nota del Corrisp. G. A. CROCCO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astronomia. — *Sui triedri intermediari di riferimento per la dinamica stellare. Criteri di scelta. Nota I* ⁽¹⁾ del Corrisp. V. NOBILE.

In una Memoria recente ⁽²⁾, dopo una discussione che mi sembra esauriente sul valore del concetto di moto proprio quale viene attualmente presentato nei trattati di astronomia e sulla possibilità, generalmente ammessa dai ricercatori dell'epoca presente, di dedurre simultaneamente in base ai soli elementi forniti dalle osservazioni i moti propri anzidetti e le costanti che intervengono nel problema accessorio della rotazione del triedro pel riferimento immediato delle osservazioni (da me chiamato triedro intermediario) sono stato portato a concludere negativamente riguardo a tale possibilità e a mettere in luce la indeterminatezza del problema.

Condotta a questa constatazione e riconosciuta pertanto la necessità di un nuovo postulato meccanicamente semplice e ben definito da sostituire al posto di tutto un sistema di concezioni e ipotesi con cui si è tentato in passato di eludere le difficoltà create da quella indeterminatezza ma che non regge ad una critica rigorosa, ho dato di tale postulato in un primo tempo una espressione semplificata in una nota preliminare molto schematica ⁽³⁾ e quindi nella memoria più completa innanzi citata, la forma corrispondente ad una ipotesi più larga, con cui si attribuisce al potenziale galattico un gradiente non nullo, ossia si prevede l'esistenza di gravitazioni stellari con effetto non del tutto inaccessibile alle misure dell'epoca attuale.

Detta O la posizione dell'osservatore, supposto collocato nel centro di massa del sistema solare, T un triedro intermediario con la origine in O , Ω la rotazione assoluta di T , s la direzione di una stella S (ossia il versore di $S-O$) e infine Ω' , s' , s'' i vettori ottenuti da Ω e s con derivazioni rispetto al tempo, (derivando con riferimento a T) si perviene, come ho dimostrato nella Nota più ampia, ad una relazione perfettamente rigorosa tra Ω , Ω' , s , s' , s'' , che sussiste per ogni stella S . Tale equazione, da me scritta in forma assoluta (vettoriale) dà luogo per ciascuna stella ad una equazione di terzo grado tra nove incognite, cioè p' , q' , r ; p' , q' , r' e tre costanti λ_0 , μ_0 , ν_0 relative alla supposta azione galattica, le quali ultime possono essere, in un primo tempo, trascurate. Le prime sei sono così numericamente determinabili in ogni istante, *indipendentemente dalla teoria della rotazione*

(1) Presentata nella seduta del 15 dicembre 1929.

(2) *Postulati fondamentali e sistemi di riferimento per la dinamica dell'ammasso galattico*. (« Memorie della Società Astronomica italiana ». Nuova serie, vol. IV, fasc. II).

(3) *Sulla possibilità di un assetto rigorosamente razionale dei fondamenti dell'astronomia stellare di posizione*. (« Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei »; vol. XXXIII, 2° sem., fasc. 11°).

di T , quando l'osservatore sia in grado di misurare per ogni tempo t le componenti di s, s', s'' rispetto a T , ossia i coseni direttori di $S-O$ e le loro derivate prime e seconde. L'equazione predetta è, in forma concisa, la seguente:

$$(\beta s + 2 \Omega \wedge s' + s'') \wedge (\Omega \wedge s + s') \times s = \alpha s \wedge (\Omega \wedge s + s') \times s;$$

in essa β rappresenta l'operatore (omografia vettoriale)

$$H(\Omega, \Omega) = \Omega^2 + \Omega' \wedge$$

essendo:

$$H(\Omega, \Omega)s = \Omega \times s \cdot \Omega,$$

e α è la omografia di accelerazione che, applicata al vettore $S-O$, dà il vettore $S''_{ai} - O''_{ai}$, cioè la differenza fra le accelerazioni assolute della S e del Sole, in dipendenza del postulato ammesso sul potenziale galattico.

A calcoli fatti l'equazione medesima si presenta, nella sua espressione rigorosa, sotto una forma che scriviamo qui vettorialmente, perchè la forma cartesiana sarebbe molto complicata e non può semplificarsi se non col particolarizzare il triedro T , ciò che sarà fatto più innanzi. L'equazione è dunque (cfr. *Postulati, etc.*; p. 24)

$$(2) (\Omega \times s)^3 - \Omega^2 \cdot \Omega \times s + 3(\Omega \wedge s' \times s) \cdot (\Omega \times s) - \Omega \wedge \Omega' \times s - (3s'^2 s + s'') \times \Omega + \Omega' \times s' + s'' \wedge s' \times s = (\alpha s \times s) \cdot (\Omega \times s) - \alpha s \times \Omega + \alpha s \wedge s' \times s.$$

Conosciuta che sia Ω , divengono, come si è già mostrato nella Nota citata, calcolabili i moti proprii stellari, già definiti in senso rigoroso, e inoltre anche le distanze delle stelle.

Premessi questi richiami notiamo ora — e occorre metterlo qui bene in rilievo — che nella trattazione del tutto generale data al problema nel lavoro citato *non si è avuto bisogno di precisare il triedro intermedio mobile* T . Le considerazioni colà fatte valgono pertanto qualunque sia questo triedro ed è quindi, dal punto di vista teorico, lasciata agli operatori per la scelta di esso la più ampia libertà. La condotta dei calcoli e la maniera di utilizzare l'equazione fondamentale (2) che determina la rotazione di T , come anche la natura delle misure da eseguire *dipendono però strettamente dalla scelta fatta*: subentra quindi una questione di convenienza pratica di non poca entità ed è scopo del presente studio il portare un attento esame su questo aspetto del problema del riferimento.

Una prima maniera di scegliere il triedro intermedio T è quella di collegarlo direttamente a determinate stelle. Le osservazioni, organizzate in modo che ne risulti eliminato l'effetto delle aberrazioni annua e diurna e della parallasse annua, possono sempre intendersi riferite ad un triedro avente l'origine coincidente col centro del Sole o, più propriamente, col

centro di massa del sistema solare. In quanto all'orientamento della terna può immaginarsi diretto l'asse Ox verso una stella S_1 , il piano Oxy può farsi coincidere con quello di O , di S_1 e di un'altra stella S_2 e quindi si disporrà l'asse Oy in tale piano perpendicolare a OS_1 e OZ perpendicolare al piano Oxy così definito, assumendo poi i versi positivi di Oy e Oz in modo che la terna risulti destrorsa. I coseni direttori della direzione di una stella qualunque S rispetto a T saranno allora immediatamente calcolabili: α è dato direttamente dalla misura dell'angolo di OS_1 con OS ; risoluto poi il triangolo sferico SS_1S_2 di cui sono misurabili i tre lati (chiamo anche colla lettera S_i il punto d'incontro di OS_i con una qualunque sfera di centro O) risulta individuato l'altro SS_2y di cui si conoscono i due lati SS_2 e S_2y e l'angolo compreso; si determinerà così $\cos Sy$, ossia β . In quanto a γ , cioè $\cos Sz$ esso è dato dalla risoluzione del triangolo sferico SS_1z , di cui sono già noti, in seguito alle operazioni precedenti, i lati SS_1 , S_1z , che è di 90° , e l'angolo che essi comprendono, complementare di quello SS_1S_2 , precedentemente calcolato.

Le variazioni di α, β, γ in funzione di t saranno lentissime, essendo dovute *solo* a spostamenti relativi delle stelle SS_1S_2 e di O . Supposte sviluppate tali quantità in serie procedenti secondo le potenze di t si avrà la relazione:

$$(a) \quad \alpha = \alpha_0 + \alpha'_0 t + \frac{1}{2} \alpha''_0 t^2$$

e due analoghe per β e γ , ciascuna delle quali darà luogo a tante equazioni lineari fra $\alpha_0, \alpha'_0, \alpha''_0$ o $\beta_0, \beta'_0, \beta''_0$ o $\gamma_0, \gamma'_0, \gamma''_0$ quante sono le misure fatte in tempi diversi: risolti quindi i tre sistemi col metodo dei minimi quadrati si avranno i valori più probabili dei tre coseni direttori α, β, γ e delle loro derivate prime e seconde rispetto al tempo t , (per $t=0$). L'equazione (2) d'altra parte può assumere una forma più semplice di quella già scritta, perchè, data la tenuità degli spostamenti relativi delle stelle rispetto alle mutue distanze, l'ordine di grandezza di $p_0, q_0, r_0, p'_0, q'_0, r'_0$ è certo tale da permettere di trascurare i termini non lineari, onde tralasciando pure - almeno in una prima approssimazione - i termini relativi alla presunta azione galattica, l'equazione (2) relativa all'origine dei tempi diventa (in forma cartesiana)

$$(3) \quad (3\alpha s'^2 + s'')_0 p_0 + (3\beta s'^2 + s'')_0 q_0 + (3\gamma s'^2 + \gamma'')_0 r_0 - (p'\alpha' + q'\beta' + r'\gamma')_0 = \Delta_0$$

$$\text{dove } s'^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 \text{ e } \Delta = \begin{vmatrix} \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

Costruite, in base a misure eseguite su numerose stelle, altrettante equazioni del tipo (3) e formate le sei equazioni normali avremo i valori più pro-

babili delle incognite $p_0, q_0, r_0; p'_0, q'_0, r'_0$. Tutto il resto non offre difficoltà alcuna nè richiede altro lavoro se non quello materiale di calcolo che è certo meno grave di quello che gli astronomi sono abituati ad affrontare per altri problemi più particolari. Determinate le p_0, q_0, r_0 e supposte eseguite d'altra parte accurate determinazioni di componenti radiali delle velocità per un gruppo qualunque di stelle, si ottiene immediatamente, seguendo il procedimento già indicato (*Postulati*; pag. 27) la determinazione delle distanze delle stelle medesime e quindi quelle delle velocità relative a T_0 . I moti proprii assoluti, cioè le componenti dei vettori $v_i - v_0$ (corrispondenti sempre all'epoca $t = 0$) ne derivano pure senz'altro applicando le equazioni (4) del lavoro già citato e infine la posizione del triedro intermedio T rispetto a un triedro inerziale (T_0) per un tempo qualunque t diverso dall'origine (ma non troppo lontano) si ottiene dallo sviluppo in serie dei parametri euleriani φ, θ, ψ , come pure è stato già indicato altrove.

Esistono d'altra parte inconvenienti correlativi al vantaggio così ottenuto, consistente nella impostazione rigorosa e sicura del problema? Non potrebbe temersene che uno solo: la difficoltà di ottenere con un adeguato grado di precisione i valori delle derivate seconde $\alpha'', \beta'', \gamma''$ corrispondenti alle singole direzioni stellari. Tali quantità possono ritenersi come piccole del secondo ordine rispetto alle α', β', γ' considerate di primo ordine: infatti, mentre coi vecchi metodi i moti proprii angolari, i quali corrispondono a queste ultime, sono correntemente misurati e con soddisfacente precisione, i valori delle accelerazioni angolari (corrispondenti alle prime) sembrano invece ancora nascosti dagli errori di osservazione. Le equazioni (3) presentano dunque nei secondi membri quantità del terzo ordine, mentre i coefficienti sono del secondo; le une e le altre però — importa bene osservare — sono formate rispettivamente con quantità di ordine *non superiore* al secondo e al primo da dedursi indirettamente *dalle misure*. L'unico elemento di incertezza che potrebbe rimanere riguardo ai valori delle incognite fornite dal sistema delle (3) potrebbe dipendere eventualmente da una notevole entità degli errori coi quali la risoluzione dei sistemi del tipo delle (a) fornirà i valori delle incognite $\alpha'', \beta'', \gamma''$, entità da valutare in rapporto ai valori trovati per le corrispondenti incognite.

Che cosa può dirsi su tale rapporto, *a priori*, cioè senza essere ancora in presenza dei risultati di osservazioni organizzate espressamente per lo scopo in vista?

Per rispondere a tale quesito considereremo qui il caso delle α'' , poichè per le β'', γ'' il problema è sostanzialmente identico, essendo gli errori coi quali dalle misure vengono determinate le β e γ nelle varie epoche dello stesso ordine di grandezza di quelli delle misure di α , sebbene dedotte per via diversa. Chiameremo con φ l'angolo di OS con OS₁, per cui $\cos \varphi = \alpha$; φ sarà misurato, come abbiamo detto, direttamente e sup-

porremo che le misure siano ripetute per 50 anni di seguito. Si avrà allora da ciascuna determinazione di φ (che a sua volta potrà ritenersi risultante dalla media di numerose determinazioni ottenute per via di simultanee osservazioni meridiane di S e S_1 o per via fotografica) ⁽¹⁾ una equazione del tipo

$$(b) \quad \varphi = \varphi_0 + t \varphi'_0 + \frac{1}{2} t^2 \varphi''_0$$

e quindi i valori più probabili per le incognite $\varphi_0, \varphi'_0, \varphi''_0$ si avranno dalla risoluzione del sistema di equazioni normali

$$(c) \quad \begin{cases} 50 \varphi_0 + [t] \varphi'_0 + \frac{1}{2} [t^2] \varphi''_0 = [\varphi] \\ [t] \varphi_0 + [t^2] \varphi'_0 + \frac{1}{2} [t^3] \varphi''_0 = [\varphi t] \\ \frac{1}{2} [t^2] \varphi_0 + \frac{1}{2} [t^3] \varphi'_0 + \frac{1}{4} [t^4] \varphi''_0 = \frac{1}{2} [\varphi t^2] \end{cases}$$

I valori delle α'_0, α''_0 saranno dati poi da:

$$\alpha_0 = \cos \varphi_0, \quad \alpha'_0 = -\varphi'_0 \sin \varphi_0, \quad \alpha''_0 = -\varphi''_0 \sin \varphi_0 - \varphi'^2_0 \cos \varphi_0$$

e il rapporto tra l'errore medio di φ''_0 e il valore di questa incognita sarà evidentemente dello stesso ordine di grandezza di quello analogo per α''_0 , che a noi interessa valutare.

Supponendo le equazioni (b) tutte di egual peso e detto ε l'errore medio di una osservazione di peso unità, a_{rs} l'elemento di posto (r, s) nel determinante D dei coefficienti delle (c), A_{rs} l'aggiunto di a_{rs} e, rispettivamente $P_{0,0}, P_{0,1}, P_{0,2}; \varepsilon_{0,0}, \varepsilon_{0,1}, \varepsilon_{0,2}$ i pesi e gli errori medi dei relativi alle incognite $\varphi_0, \varphi'_0, \varphi''_0$, si ha

$$P_{0,0} = \frac{D}{A_{11}}, \quad P_{0,1} = \frac{D}{A_{22}}, \quad P_{0,2} = \frac{D}{A_{33}}$$

e

$$\varepsilon_{0,0} = \varepsilon \sqrt{\frac{A_{11}}{D}}, \quad \varepsilon_{0,1} = \varepsilon \sqrt{\frac{A_{22}}{D}}, \quad \varepsilon_{0,2} = \varepsilon \sqrt{\frac{A_{33}}{D}}.$$

In quanto all'errore ε la determinazione *a posteriori* di esso richiede la conoscenza dei risultati effettivi delle osservazioni: allora, risolte le

(1) La simultaneità è condizione necessaria nel caso che l'angolo sia desunto indirettamente per mezzo di osservazioni meridiane, trattandosi di eliminare *del tutto* gli effetti di precessione e nutazione, senza dovere applicare alcuna correzione al riguardo. Poichè non escludiamo in modo assoluto che si possa, dopo accurato esame ed eventuale rielaborazione dei calcoli di riduzione, utilizzare anche materiale di osservazione già acquisito.

equazioni e determinati i rispettivi residui v_i si avrebbe per 50 osservazioni:

$$\epsilon = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{47}}.$$

In mancanza di ciò notiamo, per una approssimativa determinazione *a priori* di $\epsilon_{0,0}$, $\epsilon_{0,1}$, $\epsilon_{0,2}$ che tali quantità sono proporzionali rispettivamente ai tre numeri

$$\sqrt{A_{11}}, \quad \sqrt{A_{22}}, \quad \sqrt{A_{33}},$$

i quali sono indipendenti dai risultati delle osservazioni (secondi membri delle (c)), cosicchè basta una valutazione *a priori* di $\epsilon_{0,0}$, cioè dell'errore medio di φ_0 , per ottenere una determinazione soddisfacente di $\epsilon_{0,1}$, $\epsilon_{0,2}$, errori delle φ'_0, φ''_0 .

Ora abbiamo:

$$A_{11} = \frac{1}{4} \{ [t^2][t^4] - [t^3]^2 \}, A_{22} = \frac{1}{4} \{ 50[t^4] - [t^2]^2 \}, A_{33} = 50[t^2] - [t]^2$$

ovvero

$$A_{11} : A_{22} : A_{33} = [t^2][t^4] - [t^3]^2 : 50[t^4] - [t^2]^2 : 4\{50[t^2] - [t]^2\}.$$

Ponendo da parte fattori comuni che appaiono subito applicando, per $n = 50$ le note relazioni

$$[t] = \frac{1}{2} n(n+1), [t^2] = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1), [t^3] = [t]^2, [t^4] = \frac{1}{5} [t^2] \{ 6[t] - 1 \},$$

si trova, a calcoli fatti e con approssimazione fino alla quarta decimale:

$$(d) \quad \frac{\epsilon_{0,1}}{\epsilon_{0,0}} = \sqrt{\frac{A_{22}}{A_{11}}} = 0.0904 \quad ; \quad \frac{\epsilon_{0,2}}{\epsilon_{0,0}} = \sqrt{\frac{A_{33}}{A_{11}}} = 0.0034.$$

Per la valutazione di $\epsilon_{0,0}$ bisognerebbe riferirsi al caso in cui le misure delle distanze angolari φ alle varie epoche, occorrenti per ottenere le $\alpha''_0, \beta''_0, \gamma''_0$ da introdurre nei secondi membri delle (3), siano eseguite direttamente per via fotografica: procedimento che è quello naturalmente appropriato al riferimento esaminato in questa Nota e con cui si esclude del tutto l'elemento *terrestre*. La misura fotografica dei grandi angoli non è ancora attuata nella pratica astronomica, ma è certo imminente l'epoca in cui lo sarà. Supponendo - ipotesi non certo troppo audace - che la media di numerose determinazioni, fotografiche o visuali, di un valore di φ fatte durante un anno e con opportuni procedimenti per la compensazione o correzione di errori sistematici possa ritenersi affetta da un errore non maggiore di $1''$ e che l'error medio $\epsilon_{0,0}$, considerato nei nostri calcoli possa identificarsi con

quello che si avrebbe per la media di 50 di siffatte misure eseguite su di un angolo invariabile, si dedurrebbe

$$\epsilon_{0,0} = \left(\frac{1}{\sqrt{50}} \right)'' = \pm 0''.1414$$

e quindi dalle (d)

$$\epsilon_{0,1} = \pm 0''.0128 \quad ; \quad \epsilon_{0,2} = \pm 0''.0005.$$

Il valore che può attendersi per l'errore medio delle φ'' ricavate col metodo qui esposto è dunque tanto tenue da poterlo ritenere con quasi assoluta certezza molto minore dell'importo delle quantità alle quali esso si riferisce, importo però, quest'ultimo, che solo le osservazioni possono stabilire e precisare, perchè il calcolo di esso richiede la risoluzione effettiva delle (c) e quindi la conoscenza dei secondi membri (risultati delle osservazioni).

Dovrebbe dunque teoricamente esser possibile e facile la determinazione delle φ'' anche coi mezzi strumentali odierni, perchè le considerazioni qui fatte nulla presuppongono su tali mezzi: è ben logico dunque pensare — e trovare in ciò una conferma chiara alle nostre vedute — che, se quelle quantità sono finora sfuggite agli osservatori la causa di ciò sia soprattutto da attribuire alle erronee concezioni sulle quali sono fondati i metodi attuali per lo studio dei moti proprii e alla insufficiente definizione dei sistemi di riferimento. Si vede ad ogni modo che è ben lecito, in base alla approssimativa valutazione qui riportata, confidare che, raggiunto in seguito ad una impostazione rigorosa del problema e a perfezionamenti del resto imminenti o già conseguiti nei metodi di osservazione lo scopo di ottenere le φ'' , l'importo di tali valori sarà con ogni probabilità ben maggiore dell'error medio delle quantità stesse e che pertanto l'applicabilità pratica del metodo in esame possa ritenersi bene assicurata.

Sarà in una Nota successiva esaminato il caso di un triedro intermedio collegato col sistema solare.

Astronomia. — *Sui triedri intermediari di riferimento per la dinamica stellare. Criteri di scelta.* Nota II del Corrisp. V. NOBILE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica (Fisica-tecnica). — *Sistemi di telegrafia e di telefonia per mezzo di fasci di radiazioni infrarosse*. Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. L. ROLLA e di L. MAZZA.

Gli studi sulle comunicazioni e segnalazioni a distanza per mezzo di fasci di radiazioni infrarosse furono da noi iniziati fin dal 1924 e su di essi è stato riferito poco ed in modo necessariamente limitato ⁽²⁾ per l'interesse che essi hanno nelle applicazioni di carattere militare; mentre alcuni elementi su cui essi sono basati furono protetti con brevetti industriali ⁽³⁾. In questa Nota viene esposta quella parte dei nostri studi che ha carattere ed interesse scientifico, senza entrare in quei dettagli che per la loro natura sono stati da noi illustrati in ampie relazioni scritte durante il corso delle ricerche e che si trovano depositate negli archivi militari.

È noto che le trasmissioni dei suoni per mezzo di radiazioni luminose hanno preceduto, in ordine di tempo, quelle « radio » marconiane e che, nonostante l'opera di numerosi fisici quali Bell, Tainter, Semmola, Mercadier, Chaperon, Preece, Cornu ⁽⁴⁾ e, più recentemente, Zickler ⁽⁵⁾, Simon e Reich ⁽⁶⁾, Rühmer ⁽⁷⁾, Miessner, Sella ⁽⁸⁾, Dussaud ⁽⁹⁾, Ancel, si può dire che i vari dispositivi escogitati dai detti autori non hanno quasi varcato le soglie dei laboratori scientifici. Per quanto i dispositivi descritti da Rühmer, Simon e Reich e da Miessner risolvessero assai bene il problema della telefonia ottica utilizzando per la modulazione della luce i dispositivi ad arco parlante del Simon ⁽¹⁰⁾ e del Duddell ⁽¹¹⁾ e per la ricezione la cella fotoelettrica al selenio e fossero stati proposti per l'impiego nei servizi di comunicazione

(1) Pervenuta all'Accademia il 24 settembre 1929.

(2) G. GUASCO, « Riv. d'Artiglieria e Genio », 1925, ottobre, novembre, dicembre; G. GUASCO, « Atti Soc. Progr. Sc. Riun. 1925, pp. 614, 615; L. ROLLA, « Atti Prima Manif. Naz. Ottica », 1927, pp. 187, 199; C. MICHELETTA, « Atti Soc. Ital. Progr. Sc. », 1928, pp. 221, 239; L. ROLLA e L. MAZZA, « Rendiconti Lincei », vol. VIII, 1928, 2° sem., p. 347; C. MICHELETTA, « Riv. d'Artiglieria e Genio », 1929, febbraio.

(3) « Priv. Ind. », 260, 356; 261, 361; 261, 711 del 13 maggio 1927; 260, 360 del 4 febbraio 1928; Dom. 361, 1844 del 22 giugno 1928.

(4) JAMIN, *Cours de Physique*, IV, 4, 1891.

(5) « Elektrotechn. Zeitschr. », 14, 1898.

(6) « Physik. Zeitschr. », p. 278, 1902.

(7) « Drude's Ann. », 5, p. 803, 1901.

(8) « Nuovo cimento », 4° ser., VIII, p. 261, 1898.

(9) « Compt. Rend. », 128, p. 171, 1899.

(10) « Wied. Ann. », 64, 1898. p. 233; « Physik. Zeitschr. », 1901, p. 253; « Elektrotechn. Zeitschr. », 22, 1901, p.

(11) « Electrician », 1900, pp. 269, 310; 1903, p. 902.

segreta militare, pure i detti sistemi, almeno a nostra conoscenza, non hanno avuto applicazione pratica. La ragione di ciò trovasi certamente nella necessità di dovere impiegare sorgenti luminose di grande potenza e nella piccola portata delle comunicazioni.

Le nuove possibilità offerte dalle valvole termoioniche come potente mezzo di amplificazione ed inoltre la realizzazione di alcuni nuovi tipi di rivelatori di radiazioni di notevole efficienza hanno indotto nuovi sperimentatori a riprendere e proseguire questi problemi. Charbonneau ⁽¹⁾, H. Stevens e Larigaldie ⁽²⁾, Wood Case ⁽³⁾, Dershem ⁽⁴⁾, Coblentz ⁽⁵⁾, Bell e Marshall, hanno sperimentato nuovi dispositivi di telecomunicazione segreta mediante radiazioni infrarosse ed ultraviolette, raggiungendo risultati di qualche interesse pratico.

I nostri studi sui sistemi di telegrafia e di telefonia segreta sono stati fin dall'inizio indirizzati nel campo delle radiazioni infrarosse per due ragioni: 1° l'alto coefficiente di trasmissione dell'atmosfera per tali radiazioni anche in caso di nebbia o di pioggia; 2° la difficoltà estrema di individuare le stazioni corrispondenti con semplici mezzi di rivelazione quali quelli fotografici e fluoroscopici sensibilissimi per l'ultravioletto. La prima di tali ragioni è stata per noi addirittura fondamentale.

È noto che la luce trasmessa dall'atmosfera per le varie lunghezze d'onda dello spettro visibile segue la formula esponenziale di Rayleigh e quindi, se ci si limita a considerare il rapporto fra l'intensità della luce diffusa e l'intensità della luce incidente, si trova che esso è inversamente proporzionale a λ^4 . Del resto le esperienze rigorose eseguite da Abbot ⁽⁶⁾ nell'osservatorio del Monte Wilson hanno verificato la validità di questa legge per la trasmissione dell'atmosfera limpida. Poichè, per le ragioni cui sarà accennato in seguito, il campo di radiazioni per noi utile è compreso fra 8.000 e 13.000 Å circa, le considerazioni ora svolte, mancando in questa regione spettrale assorbimenti selettivi notevoli da parte dei componenti ordinari dell'atmosfera (O_2 ; N_2 ; H_2O ; CO_2), debbono valere anche per queste radiazioni. Sulla trasmissione dell'atmosfera in tempo di nebbia o di pioggia le già ricordate esperienze di Charbonneau ed anche quelle di Stevens e Larigaldie ⁽⁷⁾ sulle comunicazioni a distanza e sulla rivelazione di « iceberg » pure in tempo di nebbia ed, almeno in parte, quelle di Baird ⁽⁸⁾

(1) C. MICHELETTA, loc. cit.

(2) « Elektrotechnik u. Maschinenbau », 38, 1920, p. 3.

(3) D. R. P., 132, 341; 10 september 1918; 145, 169; 31 March 1919.

(4) « Phys. Rev. », 1921, 18 (2), p. 324.

(5) « Phys. Rev. », 1920, 15 (2), p. 340.

(6) SCHUSTER, *Theory of Optics*, p. 325.

(7) Loc. cit.

(8) Le esperienze di J. L. Baird sono state iniziate in Inghilterra nel 1926 e si basano sull'impiego di celle fotoelettriche sensibili per le radiazioni infrarosse prossime al visibile. Vedi « Engineering », 19 agosto 1927, p. 247.

sulla visione notturna attraverso la nebbia, hanno dimostrato che le radiazioni infrarosse sono trasmesse, almeno nella maggior parte dei casi, assai bene anche quando manca in modo assoluto la visibilità. Sebbene Charbonneau e Stevens e Larigaldie abbiano adoperato nei loro sistemi come rivelatori speciali coppie termoelettriche che reagiscono non selettivamente, ossia a tutte le radiazioni infrarosse che le colpiscono, pure si deve senz'altro ritenere che le radiazioni utilizzate in detti sistemi erano essenzialmente quelle infrarosse prossime all'estremo rosso. Ciò infatti si deduce dal tipo di sorgente di radiazioni impiegata (arco elettrico oppure lampade ad incandescenza a filamento di tungsteno), dai filtri adottati per eliminare le radiazioni visibili (vetri colorati con ossidi di manganese e rame), dai sistemi diottrici e catottrici utilizzati negli apparecchi trasmettenti e riceventi (vetri d'ottica ordinari). Del resto le nostre esperienze eseguite in grandissimo numero e quasi sistematicamente nelle stagioni invernali 1925, 1926, 1927 hanno confermato pienamente le conoscenze che sin qui si avevano e le nostre aspettative ⁽¹⁾.

Il primo argomento di cui ci siamo occupati in ordine di tempo è stato quello della realizzazione di una cella fotoelettrica avente proprietà spettrofotoelettriche analoghe alla cella « Thalofide » ideata da Case. Le nostre ricerche furono in breve coronate dal successo e già al principio del 1925 si poteva disporre di un'ottima cella per raggi infrarossi la quale, ulteriormente perfezionata, è ora costruita industrialmente in Italia ⁽²⁾. La sensibilità spettrofotoelettrica della nostra cella, a differenza della cella thalofide, è quasi esclusivamente contenuta nel campo di radiazioni infrarosse comprese fra 8.000 e 14.000 Å con un massimo netto a 10.200 Å mentre la cella americana presenta una notevole sensibilità anche nel rosso ed inoltre la sua sensibilità non oltrepassa i 13.000 Å ⁽³⁾. Valendoci come rivelatore di radiazioni della cella da noi realizzata, abbiamo ideato un sistema di telegrafia per mezzo di fasci di radiazioni infrarosse in gran parte originale col quale potemmo fin dal 1925 stabilire delle comunicazioni anche in tempo di nebbia fra località distanti in linea d'aria circa 6 km. (Arcetri-Fiesole), come è già stato riferito altrove ⁽⁴⁾.

In questi primi apparecchi veniva adoperato in trasmissione uno specchio parabolico di vetro argentato di grande apertura e del diametro di 50 cm. e, come sorgente luminosa, una lampada ad arco a carboni alimentata con corrente continua. I filtri impiegati erano di vetro colorato con ossido di manganese e rame. In ricezione, invece, si impiegava un apparecchio diottrico con lenti di 50 cm. di diametro e di 140 cm. di distanza focale il

(1) G. GUASCO, loc. cit.; C. MICHELETTA, loc. cit.

(2) Dalla Soc. An., « Officine Galileo » di Firenze.

(3) L. ROLLA, loc. cit.; L. ROLLA e L. MAZZA, loc. cit.; « Notizie per Laboratori scientifici e industriali a cura delle Officine Galileo », Firenze, XI, n. 56, 1929.

(4) G. GUASCO, loc. cit.

quale serviva a concentrare le radiazioni infrarosse sull'elemento fotosensibile di una cella del tipo da noi ideato. Questi apparecchi pesanti e di grande ingombro, e quindi di efficienza relativamente limitata per scopi pratici, furono poi perfezionati con l'introduzione di nuovi accorgimenti, ideando un nuovo dispositivo di modulazione di grandissima semplicità ed efficienza, studiando un tipo di amplificatore specialmente adatto per magnificare le correnti fotoelettriche del nostro tipo di celle e escogitando una serie di dettagli costruttivi e tecnici sui quali, oltre quello che è stato già detto altrove dai rappresentanti più autorevoli della tecnica militare, ci è impossibile per ragioni di riserbo di riferire. Inoltre furono fatte varie ricerche di carattere generale, quali lo studio sulla trasmissione dei vetri d'ottica nell'infrarosso e sull'assorbimento dei filtri. Questi studi saranno argomento di una prossima Nota in questi « Rendiconti ».

Sono stati da noi realizzati dei nuovi apparecchi di piccolo peso ed ingombro con sorgente luminosa ad incandescenza di piccolissima potenza (75 watt) e di impiego assai pratico, con i quali ci è stato possibile di effettuare delle trasmissioni telegrafiche diurne e notturne fino a distanze di circa 18 km. fra le località Arcetri (Osservatorio Astrofisico) e Monte Senario (Convento).

Con questi nostri apparecchi fu possibile in tempo di nebbia, e nella maggior parte dei casi, di realizzare delle trasmissioni fino a distanze di circa 15 km. fra l'Istituto di Chimica Generale e la detta località Monte Senario (Convento).

Sulla trasmissione dell'atmosfera in tempo di nebbia e di pioggia furono da noi fatte numerosissime esperienze con le quali si è potuto indicare in qual misura si effettui la portata delle comunicazioni nelle varie condizioni atmosferiche in relazione all'intensità dei segnali ricevuti. In base a questi risultati furono compilate delle tabelle basate su elementi essenzialmente statistici; ma su questo argomento dopo quanto è stato comunicato in altre Note⁽¹⁾ non ci sembra opportuno di insistere. Possiamo solo aggiungere che anche in tempo di nebbia intensa con assoluta invisibilità in vicinanza delle due stazioni per oggetti distanti circa 100 metri ed in pieno giorno la trasmissione è stata sempre possibile fino a distanze di circa 10 km.

Dopo avere realizzato un sistema esclusivamente di telegrafia con apparecchi che per le loro caratteristiche possono ritenersi di interesse pratico ai fini speciali cui sono destinati, abbiamo considerato l'opportunità di studiare dei sistemi di telefonia con fasci di radiazioni infrarosse proponendoci in pari tempo di introdurre in essi particolari accorgimenti che consentissero di potere passare immediatamente dalla trasmissione telefonica a quella telegrafica. A questo scopo furono da noi ideati dei nuovi dispositivi che si cominciarono a sperimentare fin dal 1927.

(1) GUASCO e MICHELETTA, loc. cit.

Successivamente nel 1928, dopo esperienze decisive, i particolari originali di questi sistemi furono coperti con privativa industriale⁽¹⁾.

Per la trasmissione abbiamo ideato due tipi di dispositivi uno dei quali deriva in gran parte dai già ricordati dispositivi di Simon e di Duddel, mentre l'altro, esclusivamente elettromeccanico, è del tutto originale.

Per quanto si riferisce al primo di tali dispositivi, scartato l'arco elettrico ordinario, perchè povero di radiazioni infrarosse modulabili agendo sulla corrente di alimentazione, e quello a mercurio il quale, nonostante emetta due intense radiazioni monocromatiche di $\lambda = 1.0140$ e $\lambda = 1.1287$ rispettivamente, pure, in relazione al campo spettrale di sensibilità della cella deve considerarsi povero di radiazioni infrarosse utili ai nostri scopi, abbiamo pensato di rivolgersi agli archi a fiamma per i quali è noto che la ripartizione dell'energia spettrale può superare nella fiamma anche il 60 % dell'energia totale irradiata. Gli archi a fiamma realizzano inoltre una condizione indispensabile per ottenere una grande efficienza in trasmissione con apparecchi piccoli e di potenza limitata; cioè lo splendore intrinseco elevatissimo che, sebbene minore di quello dei crateri, pure è di gran lunga superiore a quello degli archi a mercurio a pressione spinta. Però gli archi a fiamma fin qui conosciuti e studiati soprattutto per ottenere un grande rendimento luminoso nello spettro visibile - condizione questa che normalmente non si concilia con un'alta distribuzione energetica nell'infrarosso - non erano, come abbiamo potuto verificare in varie esperienze, sufficientemente ricchi di infrarosso.

Dopo varie esperienze si è potuto raggiungere lo scopo facendo avvenire l'arco fra carboni forati e riempiti con miscele di alogenuri (principalmente fluoruri) ed ossidi dei metalli alcalini ed alcalino-terrosi scelti fra quelli il cui spettro d'arco è ricco di radiazioni infrarosse nel campo spettrale compreso fra le $\lambda = 8000$ e $\lambda = 14.000 \text{ \AA}$ e compatibilmente col più basso potenziale di ionizzazione. In questo modo abbiamo potuto ottenere una sorgente luminosa ricca di radiazioni infrarosse nel campo per noi utile e delle quali una parte notevole è facilmente modulabile, perchè appartiene alla parte gassosa ed altamente ionizzata dell'arco. Inoltre gli archi di questo tipo possono essere modulati fino a valori assai elevati, senza che da ciò derivi una interruzione nel funzionamento. Alimentando l'arco con 2.5 ampère è ancora possibile agire su di esso con correnti di modulazione (fonica) di 1.7 ampère eff. Rigorose esperienze eseguite alimentando l'arco con corrente continua mediante una batteria di accumulatori di grande capacità e modulandolo con corrente alternata generata da un alternatore a frequenza acustica (540 per.) si è potuto stabilire che l'interruzione brusca dell'arco si verifica soltanto quando il valore efficace della corrente di modulazione supera il 75 % della corrente di alimentazione. Esperienze com-

(1) « Priv. Ind. », 361, 1844.

parative eseguite nelle medesime condizioni con archi a mercurio con ampolla di quarzo (a regime spinto) hanno mostrato che in questo caso il valore efficace della corrente di modulazione non può oltrepassare il 35 % della corrente di alimentazione. Per verificare se alla modulazione profonda della corrente che agisce sull'arco corrispondesse una profonda modulazione della luce emessa dall'arco stesso, furono eseguite delle registrazioni fotografiche su film (film sonoro). I risultati ottenuti che corrispondono a suoni vocalici ed alcune microfotometrie su di essi eseguite mediante un microfotometro registratore termoelettrico sono in perfetto accordo con i dati sopra riportati.

I circuiti di modulazione sono, in parte, analoghi a quelli già applicati dai vari autori ricordati; soltanto nei nostri circuiti modificati sono introdotti vari accorgimenti atti a rendere più stabile e tranquillo l'arco ed inoltre la corrente di modulazione è ottenuta amplificando con valvole termoioniche la corrente microfonica: su questi particolari, essenzialmente applicativi, non ci sembra opportuno di riferire.

L'apparecchio trasmittente nei nostri sistemi di telecomunicazioni con arco a fiamma si compone, inoltre, di un piccolo specchio parabolico (diametro 18 cm.) di grande apertura, di filtri (per eliminare le radiazioni visibili) di tipo opportuno per le trasmissioni diurne e per quelle notturne e di uno speciale vibratore elettromagnetico collegato a un manipolatore Morse per la trasmissione telegrafica.

L'apparecchio ricevente non differisce da quelli già da noi studiati per il sistema di sola telegrafia, ad eccezione di piccoli ritocchi apportati nell'amplificatore termoionico delle correnti fotoelettriche.

I risultati ottenuti mediante gli apparecchi di cui abbiamo ora detto sono stati assai notevoli. Con archi alimentati con circa 100 watt, considerando, cioè, la sola potenza spesa per la sorgente luminosa (40 volta - 2.5 ampère), si sono potute effettuare delle comunicazioni telefoniche con ricezione assai intensa a distanze superiori a 6 km. La chiarezza della riproduzione dei suoni è in generale sufficiente; solo talvolta quando l'arco, per difetto di regolazione o per qualche anomalia negli elettrodi, perde la sua stabilità, la trasmissione della parola appare un po' confusa. Ulteriori studi in corso tendono ad ovviare a questo inconveniente e ad aumentare l'efficienza di questo sistema, che potrà essere suscettibile di applicazione in qualche caso particolare, per es., nelle comunicazioni fra navi, potendosi utilizzare i comuni proiettori navali, che, rimanendo sostanzialmente immutati, potrebbero corrispondere all'uno e all'altro scopo.

Per la trasmissione, come si è già detto, si è ideato inoltre un dispositivo in cui la modulazione è indiretta e si presta, perciò, ad essere applicato con qualsiasi tipo di sorgente luminosa. Questo dispositivo, che è completamente elettromeccanico, è formato da ⁽¹⁾ « due lamine sottili di

(1) « Priv. Ind. », 361, 1844.

mica o di altro adatto materiale trasparente, le quali portano incise e riprodotte con speciale processo fotomeccanico, od analogo, delle righe equidistanti l'una dall'altra, ed in tal modo che la larghezza delle singole righe uguagli la distanza che intercede fra l'una e l'altra. Le righe sono riempite o colorate con una vernice appropriata in modo da intercettare il passaggio dei raggi infrarossi attraverso di esse. Una di queste lamine è fissa mentre l'altra (mobile) trovasi in un piano parallelo e a brevissima distanza da questa». La lamina mobile è rigidamente congiunta all'armatura di uno speciale ricevitore telefonico equilibrato (di tipo elettromagnetico): ottimi risultati si ottengono anche adoperando ricevitori a rocchetto mobile (così detti elettrodinamici). Quando sul ricevitore agisce la corrente modulata lamina mobile, data la sua piccolissima inerzia, è costretta a vibrare modulando le radiazioni che attraversano il sistema delle due lamine.

La sorgente luminosa che abbiamo prescelta in questo caso è la stessa già adoperata nei trasmettitori telegrafici di cui si è già detto in precedenza, e cioè ad incandescenza con filamento di tungsteno ad alto splendore intrinseco. In luogo dello specchio parabolico, si è impiegato, in questo caso, un sistema diottrico di proiezione con lenti di piccolo diametro (20 cm.) e di grande apertura ($f/4$) essendo questo più adatto allo scopo in dipendenza delle dimensioni necessariamente piccole del modulatore.

I risultati ottenuti con questo secondo sistema di trasmissione, valutati complessivamente, sono inferiori a quelli ottenuti col sistema ad arco a fiamma: ciò dipende principalmente dalla minore efficienza del sistema di proiezione, dalla difficoltà di regolazione della reciproca posizione delle lamine rigate, data la distanza, necessariamente piccola, che intercede fra le righe (circa 0.1 mm.), dalla necessità di limitare la potenza della sorgente luminosa per evitare la deformazione delle lamine a causa di un eccessivo riscaldamento.

*
* *

I sistemi di comunicazioni telegrafiche e telefoniche mediante fasci di radiazioni infrarosse da noi studiati realizzano in gran parte le condizioni che si richiedono nelle telecomunicazioni segrete.

L'impiego delle radiazioni invisibili della prima ottava infrarossa comprese fra 0.8 e 1.4μ rappresenta, allo stato attuale delle conoscenze, il mezzo più idoneo, e forse l'unico, per effettuare comunicazioni telegrafiche e telefoniche in qualsiasi condizione atmosferica, anche quando manchi in modo assoluto la visibilità a causa di nebbia o pioggia intensa.

Le seguenti fondamentali considerazioni impongono l'impiego delle radiazioni da noi prescelte e non consentono di ricorrere a radiazioni infrarosse di maggiore lunghezza d'onda:

1° La trasmissione dell'atmosfera è in questo campo spettrale notevolissima. La presenza dell'acqua e dell'anidride carbonica nell'atmosfera limita in gran parte la propagazione delle radiazioni di λ superiore a 1.3μ . L'assorbimento dell'acqua e dell'anidride carbonica si estende, in modo quasi continuo, con un succedersi complesso di bande, quasi sempre intensissime in tutta la regione spettrale fra 1.3 e 40μ .

2° L'impiego di sorgenti luminose quali l'arco elettrico e le lampade a filamento di tungsteno che riuniscono l'alto splendore intrinseco - elemento questo indispensabile per ottenere efficienti sistemi ottici di proiezione - e l'altra vantaggiosissima condizione che il massimo delle curve di distribuzione dell'energia spettrale cade nel campo suddetto di radiazioni.

3° L'impiego vantaggioso di celle fotoelettriche (come la cella « ROMA » da noi studiata) che hanno una sensibilità selettiva notevolissima fra 0.8 e 1.4μ , mentre per radiazioni di λ maggiore non sarebbe possibile, finora, ricorrere che a rivelatori termici (coppie termoelettriche, bolometri, rivelatori radiofonici) poco adatti allo scopo.

4° La buona trasmissione della maggior parte dei vetri d'ottica per radiazioni infrarosse fino a circa 2.5μ , mentre al di sopra di tale λ essi cominciano ad essere opachi in modo notevolissimo.

5° La difficoltà nella scelta di filtri adatti allo scopo per radiazioni di lunghezza superiore a 2.5μ .

Chimica. — *Le reazioni fra composti ferrosi ed ossido d'azoto.* Nota del Corrisp. L. CAMBI e A. CAGNASSO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Patologia. — *Sopra alcune cause che possono indebolire o distruggere il potere immunizzante del nostro vaccino anticanceroso fenolato* ⁽¹⁾. Nota preventiva ⁽²⁾ del Socio G. TIZZONI e di G. DE ANGELIS.

In una recente comunicazione preventiva ⁽³⁾ noi abbiamo dimostrato che il topino al quale è stato iniettato sotto la pelle poltiglia fenolata preparata dall'adeno-carcinoma di Ehrlich, acquista un'elevata immunità contro lo stesso tumore, tanto da resistere alla iniezione successiva della poltiglia virulenta; con questo affermando un principio sperimentale di grande importanza, *quello della possibilità di immunizzare gli animali contro tumori cancerosi a mezzo di un vaccino opportunamente preparato*, anche per le utili applicazioni pratiche che possono derivarne. Ma per apprezzare più giustamente la portata dei risultati in tal modo ottenuti, è altresì opportuno rilevare, oltre le condizioni che tali risultati favoriscono, anche quelle che alla loro volta indeboliscono o totalmente distruggono gli effetti immunitari di cui il vaccino fenolato è capace.

E per primo ci è sembrato che avesse grande importanza sapere se e quali conseguenze ne derivassero quando, invece di usare poltiglia cancerosa riconosciuta batteriologicamente sterile, si adoprassero vaccino preparato con materiale impuro; cosa non difficile a verificarsi, sia per la natura della poltiglia che si usa, molto ricca di sostanze organiche, sia per le delicate manipolazioni che sono necessarie ai fini della sua preparazione. E noi appunto abbiamo approfittato di quei casi in cui la poltiglia cancerosa era casualmente risultata impura, sia quella della iniezione vaccinante, sia quella della iniezione di prova, o quella dell'una o dell'altra iniezione insieme, scegliendo esclusivamente per le accennate ricerche le esperienze in cui l'impurità si limitava a dare nel topino solo fatti locali di un certo rilievo, senza peraltro determinare la morte dell'animale; una impurità, insomma, che avesse una manifesta azione patogena nel topino, ma in forma del tutto localizzata, senza mai ucciderlo, in modo da sottrarlo ad osservazioni di lunga durata. Questa condizione la trovammo in una infezione accidentale del topino, proveniente con tutta probabilità dall'ambiente esterno, forse dalla stessa paglia della lettiera, con inquinamento della pelle e dei peli, ma senza reazione alcuna della parte fino a che la cute è integra; invece con reazione costante, più o meno grave, quando la pelle viene lesa ed il detto

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Patologia Generale della R. Università di Bologna.

(2) Presentata nella seduta del 5 gennaio 1930.

(3) TIZZONI e DE ANGELIS, *Ancora sulla immunità contro il cancro conferita agli animali con autovaccino fenolato*. II^a Nota preventiva « Annali d'Igiene », anno XXXIX, n.° 12, dicembre 1929.

inquinamento può arrivare alle sue parti più profonde o raggiungere insieme il connettivo sottocutaneo determinando lesioni localizzate a tipo necrotico.

Il germe che in questi casi si poteva coltivare dalla poltiglia usata per l'innesto o dalle lesioni che ne derivavano era sempre lo stesso, e di solito allo stato di purezza. Tale germe si presentava come un cocco piccolissimo disposto ad aggruppamenti tipo stafilococcico, coltivabile in brodo ordinario con produzione di un intorbidamento uniforme, biancastro, che lentamente sedimentava, colorabile facilmente coi comuni colori di anilina; così pure coltivabile sull'agar dove formava colonie minutissime bianco-grigiastre, quasi trasparenti, come piccoli punti rotondi; costantemente ha resistito alla colorazione col metodo di Gram.

Noi poi non ci siamo fermati a rilevare tutte le particolarità caratteristiche di questo germe il quale, più che dal lato batteriologico, ci interessava per la sua azione patogena e per le conseguenze che questa poteva avere sul potere immunizzante del vaccino.

La lesione che esso germe determinava sulla parte iniettata, tanto se l'iniezione riguardasse il vaccino, quanto si riferisse alla poltiglia virulenta, si distingueva in due forme; una forma leggera ed una forma grave; distinzione questa che deve essere mantenuta anche per gli effetti differenti che l'inquinamento in questione produceva sulla poltiglia cancerosa, specie in quella poltiglia cancerosa trasformata in vaccino a mezzo del fenolo.

I sintomi coi quali tale lesione esordiva 2-3 giorni dopo la praticata iniezione erano sempre gli stessi; consistevano, cioè, in ambedue le forme, nella perdita mobilità della pelle, la quale, in corrispondenza della parte iniettata era divenuta fortemente aderente ai tessuti sottostanti; in pari tempo il pelo presentava minor lucentezza e qua e là appariva visibilmente diradato. Nelle forme leggere, a questa manifestazione iniziale seguiva la presenza di crosticine in corrispondenza del foro praticato dall'ago e nelle sue parti circostanti; crosticine che talora cadevano lasciando allo scoperto una piccola soluzione di continuo superficiale a carattere benigno, che presto andava a guarigione. Eventualmente si potevano notare in questa forma, casi di leggera e transitoria infiltrazione pastosa del connettivo sottocutaneo, oppure uno o più nodolini duri, grossi come grani di miglio, che presto si rammollivano e sparivano.

Invece nelle forme gravi, alla primitiva aderenza della pelle, che in questi casi era più estesa e più tenace, seguiva la formazione di una o più escare, corrispondenti tutte o quasi tutte alla parte indurita della pelle, che appariva priva di peli, di colore grigiastro e di consistenza coriacea. Queste escare cominciavano a distaccarsi dopo 5-10 giorni circa dall'inizio della lesione, lasciando dietro a sé una soluzione di continuo variamente ampia, ma sempre assai maggiore di quelle delle forme leggere; soluzione che presto si rivestiva di granulazioni di buona natura le quali, dopo 20-30 giorni conducevano alla sua riparazione. In alcuni casi poi si verificava il fatto

abbastanza strano, simile a quello che si osserva frequentemente nella pelle del topo dopo le lesioni determinate dal radio, quello cioè della rinascita sulla pelle rigenerata di peli disposti a ciuffi, ma assai più radi di quelli della pelle circostante normale; questo specialmente sugli animali nei quali l'esperimento veniva seguito per lungo tempo. Naturalmente se la lesione prodotta dalla impurità interessava l'iniezione vaccinante, si attendeva che le alterazioni sopra indicate fossero completamente guarite, od in periodo di avanzata cicatrizzazione prima di passare alla iniezione di prova; che in questi casi si aveva cura di praticare sempre in una parte del corpo quanto più possibile distante da quella in cui era stata fatta l'iniezione vaccinante.

Quanto ai tumori che si sviluppano dopo l'iniezione virulenta praticata con materiale impuro essi presentavano, in generale, tutte le caratteristiche dei tumori che si osservano nei controlli dopo l'iniezione di poltiglia riconosciuta batteriologicamente pura; con la sola differenza che il loro sviluppo, nei casi nei quali aveva preceduto la formazione ed il distacco di escare, avveniva sui bordi o nelle vicinanze delle rispettive soluzioni di continuo, e con differenze anche nel loro andamento, nella loro evoluzione che erano sempre più lenti di quelli che si riscontrano sugli animali normali non vaccinati o quale effetto della precedente vaccinazione quando il vaccino non aveva conservato le sue proprietà immunizzanti.

La distanza fra le due iniezioni praticate sul topino negli esperimenti che riguardano il presente lavoro, fu di un minimo di 17 giorni e di un massimo di 35, con una media di 25 giorni.

Le nostre ricerche comprendono 34 esperimenti divisi in 7 gruppi. Per meglio comprendere le condizioni in cui furono fatti gli esperimenti ed i risultati che se ne ricavarono, abbiamo creduto opportuno di riunire i fatti più salienti di tali esperimenti nella seguente tabella:

Reparti- zione in gruppi	Azione del fenolo ore	Numero degli espe- rimenti	Inquinamento della poltiglia		Risultato numerico			Risultato proporzionale	
			Vaccin.	Virul.	negat.	incompl.	compl.	negat.	posit.
N. 1	48	7	grave	o	7	0	0	100 %	0 %
» 2	48	5	leggero	o	0	1	4	0 %	100 %
» 3	72	5	o	leggero	2	0	3	40 %	60 %
» 4	72	3	leggero	o	0	0	3	0 %	100 %
» 5	48	4	grave	grave	4	0	0	100 %	0 %
» 6	72	6	leggero	o	0	2	4	33.3 %	66.6 %
» 7	48	4	o	o	0	2	2	0 %	100 %

Da questa tabella si vede come i 7 gruppi di esperimenti comprendono da 3 a 7 animali ciascuno; come il tempo in cui il fenolo esercitò la sua azione sulla poltiglia cancerosa fu in 4 gruppi di 48 ore, negli altri 3 di 72 ore; come in due gruppi solamente l'inquinamento della poltiglia dette una lesione locale grave, negli altri cinque si ebbe invece una lesione leggera, che in 3 gruppi interessava l'iniezione vaccinante ed in 1 solo l'iniezione di prova, la quale nel maggior numero dei casi risultò fatta con poltiglia batteriologicamente pura, come è indicata nella tabella medesima con la cifra 0; finalmente in uno dei gruppi, il 7°, fu usato materiale puro nelle due iniezioni e si produce esclusivamente per un confronto dei risultati ottenuti fra questo e gli altri gruppi di esperimenti in cui la poltiglia adoprata risultò impura in una sola od in ambedue le iniezioni.

Riguardo alla virulenza della poltiglia usata nelle iniezioni di prova, essa era sempre controllata per i singoli gruppi di esperimento, adoprando nei controlli lo stesso numero di animali, ed anche un numero maggiore di quelli nei quali era stato sperimentato il vaccino e sempre con lo stesso risultato, cioè di avere nei controlli una mortalità per tumore del 100 % e la morte degli animali nel termine medio di 30 giorni.

Passando ai risultati ottenuti con questi esperimenti, noi dobbiamo distinguere quelli nei quali l'inquinamento della poltiglia con germi estranei aveva dato una forma di lesione locale grave, da quelli in cui si era avuta la stessa lesione ma in forma assai più leggera; e ciò, come già dicemmo, non tanto per le differenze della lesione in sè, quanto per gli effetti da esso inquinamento esercitati sulla poltiglia cancerosa, rispettivamente sulla attività del virus e del vaccino.

A tale riguardo, i due gruppi di esperimenti 1° e 5°, parlano abbastanza chiaro provando che il vaccino perde, per effetto del ricordato inquinamento, ogni sua attività in modo da dare nel 100 % degli esperimenti in cui fu usato risultati sempre negativi.

E che gli effetti di questo inquinamento dipendano veramente dal vaccino lo dimostra il fatto che lo stesso identico risultato si ottenne, tanto nel caso nel quale il solo vaccino era inquinato e da questo inquinamento ne erano conseguite lesioni locali gravi (1° gruppo), quanto nel caso in cui lo stesso inquinamento con le medesime conseguenze erasi verificato, sia nella iniezione vaccinante, sia nella iniezione di prova (5° gruppo).

I risultati negativi concordemente ottenuti in questi due gruppi di esperimenti, 1° e 5°, ci dicono che il mancato effetto immunizzante dell'autovaccino fenolato contro l'adeno-carcinoma di Ehrlich, nei casi d'inquinamento della poltiglia e della conseguente lesione locale grave, deriva da alterazione del vaccino, osservandosi tale risultato anche quando l'iniezione di prova fu fatta con poltiglia batteriologicamente pura (1° gruppo). In altre parole, di fronte all'inquinamento della poltiglia cancerosa con germi comuni, incapaci di uccidere l'animale al quale sono stati iniettati, la sostanza

immunizzante del vaccino si dimostra meno resistente del corrispondente virus, che conserva tutta la sua attività, mentre l'altro perde intieramente il suo potere immunizzante.

Si esclude poi che i risultati ottenuti col vaccino impuro derivino da ragioni puramente meccaniche per la eliminazione insieme all'escara dello stesso vaccino precedentemente iniettato; in primo luogo perchè la formazione ed il distacco dell'escara richiedono qualche giorno per verificarsi, quando il vaccino dev'essere in buona parte assorbito, in secondo luogo perchè non vi sarebbe ragione alcuna che la stessa eliminazione, ammessa per il vaccino, non avesse ad avvenire anche per il virus impuro, egualmente inquinato, con l'annullamento di ogni suo potere patogeno; ciò che invece non è.

Riguardo agli altri 5 gruppi di esperimenti, di cui 3 ebbero lesione locale a forma leggera per inquinamento del vaccino, un 4° presentò la stessa lesione per inquinamento della iniezione virulenta, e finalmente un 5° fu trattato nelle due iniezioni con poltiglia batteriologicamente pura, si ebbero i seguenti risultati.

Numero complessivo degli esperimenti 23, nei quali si contarono:

Risultati negativi	N.°	2
» incompleti	»	5
» completi	»	16

Richiamiamo quanto fu detto in proposito in una precedente comunicazione in altra parte citata, cioè che per *risultato negativo* noi intendiamo quello in cui la evoluzione del tumore e la morte dell'animale avvengono nel modo del tutto identico a quello dei controlli; *risultato incompleto* intendesi quello nel quale l'evoluzione del tumore è rallentata e corrispondentemente ritardata la morte dell'animale; finalmente *risultato completo* quando manca in modo definitivo lo sviluppo del tumore.

I due animali che dettero risultato negativo presentarono tumore con evoluzione normale e morirono dopo 25-33 giorni dalla iniezione di prova, cioè in un termine pressochè uguale a quello dei controlli.

I 5 topini in cui si ebbe risultato incompleto presentarono tumore ad evoluzione rallentata e morirono con ritardo sui controlli; cioè dopo 50-63-66-67-70 giorni dalla iniezione di prova.

Dei 16 animali nei quali si ebbe risultato completo, in cui mancò in modo definitivo ed assoluto il tumore, 13 morirono con ritardo, dopo 38-78-80-80-81-84-93-94-100-102-106-110-183 giorni dalla iniezione di prova, e solamente tre sopravvissero.

Per quelli di questa serie che morirono in 2° tempo valgono le considerazioni fatte nella precedente comunicazione.

Sé ora confrontiamo questi risultati con quelli precedentemente riferiti in cui era stata sempre usata poltiglia riconosciuta batteriologicamente pura, abbiamo:

<i>Poltiglia cancerosa pura</i>		<i>Poltiglia cancerosa inquinata</i>	
Risultati negativi	1 : 26 = 3,8 %	2 : 23 = 8,6 %	
» incompleti	5 : 26 = 19,2 %	5 : 23 = 21,7 %	
» completi	20 : 26 = 76,9 %	16 : 23 = 69,5 %	

Per cui nella seconda serie di esperimenti nei quali fu usata poltiglia impura, per quanto la lesione locale fosse sempre leggera, si ebbero risultati sensibilmente peggiori di quelli della prima serie, ottenuti con materiale puro. Infatti nella serie impura si vide cresciuta, di fronte alla serie pura, la proporzione dei casi con risultato negativo e dei casi con risultato incompleto, mentre la proporzione dei casi con risultato completo, dal 76,9 % degli esperimenti in cui fu costantemente adoprato materiale batteriologicamente puro scese al 69,5 % degli ultimi, trattati ordinariamente con poltiglia impura, con una diminuzione del 7 % circa.

Tale differenza si fa poi anche maggiormente sentire sulla sopravvivenza degli animali in cui mancò definitivamente lo sviluppo del tumore. Infatti nelle precedenti ricerche con materiale puro si ha che sopra 20 topini, 7 certamente sopravvissero, ossia il 35 %; nelle presenti ricerche si trovano solo 3 sopravvissuti sopra 16, cioè circa il 18 %, vale a dire quasi la metà di quelli delle precedenti ricerche.

I risultati da noi conseguiti ci permettono quindi di trarre le seguenti

CONCLUSIONI.

1.° — Che l'inquinamento della poltiglia di adeno-carcinoma (Ehrlich), anche se costituito da batteri comuni, modifica sensibilmente l'attività del rispettivo vaccino fenolato, annullandone gli effetti immunizzanti nei casi in cui tale inquinamento determina gravi lesioni necrotiche locali, limitandosi invece ad indebolirne il potere immunizzante se lo stesso inquinamento causò alla parte iniettata solo forme distruttive leggere; offrendo così una conferma dei risultati riferiti in una precedente comunicazione sulla immunità vaccinale ottenuta negli animali contro il cancro.

2.° — Che lo stesso inquinamento per contro non ha alcun effetto sull'attecchimento e sulla potenza della medesima poltiglia cancerosa virulenta, che dimostra perciò, di contro al germe in questione, una resistenza assai maggiore di quella del vaccino.

3.° — Che la diminuzione o la totale abolizione del potere immunizzante del vaccino causate da inquinamento con batteri comuni non può riferirsi a semplice fatto meccanico dovuto alla eliminazione della poltiglia vaccinante

iniettata, per opera delle lesioni necrotiche locali, ma deve essere attribuito alle modificazioni che tale impurità determina sulla poltiglia cancerosa.

4.° — Che i risultati da noi ottenuti debbono essere tenuti sempre presenti, specialmente quando il vaccino sia preparato in servizio della pratica, per la quale è assolutamente necessario che esso sia batteriologicamente puro; e non solo perchè gli inquinamenti batterici costituiscono un pericolo d'infezione, ma anche perchè possono distruggere i buoni effetti della vaccinazione, menomando od annullando il potere immunizzante di cui è capace il vaccino anticanceroso.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Interpretazione proiettiva di alcune equazioni differenziali ordinarie del 2° ordine.* Nota di E. BOMPIANI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. In alcune Note pubblicate in questi « Rendiconti » ⁽²⁾ e in una Memoria che si sta stampando negli « Annali di matematica » ⁽³⁾ ho dato l'interpretazione proiettiva di alcuni tipi di equazioni differenziali $v'' = F(u, v, v')$ sopra una superficie σ di S_3 sulla quale siano distese le variabili u, v .

Aggiungo qui alcuni nuovi risultati nello stesso ordine d'idee ⁽⁴⁾.

2. Ricordo ⁽⁵⁾ che data una curva C di σ ed un suo punto P si possono definire due *quadriche asintotiche osculatrici* dipendenti dall'intorno del 2° ordine, E_2 , di P su C ; sono le quadriche individuate da tre tangenti asintotiche dell'uno o dell'altro sistema contenenti P e due punti infinitamente vicini su C .

(1) Nella seduta del 5 gennaio 1930.

(2) *La geometria delle superficie considerate nello spazio rigato*, e *Ancora sulla geometria*, ecc., « Rend. Acc. Lincei », serie 6ª, vol. III, 1926.

(3) *Significato proiettivo di alcuni tipi di equazioni differenziali del 2° ordine*, comparirà nel 1930.

(4) Ho esposto questi risultati nella seduta del 14 dicembre 1929 del Seminario Matematico della R. Università di Roma. Per altri risultati negli iperspazi vedansi, oltre le Note citate dei Lincei, le altre: *Sulla corrispondenza puntuale fra due superficie a punti piani*, « Bollett. Unione Matem. Ital. », vol. IV, 1925; *L'intorno del 2° ordine e i sistemi pluriassiali di una superficie qualsiasi*, « Memorie Accad. di Bologna », s. VIII, t. IV, 1926-27; *Alcune idee generali per lo studio differenziale delle varietà*, « Rend. Acc. Lincei », serie 6ª, vol. V, 1927.

(5) Vedansi i lavori citati e, particolarmente per le posizioni che seguono, l'altra Nota: *Ein Analogon der Quadrik von Lie in der projektiven Flächentheorie*, « Mathem. Zeitschrift », Bd. 29, Heft 5, 1929.

Se $dv = 0$, $du = 0$ rappresentano le asintotiche (distinte e non rettilinee) di σ ed $x^i(u, v)$ sono coordinate proiettive omogenee dei suoi punti si ha necessariamente

$$x_{uu} = \theta_u x_u + \beta x_v + nx \quad ; \quad x_{vv} + \theta_v x_v + \gamma x_u + vx$$

e sono invarianti per applicabilità proiettive le forme elementari ⁽¹⁾ $\beta du^2/dv$, $\gamma dv^2/du$. Con la normalizzazione di Fubini delle x^i (che qui adottato per quanto non sia necessaria) si ha $\theta = \log \beta\gamma$.

Posto in P

$$\alpha_1 = |X, x, x_u, x_{uv}| \quad , \quad \alpha_2 = |X, x, x_v, x_{uv}| \quad , \quad \alpha_3 = |X, x, x_u, x_v| \quad , \\ \alpha_4 = |X, x_u, x_v, x_{uv}|$$

$\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ rappresenta la tangente asintotica u ($dv = 0$), $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ l'altra tangente asintotica, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ la normale proiettiva in P.

Si ponga inoltre

$$\varphi_2 = 2\beta\gamma du dv \quad , \quad \psi_1 = \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} \quad , \quad \psi_2 = \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} \quad , \\ \delta^2 u = d^2 u + \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u} dv^2 \quad , \quad \delta^2 v = d^2 v + \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v} du^2 \quad , \quad H = -\left(\frac{\partial^2 \log \beta\gamma}{\partial u \partial v} + \beta\gamma\right)/\beta\gamma \quad , \\ a' = -\beta^2\gamma du^3 + \beta\gamma^2 H dv^3 + \varphi_2 \left(\frac{1}{2}\psi_1 du - \psi_2 dv\right) \quad , \\ a'' = \beta\gamma^2 dv^3 - \beta^2\gamma H du^3 + \varphi_2 \left(\psi_1 du - \frac{1}{2}\psi_2 dv\right) \\ a_0 = \beta\gamma (du \delta^2 v - dv \delta^2 u) \quad , \quad a_1 = a_0 + a' \quad , \quad a_2 = a_0 + a'' \\ e_1 = \gamma dv^3 \quad , \quad e_2 = -\beta du^3 \quad , \quad b = -\varphi_2 du \quad , \quad c = -\varphi_2 dv \quad .$$

Le quadriche asintotiche osculatrici $Q_1(E_2)$ del 1° sistema (costruita con tangenti alle asintotiche u , $dv = 0$) e $Q_2(E_2)$ del 2° sistema per un elemento $E_2(u, v, du, dv, \delta^2 u, \delta^2 v)$ di curva sono rappresentate da

$$a_i \alpha_i^2 + b \alpha_1 \alpha_3 + c \alpha_2 \alpha_3 + 2e_i (\alpha_3 \alpha_4 - \alpha_1 \alpha_2) = 0 \quad (i = 1, 2).$$

La quadrica di Lie, ($Q_1(E_2) \equiv Q_2(E_2)$ per un E_2 di asintotica u o v) ha l'equazione

$$\beta\gamma(H + 1)\alpha_3^2 + 2(\alpha_3 \alpha_4 - \alpha_1 \alpha_2) = 0$$

e una quadrica di Darboux, combinazione della precedente e di $\alpha_3^2 = 0$,

$$\beta\gamma(H + \Theta)\alpha_3^2 + 2(\alpha_3 \alpha_4 - \alpha_1 \alpha_2) = 0$$

ove Θ è un invariante di significato geometrico noto ⁽²⁾.

(1) *Le forme elementari e la teoria proiettiva delle superficie*, « Bollett. Un. Mat. Ital. », vol. V, 1926.

(2) Si veda la Nota citata in (5) a p. 33.

3. Per ogni P di σ siano date due rette $r_1, r_2^{(1)}$ incidenti rispettivamente la tangente asintotica u e la v ; e fra esse una proiettività che faccia corrispondere i punti d'incidenza con le tangenti asintotiche. Se punti corrispondenti nella proiettività fra r_1, r_2 s'individuano con lo stesso valore di un parametro t , le equazioni di r_1, r_2 si scrivono

$$\begin{aligned} r_1) \quad \alpha_1 &= \alpha_{11} t, \quad \alpha_2 = \alpha_{21} t + \alpha_{22}, \quad \alpha_3 = t, \quad \alpha_4 = \alpha_{41} t + \alpha_{42} \\ r_2) \quad \beta_1 &= \beta_{11} t + \beta_{12}, \quad \beta_2 = \beta_{21} t, \quad \beta_3 = t, \quad \beta_4 = \beta_{41} t + \beta_{42}. \end{aligned}$$

La configurazione assegnata dipende in P da 8 parametri essenziali, cioè su σ da 8 funzioni del posto.

Determiniamo ora le ∞^2 curve di σ tali che le quadriche $Q_1(E_2)$ e $Q_2(E_2)$ relative ai loro E_2 in ogni P taglino rispettivamente r_1 ed r_2 in punti corrispondenti della proiettività assegnata.

Questa condizione si scrive

$$(1) \quad \begin{vmatrix} a_1 + b\alpha_{11} + c\alpha_{21} + 2e_1\beta\gamma A_{41} & c\alpha_{22} + 2e_1\beta\gamma A_{42} \\ a_2 + b\beta_{11} + c\beta_{21} + 2e_2\beta\gamma B_{41} & b\beta_{12} + 2e_2\beta\gamma B_{42} \end{vmatrix} = 0$$

ove s'è posto

$$(2) \quad \begin{cases} \beta\gamma A_{41} = \alpha_{41} - \alpha_{11}\alpha_{21}, & \beta\gamma A_{42} = \alpha_{42} - \alpha_{11}\alpha_{22} \\ \beta\gamma B_{41} = \beta_{41} - \beta_{11}\beta_{21}, & \beta\gamma B_{42} = \beta_{42} - \beta_{11}\beta_{21}. \end{cases}$$

4. Supponiamo ora

$$\boxed{A_{42} \neq 0, \quad B_{42} \neq 0}$$

cioè che le rette r_1, r_2 non siano tangenti a quadriche di Darboux (nei punti ove incontrano le tangenti asintotiche).

Possiamo allora normalizzare o scegliere intrinsecamente il parametro t (su cui sono ancora lecite le sostituzioni lineari che non ne alterano lo zero) come segue. Per un E_1 $du = 0$ (in P) passa un E_2 , $\delta^2 u = d^2 u = \gamma dv^2$, soddisfacente alla (1), la cui $Q_1(E_2)$, che è la quadrica di Darboux $\Theta = -1$, taglia r_1 nel punto definito da

$$(3) \quad (H - 1 + 2A_{41})t + 2A_{42} = 0.$$

Analogamente per l' E_2 $dv = 0$, $\delta^2 v = d^2 v = \beta du^2$ si ha come $Q_2(E_2)$ la stessa quadrica di Darboux che taglia r_2 nel punto

$$(4) \quad (H - 1 + 2B_{41})t + 2B_{42} = 0.$$

(1) Questa frase, qui e in seguito, significa che *in relazione ad ogni P sono date due rette; ciò non implica affatto ch'esse passino per P.*

Si normalizza t ponendolo $= +1$ e -1 nei due punti indicati (v); con ciò

$$(5) \quad H - 1 + 2A_{41} = -2A_{42}, \quad H - 1 + 2B_{41} = +2B_{42}$$

e l'equazione differenziale degli E_2 cercati è del tipo

$$I. \quad (du \delta^2 v - dv \delta^2 u) (A du^3 + B du^2 dv + C du dv^2 + D dv^3) = \\ = \beta A du^6 + M du^5 dv + N du^4 dv^2 + Q du^3 dv^3 + R du^2 dv^4 + S du dv^5 - \gamma D dv^6.$$

Il confronto dei coefficienti, indicando ρ un fattore di proporzionalità, dà

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} A(2\alpha_{11} - \psi_1) = M - \beta B, \quad D(2\beta_{21} + \psi_2) = S + \gamma C \\ -\beta B_{42} = \rho A, \quad -\beta_{12} = \rho B, \quad \alpha_{22} = \rho C, \quad -\gamma A_{42} = \rho D \\ \beta C + B(2\alpha_{11} - \psi_1) + 2A(\alpha_{21} + \psi_2) - 2\rho AC = N \\ -\gamma B + C(2\beta_{21} + \psi_2) + 2D(\beta_{11} - \psi_1) + 2\rho BD = R \\ \beta D - \gamma A + 2C(\beta_{11} - \psi_1) + 2D(\alpha_{21} + \psi_2) - 4\rho AD = Q. \end{array} \right.$$

Le ultime 3 equazioni determinano, in generale, in modo unico $\rho, \alpha_{21}, \beta_{11}$ quindi $B_{42}, A_{42}, \beta_{12}, \alpha_{22}$ e le due prime α_{11}, β_{21} e le (5) A_{41}, B_{41} date le funzioni A, B, \dots, S .

Sicchè:

Date per ogni punto P di una superficie σ due rette r_1, r_2 incidenti rispettivamente la tangente asintotica u e la v (uscanti da P) e fra esse una proiezione che faccia corrispondere i due punti d'incidenza, le curve di σ le cui Q_1 e Q_2 in P tagliano rispettivamente r_1 ed r_2 in punti corrispondenti della proiezione soddisfano sempre ad un'equazione del tipo

$$I. \quad (du \delta^2 v - dv \delta^2 u) (A du^3 + B du^2 dv + C du dv^2 + D dv^3) = \\ + \beta A du^6 + M du^5 dv + N du^4 dv^2 + Q du^3 dv^3 + R du^2 dv^4 + S du dv^5 - \gamma D dv^6$$

con A e $D \neq 0$ se r_1 ed r_2 non sono tangenti a quadriche di Darboux.

Viceversa ogni equazione di questo tipo determina in ogni punto P di σ una coppia di rette incidenti le tangenti asintotiche e una proiezione fra esse nel modo sopra specificato.

5. Come si è osservato la configurazione adottata dipende da 8 funzioni quanti sono i coefficienti essenziali dell'equazione I. Si potrebbe pensare che togliendo alle rette r_1, r_2 la condizione d'incidenza con le tangenti asintotiche (con che si guadagnano due funzioni per la nuova configurazione) si riuscisse a rappresentare un'equazione più generale della precedente, in cui i coefficienti di du^6, dv^6 non fossero legati ad A e D . Ciò non è affatto (cioè il computo delle funzioni riesce illusorio); o in altri termini:

(1) Purchè, s'intende, le ultime due equazioni non definiscano lo stesso valore di t e i valori così ottenuti siano finiti. Se ciò non fosse bisognerebbe normalizzare t in altro modo.

la I. determina in ogni P di σ due congruenze di rette r_1, r_2 una corrispondenza fra esse e una proiettività fra rette corrispondenti (in cui si corrispondono i punti appartenenti al piano tangente) per le quali si può ripetere quanto s'è detto sopra. Lo studio di questa configurazione, per quanto interessante, non entra nei limiti di questa Nota.

6. S'è detto che dev'essere $A \neq 0, D \neq 0$. Può essere $B = 0$ nel qual caso r_2 passa per P; così vi passa r_1 se $C = 0$ e le ultime tre equazioni (6) si riducono a

$$2A(\alpha_{12} + \psi_2) = N, \quad 2D(\beta_{11} - \psi_1) = R, \quad \beta D - \gamma A - 4\rho AD = Q.$$

Se più in particolare $r_1 \equiv r_2$ dev'essere

$$(\gamma A - 2\beta D)\psi_1 + \gamma M - \beta R = 0, \quad (\beta D - 2\gamma A)\psi_2 + \gamma N - \beta S = 0,$$

e se coincidono nella normale proiettiva la I. si scrive

$$(du \delta^2 v - dv \delta^2 u)(A du^3 + D dv^3) = Q du^3 dv^3 + \\ + A du^4 (\beta du^2 - \psi_1 du dv + 2\psi_2 dv^2) - D dv^4 (\gamma dv^2 - \psi_2 du dv + 2\psi_1 du^2);$$

e se l'ulteriore punto unito ($\neq P$) nella proiettività fra r_1 ed r_2 cade nell'altro vertice del tetraedro ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = 0$) la I. diviene

$$a_1 A du^3 + a_2 D dv^3 = 0.$$

7. Esaminiamo ora l'ipotesi

$$(7) \quad \boxed{A_{42} = 0, \quad B_{42} \neq 0}.$$

Come s'è detto r_1 , incidente la tangente asintotica u , riesce tangente, nel punto d'incidenza alle quadriche di Darboux.

Non si può normalizzare t nel modo precedente. L'equazione differenziale è ora ($\alpha_{22} \neq 0$):

$$(8) \quad \left| \begin{array}{cc} a_1 + b\alpha_{11} + c\alpha_{21} + 2e_1\beta\gamma A_{41} & \alpha_{22} dv^2 \\ a_2 + b\beta_{11} + c\beta_{21} + 2e_2\beta\gamma B_{41} & \beta_{12} du dv + \beta B_{42} du^2 \end{array} \right| = 0$$

(è l' E_2 da essa definito per $du = 0$ dà luogo ad una $Q_1(E_2)$ tangente ad r_1).

Si può ancora porre $t = -1$ nel punto d'intersezione di r_2 con la $Q_2(E_2)$ relativa all' E_2 per cui $dv = 0$.

Consideriamo ora l'elemento E_2 per cui $du \neq 0$ (quindi $\beta_{12} \neq 0$) la cui $Q_2(E_2)$ contiene r_2 . Per esso

$$(9) \quad \beta_{12} dv + \beta B_{42} du = 0$$

$$(10) \quad a_2 + b\beta_{11} + c\beta_{21} + 2e_2\beta\gamma B_{41} = 0.$$

La $Q_1(E_2)$ relativa a questo elemento E_2 taglia r_1 in un punto che possiamo far corrispondere a $t = \infty$; ciò equivale a porre

$$a_1 + b\alpha_{11} + c\alpha_{21} + 2e_1\beta\gamma A_{41} = 0$$

e perciò sottraendo dall'ultima che precede

$$a'' - a' + b(\beta_{11} - \alpha_{11}) + c(\beta_{21} - \alpha_{21}) + 2\beta\gamma(e_2 B_{41} - e_1 A_{41}) = 0,$$

in conseguenza della (9). Se si tiene conto di queste condizioni, con un calcolo sostanzialmente analogo a quello precedente si trova che:

Date in ogni punto P di σ due rette r_1, r_2 incidenti rispettivamente le tangenti asintotiche u e v in P e di cui la prima sia tangente alle quadriche di Darboux, e fra esse una proiettività che faccia corrispondere i punti d'incidenza, le curve di σ tali che in P le loro $Q_1(E_2)$ e $Q_2(E_2)$ taglino rispettivamente r_1 ed r_2 in punti corrispondenti della proiettività soddisfano ad una equazione del tipo

$$\text{II.} \quad (du \delta^2 v - dv \delta^2 u) (B du^2 + C du dv + D dv^2) = \\ = \beta B du^3 + M du^4 dv + N du^3 dv^2 + Q du^2 dv^3 + R du dv^4 - \gamma D dv^5$$

con $B, C, D \neq 0$.

Viceversa ogni equazione di questo tipo determina non una ma ∞^1 coppie di rette come r_1 ed r_2 : però tutte le $\infty^1 r_1$ incontrano la tangente asintotica u nello stesso punto (e giacciono nel piano ivi tangente alle quadriche di Darboux; i punti $t = -1$ di esse appartengono ad una retta per P).

Come si vede la configurazione di cui s'è fatto uso dipende da 7 funzioni del posto (2 per r_1 , 3 per r_2 e 2 per la proiettività); mentre l'equazione dipende da 6: perciò si hanno ∞^1 coppie r_1, r_2 ⁽¹⁾.

Sarebbe interessante studiare il caso in cui le due direzioni singolari ⁽²⁾ riuscissero coincidenti o coniugate; per necessità di spazio non ce ne occupiamo.

8. Veniamo ora al caso in cui r_1 ed r_2 sono tangenti alle quadriche di Darboux. Si ha

$$\boxed{A_{42} = B_{42} = 0}$$

L'equazione che definisce gli E_2 è

$$\begin{vmatrix} a_1 + b\alpha_{11} + c\alpha_{21} + 2e_1\beta\gamma A_{41} & \alpha_{22} dv \\ a_2 + b\beta_{11} + c\beta_{21} + 2e_2\beta\gamma B_{41} & \beta_{12} du \end{vmatrix} = 0$$

con $\alpha_{22} \neq 0$ e $\beta_{12} \neq 0$.

(1) Siccome l'equazione II conserva lo stesso tipo scambiando u con v è chiaro che vi sono altre ∞^1 coppie di rette r_1, r_2 che possono rappresentare in P l'equazione, delle quali r_2 (ma non r_1) è tangente alle quadriche di Darboux.

(2) Cioè quelle che annullano il coefficiente del termine di 2° ordine nella II.

Se facciamo $t = 1$ nel punto ove r_1 incontra il piano $\alpha_2 = 0$ (contenente la tangente asintotica v e la normale proiettiva) e $t = -1$ nel punto d'intersezione di r_2 con $\alpha_1 = 0$ si ha ⁽¹⁾

$$\alpha_{22} = -\alpha_{21} \quad , \quad \beta_{12} = \beta_{11} .$$

L'equazione differenziale che così si ottiene confrontata con l'equazione

$$\text{III.} \quad (du \delta^2 v - dv \delta^2 u) (A du + B dv) = \\ = \beta A dv^4 + M du^3 dv + 2 N du^2 dv^2 + R du dv^3 - \gamma B dv^4$$

dà luogo alle relazioni (A e $B \neq 0$)

$$\beta_{11} = \rho A \quad , \quad \alpha_{21} = \rho B$$

$$A(2\alpha_{11} - \psi_1) + B\beta(H + 2B_{41}) = M \quad , \quad B(2\beta_{21} + \psi_2) - A\gamma(H + 2A_{41}) = R$$

$$A(\psi_2 + \rho B) - B(\psi_1 - \rho A) = N \quad \text{cioè} \quad 2\rho AB = N - A\psi_2 + B\psi_1 = 2\bar{N}$$

e perciò

$$B\beta_{11} = A\alpha_{21} = \bar{N} (\neq 0) .$$

Se poi si tien conto delle relazioni che definiscono A_{41} e B_{41} e di $A_{42} = B_{42} = 0$ si possono introdurre due parametri λ e μ in modo che

$$\alpha_{11} = \lambda A \quad , \quad \alpha_{42} = -\lambda \bar{N} \quad , \quad A\alpha_{41} = \lambda A \bar{N} + \beta B^2 \mu + \bar{R}$$

$$\beta_{21} = \mu B \quad , \quad \beta_{42} = \mu \bar{N} \quad , \quad B\beta_{41} = \mu B \bar{N} - \gamma A^2 \lambda + \bar{M}$$

avendo posto

$$2\bar{M} = \gamma A \psi_1 - \beta \gamma B H + \gamma M$$

$$2\bar{R} = \beta B \psi_2 - \beta \gamma A H - \beta R .$$

Allora per ogni coppia di valori λ e μ le equazioni

$$r_1) \quad \alpha_1 = \lambda A^2 t \quad , \quad \alpha_2 = \bar{N}(t - 1) \quad , \quad \alpha_3 = At , \\ \alpha_4 = \lambda A \bar{N}(t - 1) + (\beta B^2 \mu + \bar{R}) t$$

$$r_2) \quad \beta_1 = \bar{N}(t + 1) \quad , \quad \beta_2 = \mu B^2 t \quad , \quad \beta_3 = Bt , \\ \beta_4 = \mu B \bar{N}(t + 1) - (\gamma A^2 \lambda - \bar{M}) t$$

definiscono una coppia di rette r_1, r_2 ed una proiettività fra esse che sono l'equivalente geometrico dell'equazione differenziale.

È facile rendersi conto geometricamente del modo di variare di r_1, r_2 con λ e μ .

La retta r_1 appartiene alla quadrica di Darboux il cui invariante Θ_1 è definito da

$$\beta \gamma (H + \Theta_1) A + 2(\beta B^2 \mu + \bar{R}) = 0 ;$$

(1) Ciò può farsi finchè r_1 ed r_2 non s'incontrino in un punto della normale proiettiva che sia unito nella proiettività fra esse: se ciò fosse bisognerebbe ricorrere ad altre normalizzazioni di t .

cioè, fissato μ al variare di λ , r_1 descrive il regolo di questa quadrica incidente la tangente asintotica u . Invece, fissato λ al variare di μ , r_1 descrive il fascio delle generatrici delle quadriche di Darboux uscenti dal punto $(0, 1, 0, \lambda A)$. A queste $\infty^1 r_1$ vanno associate proiettivamente le $\infty^1 r_2$ (incidenti la tangente asintotica v) della quadrica di Darboux il cui invariante Θ_2 è dato da

$$\beta\gamma(H + \Theta_2)B - 2(\gamma A^2\lambda - \bar{M}) = 0.$$

Insomma può dirsi anche così: l'equazione differenziale definisce una proiettività fra i punti di una tangente asintotica e il fascio delle quadriche di Darboux; una proiettività fra le generatrici delle ∞^1 quadriche di Darboux per un punto della tangente asintotica e le ∞^1 generatrici (incidenti l'altra tangente asintotica) della quadrica corrispondente al punto; e infine una proiettività fra le punteggiate appartenenti a rette corrispondenti.

Non c'è nessuna difficoltà a fissare geometricamente una coppia di rette r_1, r_2 (per es., per $\lambda = \mu = 0$ esse incontrano la normale proiettiva).

Si può esigere per es., che r_1 ed r_2 appartengano ad una stessa quadrica di Darboux, cioè $\Theta_1 = \Theta_2$; si hanno così ∞^1 coppie e i loro punti d'intersezione ⁽¹⁾ variano sulla conica appartenente al piano

$$\gamma A^2\alpha_1 + \beta B^2\alpha_2 + (B\bar{R} - A\bar{M})\alpha_3 = 0$$

e all'una e all'altra delle due quadriche

$$B(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3\alpha_4) - \gamma A\alpha_1\alpha_3 + \bar{M}\alpha_3^2 = 0$$

$$A(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3\alpha_4) + \beta B\alpha_2\alpha_3 + \bar{R}\alpha_3^2 = 0.$$

Questa conica **non** dipende da N e rappresenta quindi tutte le equazioni del tipo III. ottenute al variare di N (ed una qualsiasi l'individua).

Fra queste ∞^1 coppie r_1, r_2 appartenenti ad una stessa quadrica di Darboux, ve n'è una sola per cui il punto d'intersezione è unito: essa è ben determinata e distinta dalla coppia delle tangenti asintotiche sempre quando la direzione singolare dell'equazione differenziale non sia una tangente di Darboux. Riassumendo:

Data una coppia di rette r_1, r_2 incidenti le tangenti asintotiche fuori di P e una proiettività che ne faccia corrispondere i punti d'incidenza, se le due rette sono tangenti alle quadriche di Darboux viene determinata un'equazione del tipo III. Viceversa un'equazione di questo tipo determina, per ogni P , ∞^2 di queste coppie r_1, r_2 corrispondentisi nel modo sopra specificato; e fra queste ∞^1 per cui r_1 ed r_2 appartengono ad una stessa quadrica di Darboux. Fra queste ultime ve n'è una sola (che dunque può assumersi come immagine dell'equazione) per cui la proiettività fra r_1 ed r_2 è una prospettività.

L'ultima configurazione (per ogni P di σ) dipende da 4 funzioni arbitrarie come l'equazione.

(1) Esistenti, perchè r_1 ed r_2 sono generatrici di sistemi opposti di una stessa quadrica.

Matematica. — *Sulla interpolazione segmentale e la classificazione delle funzioni poligonali.* Nota di L. LABOCCETTA, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. G. A. CROCCO.

1. Ho già mostrato in una precedente Nota⁽²⁾, che quando siano dati n successivi intervalli $x_0 x_1, x_1 x_2, \dots, x_{n-1} x_n$ nei quali i valori di una certa grandezza G , debbono coincidere rispettivamente con quelli di altrettante funzioni F_1, F_2, \dots, F_n della variabile x e si abbiano pure, corrispondentemente ai detti intervalli, delle funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ della stessa variabile le quali godano la proprietà che ognuna di esse prende il valore $+1$ in tutti i punti dell'intervallo che ad essa corrisponde, ed il valore zero al di fuori di esso, analiticamente la grandezza G è rappresentabile con un polinomio o un prodotto formati con le dette funzioni F e φ .

$$(1) \quad G = F_1 \varphi_1 + F_2 \varphi_2 + \dots + F_n \varphi_n$$

$$(2) \quad G = F_1^{\varphi_1} \cdot F_2^{\varphi_2} \dots F_n^{\varphi_n}.$$

In una più recente Nota⁽³⁾ ho mostrato come le funzioni φ_i possano essere costruite ad esempio sostituendo a x nell'integrale che esprime il fattore discontinuo di Dirichlet, $\text{Dir } x$, una funzione f_i tale che sia $|f_i| < 1$ per $x_{i-1} < x < x_i$ e sia invece $|f_i| > 1$ per $x > x_i$ e $x < x_{i-1}$, poichè risulta allora $\varphi_i = \text{Dir}(f_i)$. Nel caso presente chiamando k_i l'ascissa del punto medio dell'intervallo x_{i-1}, x_i e $2a_i$ la lunghezza di esso si ha ovviamente $\varphi_i = \text{Dir} \frac{x - k_i}{a_i}$.

Comunque però si costruiscano le φ_i è apparente l'analogia della (1) e della (2), con le formole d'interpolazione, solo che qui invece di n punti ed n valori di una stessa funzione sono dati n segmenti in ciascuno dei quali la funzione ha espressione analitica diversa ed i valori del polinomio, o del prodotto, che la esprimono, coincidono in ciascuno dei detti segmenti con quelli della funzione da rappresentare, dando luogo a quella *espèce singulière d'osculation finie* o *superosculazione* la necessità della cui ammissione nell'analisi applicata a questioni fisiche era stata già segnalata da Fourier⁽⁴⁾.

Questa specie d'interpolazione potrebbe perciò esser chiamata interpolazione *segmentale* per distinguerla da quella *puntuale* ordinaria⁽⁵⁾.

(1) Nella seduta del 1° dicembre 1929.

(2) «R. C.», vol. XXXI, fasc. 12°, seduta 18 giugno 1922.

(3) «R. C.», seduta del 1° dicembre 1929.

(4) *Théorie analytique de le chaleur*, § 230, p. 224.

(5) Riguardo a tali denominazioni si confronti quella di *interpolazione funzionale* già adoperata dal prof. S. Pincherle. V. pp. 243 e 299 di S. PINCHERLE e U. AMALDI, *Le operazioni distributive*. N. Zanichelli, Bologna 1901.

A differenza però dei fattori interpolari che appaiono nelle formole di Newton e di Lagrange, i quali si complicano tanto più per quanto maggiore è il numero dei valori che la funzione deve assumere, le funzioni interpolari φ_i , della (1) e della (2) le quali altro non sono che *funzioni caratteristiche d'intervallo* restano invariate conservando sempre la stessa forma semplice qualunque sia il numero degli intervalli. Se questo diventa infinito la (1) e la (2) assumono la forma di una somma e di un prodotto infiniti con l'indice n variabile da $-\infty$ a $+\infty$; tuttavia è chiaro che non si tratta nè di serie, nè di prodotti infiniti del tipo ordinario perchè nelle due espressioni generali che così si ottengono

$$(3) \quad G = \sum_{-\infty}^{+\infty} F(n, x) \varphi(n, x) \quad G = \prod_{-\infty}^{+\infty} F(n, x)^{\varphi(n, x)}$$

per qualunque valore dato ad x , compreso fra $-\infty$ e $+\infty$, se esso cade nell'intervallo n^{mo} , si annullano tutti i termini della somma, o diventano $= 1$ tutti i fattori del prodotto, meno quello che corrisponde all'indice n e questo termine o fattore rappresenta da solo la funzione sempre esattamente, e non solo approssimativamente, non essendovi qui resti da considerare.

2. Con queste serie o prodotti infiniti che possono appropriatamente esser detti *d'interpolazione segmentale*, sono immediatamente esprimibili tutte le funzioni periodiche i cui diagrammi comprendono in ogni periodo uno o più archi di curve assegnate ad arbitrio, ed anche quelle funzioni che, senza essere periodiche, sono rappresentate da diagrammi comprendenti infiniti intervalli ai quali corrispondono archi di linee diverse varianti con legge assegnata da un intervallo all'altro, il caso più generale avendosi quando, insieme con la funzione, varia con legge assegnata non solo la lunghezza dell'intervallo ma anche il numero degli archi diversi in esso compresi.

Ma oltre a ciò le stesse serie o prodotti infiniti possono servire anche ad una classificazione delle anzidette funzioni da essi rappresentate fondata sulle caratteristiche del loro termine generale, il quale tanto nel caso della serie, quanto in quello del prodotto infinito, consta di una parte principale $F(n, x)$ che indica la natura della curva corrispondente all'intervallo considerato, e di un elemento, coefficiente od esponente, ausiliario $\varphi(n, x)$ che definisce i limiti dell'intervallo stesso. Basterà perciò qui appresso considerare soltanto la serie, perchè ciò che si dice dei due elementi del termine generale della serie si potrebbe identicamente ripetere di quelli del termine generale del prodotto infinito.

Ciò posto è chiaro che possono formarsi due grandi categorie delle funzioni considerate secondo che:

- I. Il valore dell'intervallo è costante.
- II. Il valore dell'intervallo varia con legge assegnata.

In queste due categorie si potrà fare poi una classificazione secondo la complessità della funzione che costituisce il periodo tenendo anche qui, ed in entrambe le categorie, presenti i due casi principali:

a) che la funzione sia sempre la stessa in tutti gli intervalli;

b) che la natura della funzione varî da un intervallo all'altro con legge assegnata.

3. Se il valore dell'intervallo è costante, e per maggiore semplicità lo si assume $=1$, il termine generale della serie prende la forma

$$(4) \quad f(n, x) \text{ Dir } (2n + 1 - 2x)$$

e con termini di questo tipo si formano anzitutto le funzioni periodiche, di forma arbitraria, e le funzioni scalariformi che rappresentano serie.

Lasciando da parte il caso di $f(n, x)$ costante ed $=0$ od $=1$, nel quale la serie si riduce a rappresentare l'asse delle ascisse o la retta ad essa parallela $y=1$, si presentano, per ordine di complessità, i tipi seguenti:

a) La funzione $f(n, x)$ ha alternativamente il valore 0 od 1; in tal caso secondo che il valore 1 corrisponde agli intervalli di ordine dispari o a quelli di ordine pari, si hanno le due serie

$$(5) \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} \text{Dir } (4n + 1 - 2x) \quad , \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} \text{Dir } (4n + 3 - 2x)$$

le quali evidentemente rappresentano i due *fattori intermittenti*⁽¹⁾.

$$\text{sem sgn sen } \pi x \quad , \quad \text{sem sgn } (\text{sen } \pi (x + 1)).$$

b) La funzione $f(n, x)$ prende alternativamente i valori $+1$, -1 , essendo positiva ad esempio negli intervalli di ordine dispari, e si ha la serie

$$(6) \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \text{Dir } (2n + 1 - 2x)$$

la quale rappresenta il *fattore alternante* $\text{Fal } x = \text{sgn sen } \pi x$ funzione legata alle due precedenti dalla relazione

$$(7) \quad \text{sgn sen } \pi x = \text{sem sgn sen } \pi x - \text{sem sgn } (\text{sen } \pi (x + 1)).$$

c) La funzione $f(n, x)$ assume successivamente tutti i valori interi da $-\infty$ a $+\infty$, compreso lo zero, e si ha la serie

$$(8) \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} n \text{Dir } (2n + 1 - 2x)$$

che rappresenta la funzione I_x , *intiero di x* di Legendre.

(1) Per la funzione $\text{sem sgn } x$ veggasi mia precedente Nota già citata.

d) La funzione $f(n, x)$ è una funzione lineare di x variante in ogni intervallo da zero ad 1 o da 1 a zero e si hanno le due serie

$$(9) \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} (x - n) \operatorname{Dir}(2n + 1 - 2x), \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} (n - x) \operatorname{Dir}(2n + 1 - 2x)$$

le quali evidentemente rappresentano le due funzioni, *frazione di x* , ossia $x - Ix$, e *complemento di x* , ossia $(1 + Ix) - x$, legate dalla relazione

$$(10) \quad Frx + Cmx = 1.$$

e) La funzione $f(n, x)$ è una funzione lineare di x variante in ogni intervallo da -1 a $+1$, o da $+1$ a -1 , prendendo il periodo uguale a 2 si hanno le due serie

$$(11) \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} (x - 2n) \operatorname{Dir}(2n - x), \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} (2n - x) \operatorname{Dir}(2n - x)$$

le quali evidentemente rappresentano la *funzione di Riemann $R(x)$* , detta anche *eccesso di x* e la sua opposta $-R(x)$.

4. Si sono così ottenuti tutti gli elementi delle funzioni poligonali, e cioè le forme fondamentali di quelle funzioni periodiche che in ogni intervallo corrispondente ad un periodo, o sono costanti o variano linearmente.

Poichè ho già mostrato come con questi elementi si possono formare tutte le funzioni periodiche i cui diagrammi sono costituiti in ogni periodo da una poligonale, o da una successione di archi di curve diverse arbitrariamente date, così non occorre procedere oltre nella classificazione.

Restano eccettuati i lati verticali, paralleli all'asse OY, delle poligonali; ma anche le successioni periodiche di questi lati sono rappresentabili con serie o prodotti del tipo (3). Basta infatti come funzione interpolare $\varphi(n, x)$ prendere una funzione periodica *puntiforme* come ad esempio $2(1 - \operatorname{Dir} \sin \pi x)$ e come funzione principale $F(n, x)$, giovandosi della funzione inversa di Ix , una grandezza segmentale⁽¹⁾ $a_n + b_n I^{-1} 0$ funzione dell'indice n , rappresentante la striscia del piano compresa fra le rette $y = a_n, y = a_n + b_n$, cosicchè la serie (3) prende la forma:

$$(12) \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} (a_n + b_n I^{-1} 0) 2 \left(1 - \operatorname{Dir} \sin \frac{\pi x}{c} \right)$$

dove si è assunto il periodo $= c$.

5. Resta da prendere in esame la seconda categoria di funzioni, quelle cioè nelle quali il valore dell'intervallo varia con legge assegnata.

Si possono in questa categoria distinguere due classi di funzioni secondo che la somma dei valori degli intervalli cresce al di là di ogni limite al

(1) Per la funzione $I^{-1} 0$ veggasi la mia precedente Nota « R. C. », vol. V, fasc. 11, giugno 1927 e il mio scritto sulle *Funzioni periodiche poligonali*. « L'Elettrotecnica », n. 19, 5 luglio 1924, § 5.

crescere del numero degli intervalli considerati, o pure tende a un limite finito, il quale può darsi che esista per gl'intervalli a destra dell'origine, per quelli a sinistra o per entrambi.

Se come valore dell'intervallo i_n si prende il valore del termine u_n di una serie ordinaria S a termini positivi, si scorge che alle serie divergenti corrispondono le funzioni della prima classe ed alle serie convergenti le funzioni della seconda classe. Per entrambe le classi la forma generale della funzione è sempre quella (3), ma poichè il valore dell'intervallo è variabile, se si indica con S_n la somma dei primi n termini della serie S si dovrà come fattore interpolare prendere, invece di quello innanzi adoperato

$$(13) \quad \Phi(n, x) = \text{Dir} \left(1 - 2 \frac{x - S_{n-1}}{u_n} \right)$$

intendendosi che tanto u_n quanto S_n siano esprimibili a mezzo di x . Ricordando poi che come generalizzazione di $\text{Fr} x$ al caso dell'intervallo variabile si è posto⁽¹⁾

$$(14) \quad \Phi_p \left(\frac{x}{u_n} \right) = \frac{x - S_{n-1}}{u_n}$$

potrà prendersi come forma generale della funzione

$$(15) \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} F(n, x) \text{Dir} \left(1 - 2 \Phi_p \left(\frac{x}{u_n} \right) \right)$$

dove $F(n, x)$ è una funzione arbitraria soggetta alla sola condizione che il valore di n sia esprimibile a mezzo di x in modo tale che esso resti costante mentre x percorre tutto l'intervallo S_{n-1}, S_n . Se la serie S è convergente, per i valori positivi dell'indice n , ad esempio, ed il suo valore è c , la (15) può rendersi periodica con c come periodo sostituendo $c \text{Fr} \frac{x}{c}$ ad x e si ha così

$$(16) \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} F \left\{ n, c \text{Fr} \frac{x}{c} \right\} \text{Dir} \left\{ 1 - 2 \Phi_p \left(\frac{c \text{Fr} \frac{x}{c}}{u_n} \right) \right\}.$$

Questa funzione poligonale periodica comprende infiniti intervalli in ogni periodo e l'estremo destro di ogni periodo, cioè ogni punto di ascissa kc , con k intero, è punto di accumulazione rispetto ai punti di separazione degli intervalli del periodo che lo precede a sinistra.

In ogni periodo l'indice n degli intervalli varia da 1 a $+\infty$ e perciò se si vogliono, come nei casi precedenti, numerare progressivamente gl'in-

(1) V. la mia precedente Nota «R. C.», vol. I, fasc. 9, maggio 1925 e il cap. V del mio scritto già citato «L'Elettrotecnica», 1924.

tervalli appartenenti a tutti i periodi della serie segmentale (16) bisogna in essa porre $n = \nu - \left(I \frac{x}{c} \right) \omega$ essendo ω il primo numero transfinito di Cantor e $\nu = k\omega + n$, con k intero $= I \frac{x}{c}$, l'indice progressivo della serie che aumenta di ω ad ogni periodo⁽¹⁾. Se la funzione F poi oltre a dipendere dal numero d'ordine n dell'intervallo della poligonale costituente un periodo, dipende dal numero d'ordine k del periodo cioè da $I \frac{x}{c}$, vale a dire che è della forma $F \left\{ n, I \frac{x}{c}, c \operatorname{Fr} \frac{x}{c} \right\}$ allora la (16) cessa di essere veramente periodica e diventa una di quelle funzioni che variano di periodo in periodo con legge assegnata e precisamente rappresenta la serie doppia le cui linee sono costituite dagli elementi di ciascun periodo prendendo come termine della serie

$$(17) \quad \int_{S_{n-1}}^{S_n} F \left\{ n, k, c \operatorname{Fr} \frac{x}{c} \right\} dx$$

k ed n essendo entrambi costanti in questa integrazione.

L'integrale della (16) fra $-\infty$ e $+\infty$, o fra zero e $\pm \infty$, secondo i casi, fornisce la somma della serie doppia quando questa è convergente.

Osservazione. — È evidente infine che le serie d'interpolazione segmentale possono essere adoperate a rappresentare come funzioni dell'indice non solo le serie ma anche i prodotti infiniti ordinari, poichè se si ha

$$(18) \quad y = \prod_{n=1}^{n=\infty} \{ 1 + f_n(x) \}$$

ne segue pure

$$(19) \quad \lg y = \lg \{ 1 + f_1(x) \} + \lg \{ 1 + f_2(x) \} + \dots$$

serie che può essere trattata coi metodi già esposti.

Chiamando ν la variabile che denota l'indice ed in funzione della quale si suppone che sia esprimibile che $f_n(x)$, per ogni valore dato di (x) , ne segue che per la (19) è

$$(20) \quad \lg y = \int_0^{+\infty} \lg \{ 1 + f_{1\nu}(x) \} d\nu$$

(1) Questa distribuzione di punti come immagine geometrica della serie dei numeri transfiniti è data da F. ENRIQUES, *Questioni riguardanti le matematiche elementari*. Parte prima, vol. I, p. 270 della 3ª edizione. Bologna 1924.

e si ha quindi la notevole espressione

$$(21) \quad y = e^{\lg y} = e^{\int_0^{+\infty} \lg \{1 + f_{1\gamma}(x)\} d\gamma}$$

Matematica. — *Sur les équations intégral-fonctionnelles.* Nota di C. POPOVICI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio V. VOLTERRA.

L'emploi des équations intégrales se trouve non seulement dans les phénomènes héréditaires, mais aussi dans la vieille *Physique mathématique*: vibration des cordes et plaques (Picard), équilibre des fils (Moisil); dans l'*Astronomie*: perturbations (Lambert), densité d'un amas stellaire d'après la photographie (Charlier, il arrive a une équation du type Abel), marées (Poincaré, Brillouin), réfraction astronomique en tenant compte du mouvement de la terre (C. Popovici) ⁽²⁾, en finances (Moser) etc.

1. Au lieu de m'arrêter aux applications des équations intégrales, qui viendront de soi, j'ai préféré de sonder l'essence même de ces équations et surtout la *nature de l'ensemble des solutions*. Ainsi j'ai montré en 1914 ⁽³⁾ et 1915 ⁽⁴⁾ que les solutions d'une équation intégral-fonctionnelle dépendent d'une *infinité de fonctions arbitraires* (*l'ensemble des solutions a donc la puissance de l'ensemble des fonctions*). Trois idées ont été à la base de mes résultats:

1° Je me suis servi des séries formées avec des *fonctions arbitraires* en x et ses itérées $x_{k+1} = x_1(x_k)$. Ces séries étaient *ouvertes dans les deux sens* $+\infty$ et $-\infty$.

2° J'ai profité de ces fonctions arbitraires, pour démontrer qu'il y a une infinité de solutions, même dans le cas où l'on ne trouvait qu'une solution divergente, en faisant *compensation* avec des solutions divergentes.

3° Dans le cas où la compensation ne pouvait pas se faire, parce qu'il y avait plus que divergence (incompatibilité) j'ai employé des fonctions *non-uniformes*, pour chasser l'incompatibilité (cela encore en 1914, dans les « Annales de l'Université d'Jassy »).

Ces mêmes trois artifices fondamentaux, m'ont servi comme instrument pour mes travaux de 1928 qui ⁽⁵⁾ ne sont qu'une conséquence logique de ceux de 1914.

2. Pour mieux faire comprendre la portée des considérations, qui vont suivre, je commencerai par une remarque auxiliaire:

(1) Nella seduta del 3 novembre 1929.

(2) « Annales de l'Observatoire de Bucarest », 1914.

(3) *Sur une équation fonctionnelle*, « C. Rendus », Académie Paris, juin 1914.

(4) *Nouvelles solutions de l'équation de Volterra*, « Circolo di Palermo », 1915.

(5) Voir « Bulletin des Sciences Mathématiques », juillet, août 1929. Paris.

Prenons l'équation différentielle-fonctionnelle (1):

$$(1) \quad x \frac{dy(x)}{dx} + ay(-x) = bx^r.$$

Cette équation peut se résoudre de deux manières:

α) Mettons $y = cx^r$ alors

$$y = \frac{bx^r}{r + a(-1)^r} + \sum_i c_i x^{r_i}.$$

Avec une **infinité** de constantes arbitraires, l'indice i s'étendant à toutes les solutions de $r_i + a(-1)^{r_i} = 0$.

β) Une seconde méthode serait la suivante:

Mettons $z(x) = y(-x)$, alors notre équations (1) se dédouble en:

$$(1') \quad \begin{cases} x \frac{dy}{dx} + az = bx^r \\ x \frac{dz}{dx} + ay = (-1)^r bx^r. \end{cases}$$

Éliminons z , on trouve

$$(1'') \quad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - a^2 y = [1 - a(-1)^r] bx^r$$

qui est une *équation de Fuchs*, dont la solution dépend *seulement* de **deux** constantes arbitraires.

Quelles sont les *vraies* solutions de (1), celles fournies par la méthode α ou par la méthode β?

Il est évident que celles de α; parceque si dans la solution $y(x)$ de Fuchs, on change x en $-x$, alors elle ne représentera plus $z(x)$ qui résulterait de l'élimination de y d'après la méthode β. On trouvera $y(-x) \neq z(x)$; parceque on a *substitué* à la fonction $y(-x)$ une *autre* fonction $z(x)$ qui se raccorde avec $y(x)$ au point double $x = -x$ de la transformation; en d'autres termes y et z sont deux fonctions *différentes*, qui se raccordent quelquefois en $x = 0$, mais *ne se prolongent pas* en changeant x en $-x$.

On a détourné le problème de son caractère fonctionnel; les solutions β n'appartiennent pas à (1), elles correspondent à *d'autres* prémisses; ce n'est plus le même problème.

3. Maintenant si nous considérons des équations de Volterra avec $\int_{-x}^{+x} H(x, s) f(s) ds$, en cherchant de les intégrer, on arrive à des équations

(1) Ceci et tout ce qui va suivre doit être considéré au point de vue formel.

du type (1). Lalesco⁽¹⁾,⁽²⁾ emploie la méthode β (qui conduit à des équations de Fuchs) pour résoudre la suite d'équations du type (1) données par les approximations successives et, bien-entendu, la solution trouvée de l'équation intégrale donnée, n'est pas la solution générale, pas même la vraie solution; parcequ'on a changé les prémisses incluses dans l'expression de l'équation intégrale.

Celles-ci, les vraies solutions, forment un ensemble dont la puissance est celle de l'ensemble des fonctions; comme je l'ai montré⁽³⁾ lorsque les limites d'intégration sont x et αx (ou également t et $a + t$, comme on y arrive en faisant $x = e^t$, $\alpha = e^a$).

4. Ce que nous venons de dire se rapportait aux cas de la transformation $x_1 = -x$, qui donne $x_2 = x$. La question peut se généraliser pour d'autres transformations telles $x_1 = \frac{-x}{1 + cx}$ qui donne $x_2 = x$, ou pour $x_1 = \alpha x$ où $\alpha \neq 1$; ou toute autre transformation :

$$x_{n+r} = x_n, \quad \text{ex} \quad x_1 = \frac{\alpha x}{1 + cx}.$$

5. Les résultats trouvés se rapportant aux équations intégrales, qui conduisent aux équations différentiello-fonctionnelles, s'étendent aussi aux équations intégrales qui conduisent (dans les approximations successives) aux équations seulement fonctionnelles. Quant à la manière d'intégrer ces équations, je montre qu'il n'y a pas de divergence, d'incompatibilité, etc.; qui doivent nous arrêter. Il y a toujours une infinité de solutions. Et, puisque un exemple simple vaut plus qu'une théorie, je prends l'équation fonctionnelle :

$$(2) \quad -f(x_1) + f(x) = F(x)$$

Si $\lim x_n = a$, la solution classique (Goursat-Picard) est

$$(3) \quad f(x) = F(x) + F(x_1) + \dots + F(x_n) \dots$$

Si cette solution est convergente on a une solution. Or la convergence de $\sum F(x_n)$ n'est pas indispensable; ensuite, c'est considérer les choses trop simplement en supposant que x_n a une limite numérique a (même si l'on considère $a = \infty$ comme point ordinaire).

6. En effet, remarquons que x_n ou une fonction de x_n peut tendre pour $n = \infty$ vers une limite numérique a (finie ou infinie); mais aussi :

I. x_n ou $F(x_n)$ pour $n = \infty$ peut tendre vers une fonction limite $P(x)$; alors $P(x)$ est nécessairement périodique par rapport à la transformation x_1 .

(1) LALESCO, *Thèses*, Paris, 1908, pp. 48-52.

(2) V. VOLTERRA, *Equations intégrales*, publiées par Tomassetti, pp. 92-94 et « *Annali di Matematica* », art. II.

(3) C. POPOVICI, Notes cités: « *C. Rendus* », 1914; « *Circolo di Palermo* », 1915; « *C. Rendus* », Paris, 1929 et « *Bul. des Sciences Math.* », 1929.

II. x_n ou $F(x_n)$ pour $n = \infty$ peut tendre vers *plusieurs* limites, ex si $x_{n+p} = x_n$ comme serait $x_1 = \alpha x$ si $\alpha^p = 1$ ou $x_1 = \frac{\alpha x}{c x - 1}$ si $(-\alpha)^p = 1$.

III. Dans le cas précédent x_n ne prend qu'un nombre fini p de valeurs; mais x_n [ou $F(x_n)$] peut tendre asymptotiquement vers *plusieurs limites* ⁽¹⁾ numériques ou fonctions limites : $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ (nécessairement périodiques): Ex

$$(4) \quad \lim x_{3n} = a(x) \quad , \quad \lim x_{3n+1} = b(x) \quad , \quad \lim x_{3n+2} = c(x).$$

Dans ce cas a, b, c sont nécessairement périodiques par rapport à la transformation x_3 .

7. Dans tous les cas énumérés, f admet une *infinité de solutions convergentes*, dont l'ensemble a la puissance de l'ensemble des fonctions.

En effet, a une solution particulière, on peut ajouter une solution de

$$(5) \quad \varphi(x_1) - \varphi(x) = 0$$

qu'on trouve en prenant

$$(6) \quad \varphi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(x_n)$$

ces solutions dépendent d'une fonction arbitraire u , et j'ai montré maintes fois ⁽²⁾ qu'on peut choisir d'une infinité de manières u pour que φ soit convergent.

8. Mais comment trouver une solution particulière de

$$-f(x_1) + f(x) = F(x)$$

et que faire lorsque $F(x_n)$ a *plusieurs limites*?

I. Supposons d'abord que $F(x_n)$ a une seule limite A , constante ou fonction périodique en x_1 ; alors mettons $f = \varphi + f^o$ avec

$$(7) \quad -\varphi(x_1) + \varphi(x) = A$$

et

$$-f^o(x_1) + f^o(x) = F - A.$$

La solution est:

$$(8) \quad \varphi = L \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B^n [u(x_n) - u(a)] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v(x_n) \quad \text{et} \quad f^o = \sum_{n=0}^{\infty} (F_n - A)$$

(1) Le cas III est plus général que le cas I, nous pouvons construire une infinité d'exemples.

(2) Loc. cit. D'ailleurs toute expression $\varphi(x_{-n} \dots x_{-1}, x \dots x_n)$ symétrique des itérés $x_{-n} \dots x, x_1 \dots x_n$ est pour $n = \infty$ une solution de (5) si cette expression a une limite.

où L est logarithme népérien, $a(x) = \lim x_n$, u et v des fonctions arbitraires qu'on peut choisir de manière à compenser la divergence (nous verrons un exemple au § 10) $F_n = F(x_n)$ et $B = e^A$.

II. Lorsque $x_{n+r} = x_n$ alors l'équation

$$(2) \quad -f_1 + f = F$$

donne,

$$(2') \quad -f_r + f = F + F_1 + \dots + F_{r-1}.$$

Nous désignerons toujours, $\varphi(x_r)$ par φ_r , quelle que soit une fonction φ . Et puisque $x_r = x$ il resulterait $f_r = f$ et alors on a la condition de *compatibilité* $F + F_1 + \dots + F_{r-1} = 0$ et alors la solution de (2) est

$$f = - \frac{F + 2F_1 + \dots + (r-1)F_{r-2} + rF_{r-1}}{r}.$$

Mais lorsque $F + F_1 + \dots + F_{r-1} \neq 0$ la condition de compatibilité n'est pas satisfaite; pourtant on peut trouver des solutions pour f en faisant usage de *fonctions non-uniformes*. Dans ce cas il faut écrire l'équation (2) sous la forme:

$$\begin{aligned} -f_1 + f &= \frac{F + F_1 + \dots + F_{r-1}}{r} + \\ + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{F + \alpha^k F_1 + \dots + \alpha^{(r-1)k} F_{r-1}}{r} &\equiv F \quad (\alpha^r - 1 = 0). \end{aligned}$$

Mettons $f = \varphi + \sum f^k$ avec

$$\begin{aligned} -\varphi_1 + \varphi &= \frac{A + A_1 + \dots + A_{r-1}}{r} \\ -f_1^k + f^k &= \frac{F + \alpha^k F_1 + \dots + \alpha^{(r-1)k} F_{r-1}}{r}. \end{aligned}$$

La solution est: pour φ la formule (8) où

$$B = e^{\frac{F + F_1 + \dots + F_{r-1}}{r}}$$

quant aux f^k , ce sont des solutions des équations de la forme:

$$-\psi_1 + \psi = \lambda F + \lambda' F_1 + \lambda'' F_2 + \dots + \lambda^{(r-1)} F_{r-1}$$

où

$$\lambda + \lambda' + \lambda'' + \dots + \lambda^{(r-1)} = 0$$

dont la solution est

$$\psi = \mu F + \mu' F_1 + \dots + \mu^{(r-2)} F_{r-1}$$

avec

$$\mu = \lambda \quad ; \quad \mu' = \lambda + \lambda' \quad ; \quad \dots \quad \mu^{r-2} = \lambda + \lambda' + \dots + \lambda^{r-2}.$$

III. Lorsque $\lim F_{rn+k} = A^{(k)}(x)$; $k = 0, 1, \dots$; $r = 1$; $n = \infty$ les A^k sont nécessairement des constantes ou des fonctions périodiques par rapport à la transformation x_r .

La solution se trouve en combinant les méthodes I et II.

On mettra

$$-f_1 + f = \frac{F + F_1 + \dots + F_{r-1} - (A + A^1 + \dots + A^{r-1})}{r} + \\ + \frac{A + A^1 + \dots + A^{r-1}}{r} + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{F + \alpha^k F_1 + \dots + \alpha^{k(r-1)} F_{r-1}}{r}$$

dont le second membre est identiquement égal à F si $\alpha^r = 1$.

On a la solution générale

$$f = f^0 + \varphi + \sum_{k=1}^{r-1} f^k$$

avec

$$\varphi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_n + L \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B^n u_n ; \quad \text{où } L \text{ log népérien, } B = e^{\frac{A + A^1 + \dots + A^{r-1}}{r}},$$

$$u = \varepsilon + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{r-1} - \varepsilon^0 - \varepsilon_1^0 - \dots - \varepsilon_{r-1}^0,$$

$$v = \eta + \eta_1 + \dots + \eta_{r-1} - \eta^0 - \eta_1^0 - \dots - \eta_{r-1}^0$$

ε et η fonctions arbitraires et uniformes, ε_0 et η_0 sont $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_{nr}$ et η_{nr} , ces deux fonctions arbitraires ε, η pouvant être choisies pour faire la compensation s'il y a divergence;

$$f^0 = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \quad \text{où } rG_n = F_n + F_{n+1} + \dots + F_{n+r-1} - (A + A^1 + \dots + A^{r-1})$$

$$rf^k = F + (1 + \alpha^k) F_1 + (1 + \alpha^k + \alpha^{2k}) F_2 + \dots + (1 + \alpha^k + \dots + \alpha^{k(r-1)}) F_{r-1}.$$

9. *Simplification.* Lorsque $F(x)$ est développable au point limite $a = \lim x_n$ (supposons pour simplifier le cas d'une seule limite) il suffit de s'assurer que $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - a)^k$ est absolument convergent alors

$$-f_1 + f = F(x) - F(a)$$

admet la solution particulière convergente

$$f = \sum F_n - F(a) = \sum_n \sum_k \frac{(x_n - a)^k}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \cdot \frac{d^k F(a)}{da^k}.$$

En effet dès que $\sum_n (x_n - a)^k < M$ on a

$$f < M \sum_1^k \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \cdot \frac{d^k F(a)}{da^k}$$

et le facteur de M a une limite (sauf exception) si a est dans l'intérieur du cercle de convergence.

10. On peut faire l'objection suivante: Si $-f_1 + f = F$ et si les deux solutions

$$f' = F + F_1 + \dots + F_n$$

et

$$f'' = -F_{-1} - F_{-2} - \dots - F_{-n}$$

sont les deux divergentes (pour $n = +\infty$, ainsi que pour $n = -\infty$) il est à s'attendre qu'on ne réussisse pas à compenser la divergence, parceque la solution périodique $\varphi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n$ doit être telle que u_n compense la divergence qui provient à cause du terme F_n vers $n = +\infty$ p. ex. dans la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} F_n$; mais alors u_n étant de l'ordre de grandeur de F_n , la série P compensatrice va décaler la divergence vers $-\infty$. Or, je vais montrer par un exemple qu'on peut se tirer d'affaire même dans ce cas. Soit à résoudre:

$$-f(\lambda x) + f = x + \frac{c}{x}.$$

Ici $\sum F_n = \sum \lambda^n x + \frac{c}{\lambda^n x}$ est divergent autant pour $n = +\infty$ que pour $n = -\infty$.

Pourtant on a la solution particulière

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \left(x - \frac{c\lambda}{x} \right) \quad \text{si } \lambda < 1$$

ou

$$f = \sum_{n=0}^{-\infty} \lambda^n \left(-\lambda x + \frac{c}{x} \right) \quad \text{si } \lambda > 1.$$

Pour $\lambda < 1$ on a fait la compensation avec $-\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c}{\lambda^n x}$.

Pour $\lambda > 1$ on a fait la compensation avec $-\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda^n x$.

11. Toutes ces méthodes peuvent se généraliser pour des équations quelconques: $E[x, f, f_1, \dots, f_q] = g$.

Si $\lim x_{n+k} = P^k(x)$ pour $n = +\infty$, $k = 1, 2, \dots, r$, $q < r$ alors il existe une relation limite:

$$\lim \Phi[E_{nr}, E_{nr+1}, \dots, E_{nr+r-1}] = 0 \quad \text{pour } n = +\infty$$

relation qui doit entraîner la condition de compatibilité

$$\lim \Phi [g_{nr}, g_{nr+1}, \dots, g_{nr+r-1}] = 0 \quad ; \quad n = +\infty$$

si cette condition n'est pas satisfaite par g , on devra recourir, pour résoudre $E = g$ par rapport à f , à des solutions *non-uniformes*.

Matematica (Geometria). — *Sur une propriété de l'enveloppe de certaines familles de quadriques*. Nota di L. GODEAUX, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. FUBINI.

On sait que MM. Bompiani et Tzitzeica ont montré que les points qui représentent sur une hyperquadrique de l'espace à cinq dimensions les tangentes aux asymptotiques d'une surface de l'espace ordinaire, sont consécutifs dans une suite de Laplace ⁽²⁾. Nous avons établi que cette suite est autopolaire par rapport à l'hyperquadrique considérée et nous en avons déduit l'existence d'une suite de quadriques attachée en chaque point d'une surface. La première quadrique de la suite est la quadrique de Lie; deux quadriques consécutives de la suite se touchent en quatre points qui sont des points caractéristiques de ces deux quadriques. Nous avons étudié différentes propriétés de ces quadriques ⁽³⁾, et avons notamment établi dans quelles conditions les asymptotiques se correspondaient sur les nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie ⁽⁴⁾. C'est ce résultat que nous nous proposons de généraliser ici. Nous considérons certaines suites de quadriques, dépendant de deux paramètres u, v , telles que deux quadriques consécutives de la suite se touchent en quatre points, caractéristiques de ces quadriques. Nous établissons une condition sous laquelle les asymptotiques sur les lieux de ces quatre points sont les lignes u, v . De cette propriété, on peut déduire la suivante:

(1) Nella seduta del 5 gennaio 1930.

(2) BOMPIANI, *Sull'equazione di Laplace*, «Rend. Circolo Matem. Palermo», 1912, t. XXXIV, pp. 383-407; TZITZEICA, *Géométrie projective différentielle des réseaux*, Paris, Gauthier-Villars, 1924.

(3) *Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé*, «Bull. Acad. Roy. de Belgique». (1927, pp. 812-826, 1928, pp. 31-41); *Sur les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie*, id., pp. 158-186, 345-348, 455-466; *Sur l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface* (id., 1929, 3753, 702-710); *Sur les quadriques de Lie de certaines surfaces*; *Sur la transformation de Guichard et sur certaines quadriques considérées par M. Demoulin*, (id., nov. 1929); *Sur quelques familles de quadriques attachées aux points d'une surface*, «Annales de la Soc. Polonaise de Math.», 1928, pp. 213-226; *Sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques*, «Bull. Soc. Math. de Franc.», 1928, pp. 26-41.

(4) Voir *Sur l'enveloppe*, loc. cit.

Soit (x) une surface dont les asymptotiques sont les lignes u, v . Considérons la suite de quadriques $\Phi, \Phi_1, \Phi_2 \dots$ attachée en un point de cette surface. Si aux développables de la congruence engendrée par une des droites communes aux quadriques Φ_n, Φ_{n+1} , correspondent sur (x) les courbes d'un réseau conjugué, les asymptotiques sur les nappes communes des enveloppes de ces quadriques sont les courbes u, v .

1. Soit Q l'hyperquadrique d'un espace linéaire à cinq dimensions S_5 représentant les droites d'un espace projectif ordinaire S_3 . Considérons un réseau (U) de l'espace S_5 , les paramètres des lignes conjuguées étant u, v . Ce réseau détermine une suite de Laplace

$$(1) \quad \dots U_{-n}, \dots, U_{-1}, U, U_1, \dots, U_n, \dots$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des v . Nous supposons que cette suite n'appartient pas à Q .

Désignons par V_n le pôle de l'hyperplan $U_{n-2} U_{n-1} U_n U_{n+1} U_{n+2}$ par rapport à Q . On sait que le point V_n appartient à une suite de Laplace

$$(2) \quad \dots, V_{-n}, \dots, V_{-1}, V, V_1, \dots, V_n, \dots$$

dont chaque point, transformé du précédent dans le sens des u , est le pôle par rapport à Q d'un hyperplan contenant cinq points consécutifs de la suite (1). La suite (2) est la suite polaire de la suite (1) par rapport à l'hyperquadrique Q ⁽¹⁾.

Les plans $U_n U_{n+1} U_{n+2}, V_n V_{n+1} V_{n+2}$, conjugués par rapport à Q , coupent cette hyperquadrique suivant deux coniques qui représentent les génératrices rectilignes des deux modes d'une quadrique Φ_n de S_3 . On obtient ainsi dans cet espace une suite de quadriques

$$\dots, \Phi_{-n}, \dots, \Phi_{-1}, \Phi, \Phi_1, \dots, \Phi_n, \dots$$

Nous avons démontré ⁽²⁾ que deux quadriques consécutives de cette suite se touchent en quatre points qui sont des points caractéristiques des deux quadriques. Les quadriques Φ_{n-1}, Φ_n , par exemple, ont en commun quatre droites qui ont pour images, sur Q , les points de rencontre de cette hyperquadrique avec les droites $U_n U_{n+1}, V_n V_{n+1}$. Nous supposons dans cette note que ces droites n'appartiennent pas à Q .

Désignons par L_1, L_2 les points de rencontre de $U_n U_{n+1}$, par M_1, M_2 ceux de $V_n V_{n+1}$ avec Q , par l_1, l_2, m_1, m_2 les droites, communes aux quadriques Φ_{n-1}, Φ_n , représentées par ces points. Désignons en outre par $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ respectivement les points communs aux droites l_1 et m_1 , l_1 et m_2 , l_2 et m_1 , l_2 et m_2 . Ces quatre points sont les points caractéristiques des quadriques Φ_{n-1}, Φ_n . Le faisceau de rayons de sommet x_{ik} et dont

(1) TZITZEICA, loc. cit.

(2) Voir *Sur les lignes asymptotiques*, loc. cit. (seconde note).

le plan est le plan tangent commun aux quadriques Φ_{n-1}, Φ_n et à la partie commune de leurs enveloppes, est représenté sur Q par la droite $L_i M_k$, qui appartient entièrement à cette hyperquadrique, puisque L_i, M_k sont conjugués.

Nous nous proposons d'examiner les propriétés des surfaces (x_{ik}) lorsque le point L_i , par exemple, décrit un réseau (L_i) conjugué à la congruence $(U_n U_{n+1})$. Nous ferons l'hypothèse que les quatre surfaces (x_{ik}) sont des surfaces proprement dites et qu'aucune d'elles n'est un plan.

2. Supposons en premier lieu que les points L_1, L_2, M_1, M_2 soient distincts. Alors les points $U_n, U_{n+1}, V_n, V_{n+1}$ ne peuvent appartenir à l'hyperquadrique Q .

Puisque le point (L_i) décrit un réseau, la droite l_i décrit une congruence (l_i) qui, d'après un théorème de Darboux, est une congruence W . Les surfaces focales de cette congruence étant $(x_{i1}), (x_{i2})$, les asymptotiques se correspondent sur ces deux surfaces et le point L_i décrit un réseau conjugué aux congruences quadratiques $(L_i M_1), (L_i M_2)$. Les asymptotiques sur les surfaces $(x_{i1}), (x_{i2})$ sont donc les u, v .

D'après le théorème de Ribaucour généralisé⁽¹⁾, le point L_2 décrit également un réseau (L_2) conjugué à la congruence $(U_n U_{n+1})$ et par suite les asymptotiques sur les surfaces $(x_{21}), (x_{22})$ sont les courbes u, v .

La congruence (m_1) a pour surfaces focales $(x_{11}), (x_{21})$ et les asymptotiques u, v se correspondent sur ces surfaces, donc (m_1) est une congruence W et M_1 décrit un réseau (M_1) conjugué à la congruence $(V_n V_{n+1})$. Pour la même raison, il en est de même de M_2 .

3. Supposons maintenant que les points L_1, L_2 soient confondus, les points M_1, M_2 étant distincts. Alors le point L_i coïncide avec l'un des points U_n, U_{n+1} ; supposons en premier lieu que ce soit avec U_{n+1} . Les points V_n, V_{n+1} n'appartiennent pas à Q et les points x_{21}, x_{22} coïncident respectivement avec les points x_{11}, x_{12} .

La droite l_i engendre une congruence W et les asymptotiques sur les surfaces $(x_{11}), (x_{12})$ sont les courbes u, v . Soient \bar{U}, \bar{V} les points de la droite $U_{n+1} M_i$ qui représentent les tangentes aux asymptotiques u, v de la surface (x_{11}) . Ces points sont consécutifs dans une suite de Laplace que nous représenterons par

$$(3) \quad \dots, \bar{U}_n, \dots, \bar{U}, \bar{V}, \dots, \bar{V}_n, \dots,$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u . La suite de Laplace (1) est inscrite dans la suite de Laplace (3); précisément, le point U_n appartient à la droite $\bar{V}\bar{V}_1, U_{n-1}$ à la droite $\bar{V}_1\bar{V}_2, U_{n-2}$ à $\bar{V}_2\bar{V}_3$. On sait que l'hyperplan polaire de \bar{U}_1 par rapport à Q est $\bar{U}\bar{V}\bar{V}_1\bar{V}_2\bar{V}_3$. Mais cet hyperplan contient l'espace $U_{n-2}U_{n-1}U_nU_{n+1}$,

(1) TZITZEICA, loc. cit.

qui est conjugué de la droite $V_{n-1} V_n$. Donc le point \bar{U}_1 appartient à cette droite et la suite de Laplace (3) est inscrite dans la suite (2). Il en résulte que le point \bar{U} coïncide avec le point M_1 . Ce point représente donc la tangente à l'asymptotique u de la surface (x_{11}) . On établirait de même que le point M_2 représente la tangente à l'asymptotique u de la surface (x_{12}) .

Supposons en second lieu que le point L_1 coïncide avec U_n . Les asymptotiques sur les surfaces $(x_{11}), (x_{12})$ sont encore les courbes u, v . Par un raisonnement analogue au précédent, on voit que les points M_1, M_2 représentent respectivement les tangentes aux asymptotiques v des surfaces $(x_{11}), (x_{12})$.

4. Reste à examiner le cas où les droites $U_n U_{n+1}, V_n V_{n+1}$ sont toutes deux tangentes à l'hyperquadrique Q . Alors les quatre surfaces (x_{ik}) coïncident en une seule que nous désignerons par (x) . Les lignes asymptotiques sur cette surface sont encore les lignes u, v .

Si les points L_1, L_2 coïncident avec le point U_{n+1} et les points M_1, M_2 avec V_{n+1} , la droite $U_{n+1} V_{n+1}$ appartient à Q . Représentons encore par \bar{U}, \bar{V} les points de Q images des tangentes aux asymptotiques u, v de la surface (x) , et considérons encore la suite (3). L'hyperplan polaire de \bar{U}_1 est $\bar{U}\bar{V}\bar{V}_1\bar{V}_2\bar{V}_3$; il contient l'espace $U_{n+1} U_n U_{n-1} U_{n-2}$, car la suite (1) est inscrite dans la suite (3). Par suite, \bar{U}_1 appartient à la droite $V_{n-1} V_n$ et coïncide avec V_n , puisque $\bar{U}\bar{U}_1$ passe par V_n . On démontrerait de même que \bar{V}_1 coïncide avec U_n . Par suite, \bar{U} coïncide avec V_{n+1} et \bar{V} avec U_{n+1} . Il en résulte que les suites (1), (2) et (3) sont confondues. U_{n+1} et V_{n+1} représentent les tangentes asymptotiques de la surface (x) . La quadrique Φ_n est dégénérée en deux plans confondus avec le plan tangent à (x) et la quadrique Φ_{n-1} est la quadrique de Lie relative à cette surface.

Si les points L_1, L_2 coïncident avec U_{n+1} et les points M_1, M_2 avec V_n , la droite $U_{n+1} V_n$ appartient à Q . Représentons toujours par \bar{U}, \bar{V} les points de cette droite images des tangentes aux asymptotiques u, v de la surface (x) et considérons encore la suite (3). Cette suite est circonscrite aux suites (1) et (2). En raisonnant comme dans le premier cas, on voit que \bar{U}_1 doit appartenir à $V_n V_{n+1}$ et par suite coïncider avec V_{n-1} ; \bar{U} coïncide avec V_n . De même, \bar{V}_1 doit appartenir à $U_{n-2} U_{n-1}$ et par suite \bar{V} à $U_{n-1} U_n$. Il en résulte que \bar{V} doit coïncider avec U_n . Mais alors U_n appartiendrait à Q et il en serait de même de la droite $U_n U_{n+1}$, contrairement à l'hypothèse.

On démontrerait de même que L_1, L_2 ne peuvent coïncider avec U_n et M_1, M_2 avec V_{n+1} . Reste le dernier cas, où L_1, L_2 coïncident avec U_n et M_1, M_2 avec V_n . Un raisonnement analogue au précédent montre que le point U_{n+1} coïncide avec V_n et que par suite la droite $U_n U_{n+1}$ appartient à Q , contrairement à l'hypothèse.

En résumé, on voit que si l'un des points de rencontre d'une des droites $U_n U_{n+1}, V_n V_{n+1}$ avec Q décrit un réseau conjugué à la congruence engen-

drée par la droite considérée, les asymptotiques sur les surfaces qui font partie des enveloppes des quadriques Φ_n, Φ_{n-1} , sont les lignes u, v .

5. Adoptons de nouvelles notations et soit (x) une surface dont les asymptotiques sont les lignes u, v . Si U, V sont les points de Q qui représentent les tangentes aux asymptotiques de (x) , ces points sont consécutifs dans une suite de Laplace

$$(4) \quad \dots, U_n, \dots, U_1, U, V, V_1, \dots, V_n, \dots$$

La quadrique de Lie Φ est représentée par les sections de Q par les plans UU_1U_2, VV_1V_2 ; la quadrique Φ_1 par les plans $U_1U_2U_3, V_1V_2V_3$; ...; la quadrique Φ_n par les plans $U_nU_{n+1}U_{n+2}, V_nV_{n+1}V_{n+2}$; ... Deux quadriques consécutives de la suite $\Phi, \Phi_1, \dots, \Phi_n, \dots$ se touchent en quatre points qui sont des points caractéristiques de ces surfaces. Si l'un des points d'intersection L de la droite U_nU_{n+1} avec Q décrit un réseau conjugué à la congruence (U_nU_{n+1}) , les asymptotiques sur les nappes communes des enveloppes des quadriques Φ_n, Φ_{n-1} sont les courbes u, v . Le point L détermine une suite de Laplace inscrite dans la suite (4) et un point de cette suite appartient à la droite UV (et peut d'ailleurs éventuellement coïncider avec un des points U, V). Par suite les développables de la congruence engendrée par la droite l , ayant pour image L , correspondent aux courbes d'un réseau conjugué de la surface (x) . Or la droite l appartient aux quadriques Φ_n, Φ_{n-1} , et le théorème énoncé dans l'avant-propos est établi.

6. Voici une application de ce qui précède. Soit (j) une congruence W ayant pour surfaces focales la surface (x) dont il vient d'être question et une surface (\bar{x}) dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques, \bar{x}, y . Les asymptotiques sur la surface (\bar{x}) sont les courbes u, v et la suite de Laplace

$$(5) \quad \bar{U}_2, \bar{U}_1, \bar{U}, \bar{V}, \bar{V}_1, \bar{V}_2,$$

analogue à la suite (4), relative à la surface (\bar{x}) a la période six. Les droites $UV, \bar{U}\bar{V}$ appartiennent à Q et se coupent en un point J , image de la droite j . Le point J décrit un réseau (J) conjugué aux congruences $(UV), (\bar{U}\bar{V})$ et appartient à une suite de Laplace

$$(6) \quad \dots, J_{-1}, J, J_1, \dots$$

inscrite dans les suites (4), (5). Nous supposons la suite (6) non périodique. Les points J_{-2}, J_2 appartiennent à $\bar{U}_2\bar{V}_2$ et sont situés, le premier sur U_2U_3 , le second sur V_2V_3 . Les quadriques Φ_1, Φ_2 relatives à la surface (x) ont en commun quatre nappes de leurs enveloppes et sur ces nappes, les lignes asymptotiques sont les courbes u, v .

L'une de ces nappes est d'ailleurs la surface (y) , car les tangentes asymptotiques de celles-ci sont représentées sur Q par les points \bar{V}_2, \bar{U}_2 .

Matematica. — *Derivazioni generalizzate e classificazione degli spazi di Riemann.* Nota di P. NALLI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Quelques pas dans une théorie générales des fonctions de variable complexe au sens général.* Nota di M. THÉODORESCO, presentata dal Corrisp. P. BURGATTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulla unicità della soluzione del problema di Cauchy per un'equazione ellittica del secondo ordine in due variabili.* Nota di H. LEWY, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sur la recherche des fonctions permutable de 1^{ère} espèce avec une fonction donnée.* Nota di M. A. LŪSIS, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica (Geometria). — *Sulla non esistenza di congruenze W di rette iperspaziali che abbiano per prime due falde focali delle varietà luoghi di spazi.* Nota di M. CIBRARIO, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica (Idromeccanica). — *Azioni dinamiche relative a moti piani irrotazionali di liquidi viscosi.* Nota di B. FINZI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

Un liquido di densità ρ e di coefficiente di viscosità μ si muove di moto stazionario. In assenza di forze esterne, la velocità \mathbf{v} del liquido e la pressione p che, *caeteris paribus*, si eserciterebbe in assenza di viscosità, saranno tali da ubbidire alle seguenti equazioni indefinite ⁽²⁾:

$$(I) \quad \frac{1}{2} \rho \operatorname{grad} v^2 + \rho \operatorname{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = - \operatorname{grad} p - \mu \operatorname{rot}^2 \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Sia \mathbf{v} la velocità e \bar{p} la pressione relative al moto stazionario irrotazionale di un liquido perfetto di densità ρ : in assenza di forze esterne, sarà:

$$(I') \quad \frac{1}{2} \rho \operatorname{grad} \bar{v}^2 = - \operatorname{grad} \bar{p}, \quad \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = 0, \quad \operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}} = 0.$$

(1) Nella seduta del 5 gennaio 1930.

(2) C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Analyse vectorielle générale*, II, Pavia, Mattei, 1913; cfr. p. 63, form. (5) e p. 56, form. (1'').

Se nelle (1) al posto di \mathbf{v} poniamo $\bar{\mathbf{v}}$, al posto di p, \bar{p} , le equazioni indefinite (1) risultano soddisfatte. La velocità e la pressione relative al moto stazionario irrotazionale di un liquido perfetto costituiscono dunque (come è ben noto) una particolare soluzione delle equazioni indefinite di un liquido viscoso.

Considerando allora la classe particolare dei moti viscosi irrotazionali, la viscosità non interverrà nè nella determinazione della velocità \mathbf{v} , nè nella determinazione della pressione p . Essa interverrà però, in generale, nella determinazione degli sforzi che si esercitano in senò al liquido ⁽¹⁾. Precisamente: lo sforzo che si esercita su di un elemento di normale \mathbf{n} è così caratterizzato ⁽²⁾:

$$(2) \quad \Phi_n = p\mathbf{n} - 2\mu \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{n}.$$

La (2) rende manifesto che, pur non dipendendo p e \mathbf{v} dalla viscosità del liquido, vi dipende invece Φ_n .

Supponiamo ora, in particolare, che il liquido si muova di moto piano, ed occupiamoci quindi dei moti piani irrotazionali di liquidi viscosi:

È ben noto quale prezioso ausilio rappresenti la teoria delle funzioni di variabile complessa nello studio dei moti piani irrotazionali di liquidi perfetti ⁽³⁾: questa teoria non solo permette di caratterizzare cinematicamente tali moti, ma anche, in virtù delle formule di Blasius, permette di calcolare, mediante formule analitiche, le azioni dinamiche su di una linea di flusso. In virtù di quanto dicemmo, la soluzione cinematica relativa al moto irrotazionale di un liquido perfetto sarà pure soluzione cinematica relativa al moto irrotazionale di un liquido viscoso. Non potremo però senz'altro assumere le formule di Blasius per caratterizzare le azioni dinamiche su di una linea di flusso. Scopo di questa Nota è appunto la determinazione di formule che ci permettano di caratterizzare le azioni dinamiche esercitate su di una linea di flusso da un liquido viscoso in moto irrotazionale. Le espressioni che caratterizzano queste azioni dinamiche risulteranno somma di due termini: il primo (come la (2) fa prevedere) sarà indipendente dalla viscosità del liquido, e si esprimerà mediante le note formule di Blasius; il secondo recherà il contributo dovuto alla viscosità. Le espressioni che definiscono quest'ultimo risulteranno particolarmente semplici e avranno carattere analitico. In più esse varranno non soltanto su linee di flusso, ma, a differenza delle espressioni che compaiono nelle formule di Blasius, manterranno la loro validità su di una linea qualsiasi.

(1) U. CISOTTI, *Sulle equazioni del moto piano dei liquidi viscosi*, « Rend. del R. Ist. Lombardo », vol. LVI (1923); *Sull'influenza della viscosità nei moti piani irrotazionali dei liquidi naturali*, questi « Rendiconti », vol. XXXII (1923), p. 22 e p. 85.

(2) C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, loc. cit., p. 62, form. (1) e p. 29, form. (3).

(3) Cfr., ad es., U. CISOTTI, *Idromeccanica piana*, Milano, Tamburini, 1921.

1. — Risultante delle azioni dinamiche di sola viscosità.

Consideriamo un moto piano irrotazionale di un liquido viscoso. Nel piano del moto scegliamo due assi cartesiani ortogonali x e y . Diciamo v_x e v_y le componenti cartesiane della velocità e poniamo $z = x + iy$. Notoriamente, se $w = v_x - iv_y$, w è funzione della variabile complessa z , cioè:

$$(3) \quad w = v_x - iv_y = w(z).$$

Ne segue allora

$$(4) \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}.$$

Consideriamo nel piano di moto una linea s qualsiasi e valutiamo la risultante delle azioni dinamiche esercitate dal liquido su tale linea per puro effetto della viscosità. Ricordando la (2), tale risultante sarà così definita:

$$(5) \quad \mathbf{R} = -2\mu \int \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{n} ds.$$

Nella (5) \mathbf{n} è un vettore unitario diretto come la normale alla linea in un suo generico punto P. Assumeremo come verso di \mathbf{n} il verso per cui la coppia $\frac{dP}{ds}$, \mathbf{n} risulta congruente alla coppia degli assi coordinati. In tal caso le componenti cartesiane di \mathbf{n} così si esprimono:

$$(6) \quad n_x = -\frac{dy}{ds}, \quad n_y = \frac{dx}{ds}.$$

Proiettiamo ora la (5) su gli assi cartesiani, e ricordiamo le (6): avremo:

$$(7) \quad \begin{cases} R_x = 2\mu \int \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} dy - \frac{\partial v_x}{\partial y} dx \right), \\ R_y = 2\mu \int \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} dy - \frac{\partial v_y}{\partial y} dx \right). \end{cases}$$

Poniamo

$$(8) \quad R = R_y + iR_x.$$

In virtù delle (7), delle (4) e della (3), scriveremo la (8) così:

$$R = 2\mu \int \frac{\partial w}{\partial z} dz.$$

Ma, per la (3), $w = w(\chi)$, così che $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{d\chi}$. Ne segue dunque

$$(9) \quad R = 2\mu \int_s dw.$$

La formula ora scritta caratterizza la risultante delle azioni dinamiche, dovute alla sola viscosità, sulla linea s . Essa ha manifestamente carattere analitico, e vale qualunque sia la linea s .

2. - Momento delle azioni dinamiche di sola viscosità.

Valutiamo il momento rispetto ad un punto O (che assumiamo come origine degli assi) delle azioni dinamiche esercitate dal liquido sulla linea s per puro effetto della viscosità. Ricordando la (2) tale momento sarà così definito:

$$(10) \quad \mathbf{M} = -2\mu \int_s (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{n} ds.$$

\mathbf{M} è perpendicolare al piano del moto, e la sua componente secondo la normale a tal piano è data, in virtù delle (6), dalla seguente espressione:

$$2\mu \int_s \left[x \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} dy - \frac{\partial v_y}{\partial y} dx \right) - y \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} dy - \frac{\partial v_x}{\partial y} dx \right) \right].$$

Poniamo

$$(11) \quad M = 2\mu \int_s \chi dw.$$

Ricordando la (3) e le (4) si constata che la componente secondo la normale al piano di moto del momento delle azioni dinamiche che si esercitano sul profilo s , per effetto della sola viscosità, è data dalla parte reale di M .

Manifestamente la (11) (come la (9)) ha forma analitica, e vale qualunque sia la linea s .

3. - Azioni dinamiche compressive.

Caratterizzate, mediante la (9) e la (11), le azioni dinamiche che si esercitano su di una linea s per effetto della sola viscosità, siamo in grado di determinare, mediante formule analitiche, le azioni dinamiche compressive che il liquido viscoso esercita su di una linea di flusso:

Ricordando la (2), se \mathbf{R} e \mathbf{M} caratterizzano le azioni dinamiche che, *caeteris paribus*, si eserciterebbero sulla linea s se il liquido fosse perfetto,

la risultante \mathbf{R}' e il momento \mathbf{M}' delle azioni dinamiche compressive esercitate sulla linea s dal liquido viscoso saranno così definite:

$$\mathbf{R}' = \bar{\mathbf{R}} + \mathbf{R} \quad , \quad \mathbf{M}' = \bar{\mathbf{M}} + \mathbf{M}^{(1)}.$$

Se allora si suppone s linea di flusso, e si ricordano le formule di Blasius ⁽²⁾ e la (9), posto

$$\mathbf{R}' = R'_y + iR'_x,$$

sarà

$$(12) \quad \mathbf{R}' = -\frac{1}{2} \rho \int w^2 d\chi + 2\mu \int dw.$$

Sempre supponendo s linea di flusso, e ricordando le formule di Blasius e la (11), la componente secondo la normale al piano di moto del momento delle azioni dinamiche che si esercitano sul profilo s è data dalla parte reale di \mathbf{M}' , essendo

$$(13) \quad \mathbf{M}' = -\frac{1}{2} \rho \int w^2 \chi d\chi + 2\mu \int \chi dw.$$

La (12) e la (13) hanno forma analitica. Esse valgono però soltanto se la s è linea di flusso, perchè soltanto in questo caso le formule di Blasius sono valide ⁽³⁾.

Mi propongo, in una prossima Nota, di applicare la (12) e la (13) alla determinazione delle azioni dinamiche esercitate su di un profilo rigido chiuso da una corrente traslatoria, da una corrente circolatoria, da una corrente traslo-circolatoria.

Meccanica. — *Sur les mouvements isoénergétiques.* Nota di L. R. GOMES, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Se, in particolare, il moto è un moto «lento», trascurando i termini quadratici in v e nelle sue derivate, dalla (1') si trae $p = \text{cost.}$, e quindi $\bar{\mathbf{R}} = 0$, $\bar{\mathbf{M}} = 0$. In questo caso l'azione dinamica si riduce alla sola azione viscosa, calcolata precedentemente.

(2) H. BLASIUS, *Funktionentheoretische Methoden in der Hydrodynamik*, «Zeitschr. für Math. und Phys.», vol. 58 (1910), p. 90.

(3) Se s non è linea di flusso, la (12) e la (13) perdono il carattere analitico: in tal caso bisogna aggiungere ai secondi membri della (12) e della (13) gli stessi termini non analitici che si debbono aggiungere alle formule di Blasius. (U. CISOTTI, *Ancora su di una eccezione del teorema di Kutta-Joukowski*, questi «Rendiconti», vol. VII (1928), p. 17). Precisamente, se v_n è la componente normale della velocità, al secondo membro della (12) si dovrà aggiungere $-i \int w v_n ds$, e al secondo membro della (13) $-i \int w v_n \chi ds$.

Astronomia. — *Le fluttuazioni della curva di luce di « U. Cephei ».*
Nota di G. VIOLA, presentata dal Corrisp. A. BEMPORAD.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Nuovi fenomeni osservati nella scarica anulare*⁽¹⁾.
Nota di N. SIRACUSANO presentata⁽²⁾ dal Corrisp. M. LA ROSA.

I. Nell'utilizzare a scopi spettroscopici questo tipo di scarica elettrica, ho avuto occasione di notare talvolta interessanti fenomeni. Alcuni di essi furono già descritti in apposita pubblicazione⁽³⁾, per altri mi riservavo farne argomento di più dettagliate indagini.

In principio del corrente anno iniziai in questo Istituto tali ricerche ed esse sono tuttora in corso. Tuttavia, credo opportuno, prima di procedere oltre, di pubblicare i risultati ottenuti nella speranza di poterli integrare e più ampiamente discutere in un secondo tempo.

I. Come ho altre volte accennato, questo tipo di elettroluminiscenza si ottiene avvolgendo alcune spire di filo di rame attorno un tubo (o meglio ad un pallone) di vetro nel quale si produce un vuoto spinto (dell'ordine di 0.01 mm di Hg). Questo avvolgimento si fa attraversare dalle correnti di scarica di due grosse bottiglie di Leyda eccitate da un rocchetto o, preferibilmente, da una macchina elettrica. Se l'intervallo esplosivo del circuito oscillante ed il vuoto sono sufficienti, si forma un anello luminoso (da dove perciò il nome di « anulare ») giacente nel piano delle spire. La tinta di questo anello dipende, oltre che dalla natura del gas contenuto nel tubo e dall'eccitazione esterna, dal valore della pressione. Al decrescere di questa l'anello si dilata fino ad occupare tutta la sezione del tubo (o del pallone), ma quando diviene molto bassa il fenomeno cessa.

Analoghe modificazioni si producono, a pressione costante e dentro certi intervalli esplosivi, facendo crescere l'eccitazione esterna.

J. J. Thomson⁽⁴⁾ spiega l'origine della scarica anulare attribuendola a vortici di forza elettrica che si formano per induzione elettromagnetica, sotto l'azione dei campi magnetici pulsanti longitudinalmente nell'interno della bobina. Con questa ipotesi la scarica sarebbe paragonabile al secondario di un trasformatore senza nucleo.

O. Lehmann⁽⁵⁾ contraddice questa maniera di vedere e suppone invece che prenda origine per le forti differenze di potenziale che a causa dell'im-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di fisica della R. Università di Palermo.

(2) Nella seduta del 15 dicembre 1929.

(3) N. SIRACUSANO, *Nuove osservazioni sulla scarica anulare nell'aria* (« Bollettino dell'Acc. Gioenia delle Scienze Naturali di Catania », 1926).

(4) « Phil. Mag. », 32, 1891.

(5) O. LEHMANN, 47, p. 427. 1892.

pedenza dell'avvolgimento si formano agli estremi di questo. Sorgerebbero in questo modo campi elettrici pulsanti longitudinalmente.

Una lunga serie di discussioni e ricerche sono apparse sinora ed in alcune si citano risultati a favore dell'ipotesi di Thomson, in altri risultati che la contraddicono.

B. Dawis⁽¹⁾ ritiene che questo campo longitudinale possa essere reso minimo col porre le spire dell'avvolgimento nello stesso piano. Così operando tuttavia, non si può dire che sia trascurabile il campo elettrostatico totale.

II. Un esame dettagliato dei risultati dei vari lavori intorno a questo argomento, specie di quelli molto recenti di Thomson⁽²⁾, fa sorgere il sospetto che entrambe le due ipotesi siano da accettarsi; nel senso che esistano condizioni di eccitazione e pressione del gas nelle quali interviene prevalentemente la causa ammessa da una delle ipotesi; e condizioni in cui interviene prevalentemente l'altra.

Una osservazione semplice può giustificare questo sospetto:

Supponiamo di collocare un conduttore sferico nell'interno della bobina da noi considerata: allora le correnti elettriche indotte saranno localizzate alla superficie. Per una distribuzione del campo magnetico qualsiasi è difficile stabilire la distribuzione delle linee di corrente; se invece la bobina occupa un piano diametrico, ragioni di simmetria fanno ritenere che queste linee siano cerchi giacenti su piani paralleli al piano diametrico considerato, e però sono nulle le componenti radiali (cioè perpendicolari all'asse) e longitudinali della corrente.

Se invece sostituiamo un dielettrico nelle stesse condizioni, siccome le correnti di spostamento esistono in tutta la sua massa non possono essere più nulle queste componenti.

Ora il gas racchiuso nell'involucro isolante che è il vetro del pallone del dispositivo da noi usato, inizialmente ha una conducibilità piccolissima, ed in questo stato si comporterà in massima come un dielettrico consentendo nel suo interno la presenza di forze elettriche (statiche) delle correnti di spostamento.

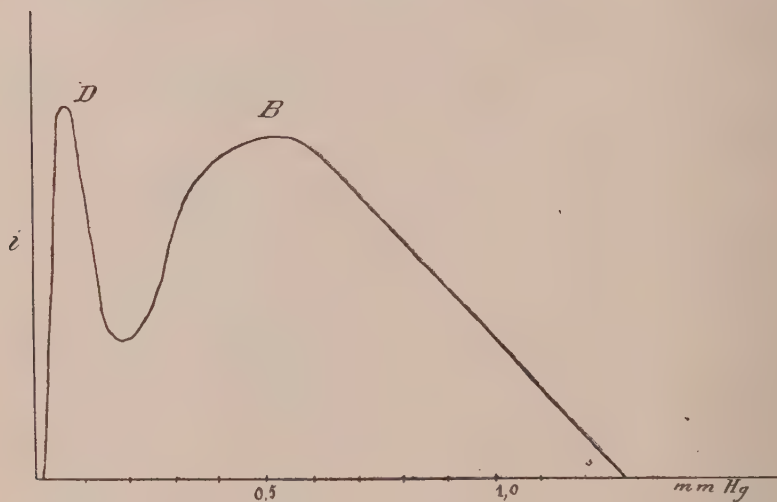
Effetto di queste forze può essere una ionizzazione, ossia un grande aumento della conducibilità, nel quale stato allora il comportamento del gas si avvicinerà a quello di un conduttore, e le correnti di spostamento tendono a divenire nulle. Invece crescono d'intensità quelle dipendenti dall'induzione elettromagnetica, le quali saranno certamente di molto prevalenti quando la conducibilità è elevata. In altri termini, le componenti longitudinali e radiali della forza elettrica sono legate soprattutto alle proprietà del gas come dielettrico e durano finchè questa condizione si mantiene.

(1) B. DAWIS, «Phys. Rev.», 20, p. 129. 1905.

(2) J. J. THOMSON, «Phil. Mag.», 4, p. 1128. 1927.

Questo genere di considerazioni ci porta dunque a pensare che cause della scarica anulare siano le forze di origine puramente elettrica quando nella fase iniziale del fenomeno la conducibilità del gas è piccola; e più in generale ancora queste tutte le volte che essa conducibilità assume al decrescere della pressione valori piccoli. E qui è bene ricordare che, dalle varie esperienze in proposito risulta che l'andamento della conducibilità in funzione della pressione ha i caratteri indicati dal diagramma ⁽¹⁾ qui riportato.

Sebbene la presenza del minimo compreso fra *D* e *B* sia ancora discussa (ritenendosi dovuta a cause d'errore introdotte dal metodo di sperimentare)



tuttavia risulta in molte ricerche: anche le recenti ricerche di J. J. Thomson sembrano ammettere la presenza di un tale minimo. Anzi, questo Autore ha notato che, nell'intervallo di pressione corrispondente, la scarica presenta fenomeni che troverebbero l'interpretazione più corretta, col supporre che in questa fase le forze elettriche siano di origine prevalentemente statica.

Infatti egli ha osservato che la scarica subisce notevoli variazioni di aspetto per l'approssimarsi di un conduttore, ma in modo indipendente dal particolare valore della permeabilità magnetica dallo stesso posseduta.

Dopo diversi tentativi, nei quali vennero modificate le dimensioni del recipiente di scarica, il numero delle spire dell'avvolgimento ed il loro diametro ho potuto confermare queste vedute col seguente dispositivo: Ad un pallone di grande diametro (cm. 16) erano avvolte, in corrispondenza di un piano diametrale, 8 aspire di filo di rame, abbastanza vicine (estensione cm. 3.2).

(1) Riprodotto dalla pubblicazione di R. WACHSMUTH e B. WINAVER, « Ann. d. Physik », 42, p. 585. 1913.

La sorgente di energia elettrica era una macchina del tipo Töpler - Holtz opportunamente azionata. Come spinterometro usavo quello della macchina stessa, ma in certi casi ne sostituii uno con vite micrometrica ed elettrodi di zinco. Le bottiglie di Leyda in numero di quattro in serie erano delle dimensioni: $r = \text{cm } 12$, $l = \text{cm } 28$, altezza complessiva $\text{cm } 58$, spessore del vetro $\text{cm } 0,5$. La pompa per il vuoto una Gaede a diffusione di vapori di mercurio. La canalizzazione totalmente in vetro ed il pallone separato dalla pompa da un rubinetto ad ottima tenuta. I fenomeni che descriverò non mi risulta che siano stati osservati da altri sperimentatori in precedenza.

a) Quando la pressione del gas era molto bassa (colorazione della scarica bianchiccia) per un intervallo esplosivo di circa un centimetro, l'anello luminoso si scindeva in due anelli giacenti in piani paralleli ai piani delle spire dell'avvolgimento. Tutto avveniva come se (osservando lateralmente la scarica) prendesse origine uno spazio oscuro dell'ampiezza di $\text{cm. } 1,5$ circa.

In queste condizioni riducendo l'eccitazione (col diminuire l'intervallo esplosivo del circuito oscillante) i due anelli si avvicinavano ed in fine si rifondevano insieme, per darne un solo più pallido e giacente totalmente nello spazio compreso fra la prima e l'ultima spira dell'avvolgimento.

Aumentando invece l'eccitazione lo spazio oscuro si allargava, vale a dire i due anelli luminosi si distanziavano. Tuttavia, al crescere dell'eccitazione siccome gli anelli si rinforzavano in luminosità e crescevano di spessore, si vedevano ricombinare malgrado l'iniziale repulsione. In queste condizioni la scarica riempiva quasi tutto il pallone, e sembrava risultare dalla justapposizione di parecchi anelli luminosi, che in certi istanti apparivano separati da sottili ed instabili spazii oscuri.

Lasciando l'intervallo esplosivo costante questi effetti si presentavano al decrescere della pressione.

b) Se, approfittando dei fenomeni fisiologici della *skin-effect* erano poste in corto circuito con le dita la prima e l'ultima spira dell'avvolgimento (il filo era scoperto ma isolato dal pallone perchè appoggiato su cavalletti di ebanite masticiate alla sua superficie esterna) la scarica cessava completamente. La scomparsa non avveniva se invece si ponevano in corto circuito, sempre con le dita, due altre spire (non contigue) qualsiasi.

Tutto succedeva come se la prima e l'ultima spira agissero da elettrodi esterni al tubo.

Tuttavia, sia questo fenomeno che l'altro precedentemente descritto (e gli altri che descriverò più avanti) si presentavano solo per questo regime di pressione ed eccitazione esterna. Se l'intervallo esplosivo era molto accresciuto (o la pressione era più alta o più bassa) questi effetti non si presentavano più.

c) Ponendo a terra una spira, e preferibilmente due contigue, in corrispondenza al punto toccato si formava uno spazio oscuro, cioè l'anello era scisso in due in maniera analoga al caso a).

d) Se l'intervallo esplosivo era molto ridotto (poco più di 2 mm) la scarica mutava subitamente di aspetto. Lo splendore cessava improvvisamente subentrando una luminosità leggermente verde, staccata dalle parti e con carattere filiforme. Osservata lateralmente si mostrava più estesa nel senso longitudinale, assumendo la forma di una superficie di rotazione con una gola in corrispondenza dell'avvolgimento.

La concavità di questa gola dipendeva dall'eccitazione esterna: cresceva col cescere di questa. Anzi, diminuendo l'eccitazione, per un opportuno valore dell'intervallo esplosivo, era possibile ottenere una inversione della curvatura. Tutto avveniva come se, per addurre un esempio, dalla superficie di un catenoide si passasse a quella di un cilindro e da questa a quella di un elissoide di rotazione.

In questa fase ho osservato alcuni fenomeni che mi fanno ritenere lo stato della conducibilità del gas analogo a quello definito dal Thomson « sensibile » ;

e) Ed infine, è questo un fenomeno veramente singolare, diminuendo ancora l'eccitazione tutto il pallone si riempiva di una luminosità verde pallida (come fluorescenza) che persisteva anche cessata l'eccitazione. Osservando in buona oscurità ho notato che questa luce residuale durava per un quarto d'ora circa. Non ho potuto accertarmi ancora se in questo fenomeno si ha da fare con la luce residuale del gas (*nachleutens*) oppure con un fenomeno di fosforescenza del vetro. In ogni caso esso è certamente interessante, nel primo soprattutto per la sua lunga durata.

III. Tutti questi fenomeni mostrano sufficientemente che in questa fase di conducibilità del gas le forze sono di origine puramente elettrica.

Potrebbe sorgere il dubbio che ponendo in corto circuito la prima e l'ultima spira dell'avvolgimento venisse completamente derivata l'energia, però in questa ipotesi la scarica non dovrebbe riapparire per qualunque pressione ed eccitazione, ciò che non risulta dall'esperienza.

Nella ipotesi poi di pure forze d'induzione elettromagnetica resterebbe inesplicabile la formazione di spazii oscuri del tipo descritto, giacchè le traiettorie elettroniche sono curve giacenti in piani perpendicolari all'asse, ciò almeno nello spazio compreso fra le spire centrali dell'avvolgimento.

Il prof. La Rosa suggerisce l'idea che, per quella fase della conducibilità del gas, nel sistema si possano formare onde stazionarie e gli spazii descritti corrispondano a regioni nodali di armoniche superiori.

Questa spiegazione si accorderebbe, sotto un certo aspetto, a quanto si è supposto in principio e cioè che in questo regime di conducibilità del gas prevale la causa ammessa dal Lehmann, vale a dire delle forze elettriche longitudinali.

Infatti se si pensi che nelle regioni nodali le forze elettriche sono nulle in ogni istante, mentre nelle regioni contigue sono dirette in senso contrario, si trae che in queste regioni nodali gli elettroni sono spinti per

mezza oscillazione, gli uni contro gli altri, e perciò ivi si determina un eccesso di elettroni liberi.

Nelle sue recenti ricerche J. J. Thomson ha mostrato che se due correnti di elettroni sono dirette in senso contrario e si incontrano in un punto, ivi si determina uno spazio oscuro. L'A. ritiene che questo fenomeno sia dovuto ai corpuscoli eccitati i quali possedendo un più grande momento elettrostatico hanno maggiore elettroaffinità; perciò in atmosfera di elettroni liberi causano una considerevole riduzione originando ioni negativi. Per il ritorno del sistema « corpuscolo-elettrone » (eccitato) allo stato normale saranno emesse radiazioni di diversa lunghezza di onda di quelle che poteva emettere il solo corpuscolo eccitato, e queste radiazioni possono eventualmente non appartenere al dominio visibile dello spettro.

Di conseguenza, nel nostro caso, nella successiva semi-oscillazione (cui le forze allontanerebbero gli elettroni dalla regione nodale) il numero degli elettroni liberi sarà ridotto, e perciò sarà più piccolo il numero di urti seguito da emissioni.

Naturalmente più approfondite indagini occorrono ancora per decidere della validità di questa ipotesi.

Non è improbabile che con questo meccanismo supposto dal Thomson per spiegare questi spazi oscuri, ne possa coesistere un altro sul tipo di quelli ammessi per spiegare l'effetto Raman. E cioè, che nell'urto l'elettrone ceda, od assorba, una frazione di energia del sistema emittente.

I due casi corrisponderebbero agli urti anelastici e superelastici rispettivamente, questi ultimi sinora non accertati sperimentalmente, ma la cui esistenza è prevista teoricamente. Nel primo caso la radiazione si sposta verso la parte più, nel secondo verso la meno, rifrangibile dello spettro uscendo dal dominio visibile.

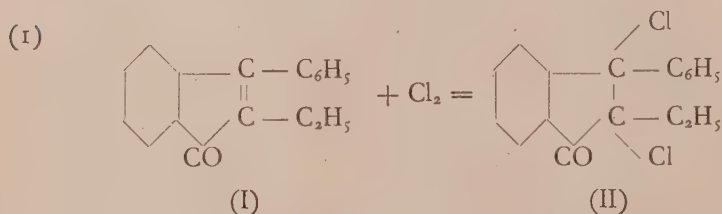
Chimica. — *Studi intorno agli indoni.* — Nuove reazioni dell' α etil- β fenil-indone e dell' α metil- β fenil-indone⁽¹⁾. Nota X di REMO DE FAZI e F. PIRRONI, presentata⁽²⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

Per azione dell'acido solforico sull'etere etilico dell'acido β -difenil-lattico si possono ottenere due difenil-truxoni⁽³⁾ e da questi i corrispondenti stereoisomeri facendo agire le radiazioni emesse da una lampada, in quarzo, a vapori di mercurio⁽⁴⁾. Invece i dimetil-difenil-truxoni si ottengono soltanto facendo agire le radiazioni ultraviolette o la luce solare, sull' α -metil- β -fenil-indone⁽⁵⁾. Mentre, l' α -etil- β -fenil-indone non dà i dietil-difenil-truxoni nè con l'acido solforico, nè con le radiazioni fino ad ora sperimentate.

Si è perciò tentato di fare la sintesi dei dietil-difenil-truxoni facendo agire il rame sull' α -cloro- α -etil- β -cloro- β -fenil-idrindone; e poichè questo non era conosciuto è stato preparato facendo gorgogliare la quantità necessaria di cloro, in una soluzione di α -etil- β -fenil-indone in tetracloruro di carbonio anidro.

Nelle diverse esperienze eseguite è stato osservato che variando la temperatura da 5° a 20°-25° si ottengono risultati differenti. A bassa temperatura si ha quasi soltanto l' α -cloro- α -etil- β -cloro- β -fenil-idrindone (II), mentre a 20°-25° si formano composti contenenti un solo atomo di cloro per ogni molecola di α -etil- β -fenil-indone.

Poichè uno di noi⁽⁶⁾, in altre esperienze, aveva già notato il particolare comportamento del doppio legame di alcuni indoni, abbiamo pensato trattarsi di una nuova serie di composti; e lo studio particolareggiato, benchè ancora incompleto, ha dimostrato che la reazione procede secondo le equazioni seguenti:



(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Farmaceutica della R. Università di Messina.

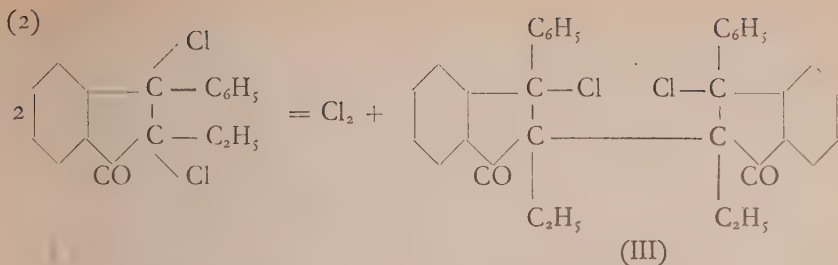
(2) Nella seduta del 15 dicembre 1929.

(3) R. DE FAZI, «Rend. Soc. Chim. Ital.», serie 2^a, vol. VII, p. 20; «Gazz. Chim. Ital.», 49, II, p. 253, 1919; 54, p. 85, 1924, e «Rend. Acc. Lincei», vol. 32, serie 5^a, II, p. 227, 1923.

(4) R. DE FAZI, «Gazz. Chim. Ital.», 54, p. 1000, 1924, e 57, p. 551, 1927.

(5) R. DE FAZI, loc. cit.

(6) R. DE FAZI, loc. cit.

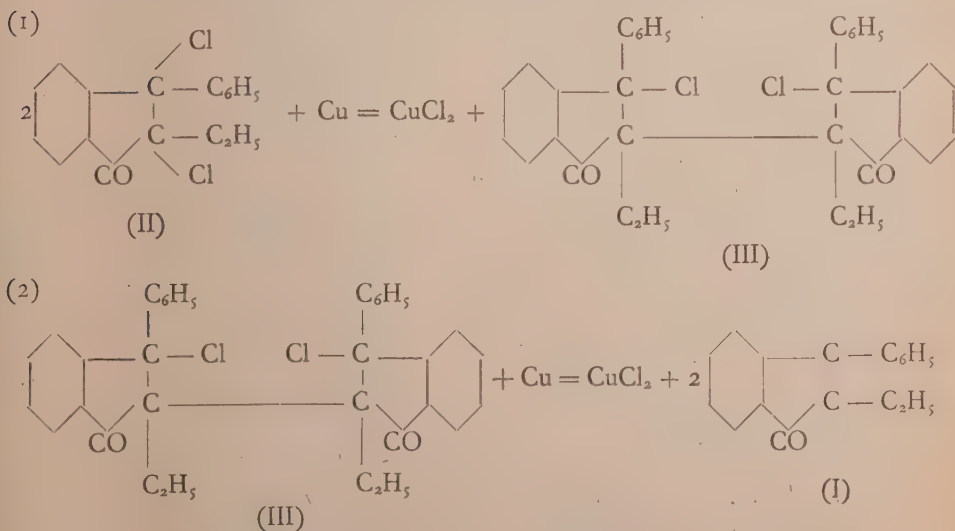


La labilità dell'atomo di cloro in posizione α , dell' α -cloro- α -etil- β -cloro- β -fenil-idrindone è tale che già alla temperatura di 20° - 25° questo si trasforma in un altro corpo che è il primo di una nuova serie di composti (III) assai interessanti anche per il loro comportamento, e cioè degli α - α' -alchil- β - β' -dicloro- β - β' -fenil-di-idrindoni.

Questo risultato poteva far credere sicura la sintesi dei dietil-difenil-truxoni eliminando gli altri due atomi di cloro. Invece con nostra sorpresa, ma non per questo con minore interesse, i tentativi eseguiti ci hanno sempre condotto all' α -etil- β -fenil-indone.

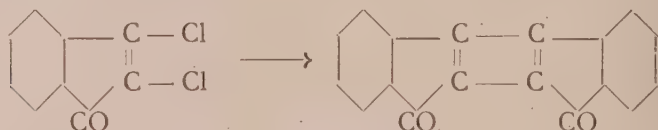
Basta lasciare per circa 40 giorni l' α -etil- α -cloro- β -fenil- β -cloro-idrindone (II), alla temperatura di 20 - 30° , per ottenere già dei cristalli di α -etil- β -cloro- β -fenil- α' -etil- β' -cloro- β' -fenil-di-idrindone (III) ed anche di α -etil- β -fenil-indone (I).

Se si fa agire il rame sul composto (II) e sul composto (III) non si ottengono i dietil-difenil-truxoni, ma dal primo si ha dell' α -etil- β -cloro- β -fenil- α' -etil- β' -cloro- β' -fenil-di-idrindone (III) e dell' α -etil- β -fenil-indone (I); e dal secondo (III) soltanto dell' α -etil- β -fenil-indone (I):



Quindi quando si toglie l'atomo di cloro in posizione $-\beta-$ e $-\beta'-$, si spezza il legame fra gli atomi di carbonio $-\alpha-$ e $\alpha'-$, e si riottiene l'indone.

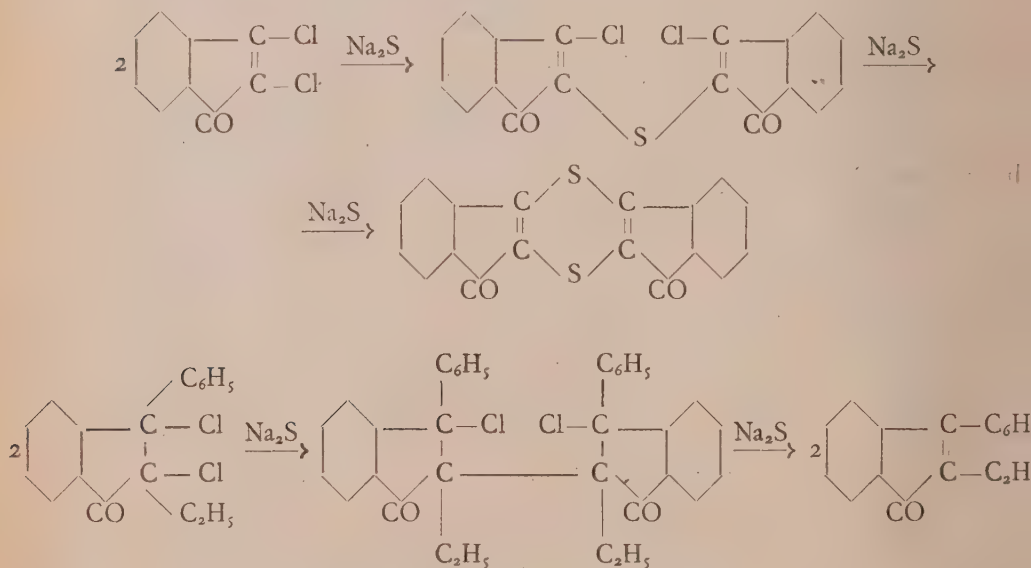
In modo differente reagisce il dicloro-indone il quale per azione del rame dà il truxen-chinone ⁽¹⁾:



Questi risultati con quelli ottenuti anche dall' α -metil- β -fenil-indone, dimostrano che non è possibile la sintesi dei corrispondenti truxoni dagli α - β -dicloro- α -alchil- β -fenil-idrindoni, differentemente da quanto avviene per il dicloro-indone.

È stato anche verificato un comportamento analogo facendo agire il solfuro di sodio sull' α -cloro- α -etil- β -cloro- β -fenil-idrindone.

Infatti mentre si possono ottenere dei tioderivati per azione del solfuro di sodio sul dicloro-indone ⁽²⁾, sull' α -etil- α -cloro- β -fenil- β -cloro-idrindone, la reazione va in modo simile a quella osservata col rame:



In eguale modo reagisce l' α -metil- β -fenil-indone con il cloro, il rame, ed il solfuro di sodio.

(1) BRASS K. e MOSL G., «Ber.», 59, I, p. 1266, 1926.

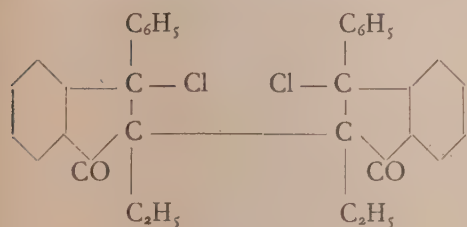
(2) BRASS K. e MOSL G., loc. cit.

Nelle condizioni descritte nella parte sperimentale⁽¹⁾ dall' α -etil- β -fenil-indone, per azione del cloro a 5°, si ottiene quasi soltanto l' α -cloro- α -etil- β -cloro- β -fenil-idrindone che fonde a 96-97°, mentre a 20-25° si hanno più composti dai quali si riescono a separare due corpi, fondenti a 141-142° e a 148-149°, che sono due dei possibili dicloro- α -etil- β -fenil- α' -etil- β' -fenil-diidrindoni.

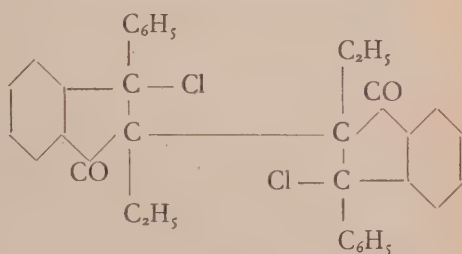
Dall' α -metil- β -fenil-indone nelle stesse condizioni si ha l' α -cloro- α -metil- β -cloro- β -fenil-idrindone che fonde a 92-93° e due dei dicloro- α -metil- β -fenil- α' -metil- β' -fenil-diidrindoni con i punti di fusione 126-127° e 131-132°. Invece con il bromo sia operando a 5° come a 20-25° non si è, per ora, riusciti a separare nè l' α -bromo- α -etil- β -bromo- β -fenil-indone, nè l' α -bromo- α -metil- β -bromo- β -fenil-idrindone. Ma dal primo indone due bromo derivati fondenti a 107-108° e 149-150° corrispondenti a due α -etil- β -bromo- β -fenil- α' -etil- β' -bromo- β' -fenil-diidrindoni; e per l'altro indone un solo composto con punto di fusione 143-144° e cioè uno degli α -metil- β -bromo- β -fenil- α' -metil- β' -bromo- β' -fenil-diidrindoni.

Sono corpi instabili che tendono a trasformarsi facilmente nei corrispondenti indoni, sia alla temperatura ordinaria, come per azione del rame o del solfuro di sodio.

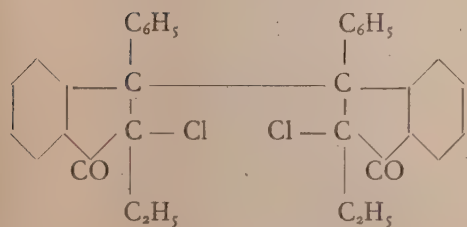
Ai composti ottenuti, col cloro o col bromo, appartenenti alla nuova serie dei diidrindoni si possono attribuire le seguenti formule di costituzione:



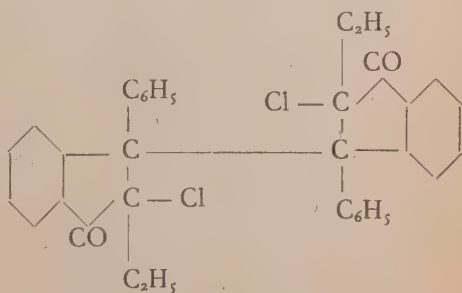
A



A₁



B



B₁

(1) La Nota completa sarà pubblicata sulla « Gazzetta Chimica Italiana ».

tudinali vale, secondo il Mohorovicic, $5,55 \pm 0,05$ a 5 km.; e solo $5,7 \pm 0,2$ a 57 km. di profondità.

Si comprende che in questo strato tra 5 e 57 km. possono fare buona prova i cosiddetti metodi di prima approssimazione, tra i quali il più semplice deriva notoriamente dall'espressione:

$$(1) \quad \chi = \sqrt{s^2 - \Delta^2} = \sqrt{t^2 V^2 - \Delta^2}$$

nella quale χ è la profondità, t il tempo che impiega il raggio sismico a venire dall'ipocentro alla stazione, V la velocità e Δ la distanza epicentrale della stazione. Siccome il tempo all'ipocentro non è conosciuto, si ricorre ai dati di due stazioni, nel qual caso dalla:

$$\sqrt{\chi^2 + \Delta_1^2} - \sqrt{\chi^2 + \Delta^2} = V(t_1 - t)$$

si ricava:

$$(2) \quad \chi = \sqrt{\left(\frac{\Delta_1^2 - \Delta^2 - 5,5^2 (t_1 - t)^2}{2 \times 5,5 (t_1 - t)} \right)^2 - \Delta^2} \quad (1)$$

nella quale Δ , è la distanza epicentrale della seconda stazione, t e t_1 i tempi d'arrivo.

Questo metodo noi applicheremo ai terremoti laziali, dove le condizioni per la validità sua sono tutte adempiute. Infatti le stazioni d'osservazione di Rocca di Papa e di Roma sono prossime all'epicentro; l'area centrale può localizzarsi con discreta precisione perchè i colli laziali sono abbondantemente cosparsi di abitati; infine i detti due osservatori di Rocca di Papa e Roma, per essere muniti di apparati radio, possono garantire i dati orari ai due decimi di secondo.

I terremoti che ho preso in esame sono tre: quello del 10 aprile 1911 con epicentro a NW del vulcano, tra Marino, Grottaferrata e Ciampino, quindi a circa $\Delta = 6$ km dai sismografi di Rocca di Papa, ed a $\Delta_1 = 18$ km da quelli del R. Ufficio Centrale di Meteorologia e Geofisica di Roma; quello del 26 dicembre 1927 con epicentro presso a Nemi, a circa $\Delta = 4$ km da Rocca di Papa e $\Delta_1 = 27$ km da Roma; quello del 23 marzo 1928 con epicentro su per giù coincidente con quello del terremoto del 10 aprile 1911, e quindi come quello fra Albano, Castel Gandolfo e Marino.

I tempi di arrivo dei primi tremiti preliminari alle due stazioni sono dati dalla seguente tabellina:

Macrosismo del	Rocca di Papa	Roma
10 aprile 1911	10 ^h 43 ^m 39 ^s	10 ^h 43 ^m 41 ^s
26 dicembre 1927	16 ^h 6 ^m 14 ^s	16 ^h 6 ^m 17 ^s .7
23 marzo 1928	7 ^h 44 ^m 50 ^s	7 ^h 44 ^m 52 ^s

(1) K. v. SEEBACH, *Das Mitteldeutsche Erdbeben von 6 märz 1872*. Leipzig, 1873.

Questi tempi, regolati come fu detto sulle trasmissioni radiotelegrafiche, sono approssimati ai due decimi di secondo.

Introducendo nella formola (2) per Δ e Δ_1 le distanze epicentrali; per V la velocità delle onde longitudinali che noi riterremo costante eguale a 5,5 km/sec. e per t e t_1 i tempi d'arrivo scritti sopra, nei tre casi avremo:

pel macrosismo del 10 aprile 1911	$z = 4.65$ km.
» » » 23 marzo 1928	$z = 4.65$ »
» » » 26 dicembre 1927	$z = 6.15$ »

in media una profondità di 5.15 km.

Non è nello scopo della Nota di discutere l'errore che si riverbera su queste profondità per via degli errori che affettano i tempi e le distanze epicentrali. Rarissimamente si hanno dati più approssimati, e quindi l'ordine di grandezza è certamente garantito. Passo piuttosto a discutere queste profondità dal lato delle cause dei macrosismi stessi.

Sulle cause che possono avere dato luogo a questi terremoti le ipotesi sono due: o si tratta di assestamento (sprofondamento, rovinio, schiacciamento di rocce), o si tratta di attività residua del dormiente vulcano.

Il prof. G. Agamennone, Direttore del R. Osservatorio di Rocca di Papa, assai competente nella partita e che già prima di me ebbe ad attribuire ai terremoti laziali delle piccole profondità ipocentrali, si schiera per la prima ipotesi, ritiene cioè trattarsi d'assestamento di strati depauperati sia per corrosione, sia per vuoti lasciati dalle acque, dalle lave e dai gas nella montagna vulcanica ⁽¹⁾.

L'ipotesi che il terremoto provenga qui da sostegno-manco spiega la diversa localizzazione degli epicentri e la lunga sismicità che mostrano in generale i vulcani spenti, ed in particolare il vulcano laziale. La serie delle piccole scosse sarebbe conseguenza della varia ubicazione delle cavità, della varia resistenza delle rocce e del fatto che le acque termali e sulfuree che circondano gli apparati vulcanici spenti continuano anche oggidì a produrre dei vuoti per erosione e trasporto. È anche un'ipotesi accettata assai volentieri, giacchè, per essere antitetica a quella dei terremoti per esplosione, esclude possano tali terremoti essere premonitori di un risveglio del vulcano.

Se questo modo di vedere è esatto, dovrebbero le profondità trovate non superare di troppo quelle critiche alle quali la pressione del peso del materiale soprastante arriva a superare la resistenza allo schiacciamento delle rocce corrose o delle pareti rocciose che limitano i supposti vuoti.

(1) G. AGAMENNONE, *Il terremoto Laziale del 10 aprile 1911*. «Rend. R. Acc. dei Lincei», vol. XX. 1911, 2° sem., p. 13 e vol. XXI, 1912, 1° sem. p. 206. Anche «Bollettino Soc. Sismol. It.», vol. XII, 1907, p. 26.

Ad una profondità minore le cavità possono sussistere, le rocce possono tenere, ad una profondità maggiore non lo possono più.

Ho voluto calcolare queste profondità critiche, e perciò mi sono valso delle seguenti considerazioni.

Faccio centro in uno dei fochi ipocentrali alla profondità trovata di circa 5.15 km e con raggio R_1 eguale a questa profondità descrivo una sfera che oscula nell'epicentro E la superficie sferica terrestre. La figura mostra la sezione verticale AB di questa sfera. Con centro lo stesso foco sismico, descrivo una piccola sfera di raggio R_0 concentrica alla precedente. La sua superficie limita la volta il cui crollo, nell'ipotesi di un terremoto per sostegno-manco, genera il macrosismo. Sulla superficie esterna della sfera piccola, ad es. in D, la pressione sia P, e nella cavità sia nulla o quasi nulla relativamente a P. In queste circostanze, in un punto alla distanza r tra D ed E, se N è la resistenza radiale, N' la tangenziale, la differenza $N' - N$ specifica la resistenza del materiale a quella profondità.

Si dimostra nei testi di meccanica ⁽¹⁾ che posto $\beta = \frac{R_0}{R_1}$, si avrà il crollo non appena la pressione P arriva ad un valore per il quale vige la relazione:

$$(3) \quad N' - N = \frac{P}{1 - \beta^3} \frac{3 R_0^3}{2 r^3}.$$

Presso alla superficie della cavità, essendo $r = R_0$ ed $N = 0$, la resistenza allo schiacciamento sarà eguale alla resistenza tangenziale, e prenderà il valore

$$N' = \frac{3}{2} \frac{P}{1 - \beta^3},$$

da cui

$$(4) \quad P = \frac{2}{3} N' (1 - \beta^3).$$

Per β piccolissimo, P assume un valore, eguale ai 2/3 della resistenza della roccia allo schiacciamento. Per cavità d'altra forma bastano pressioni minori. Per una cilindrica, basta che la pressione esterna sia eguale o maggiore della metà di detta resistenza.

Adesso i manuali di Ingegneria ci dicono che nelle rocce più dure, ad esempio i basalti, tale resistenza N' non supera le due tonellate per cm^2 ciò che significa che sotto una pressione esterna eguale o maggiore di due mila atmosfere per cm^2 , cessa attorno alla cavità, di esistere la struttura macrolitica ⁽²⁾.

(1) H. BOUASSE, *Résistance des matériaux* § 222. *Séismes et sismographes*. Delagrave, Paris, 1927, p. 297.

(2) L'altra resistenza radiale N, nelle rocce dure e compatte, può andare fino a cinque mila atmosfere/ cm^2 .

Viene la conseguenza che sotto una pressione esterna eguale o maggiore di $\frac{2}{3} \cdot 2000$, dico 1340 atmosfere/cm² non può esistere una cavità di forma sferica fosse anche la sostanza costituita di durissimo basalto. E tale pressione si riduce a 670 atmosfere per una cavità di forma cilindrica ⁽¹⁾.

Ritorniamo ai terremoti laziali, e supponiamo che presso all'ipocentro le rocce profonde abbiano delle cavità a debole pressione interna ⁽²⁾. Consideriamone una dal raggio $R_0 = 50$ metri alla profondità media sopra-trovata di 5.15 km. Riteniamo eguale a 2.8 il peso specifico della roccia. La pressione esterna (idrostatica) sarà data da

$$(5150 - 50) \frac{2.8}{10} = 5.100 \frac{2.8}{10} = 1428 \text{ atmosfere/cm}^2.$$

Troviamo cioè una pressione vicinissima, ma superiore a quella critica di 1340 atmosfere/cm² quale abbiamo veduto essere necessaria e sufficiente pel crollo. La differenza in più, od in meno, si giustifica in quanto possono esistere volte rocciose che distribuendo la pressione ai contorni, proteggono la cavità del peso integrale degli strati sovrastanti.

Questa ottima concordanza non elimina talune obiezioni che si possono fare al processo. L'espressione di P è quasi indipendente dalla grandezza della cavità, quasi indipendente da R_0 . Ciò dice che una cavità, sia pur piccola, non può sussistere oltre quella pressione, oltre cioè quella profondità di 5-6 km. Stando così le cose, il crollo non potrà interessare quel gran volume che l'energia dei macrosismi fa pensare, giacchè non appena a quella profondità una cavità si inizia, subito deve sparire per schiacciamento. La supposizione che la cavità contenga gas sotto pressione non può evitare il crollo delle pareti, giacchè qui non stà in giuoco la resistenza normale delle pareti, bensì quella tangenziale.

Per via di queste obiezioni non è ancora sicuro che la causa dei terremoti laziali sia da ascrivere a cavità che cedono. Questi terremoti possono come molti altri essere il risultato di pressioni e tensioni non tutte identificantesi col peso del materiale sovrapposto.

(1) Il marmo si deforma sotto 500 atmosfere/cm² e la deformazione è proporzionale al tempo.

(2) Le cavità possono essersi formate per via di antichi scolamenti lavici. Nel periodo effusivo la lava può essersi aperta la via nel suolo lungo canali a percorso curvilineo, come nella fig. 2. Per raffreddamento si sarà formata una crosta tutto all'intorno entro la quale la lava avrà fluito come in una guaina. Se il rivolo ebbe traiettoria parabolica, a mo' di sifone, e ad un tratto venne a mancare la lava, la discesa per gravità nel ramo lungo avrà lasciato nella parte superiore dei vuoti. Di questi vuoti se ne rinven-gono anche oggi-giorno ed il loro processo fu descritto dal prof. A. MALLADRA in una Nota dal titolo: *Grotta di scolamento lavico negli efflussi Vesuviani nel 1858*. « Boll. Soc. Naturalisti in Napoli », vol. XXX, 1917, pp. 109-123. Possono le caverne anche essersi formate per erosioni dovute alle acque termali e sulfuree.

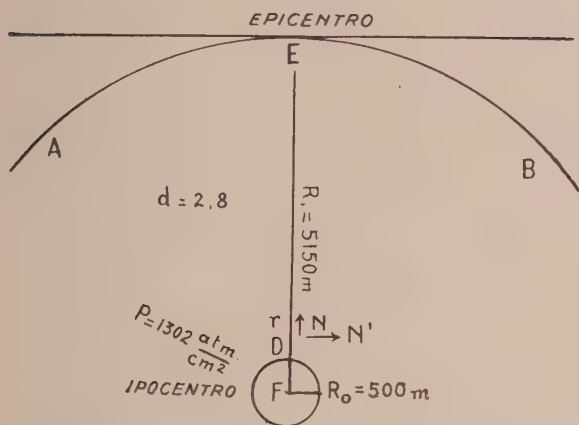


Fig. 1. — Calcolo della pressione necessaria perchè una cavità, nella crosta terrestre, cessi di esistere.

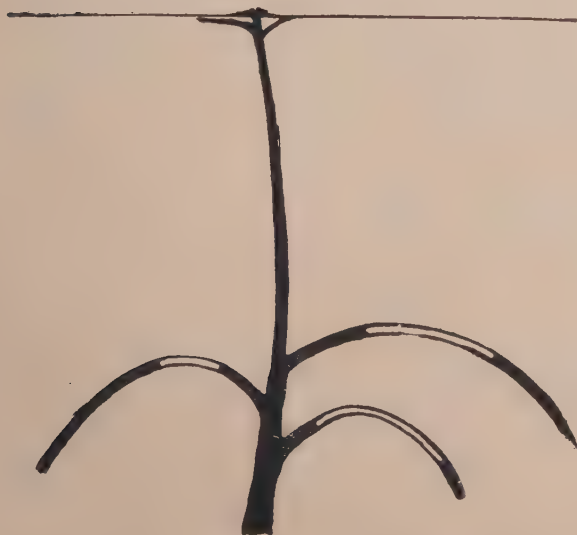


Fig. 2. — La formazione di cavità per scolamenti lavici.

Non si esce dall'argomento aggiungendo che l'eseguito calcolo è contrario all'idea che le fratture della crosta terrestre possano discendere aperte a grandi profondità. Alle profondità calcolate dovrebbero riempirsi del materiale delle pareti rocciose rese plastiche dal proprio peso⁽¹⁾ (o scorrevoli i loro cristalli costituenti) o dovrebbero saldarsi per penetrazione e solidificazione di magmi divenuti improvvisamente liquidi per diminuita pressione. Il suddetto calcolo dice ancora che gli incameramenti da cui escono i gas e vapori dei soffioni, delle fumarole, dei geysers, ecc., non possono superare di molto la profondità di circa 6 km.

Le obiezioni all'ipotesi che il terremoto avvenga per sostegno-manco hanno maggior peso nei terremoti dell'Europa Centrale, i cui ipocentri furono calcolati profondi 40-45 km (ad esempio quelli assai studiati dello Schwäbische Alb del 16 novembre 1911 e 20 luglio 1913). A quelle profondità per la pressione, per l'alta temperatura e per la pastosità della roccia, le cavità non sono possibili⁽²⁾. Solo fenomeni bradisismici, orogenetici e d'intrusione di magmi possono essere la causa di quei terremoti.

Mentre in Germania le profondità ipocentrali raggiungono i 40-45 km. più a sud presso le Alpi le profondità, nei terremoti Svizzeri ed Austriaci del 15 gennaio 1914; del 12 marzo 1916; del 28 novembre 1923, diminuiscono fino a 36, 34, 30 e 26 km. Più a sud ancora tali profondità si riducono a 12, 9, 5-6 km. nei terremoti di Avezzano 13 gennaio 1915, di Messina 28 dicembre 1908; del Lazio suelencati⁽³⁾.

Fosse vero che in Europa la superficie luogo di epicentri sismici si accosta alla superficie terrestre procedendo verso le terre vulcaniche del mezzogiorno, fosse vero, che tale superficie luogo di ipocentri sismici corre parallela a quella luogo di depositi magmatici attivi, vigerebbe ancora il sospetto che i nostri terremoti siano della stessa natura di quelli che in tempi remoti occasionarono i fenomeni del vulcanismo passato; e che dessi al presente preparino le modificazioni cui a lunga scadenza andrà soggetta la nostra Penisola.

Geologia. — *A proposito di una sezione geologica nell'Appennino Reggiano.* Nota di M. ANELLI, presentata dal corrisp. P. VINASSA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Vedi nota 1 di p. 78.

(2) Alla profondità di 40 km. la pressione idrostatica eguale a 11.200 atmosfere/cm² circa, è più che doppia della resistenza delle rocce più dure alla compressione, resistenza che l'esperienza dice valere cinque mila atmosfere per cm².

(3) Che a nord la crosta sia maggiormente consolidata (per eguale densità della roccia modulo elastico maggiore) si può oltre che dalla mancanza di vulcani attivi, anche arguire dal fatto che a nord le velocità sismiche nel guscio soprastante all'epicentro sono maggiori: arrivano a 6.0 km/s presso Gottinga e valgono 5.4 nelle Alpi. B. GUTENBERG, *Handbuch der Geophysik*, Bd. IV, p. 221. Berlin, G. Borntraeger, 1929.

Geologia. — *Problemi di tectonica lombarda.* Nota di G. B. CACCIAMALI, presentata dal Corrisp. G. ROVERETO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Mineralogia (Petrografia). — *La lava dell'eruzione dell'Etna del 1928.* Nota di S. DI FRANCO, presentata dal Socio F. MILLOSEVICH.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Zoologia. — *Mutamento irreversibile nella viscosità delle uova di « Bombyx mori L. »*⁽¹⁾. Nota di M. TIRELLI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Dalle uova di *Bombyx mori* Pigorini⁽³⁾ è riuscito ad estrarre il succo, libero da gusci, con uno speciale apparecchio applicabile ad una pressa a leva o ad una pressa di Buchner. Del succo estratto ha determinato la viscosità con un viscosimetro a capillare (viscosimetro Ostwald poi Scarpa), sia lasciandolo integro così quale si ricava dallo schiacciamento delle uova, sia dopo aver separato per centrifugazione i grassi ed i brandelli di tessuti più leggeri, dalla soluzione colloidale glicogeno-proteica che costituisce il centrifugato, e nella quale questi sono emulsionati o sospesi. In ambedue i casi però i valori relativi restano i medesimi.

A parità di età delle uova, e in condizioni di conservazione uguali, la viscosità dei succhi, sia interi che centrifugati, si è dimostrata caratteristica per le varie razze, molto alta nelle orientali, più bassa nelle indigene; e, in una stessa razza, direttamente proporzionale all'età delle uova. Dal momento della deposizione delle uova, la viscosità cresce continuamente, continua a crescere anche durante il periodo di diapausa invernale che pur segna una sosta nell'evoluzione morfologica dell'embrione, e fortemente cresce poi alla ripresa dello sviluppo, nella incubazione primaverile delle uova che porta alla loro schiusura.

Il succo estratto dalle uova è certamente una sostanza morta, epperò, la viscosità misurata su di esso non può darci alcun indizio sulla viscosità assoluta dei materiali fluidi contenuti nell'uovo vivente⁽⁴⁾. Ma nelle uova,

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia e Fisiologia comparate della R. Università di Genova e nella Staz. Baciologica di Padova.

(2) Nella seduta del 5 gennaio 1930.

(3) L. PIGORINI, « Ann. R. Staz. Baciol. », Padova, 44, 1925. *Contributo alla fisiologia dell'uovo negli insetti*. In stampa per « Ann. Staz. Sper. agrarie It. ».

(4) Quantunque esista una notevole corrispondenza fra la viscosità di questi succhi certamente morti, e la viscosità misurata da altri AA. con metodi che non dovrebbero,

sia durante il loro ciclo vitale, sia in seguito a trattamenti sperimentali, si determinano condizioni di cui sono un indice le variazioni dei caratteri chimico-fisici del succo, non vivente, estratto da esse. E, pur non potendo stabilire quale rapporto intercorra tra le variazioni del chimismo e dei caratteri chimico-fisici dell'uovo vivente da una parte, e le variazioni dei caratteri chimico-fisici del succo dall'altra, siamo autorizzati a ritenere che una variazione riscontrata in questi ultimi indichi una analoga variazione nell'uovo vivente.

Così ugualmente in un preparato istologico, le diverse strutture nucleari e plasmatiche che osserviamo non sono tali quali esistono nelle cellule vive, ma piuttosto sono neoformazioni, o modificazioni almeno, prodotte dal fissativo (1). Nonostante ciò tutti gli istologi si ritengono, e giustamente, autorizzati a credere che a variazioni osservate nelle strutture degli elementi fissati, corrispondano analoghe variazioni negli elementi vivi.

Fattori chimici o fisici diversi agenti sulle uova, possono indurre variazioni nella viscosità del succo: così il trattamento con vapori di cloroformio, con anidride carbonica, con ammoniacca e col calore. Particolarmente interessante è l'aumento di viscosità che producono l'ammoniaca ed il calore. Ha visto Pigorini che, trattando le uova con vapori di ammoniacca, si ottiene un forte aumento della viscosità, mentre il 20 % delle uova schiude ugualmente; scaldando d'altra parte le uova ad una temperatura e per un tempo compatibilissimi con la loro vitalità, la viscosità aumenta pure in maniera considerevole.

Come si comporterà in seguito la viscosità di queste uova riscaldate? Si avrà una regolazione completa o incompleta dell'alterato carattere fisico-chimico, o regolazione non si avrà affatto? In questo ultimo caso noteremo delle irregolarità nello sviluppo di queste uova a succo più viscoso: ritardi o anticipi nella schiusura, comparsa di fenomeni teratologici nelle larve schiuse, anomalie nel ciclo vitale dell'organismo? Identici quesiti possiamo porci per le uova che hanno subito un trattamento con vapori di ammoniacca. Pigorini iniziò delle esperienze di orientamento dirette in questo senso,

secondo essi, menomare la vitalità del citoplasma. Ad es. Heilbronn, col suo metodo magnetico, nei tessuti plasmodiali di Mixofite, trova una viscosità che è da 9 a 12 volte quella dell'acqua. (Molto simile quindi a quella indicata da Pigorini per i succhi interi delle uova del *Bombyx Mori*). Ciò dimostra, secondo me, che anche parecchi di quei metodi che pretenderebbero misurare la viscosità del citoplasma, conservando l'integrità delle cellule, non sono in realtà meno dannosi per le cellule dello schiacciamento e quindi della distruzione cellulare che si ha nel metodo Pigorini. Per di più tali metodi hanno lo svantaggio di non permettere misure dirette, con sufficiente rapidità e precisione. Il metodo Heilbronn del resto è stato criticato da numerosi ricercatori.

(1) Solo i fissativi condriomali: bicromato di potassio, formalina isotonica, anidri e osmica, purchè non mescolati con altri liquidi, sembra che conservino nelle cellule fissate la struttura (microscopica, non micellare) quale esiste in vivo.

ma dalle misure viscosimetriche non ricavò valori attendibili. Io ho voluto riprendere le esperienze, informandole ai concetti suesposti.

Di due lotti di uova, appartenenti l'uno alla razza « cinese oro », l'altro deposto da farfalle « cinesi oro » accoppiate con maschi di una razza gialla indigena (uova d'incrocio) conservai la metà come controllo. Della metà restante, una parte riscaldai per quaranta minuti a 50° C. (il 3 dicembre) ponendo le uova in un provettone di vetro immerso in un termostato ad acqua. Ventiquattro ore dopo il riscaldamento, per i succhi interi estratti, al viscosimetro Scarpa ottenni i valori seguenti, relativi alla viscosità dell'acqua ⁽¹⁾:

	Controllo	Riscaldate
Oro	15.73	16.47
Incrocio	9.66	14.17

Le ultime porzioni dei due lotti di uova, furono versate in due matraccini di Duclaux. Attraverso la massa delle uova feci passare per 25 minuti primi una lenta corrente di aria preventivamente gorgogliata in una boccia di Woulf contenente soluzione di ammoniac. Ventiquattro ore dopo, dai succhi interi estratti, al viscosimetro Scarpa ottenni le seguenti viscosità relative:

Uova trattate con	NH ₃
Oro	13.53
Incrocio	11.46

Come si vede, in ambedue i casi, la viscosità delle uova trattate si è dimostrata molto superiore a quella dei controlli ⁽²⁾. Solo le uova « cinesi oro » trattate con NH₃ hanno mostrato un andamento aberrante.

I sei lotti di uova: riscaldate, trattate con ammoniac e rispettivi controlli dell'Oro e dell'Incrocio furono conservati nelle medesime condizioni, prima nella stessa stanza, a temperatura ambiente, quindi in frigorifera, per la svernatura. Il 26 gennaio a 2 mesi circa di distanza dal trattamento, viene

(1) Le condizioni di esperienza sono in ogni caso le seguenti: capillare del viscosimetro Scarpa di media grandezza (n. 57 nel mio caso); bolla usata 5 cc.; temperatura del termostato 20° C.; depressione per la salita del liquido 27 cm. d'acqua; discesa abbandonata alla gravità. La viscosità relativa all'acqua si calcola con la formula:

$$\frac{T_1 T_2 (T'_2 + T'_2)}{T'_1 T'_2 (T_1 + T_2)}$$

in cui T₁ e T₂ sono i tempi di salita e discesa nel capillare del liquido, e T'₁ e T'₂ i tempi di salita e discesa (in identiche condizioni di temperatura e pressione) di una uguale quantità di acqua distillata.

(2) Oltre la viscosità osservai anche la stratificazione dei succhi. (V. PIGORINI, « Boll. di Sericol. », 1927, n. 36; TIRELLI, « Atti Pont. Accad. Sc. N. Lincei », 82, 123, 1929) che pure si dimostrò molto alterata nei lotti riscaldati e trattati con NH₃.

determinata la viscosità del succo intero estratto dalle uova di incrocio riscaldate. Si ottengono i seguenti valori di salita e discesa nel capillare:

Incrocio femm. « cinese oro » con maschio giallo indigeno.

	Controllo	Riscaldato
Salita	4' 45"	5' 45"
Discesa	5' 5"	5' 54"
I: S.	4' 44"	5' 15"
II: D.	5' 8"	5' 52"
S.	4' 39"	5' 14"
D.	5' 3"	5' 50"
S.	4' 33"	5' 4"
D.	5' 12"	5' 45"
S.	4' 28"	5' 3"
D.	4' 54"	5' 45"

Ho riportato il protocollo dell'esperienza, per dimostrare il suo andamento affatto regolare.

Calcolando la viscosità relativa all'acqua dalle medie delle tre prime misurazioni si hanno i valori seguenti:

Normale $\nu = 13.35$

Riscaldate $\nu = 15.44$

Le uova di tutti i lotti continuarono ad essere conservate in frigorifera, ne vennero quindi tolte a primavera e furono poste in incubazione, tutti i lotti secondo la medesima norma. Le nascite avvennero nei giorni: 18-19-20 maggio, per i lotti controllo si ebbe il 100 % di uova schiuse, per gli altri lotti la percentuale seguente:

« Cinese oro »:	uova riscaldate	8 % di nascite
»	»	» trattate con NH_3 0 % »
Uova d'incrocio:	riscaldate	100 % »
»	»	» trattate con NH_3 20 % »

Dall'esame di queste percentuali risulta anzitutto evidente un fatto, poichè i trattamenti furono identici sia per le uova della razza « cinese oro » che per le uova d'incrocio: la maggior resistenza cioè delle uova di incrocio rispetto a quella delle uova « cinese oro ». Per le uova di incrocio trattate con NH_3 si è avuta la medesima percentuale di nascite già osservata da Pigorini. Per spiegare il diverso risultato ottenuto dai due lotti di uova, risultato in un certo modo paradossale perchè in genere le razze orientali sono molto più robuste delle razze indigene ⁽¹⁾ e l'incrocio fra una razza

(1) Scelsi appositamente, per queste esperienze, le uova « cinesi oro » e le uova d'incrocio a femmina « cinese oro », perchè si sa che i bachi almeno, nati da esse, sono più resistenti a cause avverse di quelli di razze indigene pure. Potrebbe darsi che tale maggiore resistenza riguardasse solo le larve, e non le uova.

orientale e una razza indigena è meno robusto della razza orientale pura, si potrebbe supporre che i due fattori chimico e fisico abbiano agito su i due lotti di uova in momenti fisiologici diversi. La razza orientale, che in media è più resistente delle razze indigene, sarebbe stata colta durante il suo ciclo vitale, in un momento *minimae resistentiae*.

I bachi da seta nati dalle uova di incrocio scaldate e trattate con ammoniaca, e dalle uova « cinese oro » scaldate, furono allevati. Gli allevamenti procedettero regolarmente, e molto bene, non vennero notate differenze di tempo nell'epoca delle mute, rispetto ai bachi controllo, non si ebbero malattie, i bachi salirono tutti regolarmente al bosco.

L'anormale viscosità dei succhi estratti dalle uova « cinese oro » riscaldate, e dalle uova d'incrocio trattate con ammoniaca, dato che una gran parte di uova di questi due lotti non è schiusa, può far nascere logicamente il sospetto che l'aumento osservato derivi dalla miscela del succo delle uova vive, che hanno sopportato il trattamento, con il succo di uova uccise, o, dato che in nessun lotto sono state trovate uova secche durante la svernatura, così irreparabilmente compromesse da morirne in seguito. In tal guisa il succo delle uova uccise o moriture, che è logico ritenere abbia proprietà chimico-fisiche diverse da quello delle uova viventi, mescolandosi nello schiacciamento con quello spremuto dalle vive, ne può modificare le proprietà chimico-fisiche caratteristiche.

Appositamente quindi ho voluto tener solo calcolo, e fermare l'attenzione sul lotto di uova d'incrocio riscaldato, l'unico fra quelli trattati che abbia fornito il 100 % di nascite. In questo caso si può escludere senz'altro nella modificazione della viscosità, ogni influenza di eventuali miscele fra succo di uova vive e succo di uova alterate o uccise. Le uova di questo lotto, 24 ore dopo il riscaldamento, hanno fornito un succo con viscosità molto maggiore di quella delle uova controllo; tale aumento di viscosità, dopo due mesi, si è conservato intatto; con notevole sicurezza ritengo si possa credere che l'aumento di viscosità nelle uova riscaldate si sia mantenuto almeno durante tutta la diapausa. Può darsi che alla ripresa dello sviluppo, in primavera, il brusco risveglio morfologico dell'uovo coincida con una attivazione del suo chimismo, e che l'uovo, sino allora torpido, incapace di uno sforzo, riesca totalmente od in parte a regolare la sua costituzione chimico-fisica e a riportare l'anomala viscosità al valore normale. Dai risultati delle ricerche di Pigorini però appare poco probabile questo tardivo ritorno alla normalità, perchè, se la diapausa invernale rappresenta realmente una fase di riposo nei fenomeni morfologici, segna invece un periodo di intensa attività per ciò che riguarda i fenomeni chimici e chimico-fisici, e se l'uovo avesse perciò la possibilità di regolare la propria viscosità, lo farebbe il più presto possibile, durante la diapausa stessa, data appunto l'esistenza di questa ontogenesi chimico-fisica indipendente dall'ontogenesi morfologica. In ogni modo resta stabilito che si possono avere

nascite totali, e bachi in apparenza affatto normali, da uova che in seguito a un trattamento fisico hanno subito un aumento sensibilissimo della viscosità, e tale aumento hanno conservato per almeno due mesi.

Molti cambiamenti sperimentali e reversibili della viscosità del citoplasma, sono stati indicati da AA. diversi. Jacobs ⁽¹⁾ ha osservato che la CO₂ prima fa diminuire, poi accrescere la viscosità di Amebe, Spirogiere, Ciliati e uova di Arbacia; se l'azione non è troppo spinta, tale aumento è reversibile, altrimenti si ha coagulazione definitiva del protoplasma. Weber e Hohenegger ⁽²⁾ hanno ottenuto col freddo mutamenti reversibili nella viscosità di citoplasmi vegetali. Van Herwerden ⁽³⁾ immergendo code di girini in una debole soluzione di acido acetico, osservò assai nettamente in vivo la formazione di figure mitotiche, altrimenti non visibili. Immergendo successivamente le code in acqua pura tali figure ridiventano invisibili. Tale fenomeno si deve ritenere effetto di una più intensa gelificazione prodotta dall'acido, con un aumento della viscosità della cellula. Ancora Herwerden ⁽⁴⁾ ha visto che un'ameba a 50° diviene rigida, ma, se la insolita temperatura non si fa agire più di 5', l'ameba ritorna alla vita e il suo citoplasma riacquista la consistenza normale. Così la diminuzione di viscosità prodotta secondo Brinley ⁽⁵⁾ dai sali di potassio, è reversibile quando cessa l'azione del sale. Lorey ⁽⁶⁾ ha ripetuto osservazioni simili. Altri casi sono riportati nel trattato di Heilbrunn ⁽⁷⁾.

Quando invece si produce con una azione esterna un cambiamento irreversibile in una proprietà chimico-fisica del protoplasma, la cellula muore subito o subisce alterazioni profonde, incompatibili con la continuità dei fenomeni vitali, normali, specifici. Basta ricordare che la morte naturale è sempre preceduta da un aumento di viscosità. Hluchowsky ⁽⁸⁾ ha seguito molto bene le fasi di questo aumento nelle vorticelle.

Nel mio caso, invece, è stato prodotto nelle uova del *Bombyx mori* un cambiamento irreversibile della viscosità, senza che tale cambiamento abbia compromesso la vitalità delle uova stesse, o abbia agito in maniera palesemente dannosa, originando forme teratologiche, o rendendo l'organismo più soggetto a malattie. Senza dubbio però questo cambiamento non è stato senza azione sull'uovo; nell'ambiente insolito l'embrione deve aver reagito, o l'ambiente insolito ha agito sull'embrione. Noi non possiamo definire la natura di questa azione o di questa reazione, certo si è creato un adattamento nuovo, attivo o passivo, fra embrione ed ambiente uovo.

(1) « Biol. Bull. », 42, 14, 1922.

(2) « Ber. Deutsch. Bot. Ges. », 41, 198, 1923.

(3) « Bull. Hist. et Techn. micr. », 1, 401, 1924.

(4) *Protoplasma*, 2, 271, 1927.

(5) *Protoplasma*, 4, 177, 1928.

(6) *Protoplasma*, 7, 171, 1929.

(7) *Colloid chemistry of protoplasm*, Bovnträger, 1928.

(8) « Arch. Entw. Mech. », 112, 297, 1927.

Sono disposto a credere che le cause delle mutazioni o delle somazioni (naturali o sperimentali) indicate da molti AA. come effetto di particolari azioni fisiche o chimiche sulle uova di organismi diversi, siano da ricercare non in una azione diretta, del resto indeterminabile e mal concepibile, di tali fattori sulle cellule embrionali: ma in una loro azione mediata attraverso un nuovo adattamento fra embrione ed ambiente uovo, determinato appunto da una modificazione irreversibile di un carattere chimico-fisico dell'uovo.

Zoologia. — *Sui pigmenti del sangue, del bozzolo e delle uova nei bachi da seta (B. m.).* Nota⁽¹⁾ di C. JUCCI, presentata dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Nei bachi da seta generalmente si corrispondono il colore dell'emolinfa e il colore della secrezione serica. Razze a bozzolo bianco hanno sangue scolorato: razze a bozzolo giallo hanno sangue giallo. Ma nelle razze gialle il colore del bozzolo può variare dal dorato, come nell'Oro cinese, al giallo paglierino o carnicino come nei gialli indigeni; e possono anche incontrarsi bachi a sangue giallo che tessono un bozzolo bianco. Del resto non solo da razza a razza varia il colore del bozzolo, ma anche, in molte razze, in ogni bozzolo da strato a strato.

Troppo scarse sono ancora le nostre conoscenze pur su un argomento così poco lontano dalla applicazione pratica qual'è la secrezione serica e i processi metabolici che l'accompagnano.

Mi è sembrato che valesse la pena di riprendere lo studio dei rapporti fra il colore del sangue e il colore dei bozzoli, anche considerando che il colore del bozzolo è uno dei caratteri più studiati, nei bachi da seta, dal punto di vista genetico, e niente è più fecondo come l'accoppiare, alla ricerca sulla trasmissione ereditaria di un carattere, l'analisi del meccanismo fisiologico per il quale detto carattere si sviluppa nell'ontogenesi.

Sono partito da un'osservazione che avevo fatta più volte nel corso degli allevamenti dal 1921 al 1925, ma che non avevo mai trovato tempo di approfondire: nella razza Oro cinese i bachi, che entrano in maturità, che cioè, smesso di mangiar la foglia, cominciano a purgarsi del contenuto intestinale e a spandere la bava serica salendo al bosco, presentano sangue scolorato, da giallo intenso che era poco prima, nel periodo della mangiarella. L'esame di un gran numero di individui della razza Oro nel corso della 5^a età, in questa primavera 1929, mi ha permesso di seguire passo passo l'andamento dei fenomeni.

Omettendo i particolari che troveranno posto, arricchiti di una serie di determinazioni colorimetriche, in una Nota più estesa, mi limito ad accen-

(1) Nella seduta del 5 gennaio 1930.

nare che da quando i bachi hanno raggiunto un peso di gr. 1,5 all'incirca, il sangue va scolorandosi, mentre le ghiandole della seta rapidamente si ingrossano. È vero che individui aventi lo stesso sviluppo corporeo possono presentare sangue con varia intensità di colorazione; ma l'esame dimostra sempre che l'individuo a sangue più giallo ha le ghiandole setifere più piccole, o, per lo meno, più pallide. Tutto fa credere che avvenga una migrazione del pigmento dal sangue alla secrezione serica.

Nella razza Fossombrone (una razza gialla indigena a bozzolo carnicino) i bachi giunti a maturità presentano sangue intensamente giallo, in spiccato contrasto cogli Oro chinesi. Meno colorato appare il sangue nei bachi già avanzati nella tessitura del bozzolo; meno colorato ancora nelle crisalidi.

Sicchè, anche per il Fossombrone, ha luogo una migrazione del pigmento dal sangue alle ghiandole, come nell'Oro; solo che nell'Oro questa migrazione avviene essenzialmente nel periodo prima della maturazione (il sangue delle crisalidi non è più scolorato di quello dei bachi maturi) mentre nel Fossombrone dopo. Ecco il perchè della diversa distribuzione del pigmento nei vari strati del bozzolo nelle due razze. Nella cinese, il bozzolo è giallo-oro negli strati esterni e va man mano impallidendosi sinchè la fodera interna è proprio bianca; nella indigena, lo strato esterno è incolore o quasi, e il colore va accendendosi quanto più ci si addentra nello spessore della corteccia serica.

Conte e Levrat, nel 1904, emettendo l'ipotesi che la sostanza colorante della seta derivi dai pigmenti della foglia del gelso, per spiegare le differenze di razza nel colore dei bozzoli ammisero una varia permeabilità della mucosa intestinale delle varie razze ai pigmenti vegetali. Vaney e Pelosse nel 1922, avendo visto che colori artificiali, somministrati con l'alimento, vengono assorbiti indifferentemente dai bachi di qualunque razza, ammettono che i pigmenti cloro e xantofillici trovino nel sangue dei bachi un mezzo più o meno ricco, a seconda della razza, di diastasi ossidanti. I diversi colori della seta rappresenterebbero diversi gradi di ossidazione dei pigmenti vegetali dializzati coi prodotti della digestione.

Senza escludere questo fattore, è neanche quello di una diversa utilizzazione alimentare dei pigmenti vegetali, le mie ricerche dimostrano che, almeno nelle due razze studiate, il colore del bozzolo e la distribuzione della sostanza colorante nei suoi strati, dipende essenzialmente dalle condizioni nelle quali avviene, più o meno abbondante e più o meno precoce, la migrazione del pigmento dal sangue alle ghiandole della seta.

Dodici anni fa Hajime Uda ⁽¹⁾ per la prima volta trovò dei bozzoli bianchi prodotti da bachi a sangue giallo. Accoppiati tra loro questi indi-

(1) H. UDA, *On the relations between blood color and cocoon color in silkworms*. « *Genetics* », 4, pp. 395-416 (1919).

vidui, tutti i discendenti mostrarono gli stessi caratteri e la razza si serbò sempre pura nelle successive generazioni. Era una eccezione alla regola generale che colore del sangue e colore del bozzolo nei bachi da seta si corrispondono. Intuendone l'importanza, Uda condusse dal 1917 al 1919 tutta una serie di esperimenti, veramente mirabile. Incrociò la nuova razza YW (a sangue giallo e bozzolo bianco) con razze YY (a sangue giallo e bozzolo giallo) e con razze WW (a sangue bianco e bozzolo bianco). Di ogni incrocio seguì le tre prime generazioni e reincrociò gl'ibridi F_1 reciprocamente con ambedue le razze parentali. Effettuò anche, e seguì per due generazioni, l'incrocio $YY \times YW$. I risultati appaiono molto complicati, a prima vista, ma il frequente ricorrere di un rapporto numerico da diibrido mendeliano, mette sulla strada della interpretazione. Per es. l'incrocio $YW \times WW$ dà nella F_1 bachi YY e nella F_2 $9 YY : 3 YW : 4 WW$. Manca la combinazione WY: sangue bianco, bozzolo giallo. Bisogna ammettere che l'ibrido F_1 sia eterozigote per due fattori dei quali uno (C) si rivela, ogni qual volta è presente, producendo il colore del sangue, mentre l'altro, (Y) solo se il primo coesiste, può manifestare il suo effetto dando il colore del bozzolo. Ammettendo per YY una costituzione CCYY e per YW CCyy e per WW ccYY, tutto si spiega. Lo studio della terza generazione e dei reincroci conferma pienamente l'interpretazione. Ma il suddescritto non è che uno dei tre casi che possono verificarsi nell'incrocio $YW \times WW$. In un secondo caso i risultati possono spiegarsi solo ammettendo per WW una formula ccyy e in un terzo caso ccYy. Anche in questi casi l'interpretazione è confermata dallo studio della F_2 e dei reincroci; come anche dell'incrocio $YY \times YW$ e $YY \times WW$. Anche in una stessa razza di bachi bianchi (p. e. la Shōzan, bivoltina cinese a sangue bianco e bozzolo bianco) coesistono, indistinguibili tra loro, individui con tre diverse costituzioni genetiche. L'Uda ha potuto isolare come razze pure la ccYY e la ccyy. Indistinguibili fenotipicamente, esse non possono riconoscersi che per il loro comportamento ereditario negli incroci con YW o YY.

È tale l'accordo dei risultati sperimentali con le previsioni teoriche, che l'interpretazione di Uda appare pienamente giustificata. Dal punto di vista formale, l'ammettere che il colore giallo del bozzolo dipenda da due fattori dei quali uno (Y) non può produrre il carattere se non in presenza dell'altro fattore (C) che si manifesta col colore giallo del sangue, sembra proprio necessario e sufficiente. Ma l'interpretazione potrebbe aver l'aria di esser soltanto formale e potrebbe nascere il dubbio che sia più una parafrasi che una spiegazione dei fenomeni.

Dopo quello che ho visto studiando i rapporti tra il colore del sangue e il colore del bozzolo nelle due razze Oro cinese e Fossombrone, io capisco meglio i risultati di Uda e vedo nel carattere Y « la capacità di migrazione del pigmento dal sangue alla seta » o, se si preferisce, « capacità delle ghiandole della seta di assorbire il pigmento dal sangue ». S'intende

che la presenza di questa capacità non può produrre alcun effetto, se nel sangue non v'è pigmento; onde la inesistenza di bachi a sangue bianco e bozzolo giallo. Si capisce anche che dall'incrocio di due razze a bozzolo bianco possono venire bachi a bozzolo giallo, se delle due razze una era bianca, per mancanza di pigmento nel sangue, l'altra, per incapacità delle ghiandole setifere di estrarre dal sangue il pigmento.

Nella razza Fossombrone, le ghiandole della seta manifestano solo tardivamente questa capacità; sicchè, nel periodo prematurativo, questi bachi si comportano come gli YW di Uda, i bachi a sangue giallo e a seta bianca. Gli esperimenti di Uda, se la nostra interpretazione è giusta, dimostrano che questa « capacità di migrazione del pigmento dal sangue alla seta » è un carattere mendeliano, prodotto cioè da un fattore che si trasmette ereditariamente secondo le leggi della probabilità e indipendentemente dal complesso degli altri caratteri di razza A. Ora, ambedue le razze, Oro e Fossombrone, posseggono questa capacità, ma in esse la precocità della migrazione è caratteristicamente diversa. Si erediterà anche la « precocità di migrazione » come carattere mendeliano? Sarebbe interessante studiare a questo riguardo gli incroci tra le due razze Oro e Fossombrone. La « capacità di migrazione » è dominante sulla assenza della capacità; sarà anche uno dei due « tempi di migrazione » dominante sull'altro nel prodotto dell'incrocio, o si avrà nella F_1 un carattere intermedio? E si avrà nella F_2 la disgiunzione dei caratteri? Io ho fatto altra volta l'incrocio Oro-Fossombrone e del resto la F_1 a ♀ cinese e a ♂ indigeno, in intere regioni ha sostituito le razze pure nostrane nella pratica della bachicoltura; ma è così difficile vedere quel che non rientri nella zona focheggiata dalla nostra attenzione!

Dei bachi da seta anche le uova sono più o meno pigmentate e c'è una certa corrispondenza tra il colore delle uova e il colore del sangue e della seta. Razze a bozzolo giallo hanno uova più o meno intensamente gialle; razze a bozzolo bianco hanno uova assai più pallide. (Sarebbe interessante sapere qual colore hanno le uova dei bachi YW di Uda, a sangue giallo e bozzolo bianco).

Ho l'impressione che il pigmento delle uova sia quello stesso del sangue dei bachi e della seta. Ho già pronti gli estratti del sangue, della seta e delle uova per lo studio comparativo spettroscopico e, se sarà possibile, chimico.

Ricordo a questo proposito una mia osservazione, fatta nel 1924 e poi ripetutamente confermata. Le uova delle razze bivoltine giapponesi bianche a sangue scolorato e a bozzolo bianco), come la Nipponishiki e l'Awojiku, sono colorate in giallo paglierino. Ma capita di trovare ovature con uova più grosse, più turgide e soprattutto distinte dal loro colore giallo-limone. Seguendone lo sviluppo, si vede che queste uova, di solito deposte dalle

farfalle più tardive, ultime a uscire dal bozzolo, si comportano come uni-voltine, cioè anneriscono e svernano in diapausa embrionale invece di svilupparsi ininterrottamente e schiudere dieci giorni appena dopo la deposizione. Questa correlazione tra grado di pigmentazione delle uova e loro capacità di voltinismo (e di partenogenesi, secondo altre mie osservazioni) è certo interessante, benchè non sia per ora possibile prevedere se si tratti di variazioni di permeabilità cellulare o di capacità ossidative od altro. Sicchè lo studio dei pigmenti delle uova nelle varie razze dei bachi da seta si presenta interessante non solo come probabile esempio di passaggio di sostanze preformate dall'organismo materno nelle uova (come già dimostrai per l'ixodina, la sostanza anticoagulante del sangue, nelle zecche), ma ben anche in rapporto a quella capacità di sviluppo dell'uovo, vergine o fecondato, che le mie ricerche hanno dimostrato indice sensibile della costituzione fisiologica individuale e di razza.

Zoologia. — *Primo contributo allo studio del tessuto endocrino primario del pancreas degli uccelli* ⁽¹⁾. Nota di G. LENTATI, presentata ⁽²⁾ dal Socio E. GIACOMINI.

Il tessuto endocrino che si trova incluso nel parenchima pancreatico non è in ogni momento dell'ontogenesi rappresentato solo da quei tipici elementi caratteristici che costituiscono le isole del Langerhans; numerose osservazioni hanno messo fuor di dubbio l'esistenza di elementi speciali, sovente riuniti in grossi accumoli di tipo insulare, che dalle isole del Langerhans si distinguono nei preparati specialmente per il loro comportamento rispetto ad alcune sostanze coloranti comuni della tecnica microscopica: cellule torbide o scure dal citoplasma fortemente acidofilo. Tali formazioni, il cui valore morfologico fu variamente interpretato dai diversi Aa., furono descritte dal Laguesse nei mammiferi (e son perciò denominate in questa classe isole del Laguesse), ma erano già state messe prima in evidenza nei teleostei dal Massari (1898) e dal Diamare (1899), il quale riscontrò anche nelle isole dei rettili e degli anfibì delle modalità che gli sembrarono corrispondere a quelle trovate nei teleostei; e negli anfibì Aron e Alfonsi (1924) e Kolossow (1927) descrissero un consimile reperto, dissentendo però fondamentalmente nella sua interpretazione. Cordoni scuri e cordoni chiari di cellule furono interpretati dal Cotronei (1922-1927) quali rappresentanti del tessuto endocrino nei petromizonti. Dal Giacomini (1900) però

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Anatomia comparata della R. Università di Torino.

(2) Nella seduta del 5 gennaio 1930.

tali cordoni erano stati considerati come gli esponenti del tessuto esocrino ed endocrino.

Negli uccelli tali formazioni furono studiate da Clara (1924-1927) e da Potvin e Aron (1927). Questi due ultimi Aa. le osservarono unicamente negli embrioni di pollo dall'ottavo giorno di incubazione in poi. Non ne studiarono la genesi, ma le ritennero corrispondenti a quelle del Laguesse dei mammiferi. Non misero in evidenza alcun loro particolare rapporto colle isole del Langerhans: al quindicesimo giorno di incubazione, sempre secondo gli Aa., incomincerebbero a degenerare, ed alla schiusa sarebbero completamente scomparse.

Clara le descrisse invece nella vita post-natale, in vicinanza e talvolta in connessione con le isole del Langerhans. Riguardo al loro significato l'A. si mantenne assai riservato: « Über die Bedeutung der von mir beschriebenen dunklen Inseln im Vögelpancreas lässt sich noch kein abschliessendes Urteil fällen, doch scheinen sie mit der Bildung von Inselgeweben in einem Zusammenhang zu stehen ».

Lo studio comparativo ha dunque affermato la presenza di tali interessanti formazioni in tutte le classi dei vertebrati. Per le mie indagini sui mammiferi di cui ho reso noti i risultati nei « Rendiconti » di questa Accademia ⁽¹⁾, appare come tali formazioni siano le uniche rappresentanti, in un determinato periodo della vita fetale, del tessuto endocrino del pancreas e si trasformino in seguito in isole del Langerhans. Era quindi naturale che io pensassi di meglio chiarire e conoscere nelle altre classi dei vertebrati l'importante capitolo dell'evoluzione di tali elementi primari e dei loro rapporti cogli altri tessuti endocrino definitivo ed esocrino del pancreas.

In questa nota espongo alcuni risultati più sicuri ottenuti negli uccelli, e più precisamente dal materiale embrionale di *Anas domestica*: i primi abbozzi del tessuto pancreatico vi sono rappresentati, precisamente come nei mammiferi, dai tubi primitivi, che si dispongono nella regione centrale del connettivo in cui si deve sviluppare il parenchima pancreatico; inviano ramificazioni laterali terminanti coi fondi ciechi che costituiscono i primi abbozzi del parenchima esocrino.

Da questi tubi pancreatici primitivi e dalle loro ramificazioni si originano inoltre le prime isole endocrine. Esse presentano dapprima elementi piccoli, con scarso citoplasma, simili a quelli che formano le pareti del tubo stesso dal quale son derivate; ma in seguito si differenziano nettamente aumentando di volume, mentre il loro citoplasma diventa fortemente acidofilo. Formano accumoli cellulari compatti di notevole estensione lungo il tubo primitivo.

Potvin e Aron non fanno alcuna questione della genesi delle isole endocrine, primarie e del Langerhans, e le ritengono, nel pollo, di com-

(1) « Rend. R. Accademia Lincei », Ser. 6, vol. VII, 1928; ibid. vol. IX, 1929.

parsa contemporanea. Distinguono unicamente queste due specie di isole per il diverso orientamento degli elementi costituenti: infatti descrivono per le isole del Langerhans elementi polarizzati col polo escretore orientato verso i capillari sanguigni, e per le altre isole, del resto poco numerose, cellule ricche in citoplasma, non polarizzate, riunite in ammassi compatti.

Le formazioni da me ora descritte corrispondono appunto a queste ultime, e nell'anitra sono abbondantissime. Gli Aa. hanno affermato per il pollo la loro completa degenerazione già nella vita embrionale; nell'anitra io non ho potuto osservare alcuna immagine di involuzione durante la vita embrionale, e l'esame del pancreas di alcuni giovani mi assicura della loro persistenza anche dopo la schiusa.

Accanto ai tubi pancreatici primitivi decorrono i fasci nervosi, intercalati da gangli; essi vengono qualche volta in contatto con le isole primarie, ma ben difficilmente è dato osservare veri complessi simpatici-insulari, quali furono descritti per i mammiferi. La differenziazione e l'evoluzione ulteriore degli elementi endocrini primari appare chiaramente indipendente da ogni connessione ganglionare, come, contrariamente a quanto è stato affermato da qualche Autore, risulta già dalle mie ricerche sulle isole primarie dei mammiferi.

Le isole del Laguesse dei mammiferi si trasformano in isole del Langerhans alla fine della vita fetale o all'inizio della vita post-natale; e in condizioni normali non compaiono mai nell'adulto, almeno per quanto fu fino ad ora verificato. Le formazioni insulari degli uccelli, descritte dal Clara col nome di isole scure, per quanto appare da queste mie riassunte ricerche si possono comparare per genesi e per caratteri strutturali a quelle primarie dei mammiferi. Esse pure sono in rapporto colle isole del Langerhans (Clara) ma il significato di tale rapporto appare forse diverso da quello da me illustrato nei mammiferi, perchè, contrariamente a quanto si verifica in questi ultimi, le « isole scure » possono rimanere accanto a quelle del Langerhans, anche nella vita post-natale.

In un prossimo lavoro tratterò ampiamente di tali interessanti formazioni.

Botanica. — *Ulteriori ricerche sull'azione esercitata da un Radio-oscillatore per onde ultracorte di $\lambda = 2-3$ m., sulla germinazione dei semi e sull'accrescimento delle piante.* Nota I di G. MEZZADROLI e E. VARETON, presentata ⁽¹⁾ dal Socio B. LONGO.

PARTE I.

Azione esercitata dalle onde elettromagnetiche ultracorte ($\lambda = 2-3$ m.) sui semi e sulle piante poste nell'immediata vicinanza del Radio-oscillatore e su quelle poste sotto un sistema di fili di Lecher (onde stazionarie).

In una Nota recente ⁽²⁾ abbiamo posto in evidenza come le onde elettromagnetiche ultracorte di $\lambda = 2-3$ m. emesse da un Radio-oscillatore tipo Eccles-Mesney modificato ⁽³⁾, esercitino un'azione favorevole sulla germinazione dei semi e sull'accrescimento delle piante, diamo in questa Nota, relazione dei risultati favorevoli, ottenuti modificando le condizioni di trattamento dei semi e delle piante a mezzo delle onde ultracorte.

Abbiamo osservata l'influenza esercitata dalle onde elettromagnetiche ultracorte sulle piante poste vicino al Radio-oscillatore, e di quelle munite durante il periodo di esposizione di un circuito oscillante Lakhovsky, abbiamo osservato inoltre l'influenza delle onde corte di un sistema di onde stazionarie (fili di Lecher), tanto nella regione in cui le oscillazioni elettriche risultano massime (ventri), come in quelle in cui sono minime (nodi), e delle piante poste entro un circuito oscillante in risonanza con l'oscillatore.

Da tutte queste esperienze abbiamo potuto rilevare come le onde elettromagnetiche ultracorte $\lambda = 2-3$ m. esercitino sempre un'azione favorevole sui semi e sulle piante su cui si fanno agire, l'effetto aumenta, quando si aumenta entro certi limiti, la intensità delle onde elettromagnetiche.

Così l'azione è più favorevole per le piante poste nella vicinanza immediata dell'oscillatore, e diminuisce mano mano che ci si allontana da questo, ma se le piante vengono munite di un oscillatore Lakhovsky, l'effetto, a parità di distanza è più favorevole per esse.

L'effetto delle onde sulle piante sottoposte all'azione dei fili di Lecher, risulta più favorevole sulle piante poste nelle regioni in cui l'intensità di oscillazione è massima.

(1) Nella seduta del 15 dicembre 1929.

(2) G. MEZZADROLI e E. VARETON, *Prove di confronto fra l'azione esercitata dalle onde elettromagnetiche ultracorte ($\lambda = 2-3$ m.) e il circuito oscillante Lakhovsky, sulla germinazione dei semi e sull'accrescimento delle piante*, « Rend. R. Acc. dei Lincei », vol. X, serie 6^a, fasc. 5-6 (1929).

(3) E. MONTÙ, *Radiotelegrafia-Radiotelefonìa*, Hoepli, Milano, p. 586.

L'effetto benefico più grande si verifica per le piante poste entro il circuito metallico oscillante in risonanza con l'oscillatore.

L'azione aumenta coll'aumentare della durata di esposizione entro un certo limite, ed è maggiore quando le esposizioni vengano fatte ad intervalli, invece che in una volta sola; una esposizione troppo prolungata provoca invece azione ritardatrice.

Tecnica.

Il Radio-oscillatore delle nostre esperienze, era come già detto un oscillatore tipo Eccles-Mesney⁽¹⁾ capace di emettere onde di $\lambda = 2-3$ m.

I germinatoi e le piante venivano esposte all'azione delle onde per un tempo di 90 minuti al giorno, suddiviso in tre tempi di 30 minuti ciascuno e così distribuiti:

1° tempo: 9-9.30; 2° tempo: 15-15.30; 3° tempo: 19-19.30.

Le prove di confronto venivano sempre allontanate quando il Radio-oscillatore entrava in azione, in modo che non risentissero l'influenza delle onde emesse dal Radio-oscillatore stesso.

I semi, venivano posti in germinatoi su substrato di cotone idrofilo inumidito; al settimo giorno si aggiungeva della terra umida, sempre la stessa per tutte le esperienze.

Abbiamo riportato nelle tabelle (come già nelle altre nostre esperienze analoghe) il numero dei semi germinati durante i primi giorni, poi lo sviluppo aereo totale in centimetri delle piantine, durante il loro accrescimento, infine, il peso totale delle piantine stesse, tagliate rasente terra.

*Azione esercitata dalle onde ultracorte $\lambda = 2-3$ m.
sui semi e sulle piante poste vicino all'oscillatore.*

Abbiamo già fatto rilevare come il Radio-oscillatore eserciti un'azione ancora efficace entro un raggio di 10 metri, e come in questa zona l'azione favorevole diminuisca, con l'aumentare della distanza delle piante dal Radio-oscillatore.

Se i germinatoi e le piante vengono muniti di un circuito oscillante Lakhovsky durante il tempo di esposizione, l'azione risulta più favorevole a parità di distanza.

I germinatoi venivano posti, per le esperienze che riportiamo, nell'immediata vicinanza dell'oscillatore (15 cm.) con e senza circuito oscillante Lakhovsky.

(1) Apparecchio gentilmente fornito dal chiar.mo prof. G. B. Bonino, Istituto di Chimica-fisica, R. Università, Bologna.

TABELLA I.

50 semi di orzo seminati su substrato di cotone idrofilo inumidito
(t. m. = 24° C.).

50 semi di orzo seminati al giorno zero	Confronto		Vicino al radio-oscillatore		Vicino al radio-oscillatore con circuito oscillante Lakhovski	
	Numero di semi germinati	Lunghezza totale delle piantine in cm.	Numero di semi germinati	Lunghezza totale delle piantine in cm.	Numero di semi germinati	Lunghezza totale delle piantine in cm.
1° giorno	—	—	—	—	—	—
2° »	15	—	18	—	20	—
3° »	19	—	24	—	25	—
4° »	29	1 = 29.5	32	1 = 35	38	1 = 50
5° »	—	1 = 110	—	1 = 130	—	1 = 150
6° »	—	1 = 198	—	1 = 220	—	1 = 250
7° »	—	1 = 230	—	1 = 270	—	1 = 296

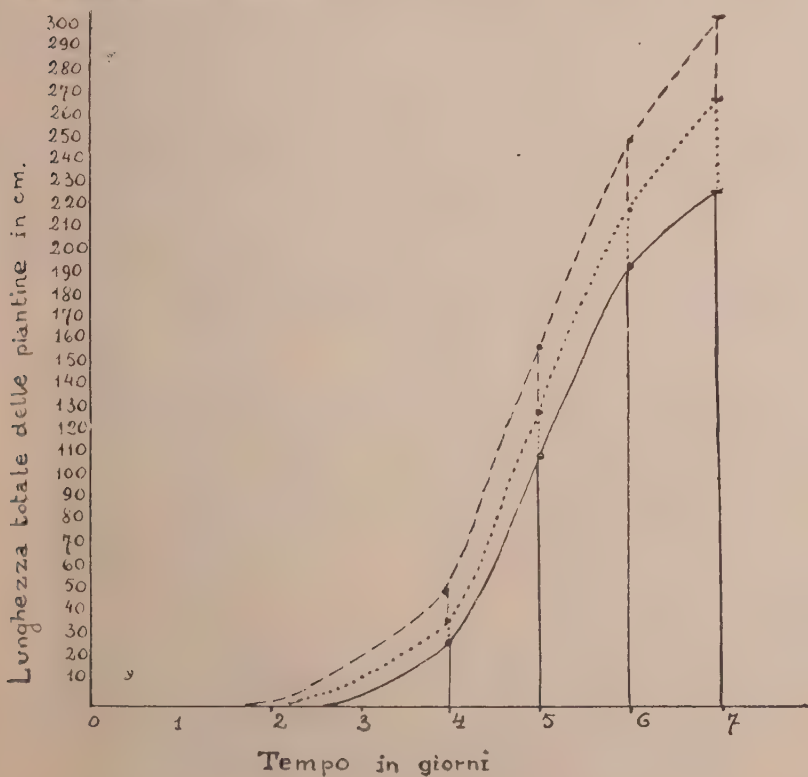


Fig. 1.

Al settimo giorno abbiamo aggiunto della terra ed abbiamo continuato il trattamento. Dopo 7 giorni abbiamo tagliato le piantine rasente terra e le abbiamo pesate.

Peso totale delle piantine di orzo della prova di confronto	gr. 3.9
Peso totale delle piantine di orzo poste vicino al Radio-oscillatore	» 5.2
Peso totale delle piantine di orzo poste vicino al Radio-oscillatore e munite da circuito oscillante Lakhovsky	» 5.5

Azione esercitata dalle onde elettromagnetiche ultracorte sui semi e sulle piante poste sotto un sistema di fili Lecher (onde stazionarie).

Abbiamo osservato in una serie di esperienze l'azione che le onde ultracorte $\lambda = 2-3$ m. esercitano sui semi e sulle piante poste sotto un sistema di fili di Lecher, a diversa distanza dal Radio-oscillatore, e precisamente nei punti in cui la intensità delle oscillazioni elettriche sono massime (il tubo di Geissler che unisce i due punti si illumina con maggiore intensità, una lampadina tascabile si accende e brilla con intensità massima) punti che si trovavano alle distanze corrispondenti di: $1/2$ lunghezza d'onda, di 1 e $1/2$ lunghezza d'onda, e nei punti in cui l'intensità delle oscillazioni elettriche è minima (la lampadina non si accende).

L'azione favorevole esercitata dalle onde ultracorte si è manifestata maggiore nei punti di oscillazione maggiore, e fu massima nel punto in cui le oscillazioni erano massime, alla distanza di 1 e $1/2$ lunghezza d'onda dal nostro Radio-oscillatore, cioè al 3° ventre.

Le esposizioni dei semi e delle piante venivano fatte come già detto precedentemente.

Riportiamo in tabella i dati relativi a questa esperienza.

TABELLA II.

50 semi di orzo seminati su substrato di cotone idrofilo.

50 semi di orzo seminati al giorno zero	Confronto Lunghezza totale delle piantine in cm.	Nodo Lunghezza totale delle piantine in cm.	1° Ventre Lunghezza totale delle piantine in cm.	3° Ventre Lunghezza totale delle piantine in cm.
1° giorno	—	—	—	—
2° »	—	—	—	—
3° »	—	—	—	—
4° »	1 = 13	1 = 15	1 = 18	1 = 23
5° »	1 = 32.5	1 = 38	1 = 46.5	1 = 55
6° »	1 = 57.5	1 = 70	1 = 82.5	1 = 90
7° »	1 = 104	1 = 110	1 = 129	1 = 140

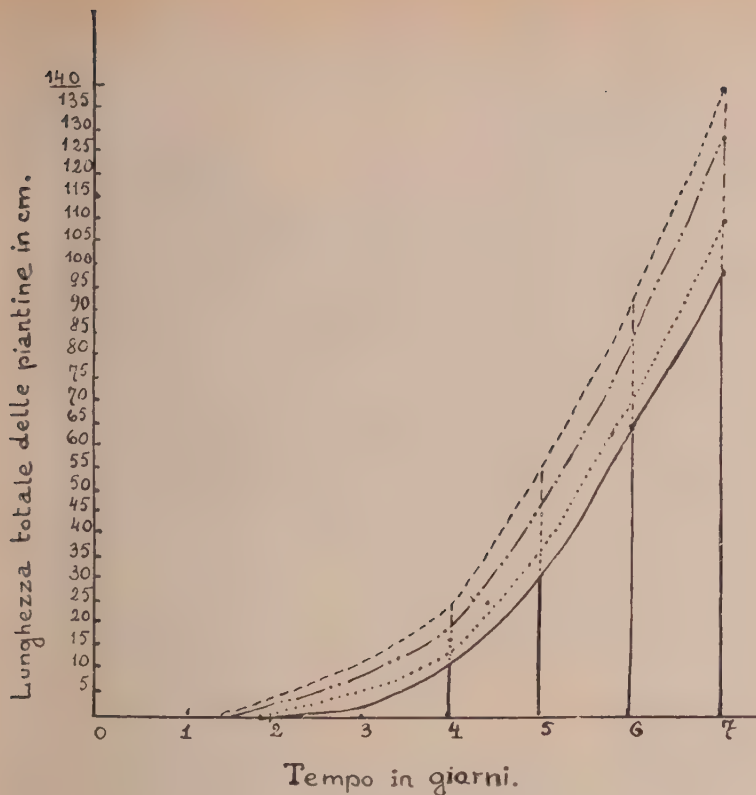


Fig. 2.

Al settimo giorno abbiamo aggiunto della terra ed abbiamo continuato il trattamento. Dopo 7 giorni abbiamo tagliato le piantine rasente terra e le abbiamo pesate.

Peso totale delle piantine di orzo della prova di confronto	gr. 3.6
» » » » » » poste nel nodo . . .	» 3.9
» » » » » » poste nel 1° ventre . . .	» 4.2
» » » » » » poste nel 3° ventre . . .	» 4.8

Conclusioni.

Abbiamo continuato lo studio sull'azione esercitata dalle onde elettromagnetiche ultracorte di $\lambda = 2-3$ m. sulla germinazione dei semi o sull'accrescimento delle piante, sperimentando condizioni di trattamento diverso e precisamente:

a) esposizione in vicinanza immediata del Radio-oscillatore e a distanza diversa;

b) esposizione dei germinatoi alla stessa distanza con e senza circuito oscillante Lakhovsky;

c) esposizione sotto un sistema di fili di Lecher nelle regioni dei ventri e dei nodi.

In base a queste numerose esperienze siamo arrivati alle seguenti conclusioni:

1) Le onde elettromagnetiche ultracorte di lunghezza d'onda $\lambda = 2-3$ m. esercitano sempre un'azione favorevole sulla germinazione dei semi, e sullo sviluppo delle piante, su cui arrivano ad agire, l'azione è però diversa secondo la diversa intensità delle onde stesse, e precisamente aumenta con l'aumentare dell'intensità, entro un certo limite.

2) In vicinanza immediata del Radio-oscillatore, l'azione è più marcata che non in qualsiasi altro punto della zona di azione delle onde, l'azione decresce con l'aumentare della distanza dal Radio-oscillatore.

3) L'interposizione di un circuito oscillante Lakhovsky sopra i germinatoi e sulle piantine durante il periodo di esposizione alle onde, permette di ottenere un'azione più marcata rispetto a prove analoghe di confronto poste alla stessa distanza.

4) Sottoponendo i semi e le piante all'azione delle onde mediante un sistema di fili di Lecher, si nota un'azione più grande in quelle prove poste nelle regioni dei ventri, che non in quelle trovantesi nella regione dei nodi.

Fisiologia. — *Sul potere regolatore dei principali costituenti del succo muscolare*⁽¹⁾. Nota di L. DE CARO, presentata⁽²⁾ dal Socio F. BOTTAZZI.

I. INTRODUZIONE.

Il potere regolatore del succo di pressa di muscoli striati, appartenenti a specie differenti, presenta, col variare del pH mutamenti caratteristici consistenti nella presenza di due valori minimi, in vicinanza di pH 5,7 e 7,7 i quali limitano la zona di reazione di maggior importanza fisiologica. Questo andamento da me osservato⁽³⁾ facendo variare il pH di mezza unità per volta, entro limiti di reazione piuttosto ampi, conferma quanto più dettagliatamente è stato osservato da Furusawa e Kerridge⁽⁴⁾ entro limiti di reazione più ristretti, per variazioni di pH dieci volte più piccole. Questi AA.

(1) Dal Laboratorio di Fisiologia di Napoli.

(2) Nella seduta del 5 gennaio 1930.

(3) DE CARO L., *Il punto isoelettrico della mioproteina e il potere regolatore del succo muscolare*, « Rend. della R. Acc. dei Lincei », vol. IX, serie 6^a, 1^o sem., 1929, p. 87.

(4) FURUSAWA K. and KERRIDGE P. M. T., *The Hydrogen ion concentration of the muscles of the cat*, « The Journ. of Physiol. », 1927, 63, p. 33.

studiarono il potere regolatore dei muscoli scheletrici, della muscolatura uterina e cardiaca del gatto (il tessuto, raffreddato in aria liquida, veniva triturato e poi messo nell'elettrodo di vetro, con cui si eseguiva la misura) e trovarono, per ciascun tessuto, un valore di pH coincidente con un massimo di capacità regolatrice. Questi valori sono 6,5, 6,8, 6,3 rispettivamente per i muscoli striati, pei muscoli uterino e cardiaco. Lo scopo della presente ricerca consiste nel determinare quale parte del potere regolatore totale del succo spetta alla frazione colloidale di esso (principalmente proteine) e quale parte spetta invece al componente diffusibile (principalmente fosfati).

Sul potere regolatore del succo muscolare di cavallo esiste un lavoro di Andrews, Beattie e Milroy ⁽¹⁾ i quali hanno studiato i mutamenti del pH che conseguono alla formazione di acido lattico e di acido fosforico sia nel succo stesso, sia nell'ultrafiltrato corrispondente, per determinare quanta parte spettasse alla frazione colloidale e quanta a quella non colloidale, nella neutralizzazione degli acidi formati. Dalle loro ricerche gli AA. concludono che il potere neutralizzatore del succo risulta circa del 200 % maggiore di quello dovuto al suo contenuto in fosfati; che il potere neutralizzatore dell'ultrafiltrato è quasi identico a quello dei fosfati in esso contenuti.

II. TECNICA E RISULTATI SPERIMENTALI.

In queste ricerche mi son servito di muscoli striati di cane ucciso per dissanguamento. Il tessuto, privato dal grasso e del connettivo veniva triturato e quindi impastato con sabbia di quarzo (lavata a lungo con acido cloridrico e poi ripetutamente con acqua distillata) e spremuto alla pressa di Buchner. All'analisi il succo presenta la seguente composizione centesimale:

Residuo secco	gr. 13,95
Proteine	» 11,47
Ceneri	» 1,50
P ₂ O ₅	» 0,418.

Ho determinato il potere regolatore del succo fresco, e quello delle soluzioni di ceneri, di mioproteina, contenuti rispettivamente nella stessa quantità di succo fresco, in funzione del pH, per spostamenti di mezza unità. Ho espresso il potere regolatore nell'unità di misura adottata da van Slyke ⁽²⁾

$\beta = \frac{\Delta B}{\Delta pH}$ indicante il rapporto fra l'incremento in grammi equivalenti di acido o di base e il corrispondente mutamento di pH.

(1) ANDREWS S., BEATTIE F. and MILROY Th. H., *The acid-base Exchange in Mammalian voluntary muscle*, «Biochem. Journ.», 1924, 18, p. 993.

(2) VAL SLYKE D. D., *On the measurement of Buffer values etc.*, «Journal of Biol. Chem.», 1922, 52, p. 525.

A 10 cm³ di succo fresco, portati a 40 cm³ con acqua distillata aggiungevo gradatamente, varie quantità di NaOH 0,1 N fino a raggiungere pH 10,5. Per ogni aggiunta misuravo il pH con l'elettrodo a idrogeno. Ad altri 10 cm³ di succo fresco, portati a 40 cm³ con acqua distillata aggiungevo, come sopra, varie quantità di HCl 0,1 N, fino a raggiungere pH 3,0. Similmente procedevo con le soluzioni di ceneri e di mioproteina, adoperandone, ogni volta, la quantità contenuta in 10 cm³ di succo fresco e diluendo questa quantità a 40 cm³ con acqua distillata.

Poichè nella misura adoperavo il potenziometro di Bovie, ottenevo direttamente la grafica di elettrotitolazione, che mi permetteva di calcolare il valore di ΔB (acido o base aggiunti) per un valore costante di ΔpH , eguale, nel caso presente, a 0,5

La mioproteina è stata ottenuta per dialisi del succo privato dei granuli; il potere regolatore della frazione colloidale è stato ottenuto per differenza fra quello del succo fresco e quello delle ceneri.

Nella seguente tabella sono riportate le variazioni, in funzione del pH, del potere regolatore $\beta = \frac{\Delta B}{\Delta pH}$ del succo fresco, delle ceneri, della frazione colloidale, della mioproteina, e, in fine, della frazione colloidale espresso in % di quello del succo fresco.

TABELLA.

pH	$\beta = \frac{\Delta B}{\Delta pH}$ Succo fresco	$\beta = \frac{\Delta B}{\Delta pH}$ Ceneri	$\beta = \frac{\Delta B}{\Delta pH}$ Succo - ceneri	$\beta = \frac{\Delta B}{\Delta pH}$ Mioproteina	$\beta = \frac{\Delta B}{\Delta pH}$ Frazione colloidale in % del succo fresco
3,2	0,0266	0,0026	0,0240	0,0112	92
3,7	0,0246	0,0020	0,0226	0,0086	91
4,2	0,0220	0,0012	0,0208	0,0046	94
4,7	0,0126	0,0010	0,0116	0,0026	92
5,2	0,0072	0,0020	0,0052	0,0012	72
5,7	0,0052	0,0026	0,0026	0,0010	50
6,2	0,0072	0,0040	0,0032	0,0000	44
6,7	0,0072	0,0032	0,0040	0,0010	55
7,2	0,0066	0,0020	0,0040	0,0012	60
7,7	0,0052	0,0012	0,0040	0,0006	76
8,2	0,0052	0,0012	0,0040	0,0012	76
8,7	0,0066	0,0006	0,0060	0,0012	90
9,2	0,0120	0,0006	0,0114	0,0012	95
9,7	0,0126	0,0006	0,0120	0,0020	95
10,2	0,0140	0,0006	0,0134	0,0032	95

Dai dati di questa tabella risulta :

1. Che il potere regolatore del succo fresco presenta due valori minimi in corrispondenza di pH 5,7 e 7,7 ciò che conferma quanto è stato da me precedentemente osservato⁽¹⁾ e che nella zona compresa fra questi minimi, che è quella di maggiore importanza fisiologica, il potere regolatore presenta un leggero aumento, andando da pH 7,2 a 6,2 ciò che conferma di nuovo le ricerche di Furusawa e Kerridge⁽²⁾; che, infine, il potere regolatore aumenta notevolmente andando da pH 5,2 verso il lato fortemente acido, e da pH 8,7 verso quello fortemente alcalino.

2. Che il potere regolatore delle ceneri presenta due zone di valori minimi intorno a pH 4,7 e 9,7 e un valore piuttosto elevato intorno a pH 6,5 ciò che si spiega abbastanza bene se si considera l'andamento della curva di neutralizzazione dell'acido fosforico con un alcali⁽³⁾. Da questa, infatti, risulta che in corrispondenza di pH 4,5 e 9,5 circa, si hanno i due punti stechiometrici rispettivamente del fosfato monometallico e di quello bimetallico (e quindi potere regolatore minimo) mentre prossima a pH 6,5 trovasi la costante di dissociazione del fosfato monometallico (quindi un massimo del potere regolatore).

3. Che il potere regolatore della frazione colloidale presenta un minimo in corrispondenza di pH 5,7 (ciò che verosimilmente si può imputare al punto isoelettrico della miosina) e una zona di valori costanti fra pH 8,2 e 6,2.

4. Che il potere regolatore della mioproteina rappresenta solo una piccola parte di quello spettante alla frazione colloidale, ciò che conferma un'osservazione di Weber⁽⁴⁾ secondo il quale alla miosina spetterebbe un potere neutralizzatore molto superiore di quello della mioproteina; e che esso diventa zero a pH 6,2 cioè al punto isoelettrico della mioproteina.

5. Che il potere regolatore della frazione colloidale, andando da pH 7,7 a 6,7 varia dal 76 al 55 % del potere regolatore totale del succo ed aumenta notevolmente sia nel verso più acido sia in quello più alcalino dei limiti di questa zona.

Quest'ultima conclusione è di accordo coi risultati delle ricerche di Meyerhof e con quelle recentissime di Stella. Meyerhof e Lohmann⁽⁵⁾ utilizzando il fatto che le alcali-proteine non sono solubili nell'alcool, mentre il lattato alcalino lo è, determinarono quanto alcali è sottratto alle proteine muscolari dall'acido lattico che si forma nella fatica e calcolarono che i

(1) DE CARO L., loc. cit.

(2) FURUSAWA K. and KERRIDGE P. M. T. loc. cit.

(3) CLARK W. M., *The determination of Hydrogen ions*. Baltimore, 1923, p. 41.

(4) WEBER H. H., *Das kolloidale Verhalten der Muskeleiweißkörper*, III. Mitt., « Biochem. Zeitschr. », 1927, p. 407.

(5) MEYERHOF O. und LOHMANN, *Ueber die Vorgänge bei der Muskelermüdung*, « Biochem. Zeitschr. », 1926, 168, p. 128.

proteinati muscolari sono capaci di neutralizzare circa $1/2 - 2/3$ dell'acido lattico che si forma durante l'attività del muscolo. Stella ⁽¹⁾, d'altra parte, determina direttamente il calore di neutralizzazione dell'acido carbonico col muscolo vivente (metodo termoelettrico di A. V. Hill). Egli trova che sia nel muscolo a riposo, sia in quello affaticato, la neutralizzazione di 1 grammo-molecola di acido carbonico si accompagna con lo sviluppo di 9400 calorie. Assumendo come calore di dissociazione delle proteine muscolari la cifra trovata da Meyerhof di — 12600 calorie, si calcola, dal dato precedente, che i $3/4$ del potere neutralizzatore totale spettano ai proteinati muscolari.

Commemorazione del Socio Hermann Wagner

letta dal Socio LUIGI DE MARCHI nella seduta del 5 gennaio 1930.

Con Ermanno Wagner, morto il 18 giugno scorso alla fine del suo ottantanovesimo anno (era nato ad Erlangen il 23 giugno 1840) la scienza geografica ha perduto non solo un grande maestro, ma un fervente apostolo.

Un grande maestro! Si usa dire che la geografia dev'essere vissuta, che non si comprende il geografo da tavolino, che non ha visto i paesi, non ha toccato con mano gli oggetti e i fenomeni di cui parla. Alla stessa stregua si potrebbe negare la legittimità della storia. Il geografo è, come lo storico, un raccoglitore e coordinatore e interprete di fatti e di documenti rivelati o creati da altri. Se c'è differenza, è nella maggior varietà del campo d'esplorazione, nella grande eterogeneità dei fatti e delle leggi, che richiederebbero nel geografo una preparazione in campi disparatissimi, che è difficile siano dominati sovraneamente da una persona sola. Da ciò la quasi impossibilità che esista il geografo completo, la necessità di una divisione del lavoro. Questa però non esclude la necessità di una comunità di spirito informatore, di quello *spirito geografico* che in ogni fatto del mondo fisico vede la ripercussione nel mondo umano attuale o storico, e in ogni fatto umano sente il substrato fisico che, se non lo determina, lo limita o lo governa: di quello *spirito geografico*, che può dirsi il senso della casa comune, la Terra.

Pochi studiosi hanno avuto più di Ermanno Wagner opportunità di coltivare estensivamente questo spirito. Nipote di un naturalista esploratore, Maurizio Wagner, che fra un viaggio e l'altro aveva a lungo soggiornato

(1) STELLA G., *The combination of Carbondioxide with muscle*, «The Journ. of Physiol.», 1929, 68, p. 49.

nella casa domestica; figlio di un fisiologo, Rodolfo Wagner, professore dell'Università di Erlangen, poi chiamato a Gottinga, il quale lo iniziò agli studi di biologia e d'antropologia; nipote di un professore di economia politica, Adolfo Wagner, Ermanno trovò fin dalla fanciullezza un ambiente che lo indirizzava allo studio della Terra e dell'uomo come organismi fisici ed economici.

Si risvegliò ben presto in lui l'amore agli studi geografici, ma su una via ben diversa da quella che allora era più battuta in Germania, e che era stata aperta da Carlo Ritter, *restauratore*, come lo chiama il Wagner stesso, *dell'indirizzo storico delle scienze geografiche* ⁽¹⁾. Egli fu tra i primi che riconobbe la Geografia come una scienza a sè, non soltanto ancella della storia; e seppe con una propaganda attiva, continuata si può dire in un sessantennio di apostolato magistrale, imporne l'insegnamento speciale nelle scuole tedesche; così che si potè dire di lui che, con Gerland e Rein, *fu tra gli ultimi geografi autodidatti*, in quanto furono essi ad *iniziare l'era accademica della Geografia in Germania* ⁽²⁾.

Wagner considerava la Terra e l'umanità soprattutto come quantità misurabili. « Die Grundaufgabe der Geographie ist doch entschieden eine messende » ⁽³⁾. Questo indirizzo rispondeva alla tendenza positiva della sua mente, che lo diresse da giovane agli studi matematici e fisici. In questi ebbe dei maestri come Bernardo Riemann e Guglielmo Weber; essi valsero sopra tutto a inquadrare il suo pensiero scientifico, senza distoglierlo però da quegli studi più vasti e vari, che rispondono alle curiosità più naturali. Così egli ebbe contemporaneamente Grisebach maestro di botanica e Katerstein di zoologia. In tal modo egli si acquistò quel corredo per così dire enciclopedico, ma convergente a un oggetto e disciplinato da rigoroso metodo scientifico, che è il più necessario fondamento del geografo.

Una fortunata necessità lo portò poi, alla fine degli studi universitari, nel centro della coltura geografica tedesca, a Gotha, dove a 24 anni dovette accettare per ragioni economiche un posto di professore ginnasiale di scienze matematiche e naturali. Ivi frequentò il grande istituto cartografico Perthes, dove conobbe la maggior parte dei geografi e degli esploratori e dove fu chiamato ben presto a collaborare con geografi come Petermann, Berghaus, Vogel, Behm ecc. Così fu definitivamente decisa la sua carriera scientifica.

Collaborò anzitutto alla redazione dell'Almanacco di Gotha assumendone la parte statistica, e poi iniziò nel 1872 con Behm la pubblicazione, negli *Ergänzungshefte* delle « Petermann's Mittheilungen », di quella preziosa statistica annuale che è *Die Bevölkerung der Erde*, da lui continuata poi da

(1) Trattato di Geografia Generale trad. Cavallero. Vol. III, p. 123. Torino, Bocca 1911.

(2) SIEVERS WM. Hermann Wagner in « Geographen-Kalender 1908 », p. 5.

(3) *Lehrbuch der Geographie* 1899. Vorrede.

solo, e poi in collaborazione con Alessandro Supan, fino al 1899. Nel 1879 gli fu affidata la direzione del « Geographisches Jahrbuch », fondato da Behm nel 1866. Specialmente per merito suo, per la larghezza e il sentimento veramente internazionali del suo spirito e della sua coltura, che gli assicurarono la collaborazione dei geografi più autorevoli di tutti i paesi, questo Annuario assunse importanza veramente mondiale, tanto da poter superare la crisi della guerra, così disgregatrice anche nel campo della scienza. Nel Jahrbuch il Wagner iniziò e continuò la sua campagna per l'affermazione di un metodo della Geografia come scienza, costituendo e redigendo la sezione metodologica.

Nel 1876, quando fu chiamato all'Università di Königsberg, gli fu affidata la 4ª edizione del *Trattato di Geografia* di Hermann Guthe. Si può dire che incomincia allora, per l'unione di questi due fatti, la sua vera funzione di maestro, dalla cattedra e dal libro. Tenne l'insegnamento per 44 anni, 4 a Königsberg e 40 a Gottinga, e all'insegnamento si dedicò con passione di apostolo, in lezioni, esercizi, colloqui, conferenze pubbliche portandovi quella chiarezza e quella precisione che rispondevano alla quadratura della sua mente ordinatrice, sistematrice dell'immenso materiale di dottrina da lui raccolto nella bibliografia mondiale del Jahrbuch.

Nello stesso tempo in cui iniziava l'insegnamento il Wagner assumeva, come dissi, la 4ª edizione della Geografia del Guthe, come una preparazione ai suoi doveri cattedratici. L'opera nelle sue mani naturalmente si trasformò. Nell'opera del Guthe era data, secondo la scuola ritteriana dominante, la parte prevalente alla visione storico-politica della geografia; Wagner sentì la necessità di rafforzarne la base matematica e naturale. Ciò rispondeva, non soltanto alla sua preparazione e alla sua indole, ma anche a una evoluzione necessaria della scienza dovuta ai progressi della geologia e della fisica terrestre e alla conoscenza sempre più vasta di nuovi ambienti naturali ed umani. Cominciò con tre capitoli preliminari di geografia matematica, di geografia fisica e biologica e di una *parte generale* di geografia storica, cioè dei principi generali di geografia antropica, economica e politica. Questi tre capitoli, che nella 4ª edizione non rappresentavano che l'ottava parte dell'opera (123 pagine su 1030), essendo le altre consacrate alla geografia regionale, andarono nelle edizioni successive progressivamente ingrossandosi fino a occupare un intero volume su due, e ad assumere finalmente individualità di opera a sè in tre volumi, nel classico *Trattato di geografia generale*, che divenne il testo riconosciuto delle Università tedesche, e di cui possediamo anche un'ottima traduzione italiana di Cavallero, riveduta dall'autore (Torino, Bocca 1911, 3 vol.). È a quest'opera veramente classica che è e rimarrà legato il nome di Ermanno Wagner. Specialmente il 1º volume di Geografia matematica è un modello di chiarezza e di rigore; e, salvo che nel capitolo sulle proprietà fisiche della Terra, dove i progressi della scienza hanno portato visioni assolutamente nuove, è tuttora consultato

e studiato con molto profitto, nè si può dire finora superato come opera didattica. Meno originale è il volume 2° di Geografia fisica, minuziosa raccolta di fatti, e di dati, scarsamente cementati da visioni sintetiche; mentre nel 3° di Geografia biologica e umana tornano in evidenza le doti caratteristiche dell'autore: ordine e chiarezza. Si spiega questa diversità di comprensione ed esposizione coi caratteri già segnalati dell'ingegno eminentemente sistematico dell'autore, che difficilmente poteva dominare la grande complessità dei processi fisici della natura, mentre si prestava mirabilmente a mettere in chiaro leggi astronomiche e geometriche e ad inquadrare nella statistica o nella logica i fenomeni biologici e sociali.

Ciò rispondeva anche alla attività svolta presso l'Istituto di Perthes, prevalentemente statistica e cartografica. Dei primi suoi lavori statistici abbiamo già fatto cenno. Ancora negli ultimi anni, nel 1925, egli pubblicò una memoria sulla *Superficie della terra ferma e l'altitudine media della scorza terrestre*.

Della sua vocazione per la Cartografia scientifica diede saggio fin dal primo anno della sua residenza a Gotha colla memoria sulle *Dimensioni dello sferoide terrestre secondo gli elementi di Bessel in misura metrica con speciale riguardo ai bisogni della cartografia*, e pochi anni dopo curò la *Carta murale dell'Impero tedesco e regioni vicine*. Nell'insegnamento dava gran parte agli esercizi cartografici, e molta cura dedicò all'*Atlante metodico*, al quale fa spesso richiamo nel suo trattato e che ha per caratteri notevoli la scelta e uniformità delle proiezioni e l'indicazione in margine delle deformazioni lineari e areali a varia distanza dal centro della carta.

Anche la maggior parte della sua produzione originale fu dedicata alla cartografia e alla sua storia e gli Italiani debbono essergli grati per gli studi sui portolani medioevali del Mediterraneo, per la ricostruzione della Carta di Toscanelli, di cui sostenne l'autenticità, e per gli studi vespucciani.

Ermanno Wagner non si può dire un grande geografo nel senso di scopritore di nuovi fatti, di nuove leggi e nemmeno di nuovi metodi. Egli fu un grande maestro e in talè qualità rese alla scienza e alla sua patria un servizio forse più generale e fondamentale. Le gesta degli eroi non sono comprese da un popolo di ignoranti e di imbelli, che le ignora o non sa farle fruttare. L'Italia ha avuto, nel primo periodo del suo risorgimento a nazione, una plejade di esploratori, la cui opera rimase sterile, o giovò ad altre nazioni, perchè paese e governo non ne compresero il significato, nè scientifico nè politico. Al dramma eroico, che talvolta fu tragedia, mancava il pubblico, che ignorava perfino la località dove si era svolto. Mancava il pubblico perchè mancava (e possiamo dire che non manchi tuttora?) una scuola geografica. Si può affermare senza tema di esagerare che uno dei fattori del grande impero coloniale conquistato, con sì mirabile rapidità e coerenza politica, della Francia fu la scuola geografica di Parigi, che preparò dei conquistatori geografi e creò con una schiera di insegnanti valorosi la

coscienza geografica del paese. Tale scuola seguì, pur con diverso spirito, le tracce della scuola tedesca, di cui Wagner fu uno dei pionieri, e che aveva contribuito anch'essa a costituire in pochi anni quel grande impero coloniale, che la guerra ha dissipato. Per questo l'opera di Wagner è un esempio.

Tale opera formatrice fu molto apprezzata dai geografi italiani; fin dal 1886 Ermanno Wagner era socio della Società Geografica, e dal 1911 apparteneva alla nostra Accademia. A nome di questa io porgo il saluto alla Sua memoria.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio DE MARCHI commemora il defunto Socio Straniero H. WAGNER. Il Presidente ringrazia il Socio DE MARCHI per la sua dotta commemorazione.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'Accademico Segretario prof. PARRAVANO presenta i libri giunti in dono all'Accademia segnalando il volume del Socio GINO FANO e A. TERRACINI, « Lezioni di geometria analitica e proiettiva »; il volume del Socio GINO LORIA, « Curve piane speciali algebriche e trascendenti »; J. BERZELIUS, « Levnadsteckning av H. G. Söderbaum »; una pubblicazione russa sulle superficie della Russia Asiatica.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente sen. FANO sicuro d'interpretare i sentimenti dell'Assemblea esalta con calde parole il nuovo vincolo d'affetto che viene a unire due Eroiche Dinastie e due Grandi Paesi e formula per S. A. R. il Principe di Piemonte e la Sua Augusta Sposa i più fervidi voti di felicità.

L'Assemblea approva vivamente.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Il Socio CASTELNUOVO presenta per l'inserzione nelle Memorie Accademiche il lavoro della signora MARGHERITA PIAZZOLLA-BELOCH dal titolo: « Sulle superficie iperellittiche di rango 3 ».

Presentano Note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci: CASTELNUOVO, CROCCO, LEVI-CIVITA, MILLOSEVICH, PALAZZO.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 5 gennaio 1930

- ALPATOV. W. W. and PEARL R. — Experimental Studies on the Duration of Life. XII. Influence of Temperature during the Larval Period and Adult Life on the Duration of the Life of the Imago of *Drosophila Melanogaster*. (Reprint. from the « American Naturalist ». Vol. LXIII, pp. 37-67). Baltimore, 1929. 8°.
- ANDRETTA A. — L'unità di calcolo della computeristeria. Foggia, 1929. 12°, pp. 1-33.
- ARMSTRONG HARTGE L. — *Nereocystis*. Seattle, 1928. 8°, pp. 207-237.
- BERZELIUS JAC. — *Levnadsteckning*, av H. G. Söderbaum. Bd., I, II. Uppsala, 1929. 8°, pp. I-IX, I-547, I-VIII, I-540.
- DEL PELO PARDI G. — Il terreno agrario.
a) Stato fisico-chimico e microbiologico.
b) Influenza dell'eccesso di umidità del sottosuolo. La malaria. Roma, 1925. 8°, pp. 1-34.
- DEL PELO PARDI G. — Indicazioni generali sulla possibilità di sviluppo della infezione malarica nell'agro romano e in tutte le altre zone malariche del mondo secondo una nuova dottrina. (Estr. dal « Rinnovamento Medico ». N. XIX, 1927). Napoli, 1927. 8°, pp. 1-5.
- DEL PELO PARDI G. — *Sterquilinium* (La Concimaia). Roma, 1925. 8°, pp. 1-48.
- DE TILLO A. et SCHOHALSKY J. — *Superficie de la Russie avec les bassins*. Vol. I, II. St. Pétersbourg, 1905. 4°, pp. 1-66, 1-35, 1-101, I-VI, 1-27.
- EINSTEIN A. — *Auf die Riemann-Metrik und den Fern-Parallelismus gegründete einheitliche Feldtheorie*. (Sonderabd. aus « Mathematische Annalen ». 1929). Berlin, 1929. 8°, pp. 1-13.
- FANO G., TERRACINI A. — *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*. Roma, 1930. 8°, pp. I-VIII, 1-630.
- FANTOLI G. — *Premesse informative sul R. Politecnico di Milano*. Milano, 1929. 8°, pp. 1-63.
- GUERAZZI G. F. — *Il problema del grano e la soluzione sua rinnovando l'antichissima agricoltura romana*. (Estr. dagli « Atti della R. Accademia dei Georgofili ». Vol. XXIII). Firenze, 1926. 8°, pp. 1-37.
- HAZARD D. L. — *Geophysical Methods as applied in the Study of Geological Structure. The Relation of the Magnetic Work of the United States Coast and Geodetic Survey to Geophysical Prospecting Methods*. (Reprint. from « Journal of Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity ». N. III, 1928, pp. 129-148). Cincinnati, 1928. 8°.
- JANET M. — *Leçons sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles* (fasc. IV, « Cahiers scientifiques », fasc. IV). Paris, 1929. 8°, pp. 1-122.
- JULIN CH. et PICQUE R. — *Sur le développement de la Campanule de Haller chez « Trutta fario »*. (Estr. des « Comptes Rendus de l'Association des Anatomistes ». XXI Réunion, 1926). S. l., 1926. 8°, pp. 1-8.
- LONGO B. — *Sul « Pinus Cembra » L. del M. Spinale*. (Estr. dal « Nuovo Giornale Botanico Italiano ». Vol. XXXVI, pp. 325-327). Firenze, 1929. 8°.
- LORIA G. — *Curve piane speciali algebriche e trascendenti*. Vol. I. Milano, 1930. 8°, pp. I-XVI, 1-374.
- PEARL R. — *A Note on the Mortality of Brewery Employees*. (Reprint. from « Human Biology: a record of research ». Vol. I. pp. 136-138). Jork. 1929. 8°.

- PEARL R. — Biological Factors in Negro Mortality. (Reprint. from «Human Biology: a record of research». Vol. I, pp. 229-249). Jork. 1929. 8°.
- PEARL R. — Cancer and Tuberculosis (Reprint. from the «American Journal of Hygienè». Vol. IX, pp. 97-159). Lancaster, 1929. 8°.
- PEARL R. — Progress Report on an Investigation in Race Pathology. (Reprint. from the «Southern Medical Journal». Vol. XXI, 1928). Baltimore, 1928. 8°.
- PEARL R. — Report of the Director of the Institute for Biological Research. 1927-1928. (Reprint. from the «Johns Hopkins University Circular», 1928). Baltimore. 1928. 8°, pp. 1-10.
- PEARL R. — Science, Metaphysics and Blood. (Reprint. from «Science». Vol. LXIX, pp. 161-163). S. l., 1928. 8°.
- PEARL R. — II. Statistical Report on the First years's Operations of the Bureau for Contraceptive Advige. (Reprint. of «First. Report of the Bureau for Contraceptive Advige», 1929). Baltimore, 1929. 8°, pp. 1-6.
- PEARL R. — The Cost of Biological Books in 1928. (Reprint. from the «Quarterly Review of Biology». Vol. III, pp. 600-603). S. l., 1928. 8°.
- PEARL R. — The Senior Fellowships of St. John's College. (Reprint. from «School and Society and Educational Review». Vol. XXVIII, 1928). Baltimore, 1928. 8°, pp. 1-4.
- PEARL R. and BARCLAY WHITE F. — Age Chances in Alcohol Tolerance in *Drosophila Melanogaster*. (Reprint. from the «Proceedings of the National Academy of Sciences». Vol. XV, pp. 425-429). S. l., 1929. 8°.
- PEARL R. and REED L. J. — The Population of an Area around Chicago and the Logistic Curve. (Reprint. from the «Journal of the American Statistical Association», 1929, pp. 65-67). S. l., 1929. 8°.
- PEARL R. and SUTTON A. C. — Studies on Constitution. I Methods. (Reprint. from «Human Biology: a record of research». Vol. I). Jork, 1929. 8°, pp. 1-56.
- PEARL R., SUTTON A. C. and HOWARD W. T. — Experimental Treatment of Cancer with Tuberculin. (Reprint. from the «Lancet», 1929). Baltimore, 1929. 8°, pp. 1-10.
- PEARL R. and WINSOR CH. P. — The Form of Growth Curve of the Cacteloup (*Cucumis Melo*) under field Conditions. (Reprint. from the «Proceedings of the National Academy of Sciences». Vol. XIV, pp. 895-901). S. l., 1928. 8°.
- SILVESTRI F. — Contribuzione alla conoscenza degli Japygidæ (Thysanura) dell'Africa occidentale. (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici». Vol. XXIII, pp. 149-196). Portici, 1929. 8°.
- SILVESTRI F. — Primo contributo alla conoscenza degli Japygidæ (Thysanura) dell'Eritrea (Africa orientale). (Estr. dalle «Memorie della Società Entomologica Italiana». Vol. IX, pp. 5-11). S. l., 1930. 8°.
- TSCHERMAK E. — Ein neuer fruchtbarer Weizenartbastard (*Triticum fulgidum Triticum villosum*) (Sonderabd. d. «Forschungen auf dem Gebiete des Pflanzenbaus und der Pflanzenzüchtung», 1929). Berlin, 1929. 8°.
- TSCHERMAK E. — Einige Bastardierungsergebnisse an Linsen und Ackerbohnen. (Sonderabd. aus den «Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathem.-naturwiss. Klasse». Band CXXXVII, pp. 171-181). Wien, 1928. 8°.
- TSCHERMAK E. — Einige moderne Fragen auf den Gebiete der Pflanzenzüchtung. (Sonderabd. aus der «Wiener Landwirtschaftlichen Zeitung». N. 36-37, 1926). Wien, 1926. 8°, pp. 1-19.
- TASCHERMAK E. — Kultur- und Wildhaferbastarde und ihre Beziehungen zu den sogenannten Fatuoiden. (Sonderabd. aus der «Zeitschrift für induktive Abstammungs- und Vererbungslehre. Bd. LI, pp. 400-481). Berlin, 1929. 8°.
- TSCHERMAK E. — Praktische Ratschläge für Leguminosenzüchter. (Sonderabd. aus den «Mitteilungen der Deutschen Landwirtschafts-Gesellschaft.», 1925). Berlin, 1925. 8°, pp. 1-4.

- TASCHERMAK E. — Praktische und theoretische Ergebnisse auf den Gebiete der Gerstenbastardierung. (Sonderabd. aus «Zeitschrift für Pflanzenzüchtung», 1927, pp. 370-380). Berlin, 1927. 8°.
- TSCHERMAK E. — Ueber seltene Weizen- und Haferbastarde und Versuche ihrer praktischen Verwertung. (Sonderabd. aus «Beiträge zur Pflanzenzucht». Heft X, 1929, pp. 74-93). Berlin, 1929. 8°.
- TSCHERMAK E. — Zur zytologischen Auffassung meiner Aegilotricumbastarde und der Artbastarde überhaupt. Theorie der Chromosomenaddition oder Kernchiasmie. (Sonderabd. aus den «Berichten der Deutschen Botanischen Gesellschaft». Band. XLVII, pp. 253-261). S.l., 1929. 8°.
- TSCHERMAK E.—SEYSENEGG E. — Ueber Blütenfüllung und ihre Vererbung. (Sonderabd. aus «Festschrift der österr. Gartenbau-Gesellschaft 1827-1927». S. 120-131). Wien, 1927. 8°.
- TSCHERMAK E. und TSCHERMAK A. — Zur mathematischen Charakteristik reiner Linien und ihrer Bastarde. (Separat aus «Hereditas», IX, pp. 257-273). Wien, s. d. 8°.
- UCHIDA I. — On the Origin of Newtonian Attraction and the Creation of the Atomic Cohesion. Tokyo, s. d. 8°, pp. 1-6.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 19 gennaio 1930 (anno VIII)

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Meccanica. — *Caratteristiche e bicaratteristiche delle equazioni gravitazionali di Einstein. Nota II* ⁽¹⁾ del Socio T. LEVI-CIVITA.

Riprendiamo notazioni e formule della Nota I con lo scopo di riconoscere quali condizioni devono imporsi alla funzione $\chi(x^0, x^1, x^2, x^3)$ e per essa alle $p_i = \frac{\partial \chi}{\partial x^i}$ affinchè si abbassi la caratteristica della matrice D, che ha in generale il valore 6. Prima però di venire a questo, che è il punto conclusivo della nostra indagine, ci converrà istituire alcune considerazioni intese a rendere semplici e simmetriche le verificazioni formali.

4. — DIGRESSIONE GEOMETRICA SOPRA CERTE QUADERNE ORTOGONALI DA ASSOCIARE AD UN VETTORE \mathbf{p} DI LUNGHEZZA NULLA.

Suppongasi che x^0 designi al solito la variabile temporale del ds^2 relativistico

$$ds^2 = \sum_{i,k}^3 g_{ik} dx^i dx^k$$

che deve naturalmente ritenersi indefinito con indice d'inerzia 3. Per essere temporale la linea x^0 (su cui varia la sola x^0), $g_{00} > 0$, dovendo d'altra parte risultare definita negativa la forma ternaria

$$\sum_{i,k}^3 g_{ik} dx^i dx^k = -dl^2.$$

(1) Presentata nella seduta del 5 gennaio 1930.

Prendiamo a considerare in un punto generico P del cronotopo un vettore quadridimensionale (reale) \boldsymbol{p} di lunghezza nulla, tale cioè che le sue quattro componenti contravarianti p^i siano legate dalla relazione quadratica

$$(18) \quad \sum_{ik}^3 g_{ik} p^i p^k = 0.$$

Supporremo, ben si intende, che \boldsymbol{p} non sia identicamente nullo, cioè che non tutte le componenti si annullino. Ne consegue che è certo diverso da zero sia il componente temporale (contravariante) p^0 , sia il vettore spaziale \boldsymbol{v} di componenti contravarianti p^1, p^2, p^3 : si intende che tale \boldsymbol{v} va pensato come vettore spiccato da P , nello spazio a tre dimensioni $x^0 = \text{cost.}$ passante per P , spazio che chiameremo S_3 , al quale va naturalmente attribuita la metrica subordinata dal ds^2 cronotopico, cioè dal

$$dl^2 = - \sum_{ik}^3 g_{ik} dx^i dx^k.$$

Infatti, qualora fosse $p^0 = 0$, la (18) si ridurrebbe a

$$\sum_{ik}^3 g_{ik} p^i p^k = 0,$$

e questa, per il carattere definito della forma ternaria, implicherebbe (nel campo reale, cui specificamente ci riferiamo) l'annullarsi di tutte le p^i , contro l'ipotesi. D'altra parte, se fosse $\boldsymbol{v} = 0$, ossia se si annullassero p^1, p^2, p^3 , la (18) si ridurrebbe a $g_{00} (p^0)^2 = 0$, implicando $p^0 = 0$.

Analogo comportamento presentano le componenti covarianti di \boldsymbol{p} : sono cioè diversi da zero sia p_0 che il vettore spaziale \boldsymbol{w} di componenti covarianti p_1, p_2, p_3 . Ciò risulta dalla semplice osservazione che la (18) equivale a

$$\sum_{ik}^3 g^{ik} p_i p_k = 0$$

e che una forma quadratica (irriducibile) e la sua reciproca sono trasformabili l'una nell'altra, sicchè (nel campo reale) hanno necessariamente lo stesso indice d'inerzia.

Il vettore \boldsymbol{w} di S_3 , che non è nullo, per quanto si è osservato or ora, determina, sempre in S_3 , una giacitura ortogonale, in cui si sceglieranno due versori (vettori unitari) λ_2 e λ_3 fra loro perpendicolari, e, ben s'intende, unitari, reali, designandone al solito con λ_μ^i ($\mu = 2, 3$; $i = 1, 2, 3$) le componenti contravarianti.

Importa osservare che questi versori λ_μ di S_3 possono anche risguardarsi come vettori del cronotopo. Basta associare, alle componenti spaziali, $\lambda_\mu^0 = 0$ come componente temporale. Con ciò l'ortogonalità (in S_3) fra \boldsymbol{w}

e i due λ_μ sussiste anche nella metrica quadridimensionale, rimanendo espressa da

$$(19) \quad \sum_i^3 p_i \lambda_\mu^i = 0 \quad (\mu = 2, 3).$$

E i due vettori λ_μ verificano la relazione quadratica

$$\sum_{ik}^3 g_{ik} \lambda_\mu^i \lambda_\mu^k = -1 \quad (\mu = 2, 3)$$

presentandosi quindi nel cronotopo come versori *spaziali*. Ben si intende poi che essi rimangono ortogonali tra loro anche rispetto al ds^2 cronotopico.

Introduciamo adesso, nel generico punto P di cui si tratta, una ulteriore coppia di versori λ_0, λ_1 (sempre reali) che formino, assieme a λ_2 e λ_3 , una quaderna ortogonale. Ciò è possibile in infiniti modi, la quaderna risultando in ogni caso costituita da tre versori spaziali $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_1$, e da un solo versore λ_0 temporale, per cui cioè risulta

$$\sum_{ik}^3 g_{ik} \lambda_0^i \lambda_0^k = 1.$$

Il vettore \mathbf{p} (come ogni altro vettore del cronotopo) si può notoriamente rappresentare quale combinazione lineare dei versori λ_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), i coefficienti essendo i corrispondenti prodotti scalari

$$(20) \quad \rho_\mu = \mathbf{p} \times \lambda_\mu = \sum_i^3 p_i \lambda_\mu^i \quad (\mu = 0, 1, 2, 3).$$

Per le (19) si ha in particolare $\rho_2 = \rho_3 = 0$, e quindi

$$\mathbf{p} = \rho_0 \lambda_0 + \rho_1 \lambda_1,$$

con che la condizione $\mathbf{p} \times \mathbf{p} = 0$ (lunghezza nulla), ove si tenga presente che

$$\lambda_0 \times \lambda_0 = 1, \quad \lambda_1 \times \lambda_1 = -1, \quad \lambda_0 \times \lambda_1 = 0,$$

si riduce a

$$\rho_0^2 - \rho_1^2 = 0,$$

ossia $\rho_0 = \pm \rho_1$, ρ_1 essendo certamente $\neq 0$ (in quanto, se si annullasse ρ_1 , sarebbe nullo anche \mathbf{p} contro l'ipotesi).

Si potrà ritenere in definitiva

$$(21) \quad \rho_0 = \rho_1 = \rho \neq 0,$$

e quindi

$$(22) \quad \mathbf{p} = \rho (\lambda_0 + \lambda_1),$$

immaginando all'occorrenza invertito il senso di λ_0 , con che esso rimane versore temporale perpendicolare ai tre λ_μ ($\mu = 1, 2, 3$).

5. — DIGRESSIONE ALGEBRICA SULLA INDIPENDENZA DI CERTI TENSORI.

Consideriamo una generica matrice M ad m righe e $n \geq m$ colonne, di cui

$$a_{\mu q} \quad (\mu = 1, 2, \dots, m; \quad q = 1, 2, \dots, n)$$

sia l'elemento generico e $K \leq m$ la caratteristica.

Si formi poi, ripetendo alcune colonne di M , una matrice M' con lo stesso numero m di righe e con $n' > n \geq m$ colonne. La caratteristica di M' è ancora K . Basta pensare che, essendo M parte di M' , tutti i determinanti contenuti in M lo sono perciò stesso anche in M' ; e che d'altra parte ogni determinante non nullo che figuri in M' deve necessariamente essere costituito da colonne non ripetute, e quindi appartenenti anche ad M .

Ciò premesso, introduciamo sei tensori cronotopici b_{μ}^{ik} , dove $i, k (= 0, 1, 2, 3)$ sono indici di contravarianza, mentre μ è puramente ordinale e assume i valori $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

In modo preciso porremo, con le notazioni del numero precedente,

$$(23) \quad b_{\mu}^{ik} = \frac{1}{2} (p^i \lambda_{\mu}^k + p^k \lambda_{\mu}^i) \quad (\mu = 0, 1, 2, 3);$$

$$(24) \quad \begin{cases} b_4^{ik} = \frac{1}{2} (\lambda_2^i \lambda_3^k + \lambda_3^i \lambda_2^k), \\ b_5^{ik} = \frac{1}{2} (\lambda_2^i \lambda_2^k - \lambda_3^i \lambda_3^k). \end{cases}$$

Si tratta di tensori simmetrici (ossia tali che $b^{ik} = b^{ki}$) e quindi costituiti ciascuno da dieci elementi. Dico che la matrice M di elementi

$$b_{\mu}^{ik}$$

a sei righe (corrispondenti ai sei valori di μ) e dieci colonne (corrispondenti alle singole combinazioni semplici dei due indici i e k) ha precisamente 6 per caratteristica. In virtù della precedente osservazione, basterà all'uopo verificare che ha caratteristica 6 la matrice M' che proviene da M considerando, per $i \neq k$, due volte le colonne b_{μ}^{ik} ($\mu = 0, 1, \dots, 5$). Si tratta così di una matrice a sedici colonne (quante le disposizioni con ripetizione di quattro oggetti a due a due) e, naturalmente, ancora a sei righe.

Per accertare comodamente che M' ha la caratteristica 6 giova farne il prodotto con una matrice simile M'' costituita dalle componenti covarianti di sei tensori simmetrici opportunamente scelti, per es. come segue:

$$(25) \quad c_{\nu|ik} = \lambda_{1|i} \lambda_{\nu|k} + \lambda_{0|k} \lambda_{\nu|i} \quad (\nu = 0, 1, 2, 3);$$

$$(26) \quad \begin{cases} c_{4|ik} = \lambda_{2|i} \lambda_{3|k} + \lambda_{2|k} \lambda_{3|i}, \\ c_{5|ik} = \lambda_{2|i} \lambda_{2|k} - \lambda_{3|k} \lambda_{3|i}. \end{cases}$$

Il prodotto, effettuato per righe, di queste due matrici può essere espresso mediante il determinante C di elementi

$$(27) \quad C_{\mu\nu} = \sum_{ik} b_{\mu}^{ik} c_{\nu|ik} \quad (\mu, \nu = 0, 1, \dots, 5),$$

dei quali passiamo a formare l'espressione esplicita. Il calcolo è dei più semplici ove si tenga conto:

1° che costituendo le λ_{μ} una quaderna di versori ortogonali, di cui λ_0 temporale, si ha

$$\lambda_{\mu} \times \lambda_{\nu} = \delta_{\mu\nu} e_{\mu} = \delta_{\mu\nu} e_{\nu}$$

coi soliti significati delle $\delta_{\mu\nu}$ (0 per $\mu \neq \nu$, 1 per $\mu = \nu$) e delle e_{μ} ($e_0 = 1$, $e_1 = e_2 = e_3 = -1$);

2° che, per le (21) e (19),

$$(28) \quad \rho_0 = \rho_1 = \rho \neq 0, \quad \rho_2 = \rho_3 = 0.$$

Con ciò segue tosto dalle (27), introducendovi materialmente le espressioni delle b_{μ}^{ik} , $c_{\nu|ik}$ fornite dalle (23), (24) e (25), (26):

$$(29) \quad \begin{aligned} C_{\mu\nu} &= \rho e_{\mu} \delta_{\mu\nu} + \rho_{\nu} \delta_{\mu 0} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3); \\ C_{\mu 4} &= C_{4\mu} = 0, \quad C_{\mu 5} = C_{5\mu} = 0; \\ C_{44} &= 1, \quad C_{45} = C_{54} = 0, \quad C_{55} = 1. \end{aligned}$$

In conformità, il valore C del determinante prodotto delle due matrici si riduce a quello del minore principale costituito dalle prime quattro righe e colonne. E tale minore principale, per le (29), è dato da

$$\begin{vmatrix} 2\rho & \rho & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho \end{vmatrix} = -2\rho^4.$$

Dunque C non si annulla, e ciò implica che sia 6 la caratteristica della matrice M. Infatti, in caso contrario, si annullerebbero tutti i determinanti di 6° ordine estratti dalla matrice stessa, nonchè dalla matrice M'; e, per questo fatto, anche il prodotto delle due matrici M' ed M'' (che si può presentare come somma di prodotti di cotali determinanti); mentre si è visto or ora, calcolandolo sotto forma di determinante, che tale prodotto vale $C = -2\rho^4 \neq 0$.

6. CARATTERISTICA DEL DETERMINANTE D PER $H = 0$.

Torniamo finalmente alle equazioni gravitazionali

$$E_{ik} = G_{ik} - \frac{1}{2} G g_{ik} = \dots,$$

Per una generica superficie di partenza $\chi = 0$, la parte di E_{ik} che contiene derivate seconde delle g rapporto a χ è data dalle (15) sotto la forma

$$(15) \quad E'_{ik} = E'_{ki} = H \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial \chi^2} + \{p_i p_k - H g_{ik}\} \chi - (p_i \gamma_k + p_k \gamma_i) + g_{ik} \gamma,$$

dove χ , le γ_k e γ sono certe combinazioni lineari delle derivate seconde, definite dalle (12), (13) e (14).

Ci interessa la caratteristica del determinante D (di decimo ordine) costituito dai coefficienti delle dieci $\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial \chi^2}$ nelle altrettante equazioni gravitazionali, cioè nelle $E'_{ik} = E'_{ki}$ testè richiamate. S'è già notato al n.º 3 che, se la funzione χ non verifica la equazione alle derivate parziali $H = 0$, la caratteristica del determinante D è 6. Si tratta ora di vedere che cosa accade quando $H = 0$. Sotto tale ipotesi, oltre alle quattro identità

$$(17) \quad \sum_0^3 p_k E'_{ik} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

che sussistono per qualsiasi determinazione di χ , si ha ulteriormente, come risulta subito dalle (15) e (19),

$$\sum_0^3 \lambda_i^i \lambda_3^k E'_{ik} = 0, \quad \frac{1}{2} \sum_0^3 (\lambda_2^i \lambda_2^k - \lambda_3^i \lambda_3^k) E'_{ik} = 0.$$

Scambiamo nella prima i con k , e poi sommiamo e dividiamo per 2, avendo riguardo alle (24). Potremo scrivere complessivamente

$$(30) \quad \sum_0^3 b_{ik}^{\mu} E'_{ik} = 0 \quad (\mu = 4, 5).$$

Anche alle (17) possiamo dare analoga forma dopo averle moltiplicate per λ_{μ}^i e sommate rispetto ad i . Scambiandovi allora i con k e prendendo la semisomma, si ha per le (23),

$$(17') \quad \sum_0^3 b_{ik}^{\mu} E'_{ik} = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, 3).$$

Come si vede, basta che sia $H = 0$ perchè le E'_{ik} risultino legate da sei, anzichè da quattro identità lineari. Trattandosi, per quanto si è avuto cura di appurare al numero precedente, di sei relazioni tra loro indipendenti, la caratteristica del determinante D non può essere superiore a 4. Però sussiste il risultato più preciso che essa ha proprio tale valore; e ce ne assicureremo constatando la indipendenza (rispetto agli argomenti $\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial \chi^2}$) di quattro opportune combinazioni delle E'_{ik} .

All'uopo cominciamo col ricordare dal n.º 4 che, quando H si annulla per un vettore p (reale e non nullo), p^0 e p_0 sono certamente diversi da

zero. Questo ci consente intanto di riconoscere che le quattro combinazioni lineari delle $\frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial \chi^2}$, definite dalle (13)

$$\gamma_k = \frac{1}{2} \sum_j^3 p_j \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial \chi^2} \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

sono indipendenti. Basta aver riguardo alle quattro derivate seconde di $g_{00}, g_{01}, g_{02}, g_{03}$. Il determinante dei rispettivi coefficienti in $2\gamma_0, 2\gamma_1, 2\gamma_2, 2\gamma_3$ è (come nella nota al n.º 3)

$$\begin{vmatrix} p^0 & p^1 & p^2 & p^3 \\ 0 & p^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p^0 \end{vmatrix} = (p^0)^4 \neq 0.$$

Ne consegue, essendo diverso da zero il determinante $\|\lambda_{\mu}^k\|$ dei parametri d'una qualsivoglia quaderna ortogonale, che anche le quattro forme lineari

$$(31) \quad \Gamma_{\mu} = \sum_k^3 \lambda_{\mu}^k \gamma_k$$

sono indipendenti. Siccome dalle formule testè scritte discende

$$\gamma_k = \sum_{\mu}^3 \Gamma_{\mu} \lambda_{\mu|k},$$

la (14), avuto riguardo alle (20) e (28), può essere scritta

$$(32) \quad \gamma = \sum_k^3 p^k \gamma_k = \sum_{\mu}^3 \rho_{\mu} \Gamma_{\mu} = \rho (\Gamma_0 + \Gamma_1).$$

Consideriamo d'altra parte le seguenti combinazioni lineari delle E'_{ik} :

$$\Lambda = - \sum_{ik}^3 \lambda_2^i \lambda_2^k E'_{ik},$$

$$L_1 = \frac{1}{4} \sum_{ik}^3 (\lambda_0^i \lambda_0^k - \lambda_1^i \lambda_1^k) E'_{ik},$$

$$L_2 = - \frac{1}{2} \sum_{ik}^3 (\lambda_0^i \lambda_2^k + \lambda_0^k \lambda_2^i) E'_{ik},$$

$$L_3 = - \frac{1}{2} \sum_{ik}^3 (\lambda_0^i \lambda_3^k + \lambda_0^k \lambda_3^i) E'_{ik},$$

$$L_0 = \Lambda - L_1.$$

Tenute presenti le (15) per $H = 0$, nonchè le (20), (28), (31) e (32), si ha materialmente

$$\begin{aligned}\Lambda &= -e_2 \gamma = \rho (\Gamma_0 + \Gamma_1) \\ L_1 &= -\frac{1}{2} \rho (\Gamma_0 - \Gamma_1) + \frac{1}{4} (e_0 - e_1) \gamma = \rho \Gamma_1, \\ L_2 &= \rho_0 \Gamma_2 + \rho_2 \Gamma_0 = \rho \Gamma_2, \\ L_3 &= \rho_0 \Gamma_3 + \rho_3 \Gamma_0 = \rho \Gamma_3, \\ L_0 &= \Lambda - L_1 = \rho \Gamma_0.\end{aligned}$$

Da queste apparisce l'indipendenza delle quattro combinazioni lineari L_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) rispetto alle quattro Γ_i , e quindi, per quanto s'è prima osservato, rispetto alle $\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial \chi^2}$, $\frac{\partial^2 g_{01}}{\partial \chi^2}$, $\frac{\partial^2 g_{02}}{\partial \chi^2}$, $\frac{\partial^2 g_{03}}{\partial \chi^2}$.

Rimane così provato che la caratteristica di D per $H = 0$ è veramente 4.

7. - VARIETÀ REALI CARATTERISTICHE E RELATIVE BICARATTERISTICHE.

Da quanto precede si raccoglie che la caratteristica del determinante D , la quale è 6 in corrispondenza ad una generica ipersuperficie reale $\chi = 0$ del cronotopo, si abbassa, sempre nel campo reale, di due unità allora e allora soltanto che la funzione χ verifica (sulla superficie $\chi = 0$) l'equazione di Hamilton-Jacobi

$$H = \frac{1}{2} \sum_{ik} g^{ik} p_i p_k = 0.$$

Perciò tutte e (nel campo reale) sole le soluzioni di questa equazione sono varietà caratteristiche delle equazioni gravitazionali di Einstein. Ne viene che le bicaratteristiche delle stesse equazioni, le quali in forma parametrica sono definite dal sistema canonico

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

colla specificazione $H = 0$, si identificano colle geodetiche di lunghezza nulla del ds^2 cronotopico: in quanto H è appunto la hamiltoniana di un tale ds^2 .

8. - ESEMPIO.

Un esempio molto ovvio, ma pur significativo nella sua semplicità, è offerto dal ds^2 dello Schwarzschild, che individua il campo gravitazionale (statico) dotato di simmetria sferica intorno ad un ben determinato punto O

dello spazio fisico. Con opportuna scelta delle coordinate un tale ds^2 può essere posto sotto la forma

$$ds^2 = (1 - \alpha/R) (dx^0)^2 - \left\{ \frac{dR^2}{1 - \alpha/R} + R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right\},$$

α designando una costante (il cosiddetto raggio gravitazionale della massa potenziante), e ritenendosi naturalmente $R > \alpha$.

Evidentemente la superficie sferica (fissa)

$$\chi = R - \alpha = 0$$

corrisponde ad una singolarità del campo.

La equazione di Hamilton-Jacobi è, nel caso attuale,

$$H = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - \alpha/R} p_0^2 - \left\{ (1 - \alpha/R) p_R^2 + \frac{1}{R^2} (p_\theta^2 + \sin^2 \theta p_\varphi^2) \right\} \right]$$

dove p_0 sta per $\frac{\partial \chi}{\partial x^0}$, p_R per $\frac{\partial \chi}{\partial R}$, ecc.

L'anzidetta sfera singolare deve essere, per qualsiasi x^0 , una varietà caratteristica delle equazioni gravitazionali. Si ha in effetti sopra di essa

$$p_0 = 0, \quad p_R = 1, \quad p_\theta = 0, \quad p_\varphi = 0,$$

e quindi appunto $H = 0$.

9. — RELAZIONE CON UNA PRECEDENTE RICERCA DEL WHITTAKER.

Terminerò rilevando che l'idea di applicare la teoria delle caratteristiche alle equazioni della relatività generale non è nuova, essendo stata nettamente formulata dal Whittaker nella sua bella *Note on the law that light-rays are the null geodesics of a gravitational field* (1). Ivi è appunto dimostrata la coincidenza delle linee di lunghezza nulla con le bicaratteristiche delle equazioni *elettromagnetiche* (di Maxwell, adattate al ds^2 cronotopico), ed è pur messo in luce che non poteva essere altrimenti (in una teoria conseguente), in quanto le equazioni elettromagnetiche includono anche l'ottica ondulatoria, e, come caso limite, l'ottica geometrica.

La precedente trattazione è in certo modo complementare a quella del Whittaker, poichè concerne le equazioni *gravitazionali* ed il loro collegamento diretto coll'ottica geometrica (indipendentemente da ogni teoria dei fenomeni elettromagnetici).

(1) «Proc. of the Cambridge Phil. Society», vol. XXIV, Pt. 1, 1927, pp. 32-34.

Meccanica (Idromeccanica). — *Azioni dinamiche di correnti circolatorie intorno a una lastra bilatera e intorno a una lastra arcuata.* Nota⁽¹⁾ del Corrisp. U. CISOTTI.

Mi riferisco alla mia precedente Nota *Tipi di profili rigidi isolati che subiscono un'azione dinamica da parte di una corrente fluida locale circolante intorno ad essi*⁽²⁾, per illustrare il contenuto con due esempi: uno si riferisce ad un profilo bilatero a lati rettilinei, l'altro ad un profilo foggiato ad arco circolare. Per il carattere continuativo di questa Nota alla Nota

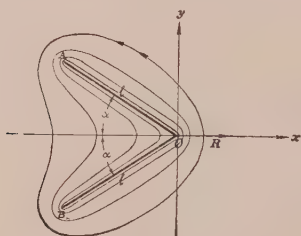


Fig. 8.

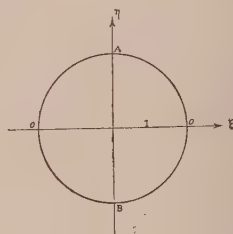


Fig. 9.

citata la numerazione dei paragrafi, delle figure e delle formule sarà pure continuativa.

5. *Profilo bilatero.* — Il profilo c , di cui si è parlato nei numeri precedenti, sia ora costituito dai bordi di una lamina bilatera AOB (fig. 8) a lati eguali $OA = OB = l$, simmetrica rispetto all'asse reale. Sia 2α con $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, l'angolo di apertura; per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ si ha un'unica asta rettilinea e in questo caso particolare è già nota la rappresentazione del piano tagliato sopra il piano $\zeta = \xi + i\eta$ per $|\zeta| \geq 1$, cioè sul piano forato circolarmente⁽³⁾. Vogliamo ora considerare il caso generale di $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

(1) Presentata nella seduta del 5 gennaio 1930.

(2) Questi « Rendiconti », vol. X (2° sem., 1929), p. 469.

(3) Cfr. ad es. la mia *Idromeccanica piana*, parte prima, Milano, Tamburini, 1921, p. 119, ultima formula in cui si ponga $\beta = \frac{\pi}{2}$. Si noti bene che è da escludersi il caso di $\alpha = 0$, perchè allora le aste OA, OB si salderebbero e il fluido non circolerebbe più lambendo entrambi i bordi di ciascuna asta.

Basta a tal uopo riferirsi al n. 73 della citata *Idromeccanica piana*, precisamente alla penultima formula di p. 117, che è la seguente:

$$d\zeta = \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right) \prod_{r=1}^{r=n} (1 - \zeta e^{-i\sigma_r})^{\frac{\sigma_r + 1 - \sigma_r}{\pi}} d\zeta;$$

ponendo in essa: $n = 4$ e

$$\vartheta_1 = \frac{1}{l} \alpha, \quad \vartheta_2 = -\alpha + \pi, \quad \vartheta_3 = \alpha - \pi, \quad \vartheta_4 = \alpha, \quad \vartheta_5 = \vartheta_1 = -\alpha;$$

$$\sigma_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \sigma_2 = \pi, \quad \sigma_3 = \frac{3\pi}{2}, \quad \sigma_4 = 2\pi,$$

con che risulta identicamente soddisfatta la (...) di p. 116 del loco ora citato, si ottiene:

$$d\zeta = \frac{1}{k} \left(\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}\right)^{1 - \frac{2\alpha}{\pi}} \left(1 + \frac{1}{\zeta^2}\right) d\zeta,$$

da cui, integrando e facendo corrispondere $\zeta = 0$ a $\zeta = 1$ (in tal caso anche $\zeta = -1$). (Cfr. le figure 8 e 9)

$$(10) \quad \zeta = \frac{1}{k} \int_1^{\zeta} \left(\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}\right)^{1 - \frac{2\alpha}{\pi}} \left(1 + \frac{1}{\zeta^2}\right) d\zeta.$$

Questa formula stabilisce la rappresentazione conforme del piano ζ , tagliato lungo il profilo bilatero (fig. 8), sul piano forato circolarmente, nel modo indicato dalla figura 9. La costante reale $k > 0$ risulta determinata introducendo la lunghezza l di ciascuno dei due segmenti OA e OB; si ottiene infatti dalla (10):

$$l = \frac{e^{i\alpha}}{k} \int_1^1 \left(\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}\right)^{1 - \frac{2\alpha}{\pi}} \left(1 + \frac{1}{\zeta^2}\right) d\zeta,$$

da cui

$$(11) \quad k = \frac{e^{i\alpha}}{l} \int_1^1 \left(\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}\right)^{1 - \frac{2\alpha}{\pi}} \left(1 + \frac{1}{\zeta^2}\right) d\zeta.$$

In particolare, se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ la (10) diviene:

$$\zeta = \frac{1}{k} \int_1^{\zeta} \left(1 + \frac{1}{\zeta^2}\right) d\zeta = \frac{1}{k} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right),$$

mentre la (11) fornisce

$$k = \frac{i}{l} \left[\zeta - \frac{1}{\zeta}\right]_1^1 = \frac{2}{l},$$

per cui la precedente in definitiva diviene

$$\zeta = \frac{l}{2} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right),$$

che coincide col risultato, già prima citato, relativo al profilo costituito da un'unica asta rettilinea di lunghezza $2l$.

Il moto circolatorio locale, intorno al profilo bilatero, sarà definito dalle (1) quando in esse ζ si ritenga funzione di ζ per mezzo della (10).

Per il calcolo delle azioni dinamiche della corrente sul profilo basta applicare la formula (6):

$$R_y + iR_x = \frac{\rho C^2}{8\pi^2} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{d\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta^2}.$$

Dalla (10) si deduce

$$\frac{d\zeta}{d\zeta} = k \left(\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right)^{1 - \frac{2\alpha}{\pi}} \frac{\zeta^2}{1 + \zeta^2},$$

per cui, sostituendo nella precedente, si ha:

$$\begin{aligned} R_y + iR_x &= \frac{\rho k C^2}{8\pi^2} \int_{\gamma} \left(\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right)^{1 - \frac{2\alpha}{\pi}} \frac{d\zeta}{\zeta^2 + 1} = \\ &= \frac{\rho k C^2}{16 i \pi^2} \int_{\gamma} \left(\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right)^{1 - \frac{2\alpha}{\pi}} \left\{ \frac{1}{\zeta - i} - \frac{1}{\zeta + i} \right\} d\zeta. \end{aligned}$$

Ma è:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \left(\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right)^{1 - \frac{2\alpha}{\pi}} \frac{d\zeta}{\zeta - i} &= -\pi i \left(\frac{i + 1}{i - 1} \right)^{1 - \frac{2\alpha}{\pi}} = -\pi e^{i\alpha}, \\ \int_{\gamma} \left(\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right)^{1 - \frac{2\alpha}{\pi}} \frac{d\zeta}{\zeta + i} &= -\pi i \left(\frac{-i + 1}{-i - 1} \right)^{1 - \frac{2\alpha}{\pi}} = \pi e^{-i\alpha}, \end{aligned}$$

per cui, sostituendo:

$$R_y + iR_x = \frac{i \rho k C^2}{16 \pi} (e^{-i\alpha} + e^{i\alpha}) = \frac{i \rho k C^2}{8 \pi} \cos \alpha,$$

dalla quale segue

$$(12) \quad R_x = \frac{\rho k C^2}{8 \pi} \cos \alpha, \quad R_y = 0.$$

Dunque, data la simmetria geometrica e la emisimmetria idrodinamica rispetto all'asse x , possiamo concludere che le pressioni dinamiche della corrente circolatoria sul profilo bilatero equivalgono ad un'unica risultante di intensità

$$\frac{\rho k C^2}{8 \pi} \cos \alpha,$$

che ha per linea d'azione la bisettrice dell'angolo AOB ed è diretta verso il saliente. Per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ si trova che la precedente azione dinamica è nulla, come è noto ⁽¹⁾.

6. PROFILO AD ARCO CIRCOLARE. — Il profilo rigido sia ora un arco AB di circonferenza di raggio a , centro O e angolo al centro 2α , simmetricamente disposto rispetto all'asse x (fig. 10). La corrispondenza tra il piano z , tagliato lungo l'arco predetto, e il piano $\zeta = \xi + i\eta$ forato circolarmente, si ottiene dalla formula, stabilita dal Bickley ⁽²⁾, che fornisce il potenziale cinetico di una corrente traslatoria che investe il predetto profilo, ed eguagliando l'espressione di questo potenziale cinetico a quello del

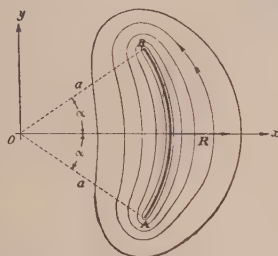


Fig. 10.

potenziale cinetico di una corrente traslatoria che investe un profilo circolare; se il raggio è unitario e il centro è il punto $\zeta = 0$ quest'ultimo potenziale cinetico per una velocità unitaria è notoriamente

$$f = \zeta + \frac{1}{\zeta};$$

d'altra parte, ponendo: $c = 1$, $\omega = 0$ e $\frac{\tilde{\zeta}}{a}$ al posto di $\tilde{\zeta}$ nella prima formula della nota a piè di pagina 126 della citata *Idromeccanica piana*, si ha:

$$f = \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{\zeta}}{a} + \frac{a}{\tilde{\zeta}} - 2 \right) \pm \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{\tilde{\zeta}} \right) \sqrt{\left(\frac{\tilde{\zeta}}{a} - e^{i\alpha} \right) \left(\frac{\tilde{\zeta}}{a} - e^{-i\alpha} \right)},$$

(1) Si noti bene che, per quanto l'espressione precedente ammetta per $\alpha = 0$ il valore $\frac{\rho k C^2}{8\pi}$, determinato e finito, esso non ha alcun significato, perchè il risultato suindicato venne ricavato essenzialmente in base alla ipotesi che il fluido scorra anche sulle pareti rivolte verso l'asse negativo delle x (vedi nota a p. 122); per $\alpha = 0$ le due lamine si sovrappongono e non è più possibile la circolazione con fluido scorrente anche sui due bordi che si sono saldati e la (10) non è più valida.

(2) *Some Two-Dimensional Potential Problems connected with the Circular Arc*, « Phil. Mag. », 1918, vol. XXXV, p. 396; vol. XXXVI, p. 273.

il segno + riferendosi su c alla parte convessa e il segno — alla parte concava. Eguagliando le precedenti espressioni di f si ottiene:

$$(13) \quad \zeta + \frac{1}{\zeta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{\zeta}}{a} + \frac{a}{\tilde{\zeta}} - 2 \right) \pm \left(1 + \frac{a}{\tilde{\zeta}} \right) \sqrt{\left(\frac{\tilde{\zeta}}{a} - e^{i\alpha} \right) \left(\frac{\tilde{\zeta}}{a} - e^{-i\alpha} \right)},$$

che definisce l'accennata corrispondenza tra i piani $\tilde{\zeta}$ e ζ .

Poniamo altresì

$$(14) \quad Z = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right),$$

con che

$$(15) \quad \zeta = Z + \sqrt{Z^2 - 1}, \quad \frac{1}{\zeta} = Z - \sqrt{Z^2 - 1}.$$

L'espressione complessa della velocità, tenuto conto delle (1), è

$$w = \frac{df}{d\tilde{\zeta}} = \frac{df}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{d\tilde{\zeta}} = \frac{C}{2\pi i} \frac{1}{\zeta} \frac{d\zeta}{d\tilde{\zeta}},$$

e quindi

$$(16) \quad w^2 = - \frac{C^2}{4\pi^2} \frac{1}{\zeta^2} \left(\frac{d\zeta}{d\tilde{\zeta}} \right)^2.$$

Dalla (14) si ricava

$$dZ = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) d\zeta,$$

per cui

$$\left(\frac{d\zeta}{d\tilde{\zeta}} \right)^2 = \frac{4}{\left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right)^2} \left(\frac{dZ}{d\tilde{\zeta}} \right)^2;$$

in conseguenza (16) può scriversi

$$w^2 = - \frac{C^2}{\pi^2} \frac{1}{\left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right)^2} \left(\frac{dZ}{d\tilde{\zeta}} \right)^2.$$

Dalla (15) risulta

$$\left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right)^2 = 4 (Z^2 - 1),$$

per cui w si può scrivere ancora:

$$(17) \quad w^2 = \frac{C^2}{4\pi^2} \frac{1}{1 - Z^2} \left(\frac{dZ}{d\tilde{\zeta}} \right)^2,$$

essendo, per le (13) e (14):

$$(18) \quad \frac{dZ}{d\tilde{\chi}} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{a} - \frac{a}{\tilde{\chi}^2} \mp \frac{a}{\tilde{\chi}^2} \sqrt{\left(\frac{\tilde{\chi}}{a} - e^{i\alpha}\right) \left(\frac{\tilde{\chi}}{a} - e^{-i\alpha}\right)} \pm \right. \\ \left. \pm \left(1 + \frac{a}{\tilde{\chi}}\right) \frac{\frac{\tilde{\chi}}{a} - \cos \alpha}{a \sqrt{\left(\frac{\tilde{\chi}}{a} - e^{i\alpha}\right) \left(\frac{\tilde{\chi}}{a} - e^{-i\alpha}\right)}} \right\}.$$

Applicando la formula di Blasius si ha, tenendo presenti (17),

$$R_y + iR_x = -\frac{1}{2} \rho \int_c w^2 d\tilde{\chi} = -\frac{\rho C^2}{8\pi^2} \int_c \left(\frac{dZ}{d\tilde{\chi}}\right)^2 \frac{d\tilde{\chi}}{1-Z^2}.$$

Si rilevi che, nel sostituire, nell'integrale, a $\frac{dZ}{d\tilde{\chi}}$ la sua espressione (18) reca contributo non nullo solamente l'ultimo termine del secondo membro di (18), che quadrato diviene

$$\frac{1}{16} \left(1 + \frac{a}{\tilde{\chi}}\right)^2 \frac{\left(\frac{\tilde{\chi}}{a} - \cos \alpha\right)^2}{a^2 \left(\frac{\tilde{\chi}}{a} - e^{i\alpha}\right) \left(\frac{\tilde{\chi}}{a} - e^{-i\alpha}\right)};$$

portando questa espressione al posto di $\left(\frac{dZ}{d\tilde{\chi}}\right)^2$ nella precedente, si ottiene:

$$(19) \quad R_y + iR_x = \frac{-\rho C^2}{256 \pi^2 a \sin \alpha} \int_c \left(1 + \frac{a}{\tilde{\chi}}\right)^2 \left(\frac{\tilde{\chi}}{a} - \cos \alpha\right)^2 \left\{ \frac{1}{\frac{\tilde{\chi}}{a} - e^{i\alpha}} - \frac{1}{\frac{\tilde{\chi}}{a} - e^{-i\alpha}} \right\} \frac{d\frac{\tilde{\chi}}{a}}{1-Z^2}.$$

Risulta dalle (14) e (13) che, tanto per $\frac{\tilde{\chi}}{a} = e^{i\alpha}$ quanto per $\frac{\tilde{\chi}}{a} = e^{-i\alpha}$ è

$$Z^2 = \frac{1}{4} (\cos \alpha - 1)^2 = \sin^4 \frac{\alpha}{2}.$$

Pertanto l'integrale del secondo membro della (19) ha per valore

$$\frac{-2\pi i}{1 - \sin^4 \frac{\alpha}{2}} \left\{ (1 + e^{-i\alpha})^2 (e^{i\alpha} - \cos \alpha)^2 - \right. \\ \left. - (1 + e^{i\alpha})^2 (e^{-i\alpha} - \cos \alpha)^2 \right\} = \frac{16\pi \sin^3 \alpha}{1 + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Pertanto la (19) diviene:

$$R_y + iR_x = i \frac{\rho C^2 \sin^2 \alpha}{16 \pi a \left(1 + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)},$$

da cui

$$(20) \quad R_x = \frac{\rho C^2 \sin^2 \alpha}{16 \pi a \left(1 + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)}, \quad R_y = 0.$$

Per la simmetria geometrica e la emisimmetria idrodinamica rispetto all'asse x , si può concludere che *le pressioni dinamiche della corrente circolatoria sul profilo bilatero equivalgono ad un'unica forza di intensità*

$$\frac{\rho C^2 \sin^2 \alpha}{16 \pi a \left(1 + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)},$$

agente lungo l'asse di simmetria dell'arco rigido e diretta verso la convessità. Per $\alpha = \pi$, cioè nel caso di un intero profilo circolare, la (13) continua a valere, assumendo il segno + e con essa tutte le seguenti; allora la predetta azione è nulla, com'era noto. Si rilevi ancora come nel caso limite di $a \rightarrow \infty$ e $\alpha \rightarrow 0$ (cioè di una lamina rettilinea) la predetta azione è nulla, come doveva essere.

Astronomia. — *Sui triedri intermediarii di riferimento per la dinamica stellare. Criteri di scelta.* Nota II ⁽¹⁾ del Corrisp. V. NOBILE.

Proseguendo lo studio intrapreso nella prima parte di questa Nota, passo ora ad esaminare se la soluzione razionale del problema del riferimento dei movimenti stellari fornita dalla equazione riportata nella Nota I e che più innanzi trascrivo con esclusione dei termini corrispondenti ad eventuali effetti gravitazionali, possa praticamente convenire, e sotto quali condizioni, anche nel caso in cui si assuma come intermediario uno di quei triedri dei quali già da secoli si avvale l'astronomia sferica. Una siffatta soluzione, mentre offre la prova decisiva della possibilità della realizzazione pratica immediata di un riferimento assoluto senza introdurre profonde innovazioni nella natura delle osservazioni e nei metodi, nè imporre radicali trasformazioni nel corredo strumentale degli osservatorii, mostra anche la via per procedere, in un secondo tempo, ad una revisione delle costanti della precessione, necessaria dopo la totale esclusione di ipotesi incontrollabili e di concezioni mal definite.

(1) Presentata nella seduta del 5 gennaio 1930.

Si assumerà come triedro intermedio mobile T quello corrispondente al sistema delle coordinate equatoriali *medie*. Origine del triedro è, come per l'altro caso, il centro di massa del sistema solare, supposto coincidente col centro del Sole, al qual caso possiamo sempre ricondurci con la eliminazione degli effetti di parallasse e aberrazione annua, ottenuta mediante opportuna combinazione delle osservazioni. Per piano Oxy sarà scelto quello dell'equatore *medio* e in esso l'asse Ox sarà diretto verso l'equinozio *medio*, l'asse Oz sarà diretto verso il polo boreale e l'asse Oy disposto in modo che il triedro sia destrorso. Il triedro di orientamento assoluto (T)₀ sarà quello delle coordinate eclittiche *medie* relativo ad un'epoca che assumeremo come origine dei tempi. Piano $O\xi\eta$ di questo triedro sarà quello dell'eclittica media all'epoca considerata, l'asse $O\xi$ sarà diretto all'equinozio medio alla stessa epoca, quello $O\xi$ al polo della eclittica stessa e l'asse $O\eta$ in modo che anche (T)₀ risulti destrorso.

I parametri euleriani ψ, φ, θ che fissano la posizione di T rispetto a (T)₀ li supporremo qui definiti come ordinariamente vien fatto nei trattati di meccanica celeste in vista del paragone immediato del calcolo alle osservazioni: il passaggio dalle notazioni comuni a quelle qui adoperate si ottiene col cambio di ψ e θ in $2\pi - \psi$ e $2\pi - \theta$. In tal modo i nuovi parametri si identificano con angoli già definiti dalla meccanica celeste classica. E propriamente essi corrispondono:

$\psi \dots$ alla *precessione luni-solare*
 $\varphi \dots$ alla *precessione planetaria*
 $\theta \dots$ alla *obliquità dell'eclittica*.

Per la determinazione della rotazione assoluta di questo triedro vale naturalmente la stessa equazione fondamentale della memoria già citata, ossia

$$(1) \quad (\Omega \times s)^3 - \Omega^2 \cdot \Omega \times s + 3(\Omega \wedge s' \times s) \cdot (\Omega \times s) - \Omega \wedge \Omega' \times s - (3s'^2 \cdot s + s'') \times \Omega + \Omega' \times s' + s'' \wedge s' \times s = 0$$

equazione che dà per ogni stella una relazione fra le componenti p, q, r di Ω e le derivate prime p', q', r' rispetto al tempo.

La determinazione numerica di tali quantità è quindi assicurata, indipendentemente dalla teoria della rotazione di T , teoria che peraltro nel caso in esame è nota. Dalla meccanica celeste assumeremo però non la espressione teorica delle componenti p, q, r ma dati d'altra specie e cioè in primo luogo la nozione della esistenza di due parti distinte e separabili nella rotazione di T (una essenzialmente secolare e l'altra periodica) e la forma particolare degli sviluppi in funzione del tempo, delle variabili che ci occorrerà considerare.

Per potere applicare al triedro intermedio T l'equazione fondamentale bisognerà dunque immaginare che siano forniti dalle osservazioni gli elementi α, β, γ e le loro derivate prime e seconde per l'epoca conside-

rata ($t = 0$) scriveri dall'effetto dovuto alla parte periodica di Ω e Ω' (nutazione). A tale uopo basterà immaginare che ai valori trovati per le α, β, γ nelle varie epoche e dai quali debbono dedursi i valori più probabili delle $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ e delle derivate prime e seconde per la stessa epoca ($t = 0$) siano state preventivamente applicate le correzioni di nutazione e dedotti i valori *medii* per l'istante delle osservazioni. In quanto ai valori delle costanti da adoperare per tali correzioni preliminari possono assumersi senza sensibile inconveniente quelli ottenuti da determinazioni anteriori fatte coi vecchi metodi. Infatti bisogna osservare che gli intervalli di tempo sui quali debbono estendersi le misure per ottenere valori sicuri delle $\alpha_0, \alpha'_0, \alpha''_0 \dots$ etc. che figurano nell'ultimo termine della (1) debbono superare di non poco il periodo principale dei termini di nutazione ed è anzi opportuno che l'intervallo stesso sia un multiplo esatto di quel periodo. Se le osservazioni saranno distribuite con sufficiente regolarità in ciascuno degli intervalli parziali corrispondenti al detto periodo di $18\frac{2}{3}$ anni tropici gli errori dai

quali potranno essere eventualmente affette le costanti impiegate per la riduzione rimarranno senza alcuna influenza sui risultati finali e solo potranno contribuire ad aumentare lievissimamente quelli che appaiono come errori accidentali di osservazione.

Le coordinate sferiche equatoriali così ottenute in seguito a tali correzioni debbono intendersi provenienti da determinazioni *assolute* (nel senso della astronomia sferica tradizionale), cioè: ascensioni rette ottenute con riferimento diretto all'equinozio e declinazioni del tutto indipendenti da peculiarità locali della latitudine). Esse saranno inoltre corrette dalla aberrazione e parallasse annua, oppure si intenderanno rese esenti da tali effetti con opportuna combinazione delle osservazioni. *Nessuna correzione per moto proprio*, inteso nel senso consueto, sarà, naturalmente, introdotta, essendo scopo essenziale del metodo qui proposto quello di ritrovare, per via del tutto diversa, tali elementi, definiti e intesi in base ad altri criterii già esposti. Tali osservazioni saranno fatte su stelle distribuite con regolarità in ascensione retta e in declinazione, colla sola condizione che siano escluse circumpolari per le quali i termini di terzo ordine della correzione di precessione possano divenire sensibili.

Le differenze fra le coordinate delle stelle si supporranno determinate lungo l'intero anno: l'insieme, dopo opportuni procedimenti di compensazione, fornirà un *sistema* che si potrà riferire, in seguito a riduzioni fatte colle costanti precessionali note ⁽¹⁾, all'inizio di ciascun anno tropico.

Potremo dunque così disporre di un *catalogo* stellare di posizioni medie, rinnovato di anno in anno, che fornirà gli elementi adatti per condurre alla

(1) Evidentemente ciò non è in contrasto colle direttive del nostro metodo: con una opportuna scelta dell'epoca a cui si riportano le osservazioni questa riduzione si potrebbe omettere del tutto.

conoscenza della rotazione assoluta del triedro qui definito è in seguito, come si è detto, ad una determinazione nuova delle costanti della teoria della precessione fatta su basi più sicure di quelle attuali.

Dette ora a, d l'ascensione retta e la declinazione (medie) di una stella per l'epoca t , si otterrà in primo luogo, per ciascuna stella, dalla risoluzione di equazioni del tipo

$$(a) \quad \begin{aligned} a &= a_0 + t a'_0 + \frac{1}{2} t^2 a''_0 \\ d &= d_0 + t d'_0 + \frac{1}{2} t^2 d''_0 \end{aligned}$$

la determinazione delle incognite $a_0, d_0; a'_0, d'_0; a''_0, d''_0$, dalle quali poi dipendono linearmente le quantità che occorrono per introdurle nelle equazioni del tipo (1). Derivando due volte rispetto al tempo le relazioni:

$$\alpha = \cos a \cos d, \quad \beta = \sin a \cos d, \quad \gamma = \sin d,$$

si ottengono i valori di $\alpha_0, \alpha'_0, \alpha''_0, \dots$, etc., che entrano a formare il gruppo di termini $\mathbf{s}'' \wedge \mathbf{s}' \times \mathbf{s}''$ di cui più innanzi ricordiamo la espressione cartesiana. Nelle (a) si possono anche includere i termini del terzo ordine: i valori di a'''_0, d'''_0 risulteranno probabilmente evanescenti⁽¹⁾, *ma tale non è il caso delle a''_0, d''_0* , come è ben noto agli astronomi ed è del resto prevedibile *a priori*, essendo da attribuire quelle variazioni, nel caso in esame, in gran parte alla rotazione del triedro intermediario, che è dovuta al fenomeno di precessione nella sua integrità e non più, come nel caso analogo trattato nella Nota I, a mutui spostamenti stellari. I termini noti delle (1) avranno pertanto valori notevoli, ciò che *assicura condizioni favorevoli per una esatta determinazione delle incognite, ma non potranno più d'altra parte, nelle equazioni in esame, considerarsi trascurabili i termini di grado superiore al 1°* nelle componenti della rotazione e loro derivate. Il sistema delle (1) diventa quindi molto più complesso, ma le difficoltà di calcolo si supereranno agevolmente coll'assumere come incognite invece dei valori delle componenti $p, q, r; p', q', r'$ per $t = 0$ le correzioni $\delta p_0, \delta q_0, \delta r_0; \delta p'_0, \delta q'_0, \delta r'_0$ a valori sufficientemente approssimati delle incognite. Questi valori, che indicheremo con $(p_0), (p'_0), \dots$, etc. si otterranno dalle relazioni

$$(2) \quad \begin{aligned} p &= \psi' \sin \theta \sin \varphi - \theta' \cos \varphi \\ q &= \psi' \sin \theta \cos \varphi + \theta' \sin \varphi \\ r &= \varphi' - \psi' \cos \theta \end{aligned}$$

(1) In ogni caso questi valori non occorrono pel nostro scopo attuale: per la formazione delle equazioni (1) non si richiede che la conoscenza delle α, β, γ e derivate di ordine *non superiore al secondo*, per $t = 0$. La introduzione della a'''_0, d'''_0 nelle (a) non serve che ad ottenere valori più esatti per le altre incognite.

impiegando pel calcolo dei secondi membri gli sviluppi in serie forniti dalla meccanica celeste, coi valori delle costanti provenienti dalle determinazioni anteriori.

Poichè per $t = 0$ è, per definizione, $\varphi_0 = \psi_0 = 0$, si avrà essendo ε_0 il valore iniziale di $\varepsilon^{(1)}$

$$(3) \quad (p_0) = -\varepsilon'_0, \quad (q_0) = \psi'_0 \sin \varepsilon_0, \quad (r_0) = \varphi'_0 - \psi'_0 \cos \varepsilon_0.$$

Derivando poi le (2) e calcolandole pure per $t = 0$ con $\psi_0 = \varphi_0 = 0$ seguono le altre espressioni

$$(4) \quad \begin{aligned} (p'_0) &= \psi'_0 \varphi'_0 \sin \varepsilon_0 - \varepsilon''_0 \\ (q'_0) &= \psi''_0 \sin \varepsilon_0 + \psi'_0 \varepsilon'_0 \cos \varepsilon_0 + \varphi'_0 \varepsilon'_0 \\ (r'_0) &= \varphi''_0 - \psi''_0 \cos \varepsilon_0 + \psi'_0 \varepsilon'_0 \sin \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Avuti così i valori numerici provvisorii delle incognite e detto $\Phi(p, q, r; p', q', r')$ il primo membro delle (1), che è un polinomio di terzo grado nelle incognite, e con Φ_0 il valore che Φ assume in corrispondenza dei valori provvisorii predetti, la equazione (1) potrà scriversi, quando si suppongano trascurabili i termini di grado superiore al primo in $\delta p_0, \delta p'_0 \dots$ e intendendo, naturalmente, le derivate parziali calcolate coi valori approssimati delle incognite,

$$(5) \quad \Phi_0 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)_0 \delta p_0 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p'} \right)_0 \delta p'_0 + \dots = 0.$$

Si avranno così tante equazioni quante sono le stelle impiegate, ossia se ne avrà un numero grande quanto si vuole. Formate le equazioni normali e risolte si avranno i valori più probabili delle incognite (correzioni) e quindi quelli definitivi per le $p_0, q_0, r_0; p'_0, q'_0, r'_0$.

I valori delle p_0, q_0, r_0 permetteranno, come è stato già indicato nella Nota I e in altra memoria anteriore ivi citata, la determinazione rigorosa (dopo il calcolo preliminare delle distanze stellari col sussidio di opportune determinazioni delle componenti radiali delle velocità) dei moti proprii, riferiti ad una terna di orientamento assoluto.

In quanto alle equazioni del tipo (5) si formeranno immediatamente quando sia scritta l'equazione fondamentale sotto forma ordinaria. Trascrivo qui i diversi gruppi di termini della detta equazione, colle corrispondenti notazioni cartesiane, senza insistere più oltre su particolari che saranno più opportunamente trattati quando dovrà procedersi alla effettiva applicazione pratica del metodo.

$$\begin{aligned} (\Omega \times s)^3 &= (p\alpha + q\beta + r\gamma)^3 \\ \Omega^2 \cdot (\Omega \times s) &= (p^2 + q^2 + r^2)(p\alpha + q\beta + r\gamma) \end{aligned}$$

(1) Sostituisco qui ε a θ per uniformarmi a notazioni usuali.

$$(\Omega \wedge s' \times s) \cdot (\Omega \times s) = [p(\beta'\gamma - \beta\gamma') + q(\alpha\gamma' - \alpha'\gamma) + r(\alpha'\beta - \alpha\beta')](p\alpha + q\beta + r\gamma)$$

$$\Omega \wedge \Omega' \times s = \alpha(qr' - q'r) + \beta(p'r - p'r') + \gamma(pq' - p'q)$$

$$(3s'^2 \cdot s + s'') \times \Omega = [3(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)\alpha + \alpha'']p + [3(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)\beta + \beta'']q + \\ + [3(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)\gamma + \gamma'']r$$

$$\Omega' \times s' = p'\alpha' + q'\beta' + r'\gamma'$$

$$s'' \wedge s' \times s = \alpha(\beta''\gamma' - \beta'\gamma'') + \beta(\alpha'\gamma'' - \alpha''\gamma') + \gamma(\alpha''\beta' - \alpha'\beta'')$$

Gli sviluppi dei parametri ψ, φ, θ in serie secondo le potenze del tempo (parte secolare) potranno quindi aversi senza alcuna difficoltà. Ma la trattazione di questo argomento richiede qualche sviluppo ulteriore, per la inclusione dei termini di terzo ordine che qui non occorre considerare e d'altra parte è compito estraneo al nostro assunto, che era quello di mostrare qui la possibilità di dare una soluzione rigorosa e di immediata attuabilità al problema del riferimento e della determinazione dei moti proprii coi sistemi usuali di coordinate sferiche.

La determinazione degli sviluppi in parola sarà pertanto oggetto di un prossimo studio.

Chimica. — *Le reazioni fra composti ferrosi ed ossido d'azoto*⁽¹⁾. Nota II⁽²⁾ del Corresp. L. CAMBI e di A. CAGNASSO.

1. — Nella Nota I⁽³⁾ vennero riferite le esperienze riguardanti i prodotti iponitrosi che si generano dall'azione degli alcali sulle soluzioni contenenti $\text{ON} \cdot \text{FeSO}_4$.

Le ricerche descritte in questa Nota riguardano i prodotti generati direttamente dall'NO e da alcuni sali ferrosi ad elevato grado di ossidabilità.

Abbiamo osservato che diversi sali ferrosi, derivati da alcuni acidi deboli e manifestanti appunto elevata tendenza ad ossidarsi, possono ridurre l'NO ad N_2O , dare dei prodotti intermedi che con i sali d'argento generano iponitrito, $\text{Ag}_2\text{N}_2\text{O}_2$. Questi stessi prodotti con acido solforico diluito producono principalmente NO e solfato ferroso, oppure miscele di NO ed N_2 , acido nitrico e sale ferrico.

Abbiamo studiato l'azione dell'NO sui sali e sulle miscele seguenti:

a) FeCO_3 , generato da carbonato di bario e solfato ferroso in atmosfera di CO_2 ;

b) FeHPO_4 , prodotto da solfato ferroso e fosfato bisodico o bipotassico;

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale della R. Università di Milano.

(2) Presentata nella seduta del 5 gennaio 1930.

(3) L. CAMBI e A. CLERICI, questi «Rendiconti», IX, (1929), 1° sem., p. 519.

c) $\text{Fe}(\text{C}_2\text{H}_3\text{O}_2)_2$, ottenuto da solfato ferroso ed acetato alcalino.

L'azione dell'NO venne indagata tanto in assenza come in presenza di eccesso di sale alcalino dell'acido del sale ferroso.

In tutti i casi indagati venne riscontrata la formazione dell'iponitrito d'argento, che venne prodotto, estratto e purificato con i metodi già descritti⁽¹⁾. L'iponitrito puro corrispondeva a rendimenti dal 10 % al 30 %, rispetto all'azoto contenuto nei nitrososali risultanti dall'azione dell'NO.

Non venne indagato per questo lato il fosfato ferroso, per le difficoltà della separazione dell'iponitrito nel caso particolare.

I maggiori rendimenti in iponitrito d'argento si ebbero dalle miscele di carbonato ferroso e bicarbonato potassico, particolarmente da quelle comprese fra i rapporti $\text{FeCO}_3 : 1\text{KHCO}_3$; $\text{FeCO}_3 : 2\text{KHCO}_3$.

Le esperienze vennero eseguite con tutte le modalità descritte nella Nota precedente cui rimandiamo. La saturazione avvenne sempre a 0°; le miscele varie avevano tutte volume corrispondente a soluzioni 0.25 n., rispetto al ferro ferroso inizialmente impiegato.

2. — *Carbonato ferroso.* — Venne preparato da carbonato di bario sospeso in acqua bollita, scacciando accuratamente l'aria con anidride carbonica, aggiungendo poi la quantità equivalente di soluzione di solfato ferroso, in leggero difetto.

Dopo quindici minuti di violenta agitazione, sempre in atmosfera di CO_2 , che provocava una parziale bicarbonatazione, si raffreddava a 0° e si saturava con NO.

La saturazione dopo un'ora corrispondeva a circa 0.90 NO : 1 Fe. Il precipitato bianco-verdastro di carbonato ferroso assumeva dapprima colore nero-verdastro, e la soluzione prendeva lo stesso colore che si svolgeva di poi gradatamente al bruno rossastro. Il prodotto, mantenuto sempre in atmosfera di NO ed a 0°, e con agitazione, perdeva lentamente N_2O trasformandosi in precipitato rossastro scuro.

Si procedeva alle determinazioni riferite nella tabella impiegando una porzione della sospensione predetta, aspirandola direttamente nell'apparecchio in cui avvenivano le varie scissioni, e nel quale in precedenza si era fatto il vuoto.

Al carbonato ferroso, saturato con NO, vennero poi aggiunte le soluzioni di carbonato e bicarbonato potassico. Questi sali provocano più rapida trasformazione del prodotto nitrosilico con più sensibile sviluppo di N_2O .

I tempi riportati nella tabella I sono segnati dall'inizio della saturazione con NO.

3. — *Fosfato biferroso.* — Venne preparato aggiungendo, in atmosfera di CO_2 , soluzioni di fosfato bisodico o bipotassico a quella di FeSO_4 nei rapporti stechiometrici oppure nell'eccesso indicato nella tabella.

(1) L. CAMBI e A. CLERICI, loc. cit., p. 521.

TABELLA I.

N.	Tempo	N Atomi come N ₂	N Atomi come N ₂ O	N Atomi come NO	N Atomi totali dosati	Fe Atomi ferroso	Fe Atomi totali	Reazione
1	60'	0.03	—	0.65	0.70	0.74	I	FeCO ₃ + NO (scissione con H ₂ SO ₄ 2 n.)
2	90'	—	0.68	—	—	0.03	I	» » » » NaOH »
3	120'	0.04	—	0.67	0.71	0.75	I	» » » » H ₂ SO ₄ »
4	60'	0.10	—	0.62	0.72	0.60	I	FeCO ₃ + 0.5 K ₂ CO ₃ + NO (scissione con H ₂ SO ₄ 2 n.)
5	90'	0.12	—	0.59	0.71	0.52	I	» » » » H ₂ SO ₄ »
6	90'	0.06	0.60	—	0.66	—	I	» » » » NaOH »
7	90'	0.09	0.09	0.39	0.57	0.33	I	FeCO ₃ + NO + 1 K ₂ CO ₃ (scissione con H ₂ SO ₄ 2 n.)
8	120'	0.08	0.05	0.39	0.52	0.27	I	» » » » H ₂ SO ₄ »
9	150'	0.03	0.44	0.06	0.53	—	I	» » » » (scissione neutra)
10	60'	0.07	—	0.63	0.70	0.59	I	FeCO ₃ + NO + 1 KHCO ₃ (scissione con H ₂ SO ₄ 2 n.)
11	60'	0.06	0.60	—	0.66	—	I	» » » » NaOH »
12	90'	0.13	—	0.51	0.64	0.48	I	» » » » H ₂ SO ₄ »
13	90'	0.06	0.66	—	0.72	—	I	» » » » NaOH »
14	30'	0.18	—	0.46	0.64	0.42	I	FeCO ₃ + NO + 2 KHCO ₃ (scissione con H ₂ SO ₄ 2 n.)
15	60'	0.05	0.60	—	0.65	—	I	» » » » NaOH »
16	100'	0.19	—	0.43	0.62	0.39	I	» » » » H ₂ SO ₄ »
17	30'	0.13	0.06	0.32	0.51	0.37	I	FeCO ₃ + NO + 4 KHCO ₃ (scissione con H ₂ SO ₄ 2 n.)
18	60'	0.01	0.49	—	0.50	—	I	» » » » NaOH »
19	120'	0.12	0.03	0.26	0.41	0.41	I	» » » » H ₂ SO ₄ »

TABELLA II.

N.	Tempo	N Atomi come N ₂	N Atomi come N ₂ O	N Atomi come NO	N Atomi totali dosati	Fe Atomi ferroso	Fe Atomi totali	Reazione
1	45'	0.12	—	0.46	0.68	0.37	1	FeSO ₄ + Na ₂ HPO ₄ + NO (scissione con H ₂ SO ₄ 2 n.)
2	130'	0.04	0.60	—	0.64	—	1	» » » » » NaOH »
3	180'	0.15	0.06	0.24	0.45	0.13	1	» » » » » H ₂ SO ₄ »
4	210'	0.12	0.05	0.22	0.39	0.14	1	» » » » » H ₂ SO ₄ »
5	120'	0.25	—	0.46	0.71	0.33	1	FeSO ₄ + 2K ₂ HPO ₄ + NO (scissione con H ₂ SO ₄ 2 n.)
6	160'	0.03	0.66	—	0.69	—	1	» » » » » NaOH »
7	210'	0.31	—	0.38	0.69	0.26	1	» » » » » H ₂ SO ₄ »
8	120'	0.08	—	0.62	0.71	0.58	1	FeSO ₄ + 4K ₂ HPO ₄ + NO (scissione con H ₂ SO ₄ 2 n.)
9	175'	0.05	0.66	—	0.71	—	1	» » » » » NaOH »

TABELLA III.

N.	Tempo	N Atomi come N ₂	N Atomi come N ₂ O	N Atomi come NO	N Atomi come HNO ₃	N Atomi totali dosati	Fe Atomi ferroso	Fe Atomi totali	Reazione
1	60'	0.08	—	0.58	—	0.66	0.62	I	FeSO ₄ + NO + 2NaC ₂ H ₃ O ₂ (scissione con H ₂ SO ₄ 2 n.)
2	90'	0.08	—	0.54	—	0.62	0.55	I	» » » » » » » » » »
3	20'	0.04	—	0.56	—	0.60	0.51	I	FeSO ₄ + NO + 2KC ₂ H ₃ O ₂
4	60'	0.07	—	0.51	—	0.58	0.59	I	» » » » » » » » » »
5	30'	0.10	—	0.39	—	0.49	0.34	I	FeSO ₄ + NO + 4NaC ₂ H ₃ O ₂
6	60'	0.12	—	0.27	—	0.39	0.25	I	» » » » » » » » » »
7	60'	0.19	0.09	0.24	0.05	0.57	0.15	I	» » » » » » » » » »
8	60'	0.20	0.09	0.16	0.08	0.53	0.15	I	» » » » » » » » » »
9	120'	0.26	0.09	0.10	0.04	0.49	0.19	I	» » » » » » » » » »
10	120'	0.26	0.05	0.14	0.04	0.49	0.05	I	» » » » » » » » » »
11	120'	0.25	0.05	0.09	0.04	0.43	0.03	I	» » » » » » » » » »
12	160'	0.25	0.10	0.09	0.02	0.46	0.09	I	» » » » » » » » » »
13	180'	0.25	0.07	0.12	0.04	0.48	0.02	I	» » » » » » » » » »
14	100'	0.25	0.05	0.09	—	0.39	0.02	I	FeSO ₄ + NO + 4KC ₂ H ₃ O ₂

Il fosfato ferroso assorbe NO per dare il sale nerastro, $\text{ON} \cdot \text{FeHPO}_4$, già descritto da W. Manchot⁽¹⁾.

L'eccesso di fosfato alcalino non provoca una trasformazione appariscente dal colore, ma le scissioni acide indicano chiaramente che induce od accelera la formazione di aggruppamenti $(\text{N}_2\text{O}_2)''$ dell'acido iponitroso, o per lo meno strettamente analoghi al radicale di questo acido.

4. — *Acetato ferroso.* — Vennero usate soluzioni ottenute aggiungendo acetato alcalino a quella di FeSO_4 saturata previamente con NO a 0°, oppure soluzioni dei due sali con successiva saturazione col gas predetto, alla stessa temperatura. I risultati nei due casi non sono molto diversi. Riportiamo quelli ottenuti da esperienze del primo tipo, poichè rendono più evidente la trasformazione del nitrososale ad opera dell'acetato alcalino.

Ricordiamo inoltre che abbiamo anche saturato con NO soluzioni di acetato ferroso puro, ottenuto da solfato ferroso ed acetato di bario, e che il nitrososale formatosi, versato in soluzione diluita di perclorato d'argento, genera iponitrito d'argento.

L'aggiunta di acetato alcalino alla soluzione di $\text{ON} \cdot \text{FeSO}_4$, nel rapporto stechiometrico rispetto al ferro ferroso, provoca debole variazione di colore che si sposta dal nero verdastro verso il rosso; più sensibile variazione di colore induce col tempo l'eccesso di acetato alcalino. La soluzione assume colore rossastro cupo ed in fine rosso scuro, con l'aspetto delle soluzioni di acetato ferrico, sebbene svolga con gli acidi NO, addimostrando un contenuto ancora ragguardevole di azoto totale.

A lungo, anche a 0°, la soluzione perde pressochè totalmente l'azoto in forma di N_2O , ed allora si riscontra soltanto acetato ferrico basico.

In questo caso, data l'alta percentuale di N_2 sviluppato da alcune miscele nelle scissioni con acido, procedemmo alla determinazione col metodo di Devarda dell'azoto rimasto nella soluzione acida. Questo dosaggio è ostacolato dalle quantità relativamente piccole di azoto nitrico che permane in soluzione. Inoltre, le soluzioni predette di acetato, con l'acido solforico, cedono lentamente le ultime porzioni di N_2 ed NO e perciò le cifre che esponiamo per l'acido nitrico sono soltanto approssimate, poichè forzatamente assumiamo per esse tutto l'azoto residuo in soluzione e dosato con il metodo su indicato.

Comunque, appaiono ancora più netti in questo caso i due tipi di $(\text{NO})'$, l'uno dell'acetato neutro, l'altro dello stesso acetato, ma in ambiente a pH più elevato per eccesso di acetato alcalino, e che presenta reazioni affatto analoghe a quelle dell'acido iponitroso propriamente detto in presenza di sali ferrici⁽²⁾.

5. — Concludendo, l'NO si associa a sali ferrosi ad anione poco elettroaffine, e che posseggono alto grado d'ossidabilità (quali il carbonato,

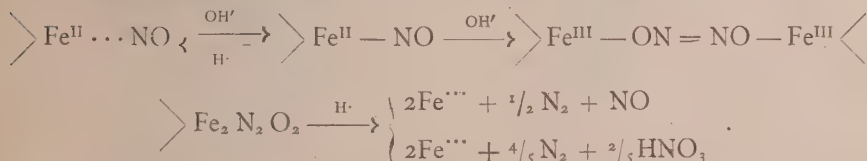
(1) «Berichte», 47, p. 1601 (1914).

(2) L. CAMBI, «Gazzetta Chim.», 59 (1929), p. 773.

bicarbonato, acetato ferroso), generando dapprima nitrososali con aggruppamenti (NO') a funzione alogenoidica in forma diversa dell'acido iponitroso, ma che in questo si trasformano successivamente.

La trasformazione si opera mediante la decomposizione con i sali d'argento, in mezzo neutro o debolmente acido, oppure con un sufficiente incremento del pH, provocato, ad esempio, dall'aggiunta di eccesso di sale alcalino dell'acido stesso del sale ferroso.

Le aggiunte successive di acetato alcalino al sale $\text{ON} \cdot \text{FeSO}_4$ illustrano il passaggio alle diverse forme dei sali nitrosilici, la cui formazione e scissione acida possiamo riassumere negli schemi seguenti:



Questi processi rientrano nel quadro generale delle reazioni presentate dai diversi aggruppamenti (NO'), illustrate recentemente da uno di noi ⁽¹⁾. Proseguiamo nelle ricerche sull'argomento.

Zoologia (Morfologia sperimentale). — *Esperimenti d'innesto sul cestello branchiale di « Clavelina lepadiformis »* (Müller) ⁽²⁾. Nota ⁽³⁾ del Socio Straniero R. G. HARRISON e di P. PASQUINI.

Le ascidie composte del gen. *Clavelina* rappresentano un materiale molto adatto per lo studio dei fenomeni di riduzione (sdifferenziamento) e restituzione degli ascidiozoi, nonchè della loro rigenerazione da porzioni tagliate, e della loro ricostituzione da parti dello stolone o dalle cosiddette « gemme estivanti » (Salfi, 1927), o « winterknospen » di Kerb (1908) [« resting-stages » di Huxley (1926): « bourgeons dormants » o « d'hivernage » di Giard e Caullery (1896)] ⁽⁴⁾.

(1) L. CAMBI, « Gazzetta Chim. », 57 (1929), p. 770.

(2) La parte sperimentale di queste ricerche fu eseguita presso la Stazione Zoologica di Napoli durante i mesi di gennaio, febbraio, marzo e aprile del 1928, usufruendo del posto di studio « Jacques Loeb » del *Rockefeller Institute for Medical Research* di New York. Ci è grato ringraziare il direttore della Stazione, prof. Rinaldo Dohrn per la cordiale ospitalità ed il *Rockefeller Institute* che ci fornì i mezzi per lo studio.

(3) Presentata nella seduta del 19 gennaio 1930.

(4) Il SALFI, nelle sue Ricerche sulla biologia delle Ascidie del Golfo di Napoli (in *Ricerche di Morfologia e Biologia animale*, vol. I, n. 2, 1927) ha chiarito il significato delle gemme estivanti dei cespugli di *Clavelina* ed ha ampiamente discusso le fasi di regresso delle colonie, in rapporto ai complessi fenomeni di estivazione.

Nel campo della morfogenesi sperimentale, a risultati ormai classici, era pervenuto il Driesch (1902, 1903, 1905 in *Roux's Archiv* Bd. 14, 17 e 20) che, con i suoi esperimenti di rigenerazione e riorganizzazione delle *Claveline*, portava altre prove alla sua teoria dei « sistemi equipotenziali armonici ». Pochi, dopo il Driesch, si sono occupati di tali problemi e di altre questioni inerenti ad essi. Notevoli, fra gli altri, i lavori dello Schultz (1907), dello Schaxel (1914), del Della Valle (1916), di Huxley (1926) e dello Spek (1927). Per i fatti, che ci proponiamo di portare a conoscenza in questa Nota, conviene accennare essenzialmente ai risultati principali del Driesch: il segmento branchiale di *Clavelina*, isolato dal sacco viscerale, può dalla superficie basale di sezione, per pura rigenerazione, produrre una gemma e, mediante processi di neoformazione del materiale cellulare, ricostituire l'intero ascidiozoo; o può invece, il che accade più frequentemente per gli individui di medie dimensioni o per i piccoli ascidiozoi, andare incontro a fenomeni di morfallassi, che interessano l'intero sacco branchiale, il quale per processi di rigenerazione regolativa ricostituisce l'intero zooide.

Il cestello branchiale, così come l'intero zooide, può comportarsi diversamente quando si mantenga in condizioni ambientali sfavorevoli (mancato rinnovamento dell'acqua): in tal caso, isolato insieme con la tunica, si sdifferenzia totalmente, perdendo a poco a poco i caratteri della sua organizzazione. La riduzione del cestello culmina con la sua totale riduzione in una masserella sferica opaca che, dopo un certo periodo, con il rinnovamento dell'acqua, può andare incontro a nuovi processi di differenziamento e riorganizzazione, che fanno sì che la *Clavelina*, completamente sdifferenziata, si ricostituisca in un nuovo ascidiozoo.

Nello stesso modo si comportano frammenti di stolone sdifferenziati totalmente (Della Valle, 1916) e simili, eccettuata la forma della tunica, all'ascidiozoo ridotto.

A questi fatti, che sono fra i più notevoli della morfogenesi sperimentale, si estende la dimostrazione, data dal Driesch, dell'esistenza dei « sistemi armonici equipotenziali » dei quali l'apparato branchiale di *Clavelina* è considerato l'esempio classico.

In base a queste premesse, abbiamo reputato assai interessante studiare il comportamento di due cestelli branchiali fusi insieme, specialmente nei riguardi dei rapporti fra polarità e processi regolativi della ricostituzione in modo di accertare, se fosse stato possibile, se i diversi assi risultassero differenti rispetto alla loro polarizzazione, in maniera paragonabile alle differenze dimostrate per l'abbozzo dell'arto in *Amblystoma* (Harrison, 1921).

Considerando perciò che frammenti del cestello si comportano, nei fenomeni di sdifferenziamento e riorganizzazione, come l'intero sacco branchiale (Driesch), abbiamo tentato, mediante innesti, di ottenere la regolazione di due metà del sacco (*a* e *b* della fig. 1), appartenenti a due ascidiozoi, in un unico individuo.

Perchè la fusione di due metà di cestelli branchiali appartenenti a individui diversi riuscisse più facilmente, furono scelti sacchi branchiali di zooidi giovani o tutt'al più di dimensioni medie: la regione del sacco branchiale veniva recisa insieme con la tunica dal segmento viscerale della *Clavelina* (1).

I pezzi da innestare furono preventivamente sottoposti a colorazione *intra-vitam* con rosso neutro e con blu-nilo; nel corso degli esperimenti, però, i pezzi non colorati sembrarono dare risultati migliori. Furono tentate diverse maniere d'innesto, che dettero purtroppo risultati non soddisfacenti, sia per la difficoltà di far combaciare sulle superficie di taglio due cestelli di eguali dimensioni, sia per quella di poter disporre di cestelli in una fase di sdifferenziamento adeguata, nè troppo, nè troppo poco avanzata. Altrettanto difficile era di ottenere che i cestelli, posti a contatto, potessero rimanere fissi dentro le rispettive tuniche. Ma finalmente si potette trovare il modo — che dette i risultati fortunati — d'introdurre nella tunica di un segmento branchiale, il cestello privato di tunica di un altro ascidiozoo, ponendolo immediatamente a contatto con l'altra metà di cestello isolato. In questo caso si dovette recidere la tunica dell'ospite e introdurre il cestello

da innestare dentro questa, ottenendosi così la possibilità che la tunica tenesse i cestelli strettamente uniti l'un contro l'altro e potendosi anche controllare la direzione secondo la quale l'innesto avveniva.

(1) I pezzi tenuti in acqua di mare non rinnovata, in un vetro di Siracusa o di Boveri, andavano soggetti, in un periodo di durata variabile da 4 a 6 giorni, ai noti processi d'involutione e di sdifferenziamento. L'innesto era compiuto prima che lo sdifferenziamento fosse del tutto progredito e cioè quando la contrazione del cestello era divenuta permanente, i tessuti opacati, i due sifoni quasi appena visibili, indicati soltanto dall'accumulo di pigmento bianco nella loro sede.

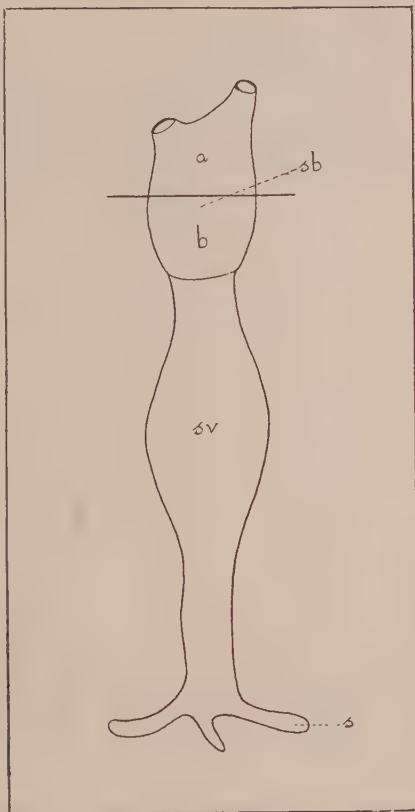


Fig. 1. — Schema di un ascidiozoo di *Clavelina*: sb, sacco branchiale; sv, sacco viscerale; s, stolone. I pezzi a e b corrispondono rispettivamente alla metà sifonale e a quella basale del cestello branchiale.

Operammo così l'innesto di *pezzi posteriori* (figg. 4 e 5), di *pezzi anteriori* fra di loro (fig. 3), di uno *anteriore* su di uno *posteriore* (fig. 2), i primi due tipi in direzione opposta dell'asse polare, il 3° tipo nella stessa direzione, che è quella di controllo, ed altri ancora che, per ora, tralasciamo di considerare.

I risultati degli esperimenti sono, per sommi capi, i seguenti:

Nel caso più semplice d'innesto (3° tipo) di una metà anteriore (*sifonale*) contro la posteriore (*basale*), dei segmenti branchiali innestati secondo un piano normale al loro asse di polarità (mantendo cioè la polarità ori-

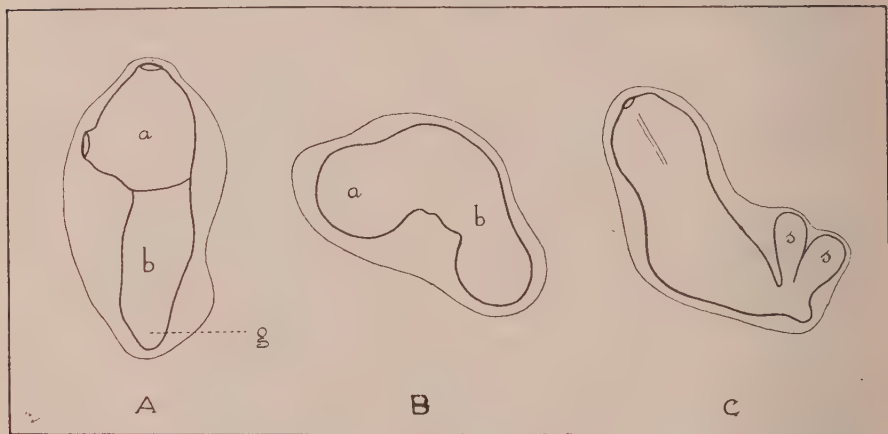


Fig. 2. — Risultato dell'innesto della metà anteriore o sifonale (*a*) e della metà posteriore o basale (*b*), di due cestelli branchiali di *Clavelina*. — *A*, le due metà fuse insieme; *B*, id. in avanzato sdifferenziamento; *C*, il nuovo ascidiozoo in via di riorganizzazione (*g*, gemma stoloniale; *s*, rami dello stolone).

ginaria delle due metà) — se il pezzo è tenuto in condizioni opportune per lo sdifferenziamento, — hanno luogo fenomeni riduttivi e regolativi, talchè i due cestelli perdono qualsiasi traccia di specializzazione cellulare e si sdifferenziano, fusi come sono, in una massa densa ed opaca che nulla lascia riconoscere delle originarie strutture. Mettendo in circolazione d'acqua l'innesto doppio, si ricostituisce, per organizzazione e differenziamento dei suoi elementi già sdifferenziati, un nuovo ascidiozoo con la stessa polarità dei pezzi fusi insieme.

Due metà anteriori (*sifonali*), innestate in direzioni opposte, ma in modo che i due endostili si corrispondano, vanno soggette similmente, ai noti processi di sdifferenziamento che possono essere spinti fino al grado massimo. Ciò nondimeno, a qualsiasi grado i fenomeni riduttivi siano giunti, mettendo in circolazione d'acqua il prodotto della fusione dei due cestelli dello sdifferenziato, se ne ottiene la riorganizzazione che si manifesta ben presto con l'iniziarsi della contrazione cardiaca, prima lenta, poi a ritmo

più accelerato, in corrispondenza di una gemma morfallattica originatasi nella regione corrispondente alla zona d'innesto (fig. 3, C).

L'individuo che si costituisce è un mostro a doppio apparato branchiale, differenziatosi in direzione corrispondente alla polarità originaria dei due cestelli innestati; talora uno dei due sistemi del doppio sacco branchiale è abnorme rispetto al supplementare che è ridotto; un simile processo evolutivo, in alcuni casi, si è potuto seguire fino all'abbozzarsi dei sifoni e alla loro apertura alle estremità sifonali del segmento branchiale doppio. Si ha cioè, la conservazione della polarità originaria, con la formazione di un indivi-

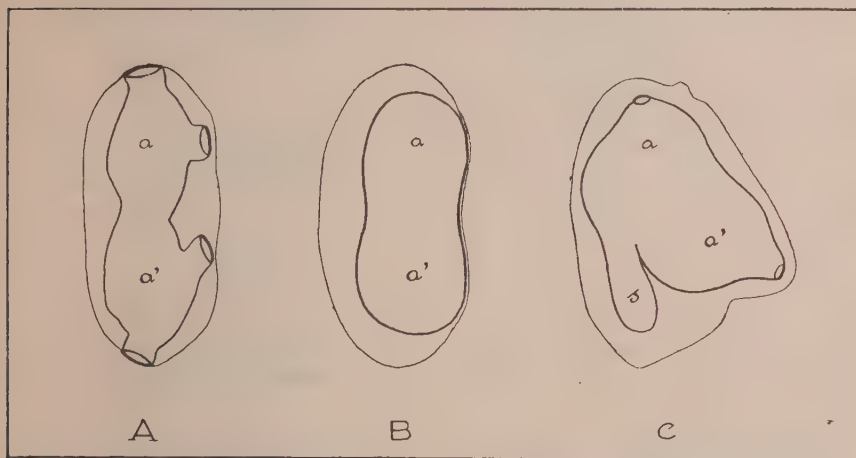


Fig. 3. - Risultato dell'innesto opposto di due metà anteriori o sifonali (*a* e *a'*) di due cestelli branchiali di *Clavelina*. — *A*, le due metà fuse insieme; *B*, il prodotto sdifferenziato della fusione; *C*, l'individuo doppio in una fase iniziale della riorganizzazione (*s*, gemma stoloniale).

duo doppio nella regione branchiale, ma con sacco viscerale e stolone unico. In questo tipo di fusione, la gemma stoloniale si origina in una direzione che è ad angolo retto con l'asse di polarità dei due cestelli innestati, ma, a misura che si differenziano i sacchi branchiali nel doppio individuo, per rotazione dei due componenti, la polarità originaria si ristabilisce (cfr. fig. 3).

Due metà posteriori (*basali*) dei due cestelli branchiali, innestate in senso opposto e fuse, si sdifferenziano per poi riorganizzarsi con la formazione di due gemme stoloniali in direzioni opposte, le quali mantengono la polarità originaria dei due componenti. Si ha un risultato precisamente contrario a quello del caso precedente e cioè: *formazione di un mostro doppio con doppio segmento viscerale, ma con unico sacco branchiale* (fig. 4, *A*) che si apre con due sifoni orali ed un solo sifone cloacale comune ai due zooidi fusi insieme. Anche in questo caso, perciò, si conserva la polarità originaria.

Finalmente, in varî casi d'innesto di pezzi posteriori opposti, si è potuta dimostrare, talora, una tendenza all'inversione della polarità di una delle due metà innestate, con l'abbozzarsi del sacco branchiale in sede della gemma

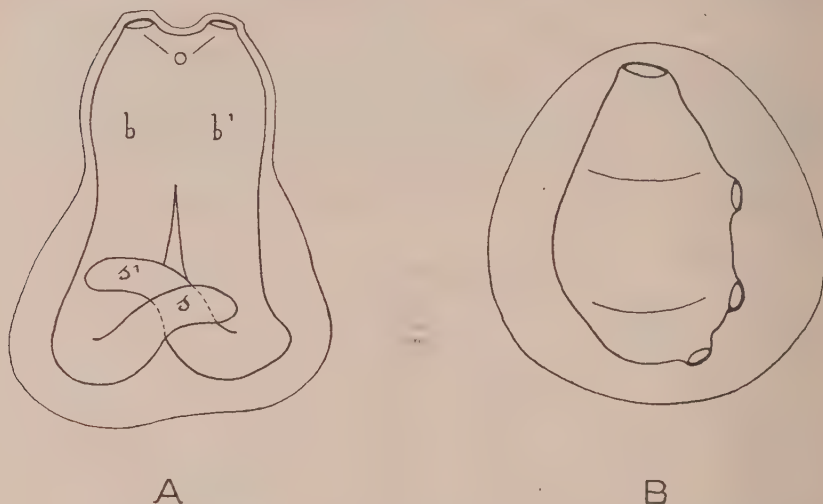


Fig. 4. - *A*, mostro doppio con doppio segmento viscerale, riorganizzato da due metà posteriori di cestelli, fuse insieme; *B*, cestello branchiale eteromorfo.

stoloniale tale quale si costituisce nella metà opposta. In queste condizioni, l'individuo, doppio in origine, non riesce a completare la sua regolazione e restituzione e va incontro ad un nuovo sdifferenziamento. Ma, eccezio-

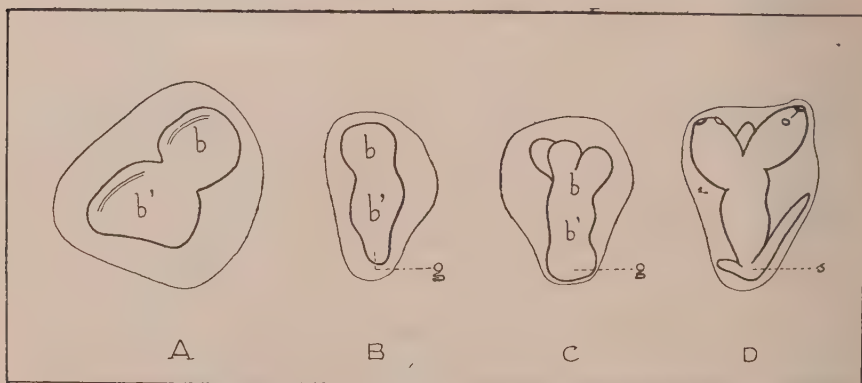


Fig. 5. - Risultato eccezionale dell'innesto opposto di due metà posteriori o basali (*b* e *b'*) di due cestelli branchiali di *Clavelina*. — *A*, il prodotto della fusione; *B*, id. dopo lo sdifferenziamento con l'abbozzo della gemma stoloniale; *C*, i due componenti fusi, in fase di riorganizzazione; *D*, mostro a triplo apparato branchiale con sacco viscerale unico (*s*, rami stoloniali; *g*, gemma stoloniale).

nalmente, si è verificato, come conseguenza dell'innesto e della fusione di due pezzi posteriori opposti, l'inversione permanente della polarità in uno dei componenti (fig. 5): in un caso, due pezzi posteriori del sacco branchiale, abbastanza sdifferenziati e innestati in direzione opposta, ma in posizione di corrispondenza degli endostili (DD), si fondono regolarmente. A una delle due estremità opposte dell'innesto, in direzione dell'asse di polarità si costituisce una gemma multipla che si differenzia in tre sacchi branchiali, mentre all'altra estremità si formano i rami stoloniali e la regione corrispondente a una delle due metà fuse insieme si riorganizza nel segmento viscerale del nuovo ascidiozoo. In esso, soltanto due sacchi branchiali si provvedono di sifoni, mentre, nel 3°, i sifoni sembrano abbozzarsi senza aprirsi. La riorganizzazione si prolunga fino alla completa restituzione della *Clavelina* mostruosa.

In relazione con questi casi di inversione occasionale di polarità è opportuno qui ricordare come anche l'eteromorfosi possa manifestarsi, in piccoli pezzi del cestello branchiale non innestati, durante la fase della loro riorganizzazione (fig. 4, B). In molti dei nostri esperimenti è accaduto che i due pezzi del cestello branchiale, non cicatrizzati insieme, rimanessero a sdifferenziarsi nella stessa tunica e si riorganizzassero indipendentemente: in numerosi casi abbiamo constatato la formazione di sifoni ad ambedue le estremità opposte senza alcuna formazione del segmento viscerale intermedio, dopo di che il pezzo eteromorfotico andò nuovamente sdifferenziandosi. Fra i primi casi descritti di eteromorfosi di questo tipo è quello osservato da Loeb⁽¹⁾ in *Ciona*, dove in seguito al taglio trasversale nel sifone inalante, si determinò lo sviluppo degli ocelli sia dal margine distale che da quello prossimale della superficie di taglio. I nostri casi di eteromorfosi del cestello sono simili, ma interessano l'organismo molto più estesamente. Essi sono analoghi quindi alle planarie dicefale che si sviluppano da pezzi anteriori corti.

*
* *

Concludendo: nei fenomeni di restituzione regolativa cui vanno soggette le metà sifonali e prossimali di due sacchi branchiali fuse insieme; le relazioni assiali dei singoli componenti rimangono di regola costanti e il processo di riorganizzazione del nuovo ascidiozoo doppio, segue la polarità originaria.

In conseguenza di ciò, la fusione di metà sifonali dei cestelli, in direzione opposta, dà luogo a un individuo a *segmento viscerale unico*, ma provvisto di *un doppio sacco branchiale*; quella di metà basali del cestello, fuse per la porzione prossimale al segmento viscerale, origina invece un doppio individuo con *due segmenti viscerali indipendenti*, ma con *apparecchio branchiale unico*.

(1) *Untersuchungen zur physiologischen Morphologie der Tiere*, II., Würzburg, 1892

Nella riorganizzazione degli ascidiozoi, in seguito a fusione, si è potuto dimostrare in alcuni casi, una tendenza all'inversione della polarità che accade, in un primo tempo in uno dei componenti dell'innesto, ma che poi scompare; tuttavia in casi di pezzi posteriori fusi insieme si è ottenuta l'inversione di polarità, come condizioni permanente, nella restituzione.

Le relazioni di polarizzazione non cambiano quando la fusione si compie fra una metà sifonale del cestello e quella basale, nella stessa direzione dell'asse originario di polarità dei due pezzi.

Botanica (Patologia vegetale). — *La riproduzione sperimentale del « mal del secco » dei limoni.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. L. PETRI.

Come è noto ai fitopatologi per le mie precedenti pubblicazioni ⁽²⁾ concernenti le ricerche sopra l'eziologia del cosiddetto *mal del secco*, che sulla costa orientale della Sicilia produce gravissimi danni alle piante di limone, la malattia consiste essenzialmente in una *tracheomicosi* o *adromicosi*, a cui si aggiunge un'*antracnosi* dei germogli e dei rametti giovani, che si presenta in modo molto appariscente e che perciò ha richiamato su di sé sin dal principio tutta l'attenzione dei fitopatologi. In un primo tempo sembrava infatti che l'*antracnosi* non fosse che un primo stadio della malattia, mentre lo stadio secondario e più grave fosse quello della *tracheomicosi*, dovuti ambedue allo stesso parassita. È risultato invece che i parassiti sono due e che l'infezione primaria è determinata dal fungo che si sviluppa solo nei vasi del legno, mentre l'*antracnosi* costituisce un epifenomeno, prodotto da un altro parassita, il cui attacco è solo reso possibile dalla precedente infezione del legno.

Cosicchè dunque in un rametto ammalato la *tracheomicosi* non è rivelata all'esterno in un primo tempo che dall'ingiallimento parziale o totale delle foglie e del tessuto corticale, e anche dalla caduta delle foglie stesse. In un secondo tempo, se i germi del fungo dell'*antracnosi* sono presenti, si ha l'imbrunimento omogeneo o a chiazze della corteccia e poi il disseccamento di tutto il rametto o della sua porzione terminale.

Naturalmente per effetto della sola *tracheomicosi* i rami infetti finiscono egualmente per disseccare, ma non così rapidamente e con i caratteri che presentano quando interviene l'*antracnosi*.

Come si sa, questa è prodotta dal *Colletotrichum gloeosporioides* Penz. e l'infezione del legno da un micelio dotato di caratteri e proprietà peculiari ben distinte da quelle del *Colletotricum*. Il fungo della *tracheomicosi*

(1) Nella seduta del 19 gennaio 1930.

(2) Cfr. Boll. R. Stazione di Pat. veg., annate 1926, 27, 28 e 29.

vive, sinchè l'organo attaccato è in vita, esclusivamente nel tessuto legnoso, circondato dai tessuti corticali che possono restar vivi per molto tempo.

Il micelio non è dotato di una così elevata virulenza da poter uccidere direttamente ed invadere il cambio ed i tessuti corticali. Essi muoiono solo per effetto dei prodotti del metabolismo del fungo. Esso agisce un pò come i *Vorticillium* nel caso delle *tracheomicosi* da essi prodotte. Riducendo i nitrati in nitriti, formando indolo a spese delle sostanze proteiche, esso svolge un'azione tossica sopra il cambio e i tessuti della corteccia. Dopo la morte di questi, e se questa non è stata determinata dal *Colletotrichum*, il micelio tracheifilo attraversa la corteccia e viene a formare i suoi organi di riproduzione sotto l'epidermide. Se i tessuti corticali sono invasi dal micelio del *Colletotrichum*, il fungo tracheifilo giunge egualmente sino alla superficie esterna del rametto, sviluppandosi lungo le trachee e tracheidi delle tracce fogliari formando allora i suoi organi di riproduzione sulla superficie delle cicatrici lasciate dalla caduta delle foglie.

Questi organi di riproduzione sono dei picnidi piccolissimi, (μ 35 — 90 di diametro) privi di un poro apicale, gregari, di un nero intenso, non immersi in uno stroma particolare. Essi formano innumerevoli spore batteriformi unicellulari, ialine, di μ 0.8 — 2×2.3 — 5.

Non esistono nell'interno dei picnidi dei conidiofori diposti regolarmente a palizzata, ma le cellule sporigene sono poliedriche, ad angoli arrotondati e riunite in gruppi, che sono liberi alla maturità nella cavità dei picnidi. Le spore sono formate sulla superficie delle cellule fertili che si gelificano rapidamente.

In coltura il fungo in questione presenta pure una fruttificazione di tipo ifale riferibile al gen. *Acremonium*. Caratteristica è la formazione di gruppi di ife ricche di un pigmento rosso-rubino di cui ho già descritto le proprietà fisiche principali. Questo stesso pigmento viene formato anche nel tessuto legnoso a cui comunica una colorazione rosso-arancione caratteristica e che permette di riconoscere facilmente i rami infetti, ancora verdi, dal semplice esame della superficie del taglio del legno⁽¹⁾.

Io chiamo *Deuterophoma* questo fungo per i caratteri strutturali di *Phoma* più semplici che esso presenta⁽²⁾. Una descrizione dettagliata di questo parassita, della sua biologia e del suo comportarsi sui substrati colturali, sarà data in una apposita memoria, qui era solo necessario riassumere brevemente i risultati delle ricerche ottenuti sino a poco tempo fa.

(1) La formazione di ife ricche di pigmento sembra avvenire in coltura in seguito a una variazione del micelio. Con la formazione del pigmento quest'ultimo diventa sterile.

(2) La *Deuterophoma tracheiphila* presenta alcuni caratteri che l'avvicinano alle *Sclerophomaceae*, formanti picnidi dapprima ripieni di un tessuto pseudoparenchimatico a tipo scleroziale, che alla maturità si gelifica e viene sostituito gradatamente dalle spore che da esso si originano; ma le maggiori affinità si riscontrano col gen. *Plectophomella* Moesz per la particolare struttura dei picnidi e per il modo di formazione delle spore.

I tentativi fatti per riprodurre sperimentalmente la malattia, operandosi in generale col *Colletotrichum*, erano sempre falliti, per cui erasi rafforzata in me l'opinione che il *mal del secco* fosse reso possibile da condizioni predisponenti particolari dovute in parte a proprietà del terreno e in parte all'eccezionale regime colturale a cui le piante sono sottoposte per la produzione dei *verdelli*. In questa opinione confortava anche l'insuccesso ottenuto in alcuni tentativi di riprodurre la malattia mediante l'innesto di legno infetto in rami sani. Ma ripetendo queste prove in più gran numero, mercè l'istituzione di un Osservatorio sui luoghi stessi dove la malattia inferisce, e inoculando spore o micelio del *Deuterophoma*, si è potuto ottenere finalmente, dalle inoculazioni fatte nello scorso ottobre, un risultato positivo. Naturalmente questo poteva avere un valore relativo sinchè un ugual risultato non fosse stato ottenuto su piante sanissime, coltivate in una regione del tutto immune dalla malattia e molto lontana dalla Sicilia. A queste condizioni hanno perfettamente corrisposto le esperienze che io ho istituito presso il campo sperimentale della R. Stazione di Patologia vegetale (Aguzzano - Roma). Piante giovani di arancio amaro, che è molto recettivo pel *mal del secco*, sono state coltivate in vaso in terreni di diversa costituzione fisica. E cioè, da un terreno prettamente sabbioso, per ripetere la condizione di terreno dove la malattia maggiormente si sviluppa, si giungeva, per gradi diversi, sino a un terreno prettamente argilloso. Le piante erano poi irrorate periodicamente con una soluzione nutritiva contenente del solfato ammonico, per ripetere in parte le condizioni delle piante di limone sottoposte in Sicilia alla forzatura per la produzione dei *verdelli*.

I tentativi d'infezione vennero eseguiti nel mese di ottobre, giacchè anche in natura in questo mese facilmente si verificano infezioni nei giovani rami.

Vennero innestate fra la corteccia e il legno delle sottili fette di legno infetto e delle piccole porzioni di coltura del *Deuterophoma* sopra agar - agar nutritiva. Vennero fatti anche tentativi per infettare le foglie dalla pagina inferiore. Le ferite sui rametti e sul fusto delle giovani piante vennero fasciate con carta da filtro bagnata con acqua e quindi tenuta in posto da stagnola. Vennero pure adoperati tubi di vetro appositamente costruiti per effettuare simili inoculazioni.

Dal 2 e dal 14 ottobre, nei quali giorni quest'ultime furono eseguite, sino a tutto dicembre, non era stato notato alcun disseccamento notevole nei rametti o nei fusti inoculati, per cui ritenevo di non esser riuscito nel mio tentativo. Ma nei primi di gennaio il disseccamento delle punte dei rami di due delle piante inoculate richiamò l'attenzione del Dr. Mario Mencacci incaricato della sorveglianza sulle esperienze in corso al campo sperimentale, ed il taglio subito eseguito al disotto del punto d'inoculazione mostrò in modo molto manifesto la colorazione rosso-arancione del legno, mentre l'esame microscopico dimostrò la presenza del micelio nei vasi. Anche

in queste infezioni sperimentali si rivela molto nettamente la tendenza del micelio a diffondersi verso il basso e risulta anche in modo molto evidente la duplice natura dell'alterazione che si osserva in Sicilia, giacchè a Roma, in assenza dei germi del *Colletotrichum*, non si è riprodotta l'*antracnosi*, ma la sola *tracheomicosi* che costituisce il processo patologico specifico del *mal del secco*.

La ricerca ulteriore di piante infette fra quelle inoculate ne ha rivelate altre, per cui può essere affermato che le inoculazioni hanno avuto esito positivo in un terzo delle piante sottoposte all'esperienza e tanto su piante inoculate col micelio come su quelle inoculate col legno infetto. La costituzione fisica del terreno non sembra aver avuto in questo risultato un'influenza apprezzabile, perchè è rimasta infetta tanto una pianta che cresceva in un terreno col 90% di sabbia come una il cui terreno aveva il 70% di argilla. Sembra piuttosto che il solfato ammonico abbia avuto una certa influenza nel predisporre le piante all'infezione, ma al riguardo, essendo in corso numerose esperienze, è opportuno attenderne i risultati prima di venire a qualsiasi conclusione. Dalle piante ammalate è stato possibile di isolare nuovamente il fungo parassita.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sistemi di normali principali ad una varietà nel suo Π_3 .* Nota I di RINA BALDONI, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Si sa che il prof. Vitali si è proposto il problema di determinare per ogni varietà dello spazio hilbertiano un sistema di ν rette del Π_2 tra loro ortogonali (ν essendo il numero delle dimensioni del Π_2) tali che la loro definizione risulti indipendente dall'ordine in cui tali rette si considerano. Egli ha indicato infiniti modi per raggiungere tale scopo, ma ve n'è uno che merita la preferenza, al quale egli ha dato il nome di *principale* ⁽²⁾.

Questo sistema è legato ad un sistema covariante :

$$(1) \quad W_{r,s;p,q} = a_{r,s} a_{p,q} - \frac{a_{r,p} a_{s,q} + a_{r,q} a_{s,p}}{2}$$

(1) Nella seduta del 19 gennaio 1930.

(2) G. VITALI, *Geometria nello spazio hilbertiano* [ed. N. Zanichelli, Bologna, 1929, p. 256]. In seguito indicherò questo libro con *GH*.

del quale ha importanza sapere che il determinante

$$|W_{r,s;p,q}|$$

è diverso da zero ⁽¹⁾.

La nozione di normali principali si deve potere estendere a tutti i Π_m ; però la estensione presenta due difficoltà, una delle quali dipende dal fatto che la varietà che si considera non è sufficientemente generale, in modo da consentire la considerazione del ricciano m -esimo; l'altra sta nella ricerca di un sistema covariante $W_{r_1, \dots, r_m; s_1, \dots, s_m}$ che sia il più adatto a prendere il posto del sistema (1).

Il prof. Vitali mi dice che la prima difficoltà richiede, per essere superata, un rimaneggiare degli algoritmi di cui si dispone per tali ricerche, e forse la preparazione di un algoritmo caso per caso.

La seconda difficoltà si può affrontare quando il σ_{m-1} ha il massimo numero di dimensioni compatibile col numero delle dimensioni della varietà, ossia nel caso in cui si può parlare di m -esimo ricciano ⁽²⁾.

Nella mia tesi di laurea io mi sono proposta di definire un sistema di rette principali nel Π_3 di una varietà col σ_2 avente il massimo numero di dimensioni.

Espongo i risultati ai quali sono pervenuta.

1. Intanto io considero una forma quadratica in n variabili x_i :

$$\varphi = \sum_{h,k} a_{h,k} x_h x_k$$

e, con i suoi coefficienti, formo un sistema

$$(2) \quad \begin{aligned} W_{r,s,p;h,k,q} = & \lambda (a_{r,s} a_{h,k} a_{p,q} + a_{r,p} a_{h,k} a_{s,q} + a_{r,q} a_{h,k} a_{p,s} + \\ & + a_{s,p} a_{k,q} a_{r,h} + a_{s,r} a_{k,q} a_{p,h} + a_{s,h} a_{k,q} a_{r,p} + \\ & + a_{p,r} a_{q,h} a_{s,k} + a_{p,s} a_{q,h} a_{r,k} + a_{p,k} a_{q,h} a_{r,s}) + \\ & + \mu (a_{r,h} a_{s,k} a_{p,q} + a_{r,k} a_{p,k} a_{s,q} + a_{s,h} a_{r,k} a_{p,q} + \\ & + a_{s,k} a_{p,k} a_{r,q} + a_{p,h} a_{s,k} a_{r,q} + a_{p,k} a_{r,k} a_{s,q}) \end{aligned}$$

dove λ e μ sono costanti.

Una sostituzione lineare

$$(3) \quad x_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} y_j \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

col modulo $c \neq 0$, trasforma (2) in

$$W'_{r,s,p;h,k,q} = \sum'_{\substack{l,t,\pi \\ m,n,\sigma}} W_{l,t,\pi; m,n,\sigma} P_{l,t,\pi; r,s,p} P_{m,n,\sigma; h,k,q}$$

(1) Vedi *GH.*, p. 254.

(2) Vedi *GH.*, p. 201.

con \sum' estesa a tutte le disposizioni con ripetizione a 3 a 3 dei numeri

$$1, 2, \dots, n$$

e con:

$$P_{l\pi;rsp} = \sum^0 c_{lr} c_{ls} c_{\pi p}$$

in cui la \sum^0 si intende estesa a tutti i termini che si ricavano da $c_{lr} c_{ls} c_{\pi p}$ tenendo fissi gli indici $l\pi$ e facendo percorrere agli indici rsp tutte le permutazioni distinte.

Allora il determinante

$$W = |W_{r,s,p;h,k,q}|$$

che ha per elementi, gli elementi (2) disposti in modo che in ogni riga sia costante la combinazione (con ripetizione) a 3 a 3, rsp , e in ogni colonna sia costante la combinazione hkg , e che in ogni elemento della diagonale principale siano eguali le due combinazioni, si muta per la (3) in

$$W' = W \cdot P^2$$

dove:

$$P = |P_{l\pi;rsp}|$$

è il terzo determinante di Brill-Scholtz-Hunyady ⁽¹⁾ dedotto da c , e quindi vale $c^{\binom{n+2}{2}}$.

Ne conseguè che

$$W' = W \cdot c^2 \binom{n+2}{2}$$

e quindi ⁽²⁾

$$W = K \cdot a^{\binom{n+2}{2}}$$

dove a è il discriminante della forma φ , e K una costante. Il calcolo di K si fa nel modo seguente.

Se si prende

$$\varphi = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

si ha:

$$W = K.$$

Ma in tale caso:

$$\begin{aligned} W_{r,s,p;r,s,p} &= \mu & (r \neq s \neq p \neq r) \\ W_{r,s,s;r,s,p} &= \lambda & (r \neq s \neq p \neq r) \\ W_{r,r,p;r,r,p} &= \lambda + 2\mu & (r \neq p) \\ W_{r,r,r;r,p,p} &= 3\lambda & (r \neq p) \\ W_{r,r,r;r,r,r} &= 9\lambda + 6\mu. \end{aligned}$$

(1) Vedi *GH.*, pp. 123-127.

(2) Vedi *GH.*, p. 116.

Raggruppiamo le righe e le colonne di W in $n + 1$ strati mettendo nel primo strato quelle che corrispondono alle n terne di indici

$$1, 1, 1 \ ; \ 2, 2, 2 \ ; \ 3, 3, 3; \dots; n, n, n$$

e nell' r -esimo strato ($1 < r \leq n$), quelle di indici

$$r, r, 1 \ ; \ r, r, 2; \dots; \ r, r, r-1 \ ; \ r-1, r-1, r \ ; \\ r-1, r-1, r+1; \dots; \ r-1, r-1, n,$$

e le rimanenti $\binom{n}{3}$, nell'ultimo.

Indicherò con $M_{r,s}$ la matrice intersezione dello strato r -esimo di righe con l' s -esimo di colonne. Si vede che le matrici $M_{r,n+1}$ ed $M_{n+1,r}$ con $r < n + 1$ hanno tutti gli elementi nulli e che $M_{n+1, n+1}$ è quadrata con gli elementi principali tutti uguali a μ ed i rimanenti nulli. Consegue che

$$K = \mu \binom{n}{3} \cdot \Delta$$

dove Δ è il determinante formato coi primi n strati di righe e di colonne. Osservo che in questo, le matrici $M_{r,s}$ sono tutte quadrate, e che ognuna di esse ha uguali fra loro i termini principali e nulli i rimanenti, e che i termini principali di $M_{1,x}$ sono eguali a $9\lambda + 6\mu$, quelli di $M_{r,r}$ ($r > 1$) sono eguali a $\lambda + 2\mu$, quelli delle $M_{1,r}$ ed $M_{r,1}$ con $r > 1$, sono eguali a 3λ e quelli delle rimanenti sono eguali a λ . Per facilitare l'espressione chiamo *righe congruenti* (ed analogamente colonne congruenti) quelle righe (o colonne) che nei vari strati occupano lo stesso posto; divido allora per 3 le colonne del primo strato e le tolgo dalle congruenti di tutti gli altri strati. Fatto questo, aggiungo alle prime n righe le righe congruenti dei rimanenti strati; allora gli elementi di queste prime n righe risultano tutti nulli eccetto quelli che vengono ad occupare il posto di $M_{1,x}$ e che formano un determinante Ω , che ha nulli tutti gli elementi non principali e i principali eguali a

$$(3\lambda + 2\mu) + (n-1)\lambda = (n+2)\lambda + 2\mu.$$

Quindi sarà:

$$\frac{\Delta}{3^n} = \Omega \cdot \Omega_1$$

dove Ω_1 è il complemento algebrico di Ω , ed è un determinante di ordine $n(n-1)$ che ha nulli tutti gli elementi non principali e tutti gli elementi principali eguali a 2μ .

Si deduce che

$$\Delta = 3^n [(n+2)\lambda + 2\mu]^n (2\mu)^{n(n-1)}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} K &= 3^n [(n+2)\lambda + 2\mu]^n (2\mu)^{n(n-1)} \mu^{\binom{n}{3}} = \\ &= 2^{n(n-1)} \cdot 3^n [(n+2)\lambda + 2\mu]^n \mu^{\binom{n}{3} + n(n-1)} \end{aligned}$$

Consegue che qualunque sia la φ , è

$$W = 2^{n(n-1)} \cdot 3^n [(n+2)\lambda + 2\mu]^n \mu^{\binom{n}{3} + n(n-1)} \cdot a^{\binom{n+2}{2}}.$$

Per $\lambda = 2$, $\mu = -3$ si ha:

$$W = 2^{n(n-1)} \cdot 3^n [2n-2]^n (-3)^{\binom{n}{3} + n(n-1)} \cdot a^{\binom{n+2}{2}}$$

e quindi, per $n > 1$, è $W \neq 0$.

2. Consideriamo ora una varietà V_n ad n dimensioni, la cui determinante sia

$$f(t; u_1, u_2, \dots, u_n)$$

e indichiamo con $W_{r,s,p; h,k,q}$ il sistema (2) in cui si pone:

$$a_{h,k} = \int_K f_h f_k dt$$

e $\lambda = 2$, $\mu = -3$.

Noi sappiamo che il determinante $|W_{r,s,p; h,k,q}|$ è diverso da zero.

Indichiamo con $W_{r,s,p; h,k,q}$ il reciproco, in questo determinante, di $W_{r,s,p; h,k,q}$ diviso per $\pi_{r,s,p} \pi_{h,k,q}$ dove $\pi_{r,s,p}$ è il numero delle permutazioni distinte della terna $r, s, p^{(1)}$.

Definizione 1. — Se $x_{r,s,p}$ è un covariante a 3 indici di prima classe, chiamerò suo *pseudo-reciproco* il controvariante a 3 apici di prima classe

$$x^{r,s,p} = \sum_{h,k,q} W_{r,s,p; h,k,q} x_{h,k,q}.$$

Se ne deduce che

$$x_{r,s,p} = \sum_{h,k,q} W_{r,s,p; h,k,q} x^{h,k,q}$$

e si dirà che $x_{r,s,p}$ è il *pseudo-reciproco* di $x^{r,s,p}$.

Definizione 2. — Se $x_{r,s,p}$ ed $y_{r,s,p}$ sono due covarianti a 3 indici di 1^a classe, $x^{r,s,p}$ ed $y^{r,s,p}$ sono i loro pseudo-reciproci, chiamo *alternante* di $x_{r,s,p}$ ed $y_{r,s,p}$, ed indico con (x, y) , l'espressione:

$$(x, y) = \sum_{r,s,p} x_{r,s,p} y^{r,s,p} = \sum_{r,s,p} y_{r,s,p} x^{r,s,p}.$$

(1) Vedi GH., p. 199, n. 5.

Matematica. — *Un teorema generale sulle varietà abeliane reali.*
Nota di S. CHERUBINO, presentata (*) dal Corrisp. G. SCORZA.

Fra le varietà abeliane reali si presenta meno arduo lo studio di quelle che ammettono una simmetria di carattere reale zero. Ciò proviene dal che la matrice di Riemann (Scorza), cui è legata ciascuna di esse, risulta del tipo

$$(1) \quad \omega^* = (\alpha \quad ; \quad i\beta)$$

con α e β matrici quadrate reali di ordine p , dimensione della varietà. Queste, com'è stato messo in rilievo dal Comessatti (1), godono anche il vantaggio di essere sempre normalizzabili in senso reale, cioè le loro matrici di Riemann sono sempre riferibili ad integrali ed a forme riemanniane alternate principali normali senza perdere il vantaggio di presentarsi sotto la forma (1) che pone insieme in evidenza la realtà della varietà ed il carattere reale nullo della simmetria S che si considera (2). Perciò la (1) può addirittura ridursi alla forma

$$(2) \quad \Omega^* = (e^{-1} \quad ; \quad i\pi) \quad (\pi = \pi_{-1})$$

ove e indica la matrice dei divisori elementari (Frobenius) e_1, e_2, \dots, e_p di una forma alternata di Riemann principale per ω^* e trasformata in sé da S e π è una matrice reale simmetrica.

Ne segue la opportunità di tentare di ridursi sempre a tabelle del tipo (2), ovvero del tipo (1) che è lo stesso, cioè di cercare di riferire ogni varietà possedente una simmetria di carattere reale $\lambda > 0$ ad una su cui $\lambda = 0$. Ma è ciò sempre possibile?

Tale possibilità è già stata esplicitamente rilevata in una mia recente Nota (3). Ivi si osserva che se ω è legata alla varietà abeliana reale V su certi $2p$ cicli primitivi C_k della sua riemanniana ed $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ è, su questi cicli,

(*) Nella seduta del 19 gennaio 1930.

(1) *Sulle varietà abeliane reali*, Mem. I, « Annali », s. IV, t. II (1924-1925), n. 10, § 3.

(2) Quando il carattere reale non è zero, la normalizzabilità in senso reale dipende dalla parità dei divisori elementari delle forme riemanniane alternate trasformate in sé dalla simmetria che si considera. Cfr. le mie due Note: *Sul problema della normalizzazione ecc.* « Atti Ist. Ven. », t. 88 (1928-1929) e *Sulla normalizzazione delle matrici di Riemann reali*. Ibidem, t. 89 (1929-1930). La prima di queste due Note s'indicherà in seguito con (N).

(3) *Le sostituzioni pseudonormalizzanti ecc.* « Rend. Lincei », vol. VII, s. 6^a, marzo 1928, n. 3. Cfr. anche il n. 11 della Mem. I del COMESSATTI, cit. (1). La mia Nota ora citata s'indicherà appresso con Nota IV.

una matrice caratteristica minima della simmetria S fissata su V , si ha ⁽⁴⁾

$$(3) \quad \omega \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1} = (\alpha; i\beta) = \omega^*.$$

Cosicchè, se V^* è una varietà abeliana legata alla ω^* , la V^* risulta reale e su essa la simmetria S di V induce un'altra simmetria cui corrisponde, per la matrice ω^* , un'antisostituzione riemanniana involutoria

$$(4) \quad \bar{x} = I_0 \cdot x = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & -I \end{array} \right) x$$

dove I è la matrice identica di ordine p ed $x = (x_1, x_2, \dots, x_{2p})_{-1}$.

Dallo isomorfismo di ω ed ω^* posto dalla (3) e dal fatto che il valore assoluto della matrice intera $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ è 2^λ , dove λ è il carattere reale di S , segue ⁽⁵⁾ che:

V è birazionalmente identica ad (l'immagine di) un'involuzione di ordine 2^λ segnata su V^ .*

Questa osservazione sarebbe però priva di effettivo interesse se non fosse possibile invertirla, ciò che appunto si fa nelle pagine che seguono.

Il risultato, con la sua precisazione geometrica e con la sua posizione nella teoria generale, si consegue mercè alcune osservazioni sugli n -intieri caratteristici pei periodi simultanei le quali, poichè hanno un significato autonomo, sono state riunite in un lavoro che vien pubblicato a parte ⁽⁶⁾.

1. La corrispondenza fra V e V^* si definirà ponendo

$$(5) \quad (u_1^*, u_2^*, \dots, u_p^*)_{-1} = u^* = u = (u_1, u_2, \dots, u_p)_{-1}$$

dove gli u_i sono i parametri indipendenti di V , cui appartiene la matrice ω dei periodi sui cicli C_i , mentre gli u_i^* sono i parametri di V^* , ai quali appartiene la matrice ω^* , sui cicli C_k^* .

Ad ogni punto P^* di V^* assegnato da una determinazione della matrice u^* viene così a corrispondere il punto P di V individuato da $u = u^*$, mentre ad ogni punto P di V corrispondono i $2^\lambda = v$ punti di V^* determinati dalla relazione

$$(6) \quad u^* = u + \omega h = u + \omega^* \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1}^{-1} h$$

in cui h è un $2p$ -intiero, cioè una matrice intera di tipo $(2p, 1)$ che ri-

(4) Cfr. anche (N), n. 3.

(5) G. SCORZA, a) *Intorno alla teoria generale ecc.* «Rend. Pal.», t. XLI (1916), n. 7, proposizione 5) della nota (20) a pie' di p. 12. Vedi anche, dello stesso A., b) *Alcune questioni di geometria ecc.* «Atti Acc. Gioenia», s. 5^a, vol. XI (1918), Mem. XX.

(6) *Sugli n-intieri calcolati modulo due.* [«Rend. Acc. Napoli», s. 4^a, vol. XXXVI, 1929].

ceve $v = 2\lambda$ determinazioni distinte e cioè tante quanti sono i $2p$ -intieri *distinti*

$$(7) \quad b^{(0)}, b', b'', \dots, b^{(v-1)} \quad (v = 2\lambda)$$

tali che ⁽⁷⁾

$$(8) \quad \omega^* \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1}^{-1} \cdot b^{(i)} \equiv \omega^* \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1}^{-1} b^{(j)} \pmod{\omega^*}, (i \neq j).$$

Precisamente, due determinazioni b' ed b'' di b danno luogo a punti distinti di V^* allora e solo allora che $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1}^{-1} (b' - b'')$ non è una matrice *intiera*.

Orbene, poichè si può porre ⁽⁸⁾ $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1}^{-1} = \frac{1}{2} (2m^*, 2n^*)$ ove $2m^*$ e $2n^*$ sono due matrici intiere di tipo $(2p, p)$, la condizione (8) si riduce all'altra

$$(9) \quad (2m^*, 2n^*)_{-1} \cdot (b^{(i)} - b^{(j)}) \equiv 0 \pmod{2} \quad (i \neq j = 0, 1, \dots, v-1).$$

Ne segue che i (7) sono due a due fra loro incongrui mod. 2 e che, con tutti i $2p$ -intieri ad essi congrui mod. 2, costituiscono un *sistema di parità*, di ordine λ , *residuo* quindi individuato ⁽⁹⁾ dal sistema di ordine $2p - \lambda$ costituito da tutte e sole le soluzioni della congruenza

$$(10) \quad (2m^*, 2n^*)_{-1} \cdot x \equiv 0 \pmod{2}.$$

Fra i (7) figura dunque il $2p$ -intiero nullo (cioè di intieri tutti nulli) e la somma (o la differenza) di due di essi appartiene ancora al sistema (7) ⁽¹⁰⁾.
Ponendo

$$(11) \quad \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1}^{-1} b^{(j)} = \frac{1}{2} (2m^*, 2n^*)_{-1} b^{(j)} = \frac{1}{2} b^{*(j)} \quad (j = 0, 1, \dots, v-1)$$

si ha che

$$(11)^* \quad \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1} b^{*(j)} = 2 b^{(j)} \equiv 0 \pmod{2}$$

quindi, essendo $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1}$ di caratteristica $2p - \lambda \pmod{2}$, questi $b^{*(j)}$ appar-

(7) Cfr. G. SCORZA, loc. cit. (5) b) n. 11, a) del § 2.

(8) (N), n. 7. Cfr. anche la mia Nota cit. (6), n. 9.

(9) Nota cit. (6), nn. 9 e 7.

(10) Tutti i $2p$ -intieri congrui mod. 2 ad uno stesso $2p$ -intiero si considerano qui come coincidenti, cioè, come diremo, costituiscono lo stesso *elemento* o *parità*. Cfr. la Nota citata (6), n. 4.

tengono ad uno stesso sistema di parità, di ordine $\lambda^{(11)}$. Si hanno perciò $v = 2^\lambda$ $2p$ -intieri

$$(7)^* \quad b^{*(0)}, b^{*(1)}, \dots, b^{*(v-1)}$$

tutti di parità distinte, individuati mediante le (11) (ed anche dalla (11)* a meno di congruenze mod. 2).

Dopo di ciò, i punti (6) si scrivono

$$(6)^* \quad u^{*(j)} \equiv u^* + \frac{1}{2} \omega^* b^{*(j)} \pmod{\omega^*}, \quad (j = 0, 1, \dots, v-1)$$

e questo gruppo di punti si genera operando, su uno qualsiasi di essi, le 2^λ trasformazioni di 2ª specie di V^*

$$(12) \quad u^{*(j)} = u^* + \frac{1}{2} \omega^* b^{*(j)} \quad (j = 0, 1, \dots, v-1)$$

le quali, poichè i (7)* generano un sistema di parità di ordine λ , costituiscono un gruppo di ordine 2^λ , le cui operazioni sono tutte involutorie.

La (11)* ci dice che il sistema dei (7)* è generato dalle colonne della matrice $2 \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1}^{-1}$, cioè è di quelli che ⁽¹²⁾ si dicono di *carattere reale* λ . Anche il corrispondente gruppo di trasformazioni di 2ª specie di V^* e la involuzione da esso generata convien dirli di *carattere reale* λ . Perciò enunciamo che:

Ogni varietà abeliana reale V con una simmetria di carattere reale $\lambda > 0$ è birazionalmente identica ad una involuzione di carattere reale λ , su di una varietà abeliana reale V^ possedente una simmetria di carattere reale zero.*

2. Viceversa, data V^* appartenente ad una ω^* del tipo (1), su essa esistono infinite involuzioni di ordine 2^λ generate da altrettanti gruppi di trasformazioni ordinarie involutorie di 2ª specie: questi si ottengono tutti dalle (12) facendo variare i $2p$ -intieri $b^{*(j)}$ in tutti i possibili sistemi di parità di ordine λ .

Fra questi ve ne sono ⁽¹³⁾ di quelli che hanno il carattere reale λ : ad es., quello generato dai (7)*. Una sua generatrice per colonne è del tipo $(2m^*, 2n^*)_{-1} = 2 \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1}^{-1}$ ove con $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ si indica una matrice caratteristica minima regolare di una simmetria di carattere reale λ . Poichè $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1} \cdot (2m^*, 2n^*)_{-1} = 2I$, si ha

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1} \cdot b^{*(j)} \equiv 0 \pmod{2}, \quad (j = 0, 1, \dots, v-1)$$

(11) Nota cit. (6), nn. 6 e 9. Si tenga anche presente che dalle (11), a causa della (9), segue senz'altro che gli $b^{*(j)}$ sono tutti di parità distinte.

(12) Nota cit. (6), n. 10, fine.

(13) Ibidem.

e, con opportuna scelta degli $h^{(j)}$,

$$h^{*(j)} = 2 \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1}^{-1} \cdot h^{(j)} \quad (j = 0, 1, \dots, v-1).$$

Allora i punti (6)* dell'involuzione considerata su V^* si scrivono

$$(13) \quad u^{*(j)} = u^* + \frac{1}{2} \omega^* h^{*(j)} = u + \omega h^{(j)} \quad (j = 0, 1, \dots, v-1)$$

ove si è posto $\omega = \omega^* \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1}^{-1}$; $u = u^*$.

Ecco la matrice riemanniana ω che individua (a meno di trasformazioni birazionali) una varietà abeliana V su cui esiste una simmetria la cui corrispondente antisostituzione riemanniana involutoria ha per matrice dei coefficienti

$$S = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1}^{-1} \cdot I_0 \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}.$$

Infatti si ha

$$\omega = \omega^* \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1}^{-1} = \omega^* I_0 \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1}^{-1} = \omega \left[\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1}^{-1} I_0 \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \right]_{-1}.$$

Questa simmetria risulta necessariamente di carattere reale λ , come segue ⁽¹⁴⁾ dall'ipotesi fatta su $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$, e ad essa si può far corrispondere su V^* proprio la involuzione dei gruppi (13), di carattere reale λ .

Possiamo dunque affermare che:

Data una V^ con una simmetria di carattere reale zero, ogni sua involuzione di carattere reale λ (certo esistente) è birazionalmente identica ad una varietà abeliana reale possedente una simmetria dello stesso carattere reale λ .*

(14) Vedi (N), § I, nota a pie' di p. 373/(5).

Matematica. — *L'approximation d'une fonction par une autre fonction appartenant à une fonctionnelle linéaire donnée, et l'approximation d'un champ vectoriel quelconque par un champ irrotationnel.* Nota di N. GIORANESCU, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. M. T. Levi-Civita a introduit ⁽²⁾ l'importante notion de *voisinage* harmonique d'une fonction donnée $U(P)$, dans un domaine donné. On entend par cette locution, la fonction harmonique $u(P)$, finie et bien déterminée, qui approxime le mieux $U(P)$ dans le domaine donné.

La meilleure approximation est prise dans le sens, si fréquemment employé en physique, de *minimiser* l'erreur quadratique globale entre $U(P)$ et $u(P)$, c'est-à-dire de rendre minimum l'intégrale :

$$I = \int_{\Omega} [U - u]^2 d\omega$$

M. Levi-Civita réduit le problème de la recherche de $u(P)$ à une équation intégrale de première espèce, et avec préférence à un problème aux limites, notamment à un problème bi-harmonique.

En liaison avec cette notion de voisinage harmonique, M. O. Onicescu se propose ⁽³⁾ de chercher le champ newtonien qui approxime le mieux (toujours dans le même sens) un champ vectoriel quelconque, défini dans une portion limitée de l'espace.

Il réduit ce problème, grâce à l'harmonicité de la fonction dont le gradient est le champ vectoriel cherché, à une équation intégrale du type de Fredholm.

Je vais m'occuper ici de deux problèmes, correspondants aux précédents, qui tout en étant de simples généralisations formelles, peuvent conduire, surtout en ce qui concerne le second problème, à une notion qui peut présenter un certain intérêt au point de vu du physicien : c'est la notion de champ vectoriel irrotationnel qui approxime le mieux un champ vectoriel quelconque.

2. Soit $F(P)$ une fonction finie et continue, du point $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ définie dans un domaine Ω de frontière Σ , situé dans l'espace E_n . Soit de même $f(P)$ une autre fonction définie dans $\Omega + \Sigma$.

(1) Nella seduta del 19 gennaio 1930.

(2) T. LEVI-CIVITA, *Armonica vicinore ad una funzione assegnata*, « Rendiconti della R. Acc. dei Lincei », vol. XXIX, 1920, p. 197.

(3) O. ONICESCU, ibidem. *Campo newtoniano vicinore ad un campo vettoriale assegnato*.

L'écart quadratique moyen entre $F(P)$ et $f(P)$ est donné par :

$$(1) \quad I = \int_{\Omega} [F(P) - f(P)]^2 d\omega_P$$

et on dit que $f(P)$ approxime $F(P)$ en moyenne, si elle rend I minimum.

Supposons que $f(P)$ appartient à l'un de champ fonctionnel suivant :

$$(2) \quad f(P) = \int_{\Sigma} K(P, Q) \mu(Q) d\sigma_Q$$

ou bien

$$(3) \quad f(P) = \int_{\Omega} H(P, Q) \lambda(Q) d\omega_Q$$

où $H(P, Q)$ et $K(P, Q)$ sont deux fonctions bien déterminées sur Σ ou dans Ω , pouvant même avoir des discontinuités de nature déterminée lorsque $P \equiv Q$. [Le cas $K(P, Q) = \frac{1}{r(P, Q)}$ est celui considéré par monsieur Levi-Civita et correspond aux fonctions harmoniques définies par la distribution massique $\mu(Q)$ sur Σ].

En annulant la variation δI de I , pour toute variation de $\mu(Q)$ [ou de $d\lambda(Q)$], on arrive ainsi à l'équation intégrale suivante :

$$(4) \quad \int_{\Sigma} K_1(Q, Q') \mu(Q') d\sigma_{Q'} = G(Q)$$

(ou une autre analogue dans le cas (3)), pour déterminer $\mu(Q)$.

On a posé :

$$K_1(M, Q) = \int_{\Omega} K(P, M) K(P, Q) d\omega_P$$

et

$$G(Q) = \int_{\Omega} F(M) K(M, Q) d\omega_M$$

On voit facilement que le noyau $K_1(M, Q)$ est symétrique et défini dans Ω . Si le noyau $K(P, Q)$ est quelconque on doit se contenter avec l'équation (5), et pour trouver $\mu(Q)$ il faut connaître les solutions fondamentales de ces noyaux, la condition de possibilité étant donnée par le théorème de Picard-Lauricella. C'est pour cela que dans certains cas particuliers on préfère transformer le problème. En particulier si l'on suppose que $K(P, Q)$ est la solution fondamentale d'une certaine équation du type

elliptique, on peut ramener le problème à un problème aux limites, comme l'a fait M. Levi-Civita dans le cas particulier cité. Par ex., si $K(P, Q) = r^2(P, Q) \log \frac{1}{r(P, Q)}$ et $n = 2$ ou une fonction analogue dans le cas $n > 2$, alors $f(P)$ est formée par un ensemble linéaire des fonctions bi-harmoniques, et on a un problème de *voisinage bi-harmonique* d'une fonction donnée.

Il est intéressant aussi de considérer pour $K(P, Q)$ la solution fondamentale de l'équation $\Delta_2 v + \lambda v = 0$, et on est conduit ainsi à déterminer la fonction *métaharmonique* (en convenant d'appeler ainsi toute solution de l'équation précédente) qui approxime le mieux en moyenne quadratique, notre fonction $F(P)$.

3. Considérons à présent la généralisation du problème traité par M. O. Onicescu :

Soit dans le même domaine Ω , un champ vectoriel (V) de composantes $X_i(P)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) finies et continues.

Nous nous proposons de déterminer une fonction $U(P)$, appartenant à l'un des ensembles fonctionnelles définies par (2) ou (3) [pour fixer les idées supposons que ce soit par (2)] telle que $\text{grad } U(P)$ approxime en moyenne quadratique le champ (V) dans Ω . Par conséquent il faut que :

$$(5) \quad J = \int_{\Omega} \sum_1^n \left[\frac{\partial U}{\partial x_i} - X_i \right]^2 d\omega$$

soit minimum.

En appliquant toujours la même méthode variationnelle, on arrive à l'équation intégrale-différentielle suivante :

$$(6) \quad \int_{\Omega} \left[\sum_1^n \frac{\partial U}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial K}{\partial x_i} \right] d\omega = g(Q)$$

où $g(Q)$ est la fonction connue :

$$g(Q) = \int_{\Omega} \left[\sum_1^n X_i \frac{\partial K}{\partial x_i} \right] d\omega_P.$$

En admettant que $K(P, Q)$ a des dérivées de deux premiers ordre par rapport aux x_i , finies et continues dans $\Omega + \Sigma$, alors on peut transformer (6) moyennant les formules classiques, en :

$$(7) \quad \int_{\Sigma} U(Q) \cdot \frac{dK(P, Q)}{dn_P} d\sigma_Q + \int_{\Omega} U(M) \Delta_2 K(M, P) d\omega_M + g(P) = 0$$

où $\Delta_2 K(M, P)$ est le laplacien de K par rapport à M .

On arrive ainsi, pour déterminer $U(Q)$ à une équation intégrale d'une forme spéciale, qu'on peut considérer comme un cas intermédiaire entre une équation de première espèce et une du type de Fredholm. En remplaçant $U(Q)$ par son expression (2) on a une équation analogue pour $\mu(P)$.

On voit sur (7) l'importance du cas considéré par M. O. Onicescu, et qui correspond à $\Delta_2 K = 0$ c'est-à-dire à $K(P, Q) = \frac{1}{r(P, Q)}$ (dans le cas $n = 3$).

Quoique l'étude directe de l'équation (7) soit assez difficile, il est loisible d'admettre l'existence d'une solution $U(Q)$ de cette équation, solution définie dans $\Omega + \Sigma$.

Par conséquent la recherche du champ vectoriel irrotationnel est ramené à la résolution de l'équation (7).

Comme on l'a remarqué au nombre précédent, si le noyau $K(P, Q)$ n'est pas quelconque, on peut transformer ce problème en autre plus maniable, comme l'a fait M. Onicescu dans le cas du noyau de plus haut, en le ramenant à un problème de Dirichlet.

Matematica. — *Sulla unicità della soluzione del problema di Cauchy per un'equazione ellittica del secondo ordine in due variabili.* Nota di H. LEWY, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sia data un'equazione differenziale

$$(1) \quad F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$$

e una sua soluzione $u(x, y)$, per la quale l'equazione risulti ellittica. Sia la F una funzione analitica di tutti i suoi argomenti — in un certo campo dello spazio delle $x, y, u, u_x, \dots, u_{yy}$, il quale in particolare contiene i valori $x(s), y(s), u(s), u_x(s), \dots, u_{yy}(s)$, che assumono queste espressioni su una certa curva C del piano (x, y) , essendo s l'arco della C .

I valori assunti sulla C da $x, y, u, u_x, \dots, u_{yy}$, — i cosiddetti valori « iniziali » — determinano univocamente la soluzione $u(x, y)$ della (1)?

Ecco la classica risposta a questa domanda: Supponiamo che la $u(x, y)$ esista in un certo intorno (bilaterale) della C ; che $u(x, y)$ sia funzione analitica di x, y e che la curva C sia analitica anch'essa. Allora un semplice calcolo delle derivate successive di u — per mezzo dei dati valori iniziali e della (1) — ci dà inivocamente lo sviluppo della $u(x, y)$ in una serie di potenze nell'intorno di un punto generico della C . Questo è il risultato di Cauchy-Kowalewski, concernente l'unicità della soluzione di (1).

(1) Nella seduta del 5 gennaio 1930.

Ma l'aspetto della questione si muta, quando rinunziamo all'ipotesi del carattere analitico, sia della $u(x, y)$, sia dei valori iniziali, ivi compresa la C .

Per il caso d'una equazione ellittica lineare, supponendo altresì la C analitica, il problema fu riportato dall'Holmgren⁽¹⁾, al risultato oramai classico del Picard, che tutte le soluzioni di tali equazioni sono analitiche.

Hadamard, nelle sue « Lectures on Cauchy's problem »⁽²⁾ e altrove⁽³⁾ rilevò la differenza del nostro problema dalle analoghe questioni di unicità per equazioni differenziali ordinarie e parziali del primo ordine. Fece osservare che, mentre di solito — oltre all'unicità — ha luogo e vien dimostrato con gli stessi mezzi il fatto della dipendenza continua delle soluzioni dai dati iniziali, anzi nel caso nostro non esiste in generale tale dipendenza continua, e ne diede un semplice esempio.

Per evitare la difficoltà indicata dall'Hadamard e dimostrare l'unicità nel caso generale, ho scelto un metodo diverso da quegli usuali, del quale voglio dare qui un cenno riassuntivo. Le mie ipotesi sulla C e la u sono 1. che i valori iniziali $x(s), y(s), u(s), \dots, u_{yy}(s)$ ammettono derivate continue del secondo ordine rispetto all'arco s di C ; e 2. che la soluzione $u(x, y)$ di (1) esiste almeno da una parte della C , avendo là derivate continue fino al quarto ordine.

Consideriamo nel piano x, y un sistema Σ di curve dipendenti da due parametri per modo che per due generici punti del piano ne passi una ed una sola e che la C appartenga al sistema. Prendiamo una generica di queste curve. I valori ivi assunti da x, y, u, \dots, u_{yy} si possono manifestamente pensare come funzioni di un parametro; e questo a sua volta lo possiamo interpretare come distanza sopra una retta $\lambda + \mu = \text{cost.}$ in un piano cartesiano (λ, μ) ⁽⁴⁾.

Seguendo un metodo recentemente esposto⁽⁵⁾ si potrà risolvere in un modo ed in uno solo un certo problema caratteristico associato coll'equazione $F = 0$:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^8 a_{ik} \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi_k = 0 \quad (i = 1, \dots, 6), \\ \sum_{k=1}^8 a_{ik} \frac{\partial}{\partial \mu} \varphi_k = 0 \quad (i = 7, 8), \end{array} \right.$$

ove le funzioni da determinare $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_8$ stanno per x, y, u, \dots, u_{yy} ,

(1) HOLMGREN, Om Cauchy's problem vid de lineära partiella differentialequationerna af 2:dra ordningen, « Ark. f. Math. Ast. Fys. », t. 2, n. 24.

(2) Pagina 33.

(3) Osservazione su una Nota di Haar, « C. R. », 187 (2 giugno 1928).

(4) L'introduzione delle λ, μ serve soltanto per facilitare la descrizione della costruzione che segue.

(5) Vedi HANS LEWY, Neuer Beweis des analytischen Charakters der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen, « Math. Ann. », 101, spec., pp. 610-612.

le a_{ik} sono funzioni analitiche delle $\varphi_1, \dots, \varphi_8$, definite dalla F, e tali che il determinante $|a_{ik}|$ è differente da zero.

Osserviamo che questo è un problema iniziale iperbolico, di cui le curve caratteristiche sono le rette $\lambda = \text{cost.}$ e $\mu = \text{cost.}$ Le due caratteristiche che passano per un generico punto λ, μ , segheranno la suddetta retta iniziale $\lambda + \mu = \text{cost.}$ in due punti, ai quali corrisponderanno certi valori di x, y , diciamo

$$X_1, Y_1 \quad \text{e} \quad X_2, Y_2.$$

Consideriamo adesso le nostre funzioni $\varphi_1, \dots, \varphi_8$ — dopo averle sottoposte allo stesso processo di prolungamento per tutte le curve del sistema Σ — e scriviamole come funzioni delle quattro variabili X_1, Y_1 e X_2, Y_2 , che abbiamo testè introdotte. Se $X_1 = X_2, Y_1 = Y_2$, le $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_8$ si riducono alle funzioni date x, y, u, \dots, u_{yy} .

Decomposte le φ_1 e φ_2 in parti reali e parti immaginarie:

$$\varphi_1 = x = x_1 + ix_2$$

$$\varphi_2 = y = y_1 + iy_2$$

è facile provare, che invece di X_1, Y_1, X_2, Y_2 , si possano introdurre anche le x_1, x_2, y_1, y_2 quali variabili indipendenti; e va rilevato che, in questo passaggio, si deve profittare essenzialmente del fatto che la (1) è *ellittica*. Ora si dimostra — seguendo sempre una via simile a quella della Memoria suddetta — che le φ dipendono analiticamente da $x = x_1 + ix_2$ e $y = y_1 + iy_2$, essendo soddisfatte le equazioni differenziali di monogeneità

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \varphi = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial y_1} + i \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \varphi = 0;$$

questo invece è sostanzialmente conseguenza della *regolarità* della F.

Ciò posto, ritorniamo alle variabili X_1, Y_1 e X_2, Y_2 e domandiamoci come si comportano le funzioni φ al variare delle X_2 e Y_2 , fissando per il momento i valori di X_1 e Y_1 e viceversa. Occupiamoci da prima di $\varphi_1 = x$ e $\varphi_2 = y$. Esse costituiscono una superficie S (o rispettivamente \bar{S}) caratteristica della (1), passante per il punto $x = X_1, y = Y_1$ (rispettivamente $x = X_2, y = Y_2$). Ma oltre a ciò — ed in conseguenza del suaccennato modo di costruirle — le S e \bar{S} saranno superficie caratteristiche della $u(x, y)$, considerata come funzione analitica delle due variabili complesse x e $y^{(1)}$; il che permette di compendiarne le equazioni sotto la forma

$$y = f(x),$$

dove f è funzione analitica dell'argomento complesso x . Ne segue che tutte

(1) Vedi T. LEVI-CIVITA, *Sulle funzioni di due o più variabili complesse*, « Acc. Lincei », serie 5^a, vol. XIV, pp. 203-209.

le funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_8$ diventano sulla S (rispettivamente \bar{S}) funzioni analitiche della x .

In particolare, prendiamo come X_1, Y_1 le coordinate di un punto della curva iniziale C . Sulla S corrispondente, i valori di $\varphi_1, \dots, \varphi_8$ si determinano mediante il suddetto problema iperbolico (2); e fin quando X_2, Y_2 restano sulla C , i soli valori iniziali delle φ sulla C bastano a farci conoscere

$$\varphi(X_1, Y_1; X_2, Y_2).$$

Così queste $\varphi(X_1, Y_1; X_2, Y_2)$ saranno determinate univocamente su una curva della S e, usufruendo allora della loro regolarità testè stabilita rispetto alla variabile indipendente x sulla S , le dette funzioni $\varphi(X_1, Y_1; X_2, Y_2)$ rimangono individuate univocamente in ogni punto di S almeno in un certo intorno della detta curva, il che è quanto dire per valori quali si vogliono delle X_2, Y_2 (in un certo campo).

Lo stesso vale per le funzioni $\varphi(X_1, Y_1; X_2, Y_2)$ quando X_2, Y_2 appartengono alla C e le X_1, Y_1 sono arbitrarie.

Siamo ora in grado di dimostrare l'unicità della φ per tutte le coppie identiche $X_1 = X_2 = X, Y_1 = Y_2 = Y$ le quali offrono un interesse speciale, perchè le $\varphi(X, Y; X, Y)$ sono addirittura le funzioni originali $x, y, u(x, y), \dots, u_{yy}(x, y)$; basta ricordare la costruzione delle funzioni $\varphi(X_1, Y_1; X_2, Y_2)$. Alla schiera di curve a due parametri nel piano x, y , accennata di sopra, appartiene in particolare la curva che congiunge il punto X, Y con un punto arbitrario⁽¹⁾ X', Y' della C . Questa curva venne rappresentata su una retta $\lambda + \mu = \text{cost.}$ del piano λ, μ e furono trasferiti lì anche i valori della φ . Poi si determinarono i valori delle φ nel piano delle λ, μ secondo il problema iniziale iperbolico. Ma adesso conosciamo univocamente i valori delle φ su quelle due caratteristiche $\lambda = \text{cost.}$ e $\mu = \text{cost.}$, che passano per il punto λ, μ corrispondente al punto X', Y' della C , perchè lì le φ si scrivono sotto la forma $\varphi(X', Y'; X_2, Y_2)$ rispettivamente $\varphi(X_1, Y_1; X', Y')$. Oramai basta osservare che questi dati sono sufficienti a determinare la soluzione delle equazioni caratteristiche (2) nel quadrato, formato da quelle rette $\lambda = \text{cost.}$ e $\mu = \text{cost.}$, che passano per quei punti del piano λ, μ , che sono i rappresentanti dei punti X', Y' e X, Y . Con ciò le funzioni

$$\varphi(X, Y; X, Y)$$

rimangono determinate univocamente, soltanto mediante i valori che esse assumono quando X, Y è un punto della C , c. d. d.

(1) P. es., il punto di minima distanza.

Matematica. — *Sur la recherche des fonctions permutables de 1^{ière} espèce avec une fonction donnée.* Nota di A. LŪSIS, presentata ⁽¹⁾ dal Socio V. VOLTERRA.

1. Dans la suite les fonctions envisagées de variables x et y seront supposées continues dans un domaine

$$(D) \quad a \leq x \leq y \leq b.$$

D'après une méthode de M. Volterra ⁽²⁾ pour déterminer les fonctions $\Phi(x, y)$ permutables de première espèce avec une fonction donnée $F(x, y)$, on introduit la fonction inconnue auxiliaire $\Psi(x, y)$ telle que

$$(i) \quad \Psi(x, y) = \check{F}\check{\Phi} = \check{\Phi}\check{F}.$$

Le résultat de l'élimination de $\Phi(x, y)$ entre ces relations est

$$(2) \quad \check{\Psi}\check{F}^{-1} - \check{F}^{-1}\check{\Psi} = 0$$

avec le symbole \check{F}^{-1} de l'inversion de la composition défini par la condition

$$(3) \quad \check{F}\check{F}^{-1} = \check{F}^{-1}\check{F} = \check{I}^0.$$

Nous allons examiner le cas où $F(x, y)$ est une fonction d'ordre entier positif n et du type canonique.

Le symbole \check{F}^{-1} est, au sens de M. PÉRÈS ⁽³⁾, une fonction d'ordre singulier ($-n$) pour laquelle il indique les deux formes

$$(4) \quad \check{F}^{-1} = a_0(x) \check{I}^{-n} + a_1(x) \check{I}^{-n+1} + \dots + a_n(x) \check{I}^0 + f_1(x, y)$$

ou

$$(4') \quad \check{F}^{-1} = b_0(y) \check{I}^{-n} + b_1(y) \check{I}^{-n+1} + \dots + b_n(y) \check{I}^0 + f_2(x, y)$$

avec les fonctions $f_1(x, y)$ et $f_2(x, y)$ d'ordre positif et les autres termes représentant le produit et non la composition des fonctions $a_0(x), \dots, a_n(x), b_0(y), \dots, b_n(y)$ par $\check{I}^{-n}, \dots, \check{I}^0$.

En supposant $F(x, y)$ dérivable jusqu'à l'ordre $2n$ on peut déterminer les fonctions $a_0(x), \dots, a_n(x), b_0(y), \dots, b_n(y), f_1(x, y)$ et $f_2(x, y)$

(1) Nella seduta del 5 gennaio 1930.

(2) VOLTERRA-PÉRÈS, *Leçons sur la composition et les fonctions permutables*, Paris, 1924.

(3) J. PÉRÈS, *Sur la composition de 1^{ière} espèce*, « Rend. Lincei », 1917, p. 106.

par substitution de (4) et (4') dans (3). On trouve

$$a_0(x) = b_0(y) = 1 \quad \text{et} \quad a_1(x) = b_1(y) = 0.$$

Les autres fonctions $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$, $b_2(y)$, ..., $b_n(y)$ s'expriment par les dérivées partielles de $F(x, y)$ jusqu'à l'ordre $(2n - 1)$ où est posé $y = x$.

En nommant

$$(5) \quad H_1(x, y) = (-1)^{n-1} \frac{\partial^{2n} F}{\partial x^n \partial y^n} + (-1)^{n-2} a_2(x) \frac{\partial^{2n-2} F}{\partial x^{n-2} \partial y^n} + \dots - a_n(x) \frac{\partial^n F}{\partial y^n}.$$

et

$$(5') \quad H_2(x, y) = (-1)^{n-1} \left[\frac{\partial^{2n} F}{\partial y^n \partial x^n} + b_2(y) \frac{\partial^{2n-2} F}{\partial y^{n-2} \partial x^n} + \dots + b_n(y) \frac{\partial^n F}{\partial x^n} \right]$$

on obtient pour déterminer $f_1(x, y)$ et $f_2(x, y)$ les équations intégrales de Volterra (F_1 étant $(-1)^n \frac{\partial^n F}{\partial x^n}$, F_2 étant $\frac{\partial^n F}{\partial y^n}$),

$$f_1(x, y) + f_1^* \bar{F}_2 = H_1(x, y) \quad \text{et} \quad f_2(x, y) + F_1 f_2^* = H_2(x, y)$$

d'où f_1 et f_2 immédiatement.

Un cas particulier intéressant est celui où

$$a_i(x) = b_i(y) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Il a lieu pour une fonction $F(x, y)$ telle que

$$(6) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^q F}{\partial x^i \partial y^j} \right)_{y=x} = 0 \dots \left(\begin{matrix} i+j=q \\ q=0, 1, 2, \dots, (n-2), n, (n+1), \dots, (2n-1) \end{matrix} \right) \\ \left(\frac{\partial^{n-1} F}{\partial y^{n-1}} \right)_{y=x} = \dots = (-1)^{n-1} \left(\frac{\partial^{n-1} F}{\partial x^{n-1}} \right)_{y=x} = 1, \end{cases}$$

c'est-à-dire qui peut être exprimée par

$$F(x, y) = \frac{(y-x)^{n-1}}{(n-1)!} + (y-x)^{2n} \omega(x, y).$$

Dans ce cas particulier les fonctions (5) et (5') sont identiques à la fonction

$$(7) \quad H(x, y) = (-1)^{n-1} \frac{\partial^{2n} F}{\partial x^n \partial y^n}$$

et de même les fonctions $f_1(x, y)$ et $f_2(x, y)$ à la fonction

$$(8) \quad f(x, y) = H(x, y) + \bar{H}^* \bar{I}^n \bar{H} + \bar{H}^* \bar{I}^n \bar{H}^* \bar{I}^n \bar{H} + \dots$$

Aux conditions (6) satisfait toute fonction $F(x, y)$ du premier ordre ($n = 1$) et du type canonique. L'expression du symbole \bar{F}^{-1} , due à

M. Pérès⁽¹⁾ est un cas particulier de la forme

$$(9) \quad \ddot{F}^{-1} = \dot{F}^{-n} + f(x, y)$$

valable si $F(x, y)$ satisfait aux conditions (6).

2. En prenant pour \ddot{F}^{-1} les expressions (4) et (4'), on tire de la relation (2)

$$(10) \quad \frac{\partial^n \Psi}{\partial y^n} + (-1)^{n-1} \frac{\partial^n \Psi}{\partial x^n} + \left[b_2(y) \frac{\partial^{n-2} \Psi}{\partial y^{n-2}} + \right. \\ \left. + (-1)^{n-3} a_2(x) \frac{\partial^{n-2} \Psi}{\partial x^{n-2}} \right] + \dots + [b_n(y) - a_n(x)] \Psi(x, y) = f_1^* \dot{\Psi}^* - \dot{\Psi}^* f_2^*.$$

D'après (9) dans le cas particulier (6) on a

$$(10') \quad \frac{\partial^n \Psi}{\partial y^n} + (-1)^{n-1} \frac{\partial^n \Psi}{\partial x^n} = f^* \dot{\Psi}^* - \dot{\Psi}^* f^*,$$

équations équivalentes à celle qu'a formée M. Pérès pour la même question⁽²⁾. Pour déterminer $\Psi(x, y)$ il faut résoudre ces *équations intégrodifférentielles* (10) ou (10'), jointes aux conditions aux limites

$$\left(\frac{\partial^k \Psi(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \right)_{y=x} = 0 \dots \quad \left(\begin{array}{l} i + j = k \\ k = 0, 1, 2, \dots, (n-1) \end{array} \right),$$

c'est-à-dire un problème de Cauchy.

En faisant les hypothèses convenables sur les fonctions $\Phi(x, y)$ on tire directement de la relation (1)

$$\ddot{\Phi} \ddot{F}^{-1} - \dot{F}^{-1} \dot{\Phi} = 0,$$

de sorte que $\Phi(x, y)$ satisfait aux mêmes équations (10) et (10') où $\Psi(x, y)$ est remplacée par $\Phi(x, y)$. Donc, ces *équations intégrodifférentielles* caractérisent les fonctions permutable avec $F(x, y)$ ⁽³⁾.

D'après une autre méthode, due à M. Pérès⁽⁴⁾ pour la fonction $F(x, y)$ du premier ordre, on cherche à représenter les fonctions $\Phi(x, y)$ par les transformations $\Omega(\lambda^*)$ qui conservent la composition. La forme générale de telles transformations est

$$(11) \quad \Omega(\lambda^*) = (\dot{F}^0 + \dot{\Phi})^* \lambda^* (\dot{F}^0 + \dot{\Psi})$$

(1) VOLTERRA-PÉRÈS, *Leçons sur la composition etc.*, pp. 40 et 106.

(2) Loc. cit. 46 et J. PÉRÈS, *Fonctions permutable de M. Volterra*, Thèses, « Journal de Math. », pp. 41 et 48, 1915.

(3) Pour la fonction du premier ordre, voir, VOLTERRA-PÉRÈS, *Leçons sur la composition*, p. 74.

(4) Loc. cit., chap. IV.

où $\lambda(x, y)$ est une fonction d'un groupe quelconque des fonctions permutable⁽¹⁾ et les fonctions $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ satisfont à la relation

$$(12) \quad (\bar{I}^0 + \bar{\varphi}) (\bar{I}^0 + \bar{\psi}) = (\bar{I}^0 + \bar{\psi}) (\bar{I}^0 + \bar{\varphi}) = \bar{I}^0.$$

Pour résoudre le problème de détermination des fonctions permutable⁽²⁾ avec $F(x, y)$ d'ordre entier positif n et du type canonique, il suffira de choisir $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ de façon que

$$(13) \quad F(x, y) = \Omega(\bar{I}^n) = (\bar{I}^0 + \bar{\varphi}) \bar{I}^n (\bar{I}^0 + \bar{\psi}).$$

Dans le cas particulier où $F(x, y)$ satisfait aux conditions (6) on peut exprimer cette fonction sous la forme

$$F(x, y) = \bar{I}^n + \bar{I}^n \bar{f} \bar{I}^n + \bar{I}^n \bar{f} \bar{I}^n \bar{f} \bar{I}^n + \dots$$

On en tire pour $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$, les équations

$$\bar{I}^n \bar{\varphi} - \bar{\varphi} \bar{I}^n = \bar{I}^n (\bar{f} + \bar{f} \bar{\varphi}) \bar{I}^n \quad \text{et} \quad \bar{I}^n \bar{\psi} - \bar{\psi} \bar{I}^n = -\bar{I}^n (\bar{f} + \bar{\psi} \bar{f}) \bar{I}^n$$

équivalentes aux équations intégrales différentielles⁽²⁾

$$\frac{\partial^n \varphi}{\partial y^n} + (-1)^{n-1} \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} = f + \bar{f} \bar{\varphi}$$

et

$$\frac{\partial^n \psi}{\partial y^n} + (-1)^{n-1} \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} = -f - \bar{\psi} \bar{f}.$$

Si l'on a résolu, par exemple, l'équation précédente en $\varphi(x, y)$, on peut former directement ψ (d'après (12)) et le noyau $\Phi(\xi; x, y)$ pour mettre $F(x, y)$ sous la forme d'une transformation de M. Volterra⁽³⁾

$$F(x, y) = \frac{(y-x)^{n-1}}{(n-1)!} + \int_0^{y-x} \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!} \Phi(\xi; x, y) d\xi.$$

Pour avoir toutes les fonctions permutable⁽⁴⁾ avec F il suffira de prendre λ (de (11)) appartenant au cycle fermé car $\bar{\lambda} \bar{I}^n = \bar{I}^n \bar{\lambda}$ entraîne⁽⁴⁾

$$\lambda(x, y) = \lambda(y-x).$$

On pourra utiliser aussi l'expression (13) pour résoudre l'équation intégrale binôme.

(1) Généralisation est due à M. PÉRÈS, « Rend. Lincei », 2^o sem., 1924.

(2) Pour la fonction du premier ordre, voir, VOLTERRA-PÉRÈS, *Leçons sur la composition*, pp. 72 et 75.

(3) Loc. cit., p. 60.

(4) Voir, ma Note, *Sur les fonctions permutable*, « Acta Univ. Latviensis », to. XVII, 1927.

Matematica (Geometria). — *Sulla non esistenza di congruenze W di rette iperspaziali che abbiano per prime due falde focali delle varietà luoghi di spazii.* Nota di MARIA CIBRARIO, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. FUBINI.

Nella presente Nota mi propongo di generalizzare alcune teorie contenute in lavori del Segre ⁽²⁾ e di studiare in S_n delle congruenze di rette che abbiano per prime due falde focali due V_{n-1} formate di S_{n-2} , escludendo il caso banale in cui la retta della congruenza per un punto generico di una V_{n-1} appartenga alla V_{n-1} .

Siano $a_1, a_2, \dots, a_{n-3}, c_1, c_2$ $n-1$ punti linearmente indipendenti in S_n ; la $x = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_{n-3} u_{n-3} + c_1 u_{n-2} + c_2$ dà le coordinate di un punto variabile in un S_{n-2} . Se le a_i, c_1, c_2 sono funzioni di uno stesso parametro t , tali S_{n-2} generano una V_{n-1}, Σ_1 .

Si suppone che le a_i definiscano lo S_{n-4} comune ad un S_{n-2} e al successivo. Si esclude il caso, che diremo delle V_{n-1} *svilupparibili*, in cui un S_{n-2} generico abbia in comune col successivo un S_{n-3} ; si esclude pure che lo S_{n-4} individuato dalle a_i sia fisso al variare di t . Sia data un'altra V_{n-1} analoga, Σ_2 , e sia data ad arbitrio una corrispondenza tra gli S_{n-2} delle due V_{n-1} ; le equazioni parametriche di Σ_2 siano:

$$x = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_{n-3} v_{n-3} + d_1 v_{n-2} + d_2,$$

dove le b e d sono funzioni di t e hanno un significato analogo a quello delle a e c . Allora «vi sono infinite congruenze di rette che hanno Σ_1 e Σ_2 come prime due falde focali e che stabiliscono tra i loro S_{n-2} la corrispondenza fissata».

Se P_1 e P_2 sono punti omologhi, lo S_{n-1} tangente a Σ_1 in P_1 passa per P_2 e lo S_{n-1} tangente a Σ_2 in P_2 passa per P_1 . Si hanno due relazioni, che sviluppate, tenendo conto che le $a'_i (b'_i)$ sono combinazioni lineari delle $a_i, c_1, c_2 (b_i, d_1, d_2)$, hanno la forma:

$$(1) \quad \sum_{r=1}^{n-2} (l_r u_{n-2} + n_r) v_r + m u_{n-2} + p = 0,$$

$$(2) \quad \sum_{r=1}^{n-2} (L_r v_{n-2} + N_r) u_r + M v_{n-2} + P = 0,$$

dove le $l_r, n_r, m, p, L_r, M, N_r, P$ sono funzioni di t .

(1) Nella seduta del 5 gennaio 1930.

(2) C. SEGRE, *Le congruenze rettilinee W aderenti a due superfici rigate*. Accademia delle Scienze Torino, 1906-1907; Id., *Sulle congruenze rettilinee W di cui una od ambe le falde focali sono rigate*. Acc. delle Scienze. Torino, 1913-1914.

Fissate le u , coordinate di P_1 in un S_{n-2} α_1 di Σ_1 , le (1) e (2) determinano un S_{n-4} dello S_{n-2} omologo α_2 in cui si può prendere ad arbitrio P_2 ; in casi particolari P_2 potrà variare in un S_{n-3} (1).

Queste congruenze di rette alle direzioni asintotiche $dt = 0$ in un punto P_1 di Σ_1 fanno corrispondere le direzioni asintotiche $dt = 0$ nel punto P_2 omologo di Σ_2 . «Nessuna di tali congruenze di rette può far corrispondere ad ogni direzione asintotica di Σ_1 in P_1 distinta da quelle $dt = 0$ una direzione asintotica di Σ_2 in P_2 ».

Si può dare una curva di Σ_1 non posta in un S_{n-2} $t = \text{cost.}$, dando le u in funzione di t ; se P_1 varia su di essa, le coordinate del punto omologo P_2 sono pure funzioni di t . Sostituendo per le u e v tali funzioni di t in (1) e (2), esse divengono identità in t ; derivando rispetto a t si hanno le relazioni:

$$(3) \quad \sum_{r=1}^{n-2} (l'_r u_{n-2} + n'_r + l_r u'_{n-2}) v_r + \sum_{r=1}^{n-2} (l_r u_{n-2} + n_r) v'_r + \\ + m' u_{n-2} + m u'_{n-2} + p' = 0.$$

$$(4) \quad \sum_{r=1}^{n-2} (L'_r v_{n-2} + N'_r + L_r v'_{n-2}) u_r + \sum_{r=1}^{n-2} (L_r v_{n-2} + N_r) u'_r + \\ + M' v_{n-2} + M v'_{n-2} + P' = 0,$$

(dove gli apici indicano derivate rispetto a t), che danno la corrispondenza tra le tangenti in punti omologhi. Il cono asintotico in un punto di Σ_1 si spezza nei due S_{n-2} $dt = 0$ e:

$$(5) \quad 2(c'_1, a_1, \dots, a_{n-3}, c_1, c_2, c'_2) du_{n-2} +$$

$$+ (d''_1 u_1 + \dots + d''_{n-3} u_{n-3} + c'_1 u'_{n-2} + c'_2, a_1, \dots, a_{n-3}, c_1, c_2, c'_1 u_{n-2} + c'_2) dt = 0,$$

ottenuta tenendo conto che le a'_i sono combinazioni lineari delle a_i, c_1, c_2 . Così in un punto di Σ_2 il cono asintotico si spezza nei due S_{n-2} $dt = 0$ e:

$$(6) \quad 2(d'_1, b_1, \dots, b_{n-3}, d_1, d_2, d'_2) dv_{n-2} +$$

$$+ (b'_1 v_1 + \dots + b'_{n-3} v_{n-3} + d'_1 v'_{n-2} + d'_2, b_1, \dots, b_{n-3}, d_1, d_2, d'_1 v_{n-2} + d'_2) dt = 0.$$

(1) Se il punto P_1 è comune ad α_1 e α_2 o se P_1 è comune ad α_1 e allo S_{n-2} successivo α' , a P_1 corrispondono i punti di uno S_{n-3} di α_2 . Non vi sono altre posizioni eccezionali, se lungo α_1 o α_2 non è costante lo S_{n-1} tangente e se tra α_1 e α_2 non vi sono relazioni particolari. Se lo S_{n-4} A comune ad α_2 e allo S_{n-2} successivo è comune anche ad α_1 , ad un punto generico di α_1 corrisponde in α_2 tutto A ; in α_1 vi è una V_{n-3} quadratica di punti tali che ad essi corrisponde in α_2 tutto un S_{n-3} . Se α_1 e α_2 stanno in uno stesso S_{n-1} , in essi vi sono due S_{n-3} A_1 e A_2 tali che a un punto dell'uno corrisponde un punto qualsiasi dell'altro; ai punti di α_1 e non di A_1 corrisponde in α_2 lo S_{n-4} comune ad α_1 e A_2 . È da escludersi che questi casi si presentino genericamente, perchè la retta della congruenza per un punto generico di Σ_1 appartiene a Σ_1 .

Sostituendo nelle (3) e (4) per u'_{n-2} e v'_{n-2} i valori tratti da (5) e (6), dove le u e v siano coordinate di punti omologhi, la (3) dà una relazione nelle v'_i e la (4) nelle u'_i ($i = 1, \dots, n-3$); perchè ad ogni direzione asintotica a Σ_1 corrisponda una direzione asintotica a Σ_2 e viceversa, bisogna che queste relazioni siano soddisfatte identicamente. Deve essere:

$$(7) \quad l_i u_{n-2} + n_i = 0 \quad , \quad (8) \quad L_i v_{n-2} + N_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n-3),$$

cioè scrivendo per disteso le (7):

$$(b_i, a_1, \dots, a_{n-3}, c_1, c_2, c'_1 u_{n-2} + c'_2) = 0 \quad (i = 1, \dots, n-3).$$

Queste relazioni devono essere soddisfatte comunque sia u_{n-2} ; allora tutti gli S_{n-1} tangenti a Σ_1 lungo α_1 contengono i punti b_i ; poichè questi S_{n-1} sono distinti (chè altrimenti Σ_1 sarebbe sviluppabile) i punti b_i sono comuni ad α_1 e α_2 . Allora α_1 passa per lo $S_{n-4} A_2$ comune ad α_2 e al suo successivo; così dalle (8) segue che α_2 passa per lo $S_{n-4} A_1$ comune ad α_1 e al suo successivo. Allora due S_{n-2} omologhi α_1 e α_2 hanno in comune i due $S_{n-4} A_1$ e A_2 ; poichè α_1 e α_2 genericamente sono distinti, essi si tagliano o lungo un S_{n-4} o lungo un S_{n-3} .

Nel primo caso A_1 e A_2 coincidono; presi i punti b_i coincidenti coi punti a_i , i punti a'_i sono pure comuni ad α_1 e α_2 ; dunque stanno nello $S_{n-4} A_1$, ed è: $a'_i = \sum_{r=1}^{n-3} \lambda_{ir} a_r$, ($i = 1, \dots, n-3$); da queste relazioni segue facilmente che al variare di t lo S_{n-4} determinato dai punti a_i è fisso. Le due V_{n-1} sono formate da S_{n-2} passanti per uno stesso S_{n-4} , caso che abbiamo escluso fin da principio.

Se α_1 e α_2 si tagliano secondo un $S_{n-3} \beta$, una retta della congruenza per un punto generico di α_1 (di α_2) appartiene ad α_1 (ad α_2), caso escluso⁽¹⁾.

Dimostro ora che non è possibile stabilire tra i punti delle due V_{n-1} Σ_1 e Σ_2 una corrispondenza tale che alle direzioni asintotiche $dt = 0$ in un punto P_1 di Σ_1 corrispondano le direzioni asintotiche dell'altro S_{n-2} (che ha per equazione la (6) ove invece di t si scriva τ , poichè ora non è detto che si corrispondano tra loro gli S_{n-2} delle due V_{n-1}).

Ora la (6) che scriveremo nella forma $A dv_{n-2} + B d\tau = 0$ non è integrabile, perchè A è funzione di τ soltanto e B di τ e di $v_1, \dots, v_{n-3}, v_{n-2}$

(1) Se A_1 e A_2 sono distinti si prova che lo S_{n-1} determinato da α_1 e α_2 è tangente a Σ_1 e a Σ_2 lungo β ; sono rette della congruenza per un punto di α_1 o di α_2 quelle che lo congiungono ai punti di β . Se A_1 e A_2 coincidono, o si presenta la stessa configurazione precedente, o lo S_{n-1} determinato da α_1 e α_2 è tangente a Σ_1 e Σ_2 lungo due S_{n-3} distinti da β ; le rette della congruenza per un punto di uno di essi sono le congiungenti quel punto coi punti dell'altro S_{n-3} ; si prova che le rette della congruenza per un punto, per es., di α_1 fuori di essi sono le congiungenti tale punto coi punti di A_2

(se fosse integrabile il rapporto $\frac{B}{A}$, e quindi B dovrebbe essere funzione solo di v_{n-2} e di τ ; si prova facilmente che ciò avviene solo nel caso, che abbiamo escluso, in cui Σ_2 sia costituita di S_{n-2} passanti per un S_{n-4} fisso); e allora è impossibile che dando in qualsiasi modo le $v_1, \dots, v_{n-2}, \tau$ in funzione delle u_1, \dots, u_{n-2}, t (purchè sia:

$$(9) \quad \frac{\partial(v_1, \dots, v_{n-2}, \tau)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_{n-2}, t)} \neq 0$$

identicamente), questa equazione si trasformi nella $dt = 0$, che è integrabile.

In particolare le due V_{n-1} generiche non possono essere falde focali di una congruenza di rette, che in punti omologhi alle direzioni asintotiche $dt = 0$ faccia corrispondere le direzioni asintotiche date da (6), purchè la corrispondenza tra i punti delle due falde focali stabilita da rette della congruenza soddisfi la (9).

In una prossima Nota sarà studiato il caso di una congruenza di rette in S_4 che abbia per falde focali delle V_3 formate di S_2 , esaminando in S_4 anche tutti i casi particolari che qui abbiamo trascurato.

Matematica (Geometria). — *Le sestiche sgheembe razionali con sei flessi.* Nota di G. GHERARDELLI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrispondente G. FANO.

1. Una curva sgheemba razionale del sesto ordine le cui tangenti appartengano ad un complesso lineare possiede sei flessi ordinari, in generale distinti, che possono in casi particolari venire in vario modo a coincidere in rami di tipo autoduale. Ma non viceversa. È noto a questo proposito l'esempio addotto da Egan di una C^6 razionale con due flessi ordinari e due cuspidi del tipo autoduale (212), non contenuta in un complesso lineare⁽²⁾. Spetta però al prof. Gino Fano l'aver messo in luce che le C^6 razionali con sei flessi si ripartiscono in due distinte famiglie di ugual dimensione⁽³⁾. Di queste due famiglie l'una si compone di C^6 appartenenti ad un complesso lineare, l'altra di C^6 che non appartengono in generale ad un complesso lineare, ma hanno i sei punti di flesso in un medesimo piano, e i relativi piani osculatori passanti per uno stesso punto che non appartiene in generale a quel piano; se questi due elementi si appartengono, e solo

(1) Nella seduta del 19 gennaio 1930.

(2) M. F. EGAN, *The linear Complex...*, «Proc. Royal Irish Ac.», 29, 1911, p. 33.

(3) Al chiar.º prof. G. FANO che mi ha proposto lo studio di questo argomento e insieme comunicato qualche sua osservazione al riguardo, presento qui i miei più vivi ringraziamenti.

allora, la curva è una (particolare) C^6 di complesso lineare. A ciò è dedicata la presente Nota.

Le considerazioni qui svolte sono in gran parte estensibili alle C^n razionali con $2n - 6$ flessi; il caso $n = 6$ è il più semplice e sembra meritevole di particolare rilievo. Per $n = 4, 5$ l'esistenza di 2, 4 flessi implica l'appartenenza della curva ad un complesso lineare.

2. Una C^6 sghemba razionale con sei flessi è proiezione di una sestica razionale normale Γ^6 di S_6 da un piano appoggiato a sei piani osculatori di questa. Si tratta perciò di studiare il sistema $\Sigma \infty^6$ dei piani sei-secanti, in punti generalmente distinti, la varietà V_3^{12} dei piani osculatori di Γ^6 . Si assumano su Γ^6 sei punti distinti A_1, A_2, \dots, A_6 e sia α un piano incidente ai sei piani $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_6$ osculatori in A_1, A_2, \dots, A_6 a Γ^6 . Un S_3 variabile passante per α incontra sei piani osculatori variabili; il gruppo dei relativi punti di contatto con Γ^6 descrive al variare di quello S_3 intorno ad α una serie lineare g_6^3 i cui 12 punti quadrupli coincidono a coppie nei sei punti A_i ; ciascuno di questi punti è quadruplo per un gruppo, e triplo per ∞^1 gruppi della serie. Questa g_6^3 verrà segata su Γ^6 dagli iperpiani passanti per un determinato piano α' «asse» della serie, incidente (come α) ai sei piani π_i . A loro volta gli S_3 passanti per α' determinano su Γ^6 una serie lineare γ_6^3 che ha α come asse. Per la C^6 proiezione da $\alpha(\alpha')$ sopra S_3 la $\gamma_6^3(g_6^3)$ è la serie delle sezioni piane, la $g_6^3(\gamma_6^3)$ è la serie costituita dai gruppi di contatto delle sestuple di piani osculatori uscenti dai punti del suo spazio. Associando un S_3 per α e un S_3 per α' relativi ad un medesimo gruppo della g_6^3 si viene a porre fra le due stelle aventi α, α' come sostegni una reciprocità non degenera τ , che associa pure un S_3 per α' e un S_3 per α relativi ad un medesimo gruppo della γ_6^3 . Ora:

1) Se X è un punto di Γ^6 e P un punto della relativa tangente, dei sei piani osculatori variabili incontrati dallo $S_3 \equiv \alpha P$ due vengono a coincidere nel piano osculatore in X a Γ^6 ; l'iperpiano per α' corrispondente in τ a questo S_3 ha dunque in X incontro bipunto con Γ^6 , e contiene perciò la relativa tangente.

2) Se P è un punto di π_i lo $S_3 \equiv \alpha P$ incontra π_i in retta, cosicchè dei sei piani osculatori variabili incontrati da quello S_3 tre coincidono in π_i ; infatti per la C^6 proiezione di Γ^6 da α il punto P' proiezione di P sta su una tangente di flesso. L'iperpiano per α' corrispondente in τ a quello S_3 ha dunque in X_i incontro tripunto con Γ^6 e perciò contiene il piano π_i ivi osculatore.

Per la prima osservazione, la quadrica Q_7 generata dalle due stelle reciproche α, α' , qualora risulti determinata, contiene la varietà V_2^{10} delle tangenti di Γ^6 , e perciò la sua intersezione con la V_3^{12} dei piani osculatori dovrebbe comporsi di quella V_2^{10} contata due volte e di $2.12 - 2.10 = 4$ piani osculatori. Ma, per la seconda osservazione, Q_7 contiene anche i sei

piani osculatori π_i ; Q_τ contiene dunque per intero la V_3 dei piani osculatori, e coincide pertanto con la quadrica Q fondamentale per la polarità ordinaria annessa a Γ^6 : unica quadrica per V_3^{12} .

Se Q_τ è indeterminata, τ è un sistema nullo doppiamente singolare ed $\alpha \equiv \alpha'$ ne è il piano-centro. Il relativo complesso lineare $[\alpha]$ contiene la rigata delle tangenti di Γ^6 e ammette come totali i sei piani osculatori π_i . Viceversa, se $\alpha \equiv \alpha'$, la quadrica Q_τ è indeterminata e τ è un sistema nullo. Se $\alpha \equiv \alpha'$, i due piani « associati » α, α' appartengono alla quadrica Q e sono sghembi: se no Q sarebbe un cono.

Ora la quadrica Q contiene un (unico) sistema continuo ∞^6 di piani, ciascuno dei quali è seiscante, in punti generalmente distinti, rispetto alla V_3^{12} dei piani osculatori di Γ^6 . Dunque:

Un piano di Σ o è piano-centro, o appartiene alla quadrica Q .

3. Dalle cose dette segue che un piano di Σ non contenuto in Q è necessariamente piano-centro; gli ∞^2 piani di Σ uscenti da un punto non appartenente a Q son tutti piani-centro.

Si consideri ora un piano α di Q e sia α' il suo associato (eventualmente coincidente con α). Fra le due stelle α, α' intercede la reciprocità $\tau(\alpha, \alpha')$ di cui al numero precedente. Un S_3 variabile per $\alpha(\alpha')$ sega Q in un ulteriore piano variabile β ; l'iperpiano per $\alpha'(\alpha)$ ad esso corrispondente in τ contiene il piano β e i sei punti di contatto con Γ^6 dei sei piani osculatori incidenti a β ; in particolare allo S_3 polare di $\alpha(\alpha')$ rispetto a Q corrisponde un iperpiano per $\alpha'(\alpha)$ contenente $\alpha(\alpha')$ nonchè i sei punti di contatto con Γ^6 dei sei piani osculatori incidenti ad $\alpha(\alpha')$.

Se dunque α è un piano di Q l'iperpiano (A_1, A_2, \dots, A_6) individuato dai sei punti di contatto con Γ^6 dei sei piani osculatori incidenti ad α passa per α ; lo indicheremo con $\omega(\alpha)$. All'iperpiano $\omega(\alpha) \equiv \omega(\alpha')$ la reciprocità τ fa corrispondere, nei due modi possibili, i due S_3 polari di α', α rispetto a Q . Se β è un piano variabile di Q segante $\alpha(\alpha')$ in retta, l'iperpiano $\omega(\beta)$ involuppa $\alpha'(\alpha)$. Se α è distinto da α' : $\omega(\alpha) \equiv \omega(\alpha') \equiv \alpha\alpha'$.

Due piani associati α, α' incontrano gli stessi sei raggi osculatori contenuti nell'iperpiano da essi individuato.

Se $\alpha \equiv \alpha'$, la reciprocità $\tau(\alpha, \alpha)$ è un sistema nullo; l'iperpiano $\omega(\alpha)$ contiene lo S_3 polare di α rispetto a Q e perciò tocca Q in un punto A di α . Viceversa se $\omega(\alpha)$ è tangente a Q in un punto A di α , i due piani associati α, α' si incontrano in A e quindi coincidono. Diremo *autoassociato* un piano-centro di Q .

Se α è un piano autoassociato, $\omega(\alpha)$ è tangente a Q , cioè la sestupla A_1, A_2, \dots, A_6 è apolare; e viceversa.

4. Sia ω un iperpiano non tangente a Q ; la sua sezione con Q è una quadrica non cono contenente due sistemi continui ∞^3 di piani: σ, σ' . Si

consideri un piano x variabile in σ e si osservi che, in quanto per x passa ω , il piano associato x' incontra in retta un piano α' tale che $\omega(\alpha') \equiv \omega$; al variare di x in σ questo piano α' , incidente a sei piani osculatori fissi, è necessariamente fisso. Il piano α' appartiene al sistema σ' ; perchè se appartenesse a σ sarebbe incidente al suo associato, e quindi autoassociato; ma allora $\omega \equiv \omega(\alpha')$ sarebbe tangente a Q , contro il supposto.

Viceversa un piano di Q segante α' in retta ha il suo associato in σ . Analogamente ai piani di σ' sono associati i piani di Q seganti in retta un piano fisso α di σ . In particolare, risultano autoassociati (perchè incidenti ai loro associati) i piani di $\sigma(\sigma')$ seganti $\alpha'(\alpha)$ in retta.

I due piani α, α' sono associati; infatti l'associato di α ad esempio è sghembo con α e giace in ω : sta dunque in σ' e (dovendo segare α' in retta) coincide con α' .

Viceversa se α, α' sono piani associati e perciò sghembi l'iperpiano $\omega \equiv \alpha\alpha'$ non è tangente a Q . Se x' è un piano di Q segante α' in retta l'iperpiano $\omega(\alpha')$ passa per x , associato di x' . Ma al variare di x' il piano $\omega(\alpha') \equiv \omega$ è fisso; dunque ecc. . . .

Sia ora ω un iperpiano tangente a Q in un suo punto X ; la sua sezione con Q è un S_0 — cono col vertice in X , contenente un unico sistema continuo $\sigma \infty^3$ di piani. Con lo stesso ragionamento fatto sopra si prova che se x è un piano variabile in σ il suo associato x' sega in retta un piano fisso e autoassociato ξ tale che $\omega(\xi) = \omega$; nel piano ξ son venuti a coincidere i due piani α, α' di cui sopra.

Ai piani di Q per un suo punto X sono associati i piani di Q seganti in retta un determinato piano autoassociato ξ passante per X ; in particolare sono autoassociati i piani per X seganti ξ in retta per X .

Viceversa se ξ è un piano autoassociato, $\omega(\xi)$ tocca Q in un punto X di ξ ; se x' è un piano di Q segante ξ in retta, l'iperpiano $\omega(\xi)$ passa per x , associato di x' ; dunque ecc. . . .

In particolare ai piani di Q uscenti da un punto X di Γ^6 sono associati i piani di Q seganti in retta il piano ivi osculatore.

Raccogliendo:

In ogni iperpiano ω sono contenuti due piani associati, i quali coincidono in un piano autoassociato se ω tocca la quadrica Q .

Gli ∞^6 piani di Q si distribuiscono così in coppie di una stessa involuzione I ; una coppia di I è costituita da due piani associati. I piani doppi di I sono i piani autoassociati.

Sulla quadrica Q esistono due tipi semplici di sistemi razionali ∞^3 di piani:

1) Sistema ∞^3 di piani contenuti in una sezione iperpiana di Q , e in una stessa schiera di questa: in particolare sistema dei piani di Q per un suo punto.

2) Sistema ∞^3 dei piani seganti in retta un piano fisso di Q .

La involuzione I muta sistemi del 1° tipo in sistemi del 2° tipo, e viceversa.

5. Per un piano di Σ non contenuto in Q le sei intersezioni con la varietà dei piani osculatori di Γ^6 appartengono ad una conica: la conica sezione di quel piano con Q .

Se α, α' son piani associati, le sestuple $P_1, P_2, \dots, P_6, P'_1, P'_2, \dots, P'_6$ dei punti di incontro di α, α' con i sei raggi osculatori $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_6$ contenuti nell'iperpiano $\omega \equiv \alpha\alpha'$ sono « associate » ⁽¹⁾; nel senso che ogni reciprocità fra i due piani α, α' per la quale cinque delle coppie P_i, P'_i sieno costituite di punti reciproci, ammette come reciproci anche i punti della sesta coppia.

Segundo infatti con ω il sistema lineare S_{∞^9} dei complessi lineari contenenti (la rigata delle tangenti e perciò) la congruenza dei raggi osculatori di Γ^6 si ottiene in ω un sistema lineare S_ω di complessi lineari della stessa dimensione 9: altrimenti ω sarebbe totale per qualche complesso di S e perciò esisterebbe in S almeno un complesso speciale; l' S_4 — centro relativo dovrebbe incontrare tutti i raggi osculatori di Γ^6 : assurdo. Le sei rette $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_6$, contenute in ∞^9 complessi ⁽²⁾ lineari, impongono pertanto solo 5 condizioni ai complessi lineari di ω : un complesso lineare per 5 di esse passa di conseguenza per la sesta. Si tratta cioè di sei rette legate linearmente o in posizione di Schläfli. Di qui, e dall'osservazione evidente che ogni reciprocità fra α, α' può e in ∞ modi pensarsi subordinata da un sistema nullo di ω , segue la proprietà enunciata.

Per un piano autoassociato ξ i sei punti P_1, P_2, \dots, P_6 appartengono ad una conica; questo si vede sia considerando ξ come posizione limite di un piano-centro esterno a Q il quale è venuto a cadere su Q ; sia come comune posizione limite di due piani associati venuti a coincidere in esso.

Inversamente se P_1, P_2, \dots, P_6 appartengono ad una conica γ il piano α è autoassociato ($\alpha \equiv \alpha'$). Infatti ad ogni punto X di α corrisponde su α' un punto unico e ben determinato, tale che risultano proiettive le due sestuple di rette $XP_i, X'P'_i$. Ma variando X su γ la prima sestupla rimane proiettiva a sè stessa; così avverrà pure della seconda. Il punto X' varia pertanto su una conica γ' per i sei punti P'_i ; e su γ, γ' le due sestuple P_i, P'_i

(1) G. CASTELNUOVO, *Su certi gruppi associati di punti*, « Rend. Circolo Mat. Palermo », 3, 1889, p. 179.

(2) S_ω è il sistema lineare più ampio di complessi lineari contenente le sei rette $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_6$. Se le stesse sei rette fossero contenute in un sistema lineare ∞^{10} di complessi lineari, un complesso lineare per quattro di esse $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ conterrebbe di conseguenza le rimanenti due δ_5, δ_6 . Ora se P_1, P_2, P_3, P_4 sono i punti di appoggio di $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ con Γ^6 , dovrebbe in particolare l' $S_3 \equiv P_1 P_2 P_3 P_4$, come centro di un complesso lineare speciale di ω , appoggiarsi a δ_5, δ_6 ; ciò che è assurdo perchè i 4 punti P_1, P_2, P_3, P_4 assorbono già complessivamente le 12 intersezioni di quello S_3 con la V_5^{12} dei piani osculatori di Γ^6 .

sono proiettive. Le sei rette $\delta_i \equiv P_i P'_i$, come congiungenti punti omologhi di piani omografici, si appoggerebbero dunque ad ∞^1 piani: assurdo. Dunque $\alpha \equiv \alpha'$.

6. Risulta dalle cose dette che il sistema Σ dei piani seiseccanti in punti generalmente distinti la varietà dei piani osculatori di Γ^6 si scinde in due distinti sistemi $\infty^6: \Sigma_1, \Sigma_2$. Un piano di Σ_1 è singolare per un complesso lineare di rette contenente la rigata delle tangenti di Γ^6 ; non è generalmente contenuto in Q e in ogni caso sega la V_3^{12} dei piani osculatori di Γ^6 in 6 punti di una conica. I piani di Σ_2 appartengono a Q e si distribuiscono in coppie di piani associati. Tale spezzamento avrebbe potuto prevedersi per altra via, come brevemente accenniamo.

I complessi lineari di rette passanti per la rigata delle tangenti di Γ^6 e aventi come totali sei prefissati piani osculatori di Γ^6 , formano un sistema lineare ∞^3 nel quale sono contenuti 14 complessi doppiamente singolari⁽¹⁾; i relativi 14 piani-centro sono appoggiati a quei sei piani osculatori. D'altra parte i piani incidenti a sei piani di S_6 sono in numero di 16⁽²⁾: esistono dunque oltre ai 14 piani-centro suddetti due ulteriori piani incidenti ai sei prefissati piani osculatori. Questi ultimi due piani risulteranno naturalmente « associati » nel senso precisato nei numeri precedenti.

La determinazione dei piani incidenti a 6 piani osculatori di Γ^6 , appare così un problema algebrico riducibile. Il fatto non sorprende quando si pensi che sei piani osculatori di Γ^6 si trovano, come piani di S_6 , in posizione particolare.

Invece 4 piani generici di S_3 possono sempre pensarsi come osculatori di una Γ^5 razionale normale.

7. In corrispondenza ai due sistemi Σ_1, Σ_2 si ottengono per proiezione sopra S_3 due famiglie di C^6 razionali con sei flessi. La proiezione di Γ^6 da un piano di Σ_1 è una C^6 di complesso lineare. Proiettando invece Γ^6 da un piano α di Q la C^6 proiezione non appartiene in generale ad un complesso lineare ma possiede tuttavia sei flessi generalmente distinti. I sei flessi della C^6 proiezione appartengono ad un medesimo piano π , traccia sopra S_3 dell'iperpiano $\omega(\alpha) \cdot \alpha\alpha'$; e i piani osculatori nei sei flessi passano per un medesimo punto O traccia dello S_3 polare di α rispetto a Q . E poichè questo S_3 e l'iperpiano $\alpha\alpha'$ non si appartengono, lo stesso avverrà di π, O . Proiettando Γ^6 da α' sopra lo stesso S_3 si ottiene una C'^6 correlativa di C^6 con i sei flessi nello stesso piano π . I flessi di C^6 e quelli di C'^6 formano su π due sestuple associate di punti. Se poi α è autoassociato

(1) F. PALATINI, *L'ordine delle varietà che annulla...*, « Rend. Acc. Lincei », XI, 5, 1902, p. 315.

(2) M. PIERI, *Sul problema degli spazi secanti*, « Rend. Ist. Lombardo », 26, 2, 1893, p. 534.

($\alpha \equiv \alpha'$) la C^6 proiezione appartiene ad un complesso lineare; π ed O si appartengono; i sei flessi stanno su una conica e formano (su C^6) una sestupla apolare; e dualmente.

In ogni caso una C^6 della seconda famiglia è individuata, a meno di una omografia o reciprocità del suo spazio, dalla sestupla dei flessi (forma binaria del sesto ordine).

Per una *qualunque* C^6 di questa seconda famiglia la g_6^2 dei gruppi apolari alle sezioni piane della curva (g_6^2 *fondamentale*) fa parte della g_6^3 delle sezioni piane; e viene segata sulla C^6 dai piani per O (e dualmente).

Per una C^6 *razionale* generale i piani che la segano in sestuple apolari di punti inviluppano una quadrica; per una C^6 della seconda famiglia questa quadrica si riduce alla stella di piani di centro O , contata due volte.

8. Chiudiamo con la seguente osservazione.

In una C^6 della prima famiglia la coincidenza di due o più flessi dà necessariamente origine ad un ramo di tipo autoduale. Ad esempio se due dei sei flessi divengono successivi (senza che per questo la curva si spezzi) avremo in corrispondenza o un ramo (212) o un ramo (131). Nel 1° caso il relativo piano-centro incontra una tangente di Γ^6 e sega in retta il relativo S_4 osculatore; nel 2° caso incontra in retta un S_3 osculatore.

Anche una C^6 della seconda famiglia può presentare un ramo (212); e infatti i piani di Q per un punto P di una tangente di Γ^6 stanno nell'iperpiano tangente in P a Q , il quale iperpiano contiene l' S_4 polare della tangente cioè il relativo S_4 osculatore. Perciò i piani di Q per P segano in retta questo S_4 osculatore. Ad esempio da un piano di Q incidente a due tangenti di Γ^6 , Γ^6 stessa si proietta sopra S_3 secondo una C^6 di Egan.

Ma una C^6 della seconda famiglia *non* può presentare un ramo (131). E invero un piano α di Q segante in retta lo S_3 osculatore in X a Γ^6 sega necessariamente in retta il piano osculatore in X ; cosicchè per la C^6 proiezione da α sopra S_3 il punto X' proiezione di X è origine di un ramo (311); la C^6 stessa è di classe 5. In X' son venuti poi a coincidere 3 e non 2 flessi. Il piano α' associato di α passa per X e sta nell'iperpiano ivi osculatore; la curva proiezione da α' è una C^5 (di classe 6) con un ramo (113), correlativa della precedente.

Matematica. — *Alcune osservazioni suggerite da un teorema sulle varietà abeliane reali.* Nota di S. CHERUBINO, presentata dal Corrisp. G. SCORZA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sur les mouvements isoénergétiques.* Nota di R. L. GOMES, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Soient x_1, x_2, \dots, x_n les coordonnées d'un système holonome et conservatif Σ , t le temps et

$$2T = a_{ik} x'_i x'_k \quad \left(x'_i = \frac{dx_i}{dt} \right)$$

la force vive.

On sait que lorsqu'il y a un potentiel U , on peut mettre les équations de Lagrange sous la forme ⁽²⁾

$$(1) \quad x''_i + \left\{ \begin{matrix} jk \\ i \end{matrix} \right\} x'_j x'_k = U_i,$$

avec

$$U_i = A^{ik} \frac{\partial U}{\partial x_k} = A^{ik} U_k,$$

les symboles de Christoffel se rapportant à la forme quadratique $2T$ et les A^{ik} représentant les compléments algébriques normalisés du discriminant de cette forme.

À chaque système de valeurs c_1, c_2, \dots, c_{2n} des constantes arbitraires, l'intégrale générale

$$(2) \quad x_i = X_i(t, c_1, c_2, \dots, c_{2n})$$

de ces équations fait correspondre un certain mouvement M_c ; mais les mouvements M'_c isoénergétiques à un mouvement donné ne dépendent que de $2n - 1$ de ces constantes:

$$(3) \quad x_i = f_i(t', c_1, \dots, c_{2n-1}).$$

Ce sont précisément les mouvements que nous allons considérer ici, en supposant que leur énergie (totale) commune h est celle du mouvement M'_c représenté par les équations

$$(3') \quad x_i = f_i(t, 0, \dots, 0) = \varphi_i(t).$$

Ainsi que l'on sait ⁽³⁾, ces mouvements jouissent de la remarquable propriété d'avoir pour trajectoires les lignes géodésiques dans l'espace E , défini

(1) Nella seduta del 5 gennaio 1930.

(2) Voir LEVI-CIVITA e AMALDI, *Mec. Raz.*, vol. II, 1. Pour les cas que nous envisageons ici il faudrait modifier légèrement l'analyse citée.

(3) Voir l'ouvrage déjà citée, vol. II, 2.

par la forme

$$ds^2 = 2(U + h) ds^2,$$

avec

$$ds^2 = a_{ik} du_i du_k,$$

lequel est conformément représentable sur l'espace E défini par ds^2 .

2. Cela posé, faisons correspondre à chaque instant t de M'_0 l'instant

$$(4) \quad t' = \pi(t, c_1, \dots, c_{2n-1})$$

de M'_c , la fonction π étant seulement assujettie à avoir des dérivées continues et à se réduire à t pour $c = 0$:

$$t = \pi(t, 0, \dots, 0).$$

Les équations de M'_c étant, d'après (3) et (4),

$$x_i = f_i(\pi, c_1, \dots, c_{2n-1}) = F_i(t, c_1, \dots, c_{2n-1}),$$

les différences

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= F_i(t, c_1, \dots, c_{2n-1}) - F_i(t) \\ &= F_i(t, c_1, \dots, c_{2n-1}) - F_i(t, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

peuvent s'écrire

$$\Delta x_i = \xi'_i c_l + \delta_i \quad \left(\begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ l = 1, \dots, 2n-1 \end{matrix} \right)$$

avec

$$\xi'_i = \left(\frac{\partial F_i}{\partial c_l} \right)_{c=0},$$

les δ_i étant des infiniments petits du deuxième ordre par rapport aux c_l , pris eux mêmes pour des infiniments petits. La partie principale des Δx_i est donc la somme des produits des c_l par les composantes ξ'_i de $2n-1$ vecteurs ξ'_i .

Nous pouvons écrire de même

$$\pi'_i(t, c_1, \dots, c_{2n-1}) - \pi'_i(t, 0, \dots, 0) = \gamma_l c_l + \delta'$$

en posant

$$\gamma_l = \left[\frac{\partial}{\partial c_l} \left(\frac{\partial \pi}{\partial t} \right) \right]_{c=0}.$$

Donc, en négligeant les quantités du deuxième ordre et en faisant

$$\gamma = \gamma_l c_l,$$

on aura

$$\frac{dl'}{dt} = \frac{\partial \pi}{\partial t} = 1 + \gamma,$$

vu que

$$\pi'_i(t, 0, \dots, 0) = 1.$$

À cette fonction γ , qui jouera un rôle important dans la suite, nous donnerons le nom de *coefficient de dilatation dans le temps*.

Soit d'autre part

$$(5) \quad s = \omega(\sigma, c_1, \dots, c_{2n-1})$$

l'équation qui traduit la correspondance (déterminée par (4)) entre les arcs σ et s de M'_0 et M'_c en E ; soit de même, dans l'espace E_1 ,

$$(6) \quad s_1 = \omega_1(\sigma_1, c_1, \dots, c_{2n-1}).$$

En raisonnant comme ci dessus, nous aurons immédiatement

$$\frac{ds}{d\sigma} = 1 + \lambda \quad , \quad \frac{ds_1}{d\sigma_1} = 1 + \lambda_1,$$

avec

$$\lambda = c_l \left[\frac{\partial}{\partial c_l} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \sigma} \right) \right]_{c=0} = c_l \lambda_l$$

et

$$\lambda_1 = c_l \left[\frac{\partial}{\partial c_l} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial \sigma_1} \right) \right]_{c=0} = c_l \lambda_{1l}.$$

Appelons encore ces deux fonctions λ et λ_1 *coefficients de dilatation dans les espaces E et E_1 respectivement*.

Nous allons montrer que les trois coefficients γ , λ et λ_1 se trouvent liés par une relation d'une remarquable simplicité.

3. En appliquant à M'_c le théorème de la conservation de l'énergie, nous aurons tout d'abord

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \sqrt{2U(f_1(t', c), \dots, f_n(t', c)) + 2h} \\ &= \sqrt{2U(F_1(t, c), \dots, F_n(t, c)) + 2h}; \end{aligned}$$

pour M'_0 il viendrait de même

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sqrt{2U(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) + 2h}$$

et en portant ces resultats dans l'égalité

$$\frac{ds}{d\sigma} = \frac{\frac{ds}{dt'}}{\frac{d\sigma}{dt}} \times \frac{\partial \pi}{\partial t},$$

nous aurons

$$\frac{ds}{d\sigma} = \frac{\sqrt{2U(F_1(t, c), \dots, F_n(t, c)) + 2h}}{\sqrt{2U(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) + 2h}} \times \frac{\partial \pi}{\partial t}.$$

Donc, en prenant la dérivée par rapport à c_1 et en faisant ensuite $c_1 = \dots = c_{2n-1} = 0$, il viendra

$$\lambda_l = \frac{1}{2(U+h)} \frac{\partial U}{\partial x_k} \xi_l^k + \gamma_l,$$

c'est-à-dire ⁽¹⁾

$$v^2(\lambda_l - \gamma_l) = \frac{\partial U}{\partial x_k} \xi_l^k + \gamma_l$$

ou encore

$$(7) \quad v^2(\lambda - \gamma) = \frac{\partial U}{\partial x_k} \xi^k,$$

avec

$$\xi^k = c_l \xi_l^k.$$

L'égalité

$$\frac{ds_1}{d\sigma_1} = \frac{\frac{ds_1}{dt'}}{\frac{d\sigma_1}{dt}} \times \frac{\partial \pi}{\partial t} = \frac{\left(\frac{ds}{dt'}\right)^2}{\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2} \times \frac{\partial \pi}{\partial t}$$

nous donnerait de même

$$(8) \quad v^2(\lambda_1 - \gamma) = 2 \frac{\partial U}{\partial x_k} \xi^k.$$

Nous aurons donc

$$\lambda = \frac{\lambda_1 + \gamma}{2};$$

c'est la relation cherchée.

$$(1) \quad v^2 = \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = 2(U+h).$$

Cette relation peut avoir d'utiles applications dans les problèmes de stabilité des mouvements isoénergétiques, car elle donne le coefficient λ (notre λ_1) introduit par Mr. Levi-Civita dans les équations aux variations des géodésiques de l'espace E_1 (qui sont les trajectoires de M'_c) lorsqu'on connaît la loi (4) de correspondance dans le temps. Il est donc inutile d'avoir recours à (6).

Meccanica (Idromeccanica). — *Azioni dinamiche relative a correnti piane irrotazionali di liquidi viscosi*. Nota di B. FINZI, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

In una Nota recente⁽²⁾ ho caratterizzato mediante formule analitiche le azioni dinamiche che un liquido viscoso, in moto stazionario, piano, irrotazionale, esercita su di una linea per solo effetto della viscosità:

Nel piano del moto scegliamo due assi cartesiani ortogonali x e y e poniamo $z = x + iy$. Sia w la velocità complessa del liquido, \mathbf{R} la risultante ed \mathbf{M} il momento rispetto all'origine O delle azioni dinamiche che si esercitano su di una linea s per solo effetto della viscosità. Se μ è il coefficiente di viscosità, posto $R = R_y + iR_x$, è

$$(1) \quad R = 2\mu \int dw^{(3)}.$$

In quanto ad \mathbf{M} , la sua componente secondo la normale al piano di moto è data dalla parte reale di \mathbf{M} , essendo

$$(2) \quad M = 2\mu \int \chi dw^{(4)}.$$

In questa Nota vogliamo applicare la (1) e la (2) alla determinazione delle azioni dinamiche esercitate su di un profilo rigido chiuso da una corrente regolare.

1. — Azioni dinamiche di sola viscosità esercitate da correnti.

Consideriamo una corrente regolare esternamente ad un profilo chiuso regolare qualsiasi: se S è una circonferenza di raggio arbitrariamente grande

(1) Nella seduta del 19 gennaio 1930.

(2) *Azioni dinamiche relative a moti piani irrotazionali di liquidi viscosi*. Questi « Rendiconti », vol. XI (1930), p. 59.

(3) B. FINZI, loc. cit., formula (9).

(4) B. FINZI, loc. cit., formula (11).

esterna ad s , scriveremo la (1) e la (2) così:

$$(1') \quad R = 2\mu \int_S dw,$$

$$(2') \quad M = 2\mu \int_S \chi dw.$$

Sia w la velocità asintotica della corrente, e supponiamo c diretta come l'asse delle x . Se il raggio di S è sufficientemente grande, potremo considerare la regione di piano esterna ad S come intorno del punto all'infinito, dove dunque (data la regolarità di w) w sarà sviluppabile in serie di potenze negative di χ :

$$(3) \quad w = c + \frac{\gamma_1}{\chi} + \frac{\gamma_2}{\chi^2} + \dots$$

Differenziando la (3) si ha:

$$(4) \quad dw = -\left(\frac{\gamma_1}{\chi^2} + \frac{2\gamma_2}{\chi^3} + \dots\right) d\chi.$$

Questa sostituita nella (1') ci dà

$$(5) \quad R = 0.$$

È dunque nulla la risultante delle azioni dinamiche di sola viscosità che una corrente piana irrotazionale esercita su di un solido in essa immerso. Ciò è conforme a quanto trovai relativamente a correnti viscoso irrotazionali anche non piane⁽¹⁾, e, più generalmente, conforme ai risultati di Cisotti⁽²⁾ relativi alle azioni dinamiche di masse fluide continue. Si noti che la conclusione (5) è ora stata dedotta con semplice ipotesi di regolarità della corrente, cioè con ipotesi più ampia di quelle necessarie a dimostrare la (5) per liquidi perfetti⁽³⁾. Sfugge per tanto la deduzione della (5) al rilievo fatto da alcuni circa le ipotesi all'infinito che rendono validi i procedimenti usati da Cisotti e da me nelle Note ora richiamate⁽⁴⁾.

Per valutare il momento esercitato dalla corrente sul profilo, sostituiamo la (4) nella (2'): si avrà:

$$(6) \quad M = -4\pi\mu\gamma_1 i.$$

(1) *Un nuovo paradosso idrodinamico*. Questi « Rendiconti », vol. XXXIII (1924), p. 481.

(2) *Sulle azioni dinamiche di masse fluide continue*. « Rendiconti del R. Istituto Lombardo », vol. L (1917).

(3) Ad esempio: per una corrente traslo-circolatoria la (5) non è verificata, pur essendo la corrente regolare.

(4) Cfr. B. FINZI, *Sulle singolarità analitiche nella meccanica dei fluidi*. Comunicazione alla Sezione V del Congresso Internazionale dei Matematici in Bologna, 1928. In riassunto nel « Bollettino dell' U. M. I. », anno VII, n. 5.

Posto allora

$$\gamma_1 = a + ib,$$

la componente del momento secondo la normale al piano di moto è uguale a

$$4\pi\mu b.$$

La semplice ipotesi di regolarità della corrente non permette dunque di concludere che è nullo il momento delle azioni dinamiche di sola viscosità che una corrente piana irrotazionale esercita su di un solido in essa immerso ⁽¹⁾.

2. - Momento di sola viscosità dovuto a correnti traslatorie, circolatorie, traslo-circolatorie.

Per determinare il momento di sola viscosità che una corrente traslatoria, o circolatoria, o traslo-circolatoria esercita su di un profilo, è opportuno operare un cambiamento di variabile complessa, passando dal piano ζ a un piano $\tilde{\zeta}$. Con tale cambiamento di variabile si ponga in corrispondenza conforme e biunivoca il piano forato secondo il profilo s con il piano forato secondo una circonferenza σ di centro Ω e raggio 1. La corrispondenza sia tale che per $\tilde{\zeta} = \infty$ sia pure $\zeta = \infty$ e sia nullo l'argomento di $\frac{d\tilde{\zeta}}{d\zeta}$. Se lungo s la tangente varia con continuità, $\frac{d\tilde{\zeta}}{d\zeta}$ e $\frac{d\zeta}{d\tilde{\zeta}}$ saranno finite e non nulle nel piano ζ per $|\zeta| \geq 1$. Dunque, se s è regolare, per $|\zeta| \geq 1$ varranno i seguenti sviluppi in serie ⁽²⁾:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\zeta} = b \left(\zeta + a_0 + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \dots \right), \\ \frac{d\tilde{\zeta}}{d\zeta} = b \left(1 - \frac{a_1}{\zeta^2} + \dots \right), \\ \frac{d\zeta}{d\tilde{\zeta}} = \frac{1}{b} \left(1 + \frac{a_1}{\zeta^2} + \dots \right), \\ \frac{d}{d\tilde{\zeta}} \frac{d\zeta}{d\tilde{\zeta}} = \frac{1}{b} \left(-\frac{2a_1}{\zeta^3} + \dots \right), \\ \tilde{\zeta} \frac{d\zeta}{d\tilde{\zeta}} = \zeta + a_0 + \frac{2a_1}{\zeta} + \dots \end{array} \right.$$

Nelle (7) b è un numero reale e positivo.

(1) Anche per fluidi perfetti il momento non è nullo, e ciò anche ammettendo ipotesi più restrittive che non la semplice regolarità della corrente. Cfr. U. CISOTTI, *Sul moto permanente di un solido in un fluido indefinito*. « Atti del R. Istituto Veneto », vol. LXIX (1909), p. 427.

(2) Cfr. A. SIGNORINI, *Sul teorema di Kutta-Jonkowski*. Questi « Rendiconti », vol. VII (1928), p. 823.

Ricordiamo ora che, se f è il potenziale complesso di velocità,

$$w = \frac{df}{d\zeta} = \frac{df}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz},$$

così che

$$dw = \left(\frac{d^2f}{d\zeta^2} \frac{d\zeta}{dz} + \frac{df}{d\zeta} \frac{d}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} \right) d\zeta.$$

Passando allora nella (2) dalla variabile z alla variabile ζ , si avrà:

$$(2'') \quad M = 2\mu \int_{\sigma} \zeta \left(\frac{d^2f}{d\zeta^2} \frac{d\zeta}{dz} + \frac{df}{d\zeta} \frac{d}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} \right) d\zeta.$$

Poniamo ora nella (2'') al posto di f il potenziale cinetico complesso relativo alla corrente traslatoria, alla corrente circolatoria, alla corrente traslo-circolatoria:

Corrente traslatoria:

Per la corrente traslatoria

$$f = c \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right).$$

Sostituendo questo valore di f nella (2'') e ricordando le (7) si ha

$$(8) \quad M = 0.$$

Il momento di sola viscosità dovuto alla corrente traslatoria è dunque nullo.

Corrente circolatoria:

Per la corrente circolatoria, se C è la circolazione,

$$f = \frac{C}{2\pi i} \log \zeta.$$

Sostituendo questo valore di f nella (2'') e ricordando le (7) si ha

$$(9) \quad M = -2\mu C.$$

Il momento di sola viscosità dovuto alla corrente circolatoria non è dunque nullo: la sua componente secondo la normale al piano di moto è data da $-2\mu C$.

Corrente traslo-circolatoria:

Per la corrente traslo-circolatoria

$$f = c \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + \frac{C}{2\pi i} \log \zeta.$$

Sostituendo questo valore di f nella (2'') e ricordando le (7) si ha

$$(10) \quad M = -2\mu C.$$

Il momento di sola viscosità dovuto alla corrente traslo-circolatoria non è dunque nullo: la sua componente secondo la normale al piano di moto è data (come per la corrente circolatoria) da $-2\mu C$.

3. — Azioni dinamiche complessive.

Le azioni dinamiche complessive che si esercitano sul profilo s sono espresse dalla somma delle azioni dinamiche che si eserciterebbero, *caeteris paribus*, se il liquido fosse perfetto, e delle azioni dinamiche di sola viscosità. Precisamente, la risultante \mathbf{R}' e il momento \mathbf{M}' complessivi sono caratterizzati dai due numeri complessi ⁽¹⁾

$$\mathbf{R}' = \bar{\mathbf{R}} + \mathbf{R} \quad , \quad \mathbf{M}' = \bar{\mathbf{M}} + \mathbf{M} \quad ,$$

dove

$$(11) \quad \bar{\mathbf{R}} = -\frac{1}{2}\rho \int_s w^2 d\chi \quad , \quad \bar{\mathbf{M}} = -\frac{1}{2}\rho \int_s \chi w^2 d\chi \quad .$$

Nelle (11) ρ rappresenta la densità del liquido.

Per profili regolari investiti da correnti regolari è noto che:

$$(12) \quad \bar{\mathbf{R}} = 0 \quad ,$$

per una corrente traslatoria e per una corrente circolatoria,

$$(13) \quad \bar{\mathbf{R}} = -\rho Cc$$

(come vuole il teorema di Kutta-Joukowski) per una corrente traslo-circolatoria. $\bar{\mathbf{M}}$, invece, è - in generale - un numero complesso non puramente immaginario per correnti traslatorie e traslo-circolatorie, mentre si riduce ad un puro numero immaginario per correnti semplicemente circolatorie ⁽²⁾.

Concludendo: le azioni dinamiche che correnti viscoso regolari, piane, irrotazionali esercitano su profili regolari si possono così caratterizzare:

per correnti traslatorie è nulla la risultante, mentre il momento si riduce al momento « perfetto » \mathbf{M} ;

per correnti circolatorie è nulla la risultante, mentre il momento si riduce al solo momento « viscoso » di modulo $2\mu |C|$;

per correnti traslo-circolatorie la risultante è data dal teorema di Kutta-Joukowski, mentre il momento è somma del momento « perfetto » $\bar{\mathbf{M}}$ e del momento « viscoso » di modulo $2\mu |C|$ ⁽³⁾.

(1) B. FINZI, loc. primo cit., formule (12) e (13).

(2) Ciò scende immediatamente dalle (11), passando al piano ζ e ricordando le (7). Cfr. A. SIGNORINI, loc. cit.

(3) A queste conclusioni giunsi già direttamente nel caso notevole di un profilo circolare, per cui manifestamente, $\bar{\mathbf{M}} = 0$. Cfr. *Effetti dinamici di cilindri rotanti in mezzi viscosi*, « Politecnico », n. 10, 1928.

L'intervento della viscosità si manifesta dunque in un momento dovuto alla circolazione. Momento che dipende soltanto dalla viscosità e dalla circolazione, ed è quindi indipendente e dalla forma del profilo e dalla circostanza che la corrente circolatoria sia eventualmente accompagnata da correnti traslatorie.

Osserviamo in fine che le conclusioni su esposte sussistono nell'ipotesi di regolarità della corrente e del profilo. Le singolarità eventualmente presenti potranno modificare i risultati, facendo intervenire i residui delle singolarità stesse nell'integrazione delle funzioni analitiche di cui abbiamo discorso.

Astronomia. — *Le fluttuazioni della curva di luce di « U Cephei ».* Nota di G. VIOLA presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. A. BEMPORAD.

Il prof. A. Bemporad per primo mise in evidenza le inflessioni del minimo di U Cephei; però contro questa affermazione furono sollevate delle obiezioni da parte dell'astronomo Harlow Shapley, che vennero poi risolti a favore del Bemporad.

Nessuno finora ha cercato di dare una spiegazione della causa che produce le dette oscillazioni, lo stesso Harlan True Stetson ammette la presenza di fluttuazioni non spiegabili con la semplice teoria dell'eclisse, e che fanno nascere il sospetto di variabilità nella stella di confronto usata da tutte B. D. + 81° 30'. Se ciò fosse, la curva di luce ottenuta paragonando la variabile con un'altra stella di confronto, non dovrebbe presentare simili anomalie intorno al minimo; mentre il Dott. Merola in uno studio svolto su 500 osservazioni fotometriche da lui raccolte all'Osservatorio di Capodimonte durante il biennio 1927-1928, fa rilevare che, sia adottando per i confronti la B. D. + 81° 30' che la B. D. + 81° 18', la curva di luce presenta sempre le stesse anomalie.

Questa importantissima conclusione non concorda del tutto con i risultati dati dall'astronomo Gadoński in una recente memoria, nella quale elabora 523 osservazioni fotometriche della variabile in esame, raccolte fra il 1921 e il 1929. Quest'ultimo trova per la B. D. + 81° 18' variazioni in luminosità succedentisi a grandi intervalli di tempo e di amplitudine compresa entro i limiti di $7^m.2 - 7^m.6$. Per tali ragioni, le grandezze ricavate per la U Cephei in base ai paragoni con la precedente stella di confronto, furono del tutto escluse (dal Gadoński) nella suaccennata elaborazione, classificando però quest'ultima per una stella variabile a lungo periodo del tipo RX Cephei.

(1) Nella seduta del 5 gennaio 1930.

Ma la diversità negli istrumenti adoperati dal Gadoski, l'intervallo di tempo (durante il quale furono eseguite le osservazioni) relativamente grande rispetto ai limiti consentiti per uno studio razionale su serie di osservazioni omogenee della variabile in esame, ed il fatto che queste furono raccolte in località diverse, rendono dubbia la conclusione circa la variabilità della B. D. + 81° 18', la quale in ogni caso dovrebbe essere a breve periodo o irregolare per poter spiegare le anomalie in questione nel minimo di U Cephei.

Questo stato di cose fa escludere il sospetto di variabilità nelle stelle di confronto B. D. + 81° 30', B. D. + 81° 18' e ci induce ad ammettere che le oscillazioni di luce siano dovute a causa intrinseca del sistema.

Per spiegare le dette anomalie, la sola curva di luce del Bemporad non è sufficiente, ragione per cui ci avvarremo di un'altra.

Le 850 osservazioni fotometriche di R. S. Dugan, in base alle quali l'A. costruì una eccellente curva di luce, furono da noi ridotte nuovamente, raggruppandole in luoghi normali che a loro volta furono perequati di 5 in 5. La curva di luce costruita per questi valori (vedi fig. 1) è in buon accordo con quella del Bemporad, essendo però completa nella fase di luce massima rivela delle oscillazioni di piccola amplitudine e di breve periodo.

Queste oscillazioni (esclusa per quanto precede la variabilità delle stelle di confronto) potrebbero spiegarsi con le seguenti ipotesi:

a) Variabilità di una delle stelle fra cui avviene l'eclisse, quando si ammetta per esse una rotazione abbastanza rapida e la superficie cosparsa di macchie. Questa ipotesi non è adattabile a spiegare le fluttuazioni di luce, perchè le componenti del sistema sono vicinissime e molto rilevante è l'effetto di marea. Questa circostanza e la riflessione della luce (notata anche per altri sistemi) concorrono a dare alla componente maggiore una variabilità con periodo uguale a quello di rivoluzione.

b) Variabilità di una delle componenti del sistema di U Cephei causata da un terzo corpo occultante. Nulla si oppone alla considerazione di un siffatto sistema dal lato puramente cinematico, ma data la prossimità di queste tre masse, si incontrerebbero serie difficoltà per la trattazione dinamica del sistema.

c) Esame spettrale della variabile. La variabilità dello spettro della U Cephei notata dal Blažko, ha fatto escludere l'ipotesi sulla costituzione fisica della componente più grande di uno sciame di corpuscoli che alternativamente eclissa la componente più luminosa e più piccola.

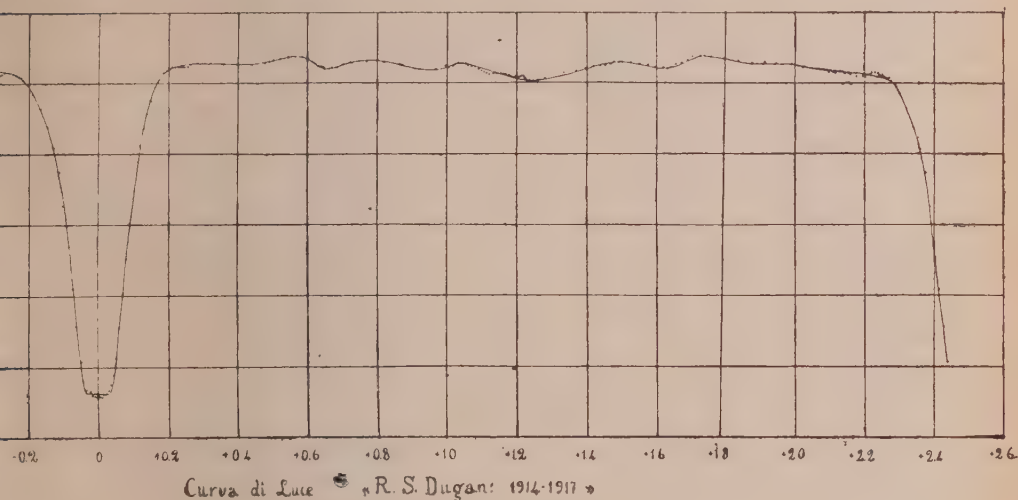
Se così fosse, lo spettro della variabile durante l'eclisse non dovrebbe accusare simili cambiamenti, mentre gli spettrogrammi dimostrano che tali variazioni risultano più accentuate, quando essi sono presi rispettivamente al massimo ed al minimo di luce.

Con l'aiuto dell'esame spettrale si potè stabilire che nel sistema di U Cephei si è in presenza di due componenti delle quali la più piccola ha uno

splendore intrinseco che è circa 10 + 12 volte più chiaro della più grande, e che quest'ultima dà nella fase di totalità uno spettro che si approssima molto a quello di terza classe.

In base a queste deduzioni il Blažko classificò la detta componente per una stella variabile irregolare a piccola amplitudine del tipo α Herculis.

Questa affermazione soddisfa solo in parte, perchè se le variazioni di luce che subisce la componente più grande fossero irregolari, la curva nel tratto di luminosità costante non dovrebbe presentare oscillazioni eguali in amplitudine e ripetentisi con legge periodica. Infatti, l'esame delle curve mostra che le oscillazioni si ripetono ad intervalli eguali di tempo e com-



paiono solo ove la luminosità rimane pressochè costante. Le curve di luce del Bemporad e del Dugan ci accertano che le dette fluttuazioni sono dovute a causa intrinseca nella componente più grande.

d) L'ipotesi che meglio si adatta a spiegare questo importantissimo fenomeno e che conduce a risultati identici a quelli dati dalle osservazioni fotometriche sembra essere la seguente.

Il corpo occultante parzialmente la componente più grande, non è di massa compatta ed omogenea, ma è costituito da uno sciame di corpuscoli giranti intorno alla detta componente con una determinata velocità. Questo sciame che alternativamente eclissa la componente più grande, fa sì che questa appare a noi più o meno luminosa secondo che esso trovasi di fronte o di dietro. Le oscillazioni si rendono sensibili ove è debole la variazione in luminosità, risultano smorzate ove questa è molto rapida. Precisare il valore del periodo di rivoluzione dello sciame non è il caso, ma in linea approssimata si può ammettere per questo un periodo di circa 11 ore.

Minimo Secondario. — Molto si è discusso sulla esistenza del minimo secondario nella curva di luce della variabile U Cephei. Ma l'amplitudine relativamente piccola, (circa $0^m.3$) ed il numero scarsissimo di osservazioni eseguite su questo ramo della curva, rendono abbastanza difficile la determinazione dell'epoca di esso.

Gli astronomi Shapley e Baker nella ricerca degli elementi orbitali del sistema, trovano per il minimo secondario un ritardo di circa $0^d.1$ rispetto al valore di $\frac{P}{2}$, confermando così la ellitticità dell'orbita. Che il sistema sia ellittico, è cosa evidente, poichè tale ellitticità è messa in rilievo dalla debole asimmetria riscontrata nelle curve di luce costruite con le osservazioni fotometriche raccolte dal prof. Bemporad, ma non sembra prudente il fondarsi nel calcolo suddetto sul valore di $t_2 - t_1 - \frac{P}{2} = + 0^d.1$.

Intanto, è da premettere che le curve utilizzate sia dallo Shapley che dal Baker, risultano così incerte nel ramo di luminosità massima, da porre in dubbio gli elementi sopra accennati, mentre a differenza di queste, risulta ben definita la curva costruita con le osservazioni perequate del Dugan. Infatti, confrontando le epoche ricavate rispettivamente per i minimi principale e secondario, si ottiene:

$$t_2 - t_1 = 1^d.2375$$

$$\frac{P}{2} = 1.2464$$

$$t_2 - t_1 - \frac{P}{2} = - 0.0089$$

valore in accordo poco soddisfacente con quello ricavato dallo Shapley e dal Baker.

Ellitticità apparente delle componenti. — La convessità della curva nel ramo di luminosità costante accusa che le componenti del sistema sono ellittiche. Ammesso che il massimo di luce sia raggiunto nel punto di mezzo ($0^d.6185$) tra i due eclissi, si ha, ricavando i valori di $1 - l^2$ e di $\cos^2 \theta$ per grandezze prese ad intervalli ($0^d.04$) eguali di tempo, a partire dal punto di mezzo:

Fase	G.	$1 - l^2$	θ	$\cos^2 \theta$
$0^d.6185$	6.830	0.0000	$89^{\circ}.32'$	0.0014
0.5785	6.833	0.0055	83.54	0.0127
0.5385	6.837	0.0128	77.76	0.0449
0.4985	6.845	0.0273	72.00	0.0955
0.4585	6.850	0.0362	66.21	0.1627
0.4185	6.856	0.0468	60.44	0.2434
0.3785	6.860	0.0538	54.66	0.3346

Portando su due assi ortogonali i valori di $\cos^2 \theta$ presi come ascisse, ed i corrispondenti valori di $1 - l^2$ come ordinate, gli ultimi punti risultano allineati su di una retta la cui equazione è data da: $1 - l^2 = 0.1224 \cos^2 \theta$ ove la costante $\alpha = \tan \alpha = 0.1224$ esprime la ellitticità apparente delle componenti.

Chimica. — *Determinazione potenziometrica dei solfuri alcalini*⁽¹⁾. Nota di G. SCAGLIARINI e P. PRATESI, presentata⁽²⁾ dal Socio G. BOERIS.

In una Nota precedente⁽³⁾ avevamo dimostrato che nella reazione tra nitroprussiato sodico e solfuri alcalini si forma un sale complesso fra una molecola di nitroprussiato e una di solfuro. Mediante una pila:



determinammo una curva di titolazione elettrometrica fra soluzioni N/10 dei due reattivi e notammo uno spiccato punto di flesso in corrispondenza della equivalenza delle due soluzioni. Abbiamo pensato che questo poteva essere un metodo per la determinazione potenziometrica dello ione solfo nei solfuri e reciprocamente dello ione nitroprussico. Le numerose esperienze eseguite in proposito e che riportiamo più avanti confermarono questa previsione e mostrarono che il metodo di dosamento suesposto è esatto. Quantità anche notevoli di alcali non disturbano la reazione, mentre in presenza di minime quantità di acidi deboli la titolazione non si può effettuare, perchè il complesso solfonitroprussico mentre è stabile verso gli alcali è decomposto istantaneamente dagli acidi anche deboli.

Il metodo si presta al dosamento dei solfuri anche in presenza di grandi quantità di numerosi sali: abbiamo sperimentato con cloruri, solfati, nitrati, carbonati, silicati alcalini, ottenendo sempre ottimi risultati. In caso di presenza di bicarbonati e in generale di sali acidi, basta alcalinizzare con idrati alcalini prima di effettuare la titolazione. Che la presenza di alogenuri e idrati alcalini non possa nuocere, era prevedibile dalla grande differenza fra il prodotto di solubilità del solfuro d'argento (a $18^\circ = 1.6 \cdot 10^{-49}$) e quella dei sali d'argento degli anioni ricordati (AgOH a $20^\circ = 1.5 \cdot 10^{-8}$; AgCl a $18^\circ = 1.1 \cdot 10^{-10}$; AgBr a $18^\circ = 4.1 \cdot 10^{-13}$ e AgI a $21^\circ = 2.6 \cdot 10^{-16}$)⁽⁴⁾.

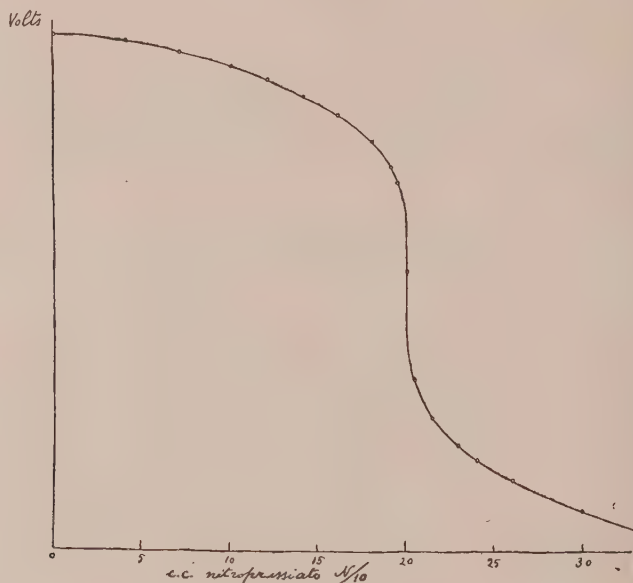
(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Bologna.

(2) Nella seduta del 5 gennaio 1930.

(3) Questi « Rendiconti », vol. VIII, serie 6ª, 2º sem., p. 75 (1928).

(4) LANDOLT, *Tabellen*, vol. II, p. 1180 (1923).

Il metodo potenziometrico proposto presenta sul metodo ponderale (S come BaSO_4) il vantaggio della rapidità unita a eguale esattezza, e su quello iodometrico di potere effettuare le determinazioni sopra soluzioni di solfuri commerciali molto scure per le quali il metodo iodometrico male si



presterebbe. Come più sopra abbiamo accennato il metodo potenziometrico si presta bene alla determinazione diretta dello ione nitroprussico.

MODO DI PROCEDERE.

Per queste determinazioni si usava una pila:



In un bicchiere della capacità di circa 200 cc. contenente uno strato di solfuro d'argento precipitato di recente e un elettrodo a spirale costituito da un grosso filo di argento argentato elettroliticamente che serviva anche da agitatore, si versava un volume noto di una soluzione di solfuro da titolare: questo elettrodo era paragonato ad un elettrodo saturo a calomelano unito alla soluzione di solfuro mediante una soluzione di cloruro potassico satura col noto dispositivo a sifone onde evitare l'azione dei solfuri sul mercurio.

Questa pila era in circuito con un potenziometro di tipo K della Casa Leeds e Northrup di Filadelfia. Si misurava la differenza di potenziale data dalla soluzione di solfuro sodico, poi si versavano mediante una buretta

volumi noti di una soluzione N/10 di nitroprussiato sodico di fresco preparata e si misurava ad ogni aggiunta il nuovo valore del potenziale quando esso aveva raggiunto un valore costante, il che si otteneva dopo due o tre minuti, operando a temperature fra 15° e 25°. Nella curva di titolazione si ponevano in ordinate i valori dei potenziali ⁽¹⁾ e in ascisse i cc. di soluzione N/10 di nitroprussiato sodico. Riportiamo una curva eseguita con soluzione di solfuro sodico contenente cloruri, solfati, nitrati, carbonati, silicati e idrati alcalini (vedi tabella II).

Effettuando la titolazione fra 15° e 25° il liquido rimane limpido e non si hanno reazioni secondarie di decomposizione, il che si verifica invece a temperatura superiore, e dopo parecchio tempo anche a 15°-25° specie in presenza di un eccesso di nitroprussiato.

CONFRONTO FRA I METODI IODOMETRICO E POTENZIOMETRICO.

Si prendevano da 20 a 50 cc. di diverse soluzioni di solfuro sodico a titolo sconosciuto e si titolavano con J N/10 (rititolando l'eccesso di J con tiosolfato N/10) e potenziometricamente con nitroprussiato sodico N/10.

TABELLA I.

Cc. di solu- zione Na ₂ S	Cc. J N/10 consumato	Cc. nitroprussiato N/10 consumato	Grammi di S trovati		Differenza	% S nel Na ₂ S col metodo potenzio- metrico
			metodo iodo- metrico	metodo potenzio- metrico		
20	20.2	20.1	0.03239	0.03223	— 0.00016	40.87
50	23.0	23.0	0.03688	0.03688	± —	41.07
50	12.3	12.4	0.01972	0.01988	+ 0.00016	41.40
30	31.2	31.0	0.05002	0.04970	— 0.00032	40.81
20	20.8	21.0	0.03335	0.03367	+ 0.00032	41.46
Media						41.12
Teorico						41.07

Il % in solfo nel solfuro sodico è stato calcolato in base al contenuto in Na₂S determinato per via iodometrica nelle soluzioni.

(1) I valori del potenziale sono la somma del potenziale dell'elettrodo a solfuro più il potenziale dell'elettrodo saturo al calomelano.

TITOLAZIONI POTENZIOMETRICHE DEI SOLFURI IN PRESENZA DI IMPURITÀ.

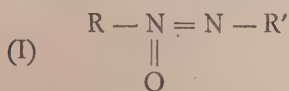
Si sono adoperati per ogni dosamento 20 cc. di Na_2S N/10 (titolato con J e tiosolfato N/10) inquinati con quantità diverse di sali; la colonna (1) indica il numero di cc. di nitroprussiato sodico N/10 al quale corrispondeva il flesso della curva di titolazione, la colonna (2) l'errore corrispondente riferito a 100 di solfo, la colonna (3) il numero di cc. dei diversi sali, tutti in soluzione N/10, aggiunti ai 20 cc. di Na_2S N/10.

TABELLA II.

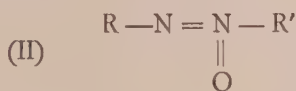
	(1)	(2)	(3)
1	20.0	—	7 cc. NaCl
2	19.9	— 0.51	20 » NaCl
3	20.1	+ 0.49	3 » Na_2SO_4
4	20.0	—	7 » Na_2SO_4
5	20.0	—	20 » Na_2SO_4
6	20.0	—	7 » NaNO_3
7	20.0	—	20 » NaNO_3
8	20.0	—	3 » Na_2CO_3
9	20.0	—	7 » Na_2CO_3
10	20.0	—	20 » Na_2CO_3
11	19.9	— 0.51	20 » NaOH
12	20.0	—	3 » NaHCO_3 + 4 cc. NaOH
13	20.1	+ 0.49	7 » NaHCO_3 + 8 cc. NaOH
14	20.0	—	7 » Na_2SiO_3
15	20.0	—	20 » Na_2SiO_3
16	20.0	—	2 » NaCl + 2 cc. Na_2SO_4 + 2 NaNO_3 + 2 NaHCO_3 + + 2 Na_2CO_3 + 3 NaOH + 2 Na_2SiO_3

Chimica. — *Ricerche sopra i diazoidrati, gli azossicomposti ed i nitroni*⁽¹⁾. Nota di Z. JOLLES e J. KRUGLIAKOFF, presentata⁽²⁾ dal Socio A. ANGELI.

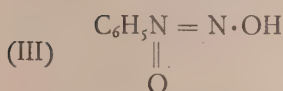
Le recenti esperienze col diazoidrato normale, eseguite con la collaborazione di uno di noi⁽³⁾, hanno dimostrato come il diazoidrato normale possiede tutte le proprietà caratteristiche di un ossidante di notevole energia. Dopo le esperienze con stannito di sodio⁽⁴⁾⁽⁵⁾, idrato ferroso, acqua ossigenata, idrossilammina, solfidrato di ammonio ed altri reattivi, i cui risultati sono stati preliminarmente pubblicati⁽³⁾, era facile prevedere che anche altri composti, quali ad esempio gli isomeri α (I) e β (II) degli azossicomposti, la nitrosofenilidrossilammina (III) ed i nitroni (IV):



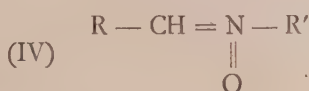
α -azossicomposto



β -azossicomposto



nitrosofenilidrossilammina



nitrone

di cui le formule di struttura, stabilite da Angeli ed ormai generalmente riconosciute, sono analoghe a quella del diazoidrato normale, si comportassero in un modo simile; cioè anch'essi fossero dotati delle stesse proprietà ossidanti, così manifeste nel caso del diazoidrato normale. Questa previsione

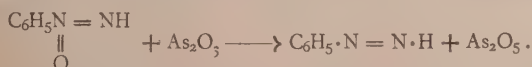
(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Organica della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 19 gennaio 1930.

(3) A. ANGELI e Z. JOLLES, « Rend. Acc. Linc. », serie 6^a, vol. X, p. 320 (1929).

(4) A. ANGELI e Z. JOLLES, loc. cit., p. 141.

(5) In modo analogo allo stannito di sodio, si comporta rispetto al diazoidrato normale, l'arsenito. Le prime esperienze in proposito sono state eseguite da KOENIGS (« B. », 23, p. 2672) e poi, più particolarmente, da GUTMANN (« B. », 45, p. 822). L'arsenito si ossida ad arseniato e la reazione, come segnala l'autore, procede quantitativamente:

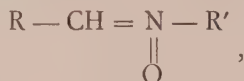


Nel caso dell'isodiazoidrato, la reazione non avviene.

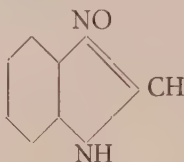
è stata pienamente confermata dai fatti sperimentali, di cui rendiamo presentemente conto.

Abbiamo preso in esame gli isomeri α e β dell'azossifenolo e dell'acido benzolazossibenzoico, il salicil-N-fenilnitrono, l'ossicliantina e la nitrosofenilidrossilammina. Tutti questi composti reagiscono con un lieve eccesso di solfato ferroso in soluzione alcalina, dando nettamente i corrispondenti termini con un atomo di ossigeno in meno, mentre il sale ferroso passa a sale ferrico.

A proposito dei nitroni di formula generale



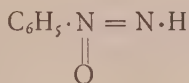
dobbiamo ricordare che la riduzione col sale ferroso del composto



è stata provata, con un indirizzo diverso dal nostro, da Niementowski⁽¹⁾. Mentre egli ha operato in soluzione ammoniacale, in presenza di un grandissimo eccesso di sale ferroso ed a temperatura elevata (circa 100°), la riduzione da noi operata sopra il salicil-N-fenilnitrono è avvenuta in soluzione alcalina per idrato di potassio a temperatura ambiente e con lieve eccesso del sale di ferro. In queste stesse condizioni procede la reazione nettamente anche in tutti gli altri casi.

Conformemente al suo carattere ossidante, abbiamo trovato che il diazoidrato normale, sposta anche lo iodio da una soluzione di ioduro di potassio. Questa esperienza, quanto mai dimostrativa merita speciale interesse dal punto di vista didattico, come esperienza di lezione: una soluzione acquosa di fenilazossicarbonamide, trattata con qualche goccia di potassa⁽²⁾ e quindi acidificata con acido cloridrico diluito, in presenza di ioduro di potassio e di salda d'amido, si colora quasi istantaneamente in azzurro.

I fatti sperimentali summenzionati si lasciano facilmente interpretare, attribuendo al diazoidrato normale la struttura assegnatagli ed intuita da Angeli ancora nel 1906⁽³⁾:



(1) «B.», 43, p. 3016.

(2) A. ANGELI e Z. JOLLES, «Rend. Acc. Linc.», serie 6^a, vol. X, p. 321, 1929.

(3) A. ANGELI, «Rend. Acc. Linc.», serie 5^a, vol. XV, p. 480.

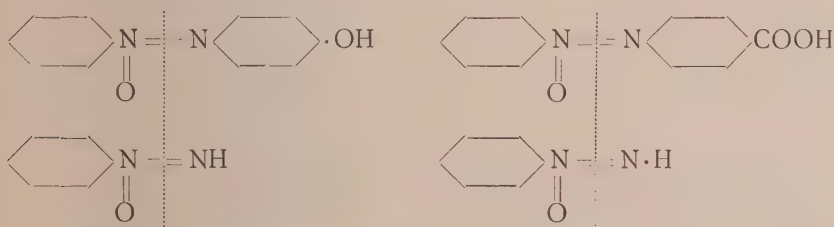
mentre all'isodiazoidrato egli assegna la struttura seguente:



Solo, ammettendo che l'ossigeno sia legato all'atomo di azoto nitrico, vale a dire all'azoto pentavalente, come lo si riscontra negli azossicomposti, nei nitroni e nella nitrosufenilidrossilammina, ci possiamo rendere ragione della facilità con cui esso viene ceduto dalla molecola di tutti questi composti appartenenti a classi diverse, ma aventi in comune la posizione dell'ossigeno e nello stesso assetto molecolare.

Un'altro fatto di notevole interesse, ci mette in grado di comprendere ed interpretare più profondamente questa analogia di comportamento degli diazoidrati normali, dei nitroni, degli azossicomposti e della nitrosufenilidrossilammina, nei riguardi del loro potere ossidante: mentre gli isomeri α rispettivi dell'azossifenolo e dell'acido benzolazossibenzoico, separano in breve tempo lo solfo da una soluzione alcalina e diluita di solfidrato di ammonio, le soluzioni dei relativi isomeri β si mantengono limpide per un tempo molto lungo.

Di questa differenza nella velocità di ossidazione ci si rende subito ragione se si considera la rassomiglianza col diazoidrato normale di quella parte degli α azossicomposti predetti, contenente l'ossigeno legato all'atomo di azoto del nucleo benzenico libero:



Considerando il diazoidrato sotto questo nuovo punto di vista, siamo in grado di interpretare tutta una serie di reazioni, il cui significato essenziale non è stato fino ad ora chiarito... Così Orton ed Everatt⁽¹⁾, facendo reagire il diazoidrato sopra l'idrochinone, pervengono, con contemporaneo sviluppo di azoto al chinone anzichè al corrispondente azoderivato



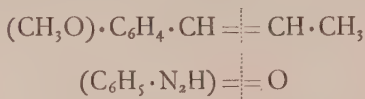
Per ottenere l'azocomposto, Witt e Johnson⁽²⁾ devono passare attraverso il monobenzoilderivato dell'idrochinone, in cui il gruppo benzoilico protegge l'ossidril. Data la facilità con cui l'idrochinone si ossida al chinone, si

(1) « J. Chem. Soc. », 93, p. 1010.

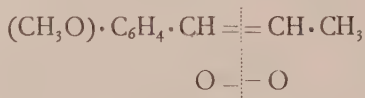
(2) « B. », 26, p. 1909.

capisce adesso come il diazoidrato normale possa esplicare la sua funzione ossidante anche sopra questo diossifenolo.

Probabilmente nello stesso senso si potrebbe interpretare anche la formazione del fenilidrazone dell'aldeide anisica ed aldeide acetica nella interessante reazione fra diazoidrato ed anetolo, descritta da Quilico ⁽¹⁾:



che corrisponderebbe a quella fornita dagli ossidanti:



Ci riserviamo infine di estendere lo studio delle reazioni dei diazoidrati normali sotto questo nuovo punto di vista anche ad altri composti.

PARTE SPERIMENTALE.

Ossidazione del sale ferroso per mezzo del:

1. *Salicil-N-fenilnitrono.*

Gr. 2 di salicil-N-fenilnitrono (p. f. 116°), ottenuto per condensazione dell'aldeide salicilica con la fenilidrossilammina in soluzione alcoolica, sciolti in cc. 50 di idrato di potassio al 20%, si trattano con una soluzione acquosa di gr. 5,4 di solfato ferroso in una boccia a tappo di smeriglio. Dopo 6 giorni si filtra e nel filtrato si precipita con una corrente di anidride carbonica un composto che cristallizzato due volte da alcool, fonde a 50,5° ed è identico al composto $\text{OH} \cdot \text{C}_6\text{H}_4 \cdot \text{CH} = \text{NC}_6\text{H}_5$ di Emmerich ⁽²⁾.

Gr. 0.0935 sostanza: 5.4 cc. N (15° e 763 mm); $\text{C}_{13}\text{H}_{11}\text{O}_2\text{N}$.

Calcolato N% = 7.1; trovato N% = 6.85.

2. *Acido β-benzolazossibenzoico.*

Gr. 0.3 di acido β-benzolazossibenzoico (p. f. 250°), sospesi in acqua, si trattano con qualche goccia di idrato di potassio diluito e quindi con gr. 0.6 di solfato ferroso in soluzione acquosa. Si nota la formazione dell'idrato ferrico, mentre il liquido man mano imbrunisce. Si filtra dopo 6 giorni: con acido cloridrico diluito precipita una massa fioccosa di colore rosa carne, la quale purificata, ridisciogliendola in potassa e per successiva precipitazione, fonde a 237°.

(1) « G. », 28, p. 389.

(2) « A. », 241, p. 343.

Gr. 0.1042 sostanza: 10.5 cc. N (13° e 759 mm); $C_{13}H_{10}O_2N_2$.
Calcolato N% = 12.39; trovato N% = 12.01.

3. *Acido α -benzolazossibenzoico* (p. f. 232°).

Si è operato in condizioni identiche a quelle dell'isomero β . Il prodotto di riduzione fonde a 237°, come il precedente.

4. *α -benzolazossifenolo*.

L'operazione: come sopra. Il liquido di reazione imbrunisce rapidamente. Dopo 4 giorni precipita con acido cloridrico diluito un composto che fonde a 155°-156°. P. f. misto con l'azofenolo 154°.

Gr. 0.0265 sostanza: 3 cc. N (14° e 766 mm); $C_{12}H_{11}ON_2$.
Calcolato N% = 14.14, trovato N% = 13.6.

5. *β -benzolazossifenolo* (p. f. 116°).

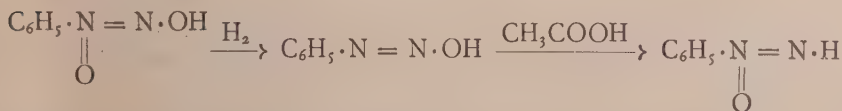
Il prodotto di riduzione precipitato con acido cloridrico diluito fondeva a 156°, che è il p. f. del azofenolo.

6. *Ossieliantina*.

Gr. 0.4 di ossieliantina di Angeli⁽¹⁾, sciolti in alcali, si trattano con gr. 1.2 di solfato ferroso. Dopo 3 giorni si filtra e si acidifica: il liquido inizialmente colorato in giallo, vira al rosso viola intenso (metilorange); mentre l'azossicomposto di partenza è di colore giallo sia in soluzione acida, sia in soluzione alcalina.

7) *Nitrosufenilidrossilammina*.

Gr. 0.5 del sale sodico della nitrosufenilidrossilammina, in soluzione acquosa, si trattano con gr. 2.7 (3 Mol) di solfato ferroso, sciolti in cc. 10 di acqua. Nel domani si filtra e si identifica la presenza dell'isodiaotato formatosi, con la reazione del β -naftolo o con R-Salz. A questo scopo, si acidifica il liquido alcalino con acido acetico, per isomerizzare l'isocomposto, il quale non reagisce con i reattivi predetti, alla forma normale



in presenza di β -naftolo (o R-Salz): si nota la formazione di un bellissimo precipitato rosso, costituito dal benzolazo- β -naftolo, il quale fonde intorno a 134°.

(1) «Rend. Acc. Linc.», 24, sem. 1°, p. 1190.

Ossidazione della ftalina a fenolfaleina col diazoidrato normale.

Una soluzione alcalina di ftalina pura ⁽¹⁾, per aggiunta di qualche cc. di una soluzione di fenilazossicarbonamide ⁽²⁾ si colora quasi istantaneamente in rosso viola intenso; acidificando, la colorazione sparisce (fenolfaleina); come è noto, la ftalina è incolore sia in soluzione alcalina, sia in soluzione acida. La reazione di ossidazione della ftalina a fenolfaleina, avviene nettamente solo nel caso che la ftalina si trovi in eccesso rispetto alla fenilazossicarbonamide. In caso contrario, ha luogo con preferenza la reazione di copulazione fra diazoidrato e fenolo, per cui la colorazione dovuta al sale sodico della fenolfaleina non apparisce tanto nettamente.

Geologia. — *A proposito di una sezione geologica nell'Appennino Reggiano.* Nota di M. ANELLI, presentata ⁽³⁾ dal Corrisp. P. VINASSA.

Una regione ben nota nel mondo degli studiosi della geologia emiliana è quella che si presenta tra il Tresinaro ed il Secchia nelle colline di Reggio presso San Valentino, Montebabbio, Castellarano. Abbondanza di fossili, varietà di terreni, magnifici spaccati naturali rendono questo territorio quanto mai interessante dal punto di vista geologico.

In attesa di pubblicare per esteso i risultati dei miei rilevamenti nella zona marginale reggiana e modenese, mi limito ad illustrare qui una sezione ⁽⁴⁾ che contrappongo ad altre due condotte da Pantanelli e da Galdi ⁽⁵⁾.

Sul margine della pianura decorre, con andamento ONO-ESE, una striscia di piacentiano costituente le colline di Casalgrande, Dinazzano, S. Antonino; segue, procedendo verso mezzogiorno, una ruga, ugualmente diretta, di argille scagliose, che largamente affiorante al M. dell'Evangelo presso Scandiano, si restringe gradatamente avvicinandosi al Secchia, sulla cui sponda sinistra costituisce il rilievo di M. Arnone. Questo restringimento

(1) A. BAEYER, « A. », 202, p. 80.

(2) A. ANGELI e Z. JOLLES, « Rend. Acc. Linc. », serie 6^a, vol. X, p. 321, 1929.

(3) Nella seduta del 5 gennaio 1930.

(4) La sezione è condotta lungo un allineamento SSO-NNE e passa circa un chilometro ad oriente del Castello di S. Valentino e di M. dei Vinci. Essa decorre un chilometro e mezzo ad ovest di quella tracciata da Pantanelli.

(5) PANTANELLI D., *Sezioni geologiche nell'Appennino Modenese e Reggiano.* « Bollettino R. Com. Geol. d'Italia », vol. XIV, p. 202, fig. 4. Roma 1883; CAMERANA E. e GALDI B., *I giacimenti petroliferi dell'Emilia* « Mem. descr. della Carta geol. d'Italia », vol. XIV, p. 73, fig. 33.

è dovuto al fatto che il piacentiano, nel territorio prossimo al Secchia, affiora ampiamente a sud della ruga stessa. Il pliocene costituisce qui infatti una specie di ampio golfo limitato a nord dalle argille scagliose della ruga ora accennata, ad ovest e a sud dall'oligocene; più precisamente questo golfo è diviso per mezzo di un promontorio di molasse oligoceniche diretto da ovest ad est in due insenature: Nella più settentrionale compiono le alture di Cadiroggio e di Monti di Cadiroggio, nella meridionale quelle di Le Ville e del Castello di S. Valentino. Il promontorio, diretto da ovest ad est, si eleva nel M. dei Vinci e nel M. Pradella; è limitato a sud presso a poco dall'alveo del R. della Rocca e termina circa due chilometri ad ovest del Secchia.

Esso si distacca nei pressi di Montebabbio dalla grande striscia oligocenica, da me altre volte segnalata⁽¹⁾, che decorre, parallela al margine dell'Appennino Reggiano, piegata in più o meno regolare sinclinale; nel territorio ora descritto il promontorio avanzantesi nella formazione pliocenica rappresenta la continuazione del fianco settentrionale di questa sinclinale, mentre il fianco meridionale affiora nelle colline di San Valentino e di Castellarano: L'insenatura di terreni pliocenici corrispondente alle alture del Castello di S. Valentino e di Le Ville ne rappresenta il nucleo.

A mezzodì di questa sinclinale compaiono di nuovo le argille scagliose, le quali, a breve distanza da Castellarano (Madonna di Campiano, Le Malee, M. Pernice) sorreggono anche lembi di calcari marnosi e di calcari arenacei del miocene medio. Il miocene compare pure al M. Stádola, piegato in sinclinale e sorretto dalle argille scagliose, le quali alla loro volta inglobano estese placche di terreni oligocenici.

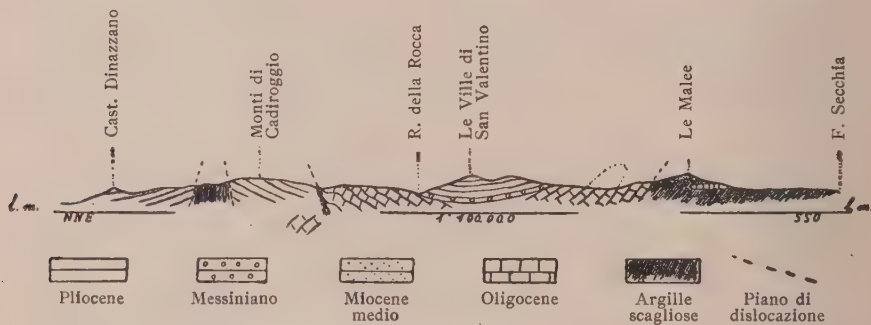
In conclusione dunque, mentre nel subappennino reggiano orientale, e più precisamente nelle valli del Crostolo e del Tresinaro, una grande ruga di argille scagliose si viene ad interporre tra il piacentiano delle ultime propaggini collinose e la sinclinale oligocenica sopra ricordata, nel versante sinistro del Secchia la ruga si restringe intrudendosi nella formazione piacentiana, la quale qui presenta largo sviluppo e viene a contatto col limite settentrionale del promontorio di terreni oligocenici di M. dei Vinci e di M. Pradella, cioè col fianco settentrionale dell'accennata sinclinale. Sottilissime lingue di argille scagliose, spesso rossigne, frapposte tra il piacentiano e l'oligocene svelano l'anormalità del contatto stesso. A monte del promontorio di terreni oligocenici vengono di nuovo, piegati in sinclinale, i terreni pliocenici, che alla loro base presentano delle marne più o meno sabbiose con fossili accennanti chiaramente al messiniano; verso l'alto della serie (Castello di San Valentino, Le Ville) il pliocene è coronato da banchi sabbiosi straordinariamente ricchi di fossili.

(1) *Sulla presenza dell'oligocene nel subappennino Reggiano* « Boll. Soc. Geol. It. », vol. XLII, 1923, p. 182; *Cenni tettonici sull'Appennino Parmense e Reggiano*. « Ib. », vol. XVII, 1923, p. 377

La sinclinale di terreni pliocenici poggia trasgressivamente sull'oligocene pur esso piegato in sinclinale. Le argille scagliose, che nel territorio a nord di Castellarano servono di base ai terreni oligocenici, sostengono invece, nella regione a mezzogiorno di questo paese, oltre all'oligocene, anche placche di terreni miocenici: Nelle stesse argille scagliose lembi oligocenici appaiono nettamente inglobati.

La sezione che qui presento differisce notevolmente da quella degli Autori sopra citati.

Nella sezione del Pantanelli si vede il pliocene delle prime colline poggiare sulle argille scagliose; queste più a monte sorreggono una sinclinale di terreni miocenici e più precisamente elveziani e tortoniani (è il mio oligocene); in questa sinclinale sono adagiati trasgressivamente terreni pliocenici accennanti ad una lieve pendenza verso settentrione. Nel fianco meridionale della sinclinale, sotto alle molasse (per Pantanelli elveziane e



per me oligoceniche), verrebbero calcari langhiani, con tutta probabilità corrispondenti al miocene di Le Malee e di Madonna di Campiano; in realtà questo miocene non è affatto sottostante all'oligocene; ma appare in lembi discontinui poggianti sulle argille scagliose. Forse Pantanelli fu indotto in errore dal lembo di Madonna di Campiano, il quale affiora a livello del Secchia e sottosta altimetricamente alle molasse dei colli di Castellarano.

Procedendo verso sud (sempre secondo la detta sezione) seguono argille scagliose, le quali in corrispondenza del Secchia (Strette del Pascale) sorreggono una sinclinale costituita inferiormente di straterelli calcarei riferiti da Pantanelli al bormidiano (Pareto) e forse accennanti, secondo lui, all'oligocene; superiormente verrebbero calcari langhiani. Per conto mio interpreto tutta questa pila come schiettamente miocenica.

Galdi invece, osservando che le marne di Cadiroggio e di Monti di Cadiroggio sembrano immergersi sotto alle molasse per lui mioceniche e per me oligoceniche di M. Pradella e di M. dei Vinci, le quali alla loro volta sopportano le marne plioceniche del Castello di San Valentino e di Le Ville, ritiene che le marne di Cadiroggio siano mioceniche e costituiscono « un'assisa alla base della zona molassica ».

È indubbio che le marne di Cadiroggio appartengono al piacentiano: soltanto per effetto di una dislocazione esse sembrano sottostare alle molasse oligoceniche.

Secondo la mia interpretazione le argille scagliose che dal M. dell'Evangelo si dirigono al Secchia intrudendosi, nel territorio prossimo a questo fiume, nella formazione piacentiana, costituiscono una ruga, probabilmente a carattere diapirico, la quale ha determinato la contropendenza del piacentiano; infatti le marne di Casalgrande e di Dinazzano, prospicienti la pianura, pendono verso NE, mentre quelle di Monti di Cadiroggio, più entroappenniniche, pendono verso E o verso SE. Con tutta probabilità le sorgenti solforose di Dinazzano, poste quasi al contatto tra le argille scagliose e la fascia piacentiana più settentrionale, stanno ad accennare che al di sotto di questa deve esistere la formazione gessosa.

La sinclinale di oligocene con nucleo discordante di pliocene è rimontata, probabilmente per effetto di una faglia inversa, sul pliocene di Cadiroggio; lungo il piano di rottura si sono intruse localmente esili lingue di argille scagliose e compare qualche manifestazione di idrocarburi. Presso il contatto col piacentiano le molasse, molto raddrizzate e disturbate, sembrano talora accennare al vertice mozzato di una anticlinale, la cui prosecuzione dovrebbe trovarsi al di sotto del pliocene di Cadiroggio e di Monti di Cadiroggio.

Probabilmente anche il limite meridionale della sinclinale di oligocene corrisponde ad una linea di rottura: sul ricoprimento di oligocene da parte delle argille scagliose a sud di Castellarano ho già riferito altra volta ⁽¹⁾.

(1) *Su alcuni fenomeni di ricoprimento nell'Appennino Emiliano.* « Rendiconti R. Accademia Naz. Lincei », Classe Sc. fis. mat. nat., S. 5, II sem., p. 416.

Geologia. — *Problemi di tectonica lombarda (a proposito di ricerche nel sottosuolo).* Nota di G. B. CACCIAMALI, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. G. ROVERETO.

La più recente delle catene montuose d'Europa è quella delle Alpidi, unità geologica completatasi sulla metà dell'era terziaria; più che una catena è un sistema o fascio di catene parallele, del quale fan parte l'Antitauro, i Balcani, i Carpazi e le Alpi, quest'ultime decorrenti da Vienna al M. Bianco ed alla spiaggia ligure; l'ulteriore prosecuzione delle Alpidi dobbiamo vederla nella Corsica orientale, poi immaginarla ad est ed a sud della Sardegna, alle Baleari e nella cordigliera Betica.

Lo studio geologico delle Alpi ha dimostrato esser queste costituite da una potente serie di strati rocciosi più volte ripiegata su sè stessa, esser costituite cioè da un impilamento di pieghe stratigrafiche sovrapposte (falde di copertura, coltri, *Nappes*, *Decken*); ne consegue una genesi paragonabile all'accumularsi delle pieghe d'una striscia di carta uscente da un apparecchio telegrafico ricevitore, detta serie essendo stata senza interruzione sospinta in un dato senso (da sud a nord), ed avendo formato una pila di anticlinali e di sinclinali coricate ed accavallate l'una sull'altra con radici a sud e fronti a nord. Naturalmente siccome mano mano che le pieghe si mettevano a posto venivano anche in gran parte demolite dagli agenti meteorici, così l'impilamento loro è molto incompleto e noi non siamo spesso davanti che a dei ruderi o frammenti, onde la successione completa delle falde non può essere che una ricostruzione mentale.

Data tale struttura dobbiamo immaginare svolte quelle pieghe, dobbiamo cioè immaginare di ricondurre la serie alla superficie orizzontale primitiva sulla quale era originariamente distesa: da Bregenz (lago di Costanza) all'Adamello la larghezza delle Alpi centrali si può calcolare di 150 chilometri; per ricondurre la serie stratigrafica alla posizione originaria, ossia per svolgere il cumolo delle falde, bisogna moltiplicare almeno per 20 quella distanza, ottenendo 3000 chilometri; su tale spazio dovevano quei sedimenti esser distesi sul fondo d'un gran mare mesozoico, la Tetide. Ricostituiamo la geografia euro-africana dopo il penultimo diastrophismo orogenico (erciniano), culminato nel periodo carbonifero: l'Africa, priva delle catene dell'Atlante (Marocco-Tunisia), doveva esser situata più a sud e toccare l'Antartide (si noti la presenza nel Sud-Africa di formazioni glaciali dell'epoca carbonifera); l'Europa, priva della cordigliera Betica, doveva presentare un

(1) Nella seduta del 5 gennaio 1930.

gran promontorio corso-sardo ed un gran golfo della Tetide segnato dall'andamento delle Alpi e dei Carpazi. Il tavolato africano movendosi dunque verso nord spingeva i sedimenti della Tetide contro l'ostacolo europeo; questi sedimenti (massa relativamente plastica tra due masse relativamente rigide, come fra le due branche di una morsa) corrugandosi dovettero dapprima costituire in quel mare ghirlande insulari, primi embrioni delle grandi pieghe che nel terziario abbattendosi sull'orlo della vecchia Europa e rovesciandovisi sopra costituirono il primo abbozzo delle Alpi; il movimento, iniziatosi nel Permico, si completò nel Terziario; fu quindi d'una grande lentezza. Dobbiamo qui anche pensare alla contemporaneità di quattro fatti continuati: il cammino dei sedimenti verso nord, le sopravvenienti nuove sedimentazioni, il corrugamento con emersione, e l'erosione delle terre emerse; non è quindi detto che tutta intera la pila delle formazioni dal Permico all'Oligocene sia stata fin dall'origine presente ovunque.

Bisogna ancora notare che l'avanzamento non colpì soltanto la serie permico-oligocenica in formazione (soprastruttura), ma colpì anche la sottostante serie erciniana o silurico-devonica (infrastruttura); fu dunque una serie molto comprensiva che si abbattè alla fine sopra l'infrastruttura autoctona dell'Europa erciniana, infrastruttura autoctona della quale nelle Alpi occidentali emergono come isole il Gottardo-Aar, il M. Bianco, il Belledonne, il Pelvoux, il Mercantour.

Dall'una all'altra delle falde alpine non è dunque tanto l'età geologica che muta quanto la *facies*; è infatti naturale che, data la grande estensione della Tetide, ne' suoi sedimenti ci dovesse essere posto per *facies* diverse; s'intende *facies* nel senso della longitudine (del movimento) come in quello della latitudine (del corrugamento) nel senso petrografico come in quello paleontologico; *facies* petrografiche dipendenti dalle diverse condizioni batimetriche della sedimentazione, e *facies* paleontologiche dipendenti dalle diverse condizioni ambientali di vita degli organismi che ci han lasciato i propri avanzi. A parte le variazioni laterali di *facies*, noi vediamo succedersi, dalle falde basse alle alte, *facies* sempre più meridionali, corrispondenti al succedersi da nord a sud delle varie *facies* della Tetide; è naturale infatti che il tratto della serie costituente le pieghe inferiori essendo venuto da sedimenti meno lontani, e quello costituente le pieghe superiori essendo venuto da sedimenti più lontani, le pieghe dal basso all'alto vengono ad offrire *facies* paleontologica sempre più meridionale.

Nelle Alpi si distinguono tre gruppi di *facies*: delle Elvetidi, delle Pennidi e delle Austridi. Le Elvetidi, costituitesi coi sedimenti di quella parte della Tetide che era prossima all'Europa, sono sottostanti alle altre e si mostrano all'orlo esterno delle Alpi; le Pennidi, costituitesi coi sedimenti della parte centrale della Tetide, formano la massa principale delle Alpi; e le Austridi, costituitesi coi sedimenti di quella parte della Tetide che era prossima all'Africa, sovrastanno alle altre.

A sud delle Alpidi stanno le Dinaridi, catene montuose che vanno dal Marocco alla Tunisia, poi dalla Sicilia settentrionale alla Calabria, indi dal litorale toscano e dalle Apuane all'Apennino ligure, riprendendo nelle Prealpi lombardo-venete (comprese in queste le Carniche e le Giulie), e poi dalle Carniche continuando, parallelamente alle Alpidi, nei Caravanchi, e dalle Giulie continuando in direzione SE nelle Dinariche, indi in Grecia e nell'Asia minore. Ma Alpidi e Dinaridi non sono due unità geologiche diverse, quest'ultime non rappresentando che la continuazione del fenomeno orogeo-nico delle Alpidi. Richiamando infatti l'impilamento delle falde alpine è facile comprendere come debba essere arrivato un momento nel quale la serie ipogea continuamente sospingente ed avanzante da sud a nord non potè più ulteriormente accavallare dette falde; ed allora urtando alle loro basi le falde precedentemente formate, obbligò queste a sollevarsi inarcandosi ed a determinare pieghe di ritorno radicali; per conto suo dovette ulteriormente corrugarsi e le sue pieghe dovettero rovesciarsi a sud: ecco le Dinaridi. In queste abbiamo dunque anticlinali e sinclinali coricate, con conseguenti faglie suborizzontali e con parziali scorrimenti verso sud; non dunque qui grandi falde impilate, come nelle Alpidi, sibbene brevi falde o scaglie danti ai paesi dinarici una caratteristica struttura embricata. Anche nelle Dinaridi possiamo distinguere tre tipi di *facies*, che si potrebbero rispettivamente denominare delle Orobidi, delle Baldidi e delle Venetidi; il primo, più nordico, e quindi a contatto delle Austridi, è costituito dalla *facies* orobica o lombarda e dalle sue corrispondenti ad occidente (zona dei laghi) e ad oriente (formazioni ad esempio della Carnia e dei Caravanchi); il secondo è tipico nel sistema montuoso baldense, ed ha suoi rappresentanti orientali nel Cadore, nelle Giulie e nelle Dinariche; il terzo infine è rappresentato dalle Prealpi vicentine e bellunesi e dal Carso; tre gruppi dunque di *facies*, e tre tempi consecutivi (Miocene inferiore, medio e superiore).

Due, e tra essi indipendenti, sono i criterî per stabilire il limite tra Alpidi e Dinaridi, il criterio cioè di cambiamento di *facies* e quello di cambiamento del senso del rovesciamento delle pieghe; la linea di separazione tra le *facies* dell'ultima zona delle Austridi (la *facies* M. Tonale ad esempio) e quelle della prima zona delle Dinaridi (la *facies* orobica ad esempio) non è, in Lombardia almeno, coincidente colla linea di separazione tra i rovesciamenti a nord ed i rovesciamenti a sud, perchè in pieno paese a *facies* orobica abbiamo ancora una falda alpina, come vedremo; ne viene che la distinzione tra Alpidi e Dinaridi non è netta, e che quindi il limite alpino-dinarico ha molto del convenzionale.

Il limite alpino-dinarico classico, già sopra sostanzialmente indicato, segue una separazione tra due zone di *facies* (nelle Alpi tra le zone della Drava, di M. Tonale e di Ivrea e le zone Carnica, Orobica e dei laghi); risalendo dunque il corso della Gail esso si porta a nord di Bolzano, indi a Merano; da qui con una scavezatura scende a Malè ed a Dimaro, da

dove con altra scavezzatura ripiega a sera, e sfiorando dapprima a nord il massiccio tonalitico dell'Adamello e poi staccandosene, si dirige al valico del Tonale, indi passando a nord di Edolo (a Monno) e del valico dell'Aprica va a toccare Tresenda, da qui fino a Colico coincidendo press'a poco col corso dell'Adda, ed infine separa la zona di Ivrea da quella dei laghi. Secondo invece il concetto tectonico il limite alpino-dinarico è in Lombardia alquanto più a sud di quello classico, è cioè come si disse in paese di piena *facies* orobica: da Dimaro penetrerebbe nella massa tonalitica dell'Adamello, uscendone in V. Gallinera, per poi portarsi a sud di Edolo e cioè a tergo di Malonno, ed indi a sud del valico dell'Aprica, da dove andrebbe a coincidere press'a poco colla linea del crinale orobico fino al Lario; esso segnerebbe l'orlo della più meridionale delle falde alpine, falda costituitasi sull'anticlinale M. Legnone-Edolo, segnerebbe per meglio dire l'orlo di quanto è rimasto della piega di ritorno radicale di detta falda.

Che la falda in parola sia tectonicamente alpina lo dimostrano i seguenti fatti: 1° Il potentissimo banco di materiale di frizione che essa presenta in corrispondenza della sua superficie di scorrimento, come è stato messo in bella evidenza dal Cosijn e dal Klompè in un tratto del versante nord della catena orobica: ciò è molto dimostrativo perchè tra falda e falda dinarica non si trova tanta massa di materiale di frizione; 2° Il mancato parallelismo tra il suo asse radicale M. Legnone-Edolo e gli assi di tutte le digitazioni della falda dinarica I, questi andando ad urtare ad angolo acuto l'orlo della parte conservata della falda in discorso (orlo che sta ora sul versante nord ed ora su quello sud del crinale orobico); 3° La presenza in V. Camonica di una singolare anticlinale, messa a giorno dall'incisione dell'Oglio, anticlinale il cui asse (sulla linea Allione-Demo-Pian della Regina), ha bensì la solita direzione ENE, ma le cui ali hanno cadenze inconsuete, quella nord offrendo cioè molto più forte cadenza di quella sud, il che fa supporre trattarsi qui in realtà di quella massa ipogea delle Dinaridi la quale spingendosi in sottoscorrimento verso nord determinò sovrascorrimenti verso sud (pieghe di ritorno delle falde alpine ed ordinarie coltri dinariche); l'Oglio avendo dunque incise ambe le ali di questa apparente anticlinale ha messo in chiaro le particolarità delle stesse, ossia per l'ala sud le scaglie dell'altopiano di Borno, evidentemente formatesi per la velocità minore che doveva animare la parte dorsale della massa ipogea procedente a nord in confronto della velocità generale della massa stessa, e per l'ala nord le scaglie di Malonno, evidentemente generatesi per una specie di diapirismo, ossia per spinta da sotto in su.

Nove sono le falde dinariche nelle prealpi lombarde, vale a dire nella terra orobica; di queste la I ad oriente non si spinge oltre il massiccio dell'Adamello: la II, la III e la IV circuiscono invece detto massiccio, e son quelle che poi proseguono ad est fino alle Carniche ed oltre; le successive infine (da V a IX) cessano contro il sistema baldense.

Nelle formazioni orobiche la serie soprastrutturale è costituita da rocce normali e quindi fossilifere, la cui età come si disse dall'oligocene discende fino al carbonifero superiore; essa poggia in discordanza sulla serie infrastrutturale, costituita da rocce più antiche, non più normali nè fossilifere, bensì metamorfosate in schisti cristallini; aggiungiamo che a nord, per una fascia che va da Orta alla sponda occidentale del Verbano ed all'alto Lario (onde il nome di schisti dei laghi), poi dal versante sinistro della V. Tellina alla plaga di Edolo, è pressochè esclusiva l'infrastruttura sulla quale non sono che pochi lembi della soprastruttura; ed a sud, ossia nel resto delle prealpi lombarde, la situazione è invertita, abbiamo cioè solo lembi della infrastruttura affioranti alla base della serie normale; a nord è dalla fascia infrastrutturale che sorge la falda alpina orobica, e quanto ai residui lembi soprastrutturali incastrativi si riducono ai tre seguenti: quello neo-carbonifero di Manno (NW di Lugano), quello permico a nord di M. Cadelle (catena orobica), e quello pure permico a ponente di M. Aviolo (V. Camonica); a sud nella soprastruttura appare l'infrastruttura come nocciolo delle anticlinali I e II, e soprattutto nella massa ipogea anticlinaloide ad asse Allione-Demo-Pian della Regina.

Gli schisti dell'infrastruttura sono certamente erciniani, ma non si tratta di erciniano autoctono, bensì di erciniano che ha viaggiato colla soprastruttura; nelle prealpi lombarde non si mostrano lembi del substrato autoctono quali abbiamo invece, come fu detto, nelle Alpi occidentali. Per stabilire poi l'età loro non possiamo che ricorrere a criterî comparativi; gli studi fatti dal Gortani e dal Vinassa nella catena Carnica hanno messo in chiara evidenza esservi colà una serie silurico-devonica ed una serie carbonifero-permo-triassica; tra dette serie — entrambe di rocce non metamorfosate e quindi fossilifere — vi è una lacuna con transgressione; dal Neodevónico si salta infatti al Neocarbonifero che costituisce la grande massa schistosa delle Carniche, nella quale stanno banchi di conglomerato quarzoso e sulla quale stanno espandimenti di rocce eruttive. Miglior corrispondenza non si potrebbe avere tra le due serie carniche e le due serie orobiche, nella serie superiore orobica il Neocarbonifero essendo rappresentato pure da conglomerato quarzoso, e tra questo ed il Permico essendovi espandimenti di porfido. La serie inferiore carnica non metamorfosata ci dà perciò la probabile età (silurico-devonica) della serie inferiore orobica metamorfosata.

Se analizziamo questa nostra serie inferiore, vale a dire questi nostri schisti cristallini dell'infrastruttura, vi possiamo distinguere molto bene due orizzonti, rispettivamente costituiti da rocce di diverso tipo: sono gli « schisti di Edolo » e gli « schisti di Rendena » del Salomon. Gli schisti di tipo Edolo costituiscono l'orizzonte superiore ed offrono un grado di metamorfismo minore di quello offerto dagli schisti di tipo Rendena, ossia dell'orizzonte inferiore; gli strati dell'un tipo sono, secondo ogni apparenza, in concordanza

con quelli dell'altro; la serie è quindi unica; quelli del primo tipo predominano a nord e sono prevalentemente costituiti da filliti quarzifere, per quanto non vi manchino micaschisti e gneiss, e presentano poi qualche intercalazione di schisti grafitici (dintorni di Edolo) e di calcari saccaroidi (alto Lario); quelli del secondo tipo sono prevalentemente costituiti da micaschisti e da gneiss, essendovi subordinate le filliti quarzifere, e predominano a sud, dove costituiscono su due vasti tratti (alta V. Trompia e V. Rendena) il nocciolo della falda II; in V. Trompia sono associati a schisti del primo tipo, non così in V. Rendena; è poi da notarsi che in transgressione su di essi mai si presenta il Carbonifero, bensì il porfido od il Permico od il Trias; tra detti schisti e la soprastruttura esiste quindi un *hiatus* maggiore di quello esistente tra gli schisti cristallini delle valli Tellina, Brembana, Seriana e Camonica e la relativa soprastruttura, *hiatus* ancor più considerevole in V. Rendena dove mancano affatto elementi del primo tipo. In V. Camonica gli schisti di tipo Rendena si presentano solo in lembi, per lo più situati al margine della massa tonalitica e stati evidentemente portati in alto da questa; oltre ai detti lembi alti abbiamo il lembo di Cedegolo, importantissimo per la sua posizione bassa e per sottostare agli schisti del tipo Edolo; esso mostrasi per erosione dell'Oglio nella gamba meridionale della ricordata anticlinaloide Allione-Demo-Pian della Regina.

Il fatto della presenza degli schisti del secondo tipo in soli lembi in V. Camonica, ed a gran distesa invece nelle più meridionali V. Trompia e V. Rendena dimostra che dopo il costituirsi della falda I vi è stato un abbassamento della spinta ipogea, cosicchè dalla massa in movimento verso nord vennero più in pieno colpiti gli schisti inferiori, quelli cioè di detto secondo tipo, i quali — di fronte al nuovo ostacolo antistante — dovettero venir spinti da sotto in su attraverso le sovrastanti rocce per fenomeno di diapirismo; nel nostro caso, nel quale per transgressione una discordanza già esisteva, il diapirismo avrebbe fatto apparir maggiore l'*hiatus* inerente alla transgressione stessa; ma probabilmente e in V. Trompia e in V. Rendena esistono in profondità i membri non apparenti alla superficie, cioè per la soprastruttura il Neo carbonifero in ambe le località, e per l'infrastruttura gli schisti di Edolo nella seconda.

Ricordiamo infine come soprastruttura ed infrastruttura prese insieme costituiscano quella massa che si chiama *Sial* e che nella propria traslazione da sud a nord doveva essere come galleggiante sopra quell'altra massa profonda e pastosa che si chiama *Sima*, ciò fino a quando s'abbattè contro ostacoli, cioè contro masse sialiche autoctone, oppure contro masse sialiche precedentemente arrestate nel proprio movimento.

Mineralogia (Petrografia). — *La lava dell'eruzione dell'Etna del 1928* ⁽¹⁾. Nota di S. DI FRANCO, presentata ⁽²⁾ dal Socio F. MILLOSEVICH.

L'Etna ha sempre presentato i più svariati fenomeni geodinamici ed eruttivi, distanziati da periodi di riposo talmente varii, da rendere vano qualsiasi tentativo di precisarli.

Nello scorso secolo XIX, le grandi eruzioni classiche, accompagnate da imponenti emissioni di lava, si riducono ad una decina.

Dal 1893 al 23 marzo 1910 l'Etna non diede alcuno sfogo d'una certa entità, giacchè l'eruzione verificatasi nel 1908, nella parte alta della valle del Bove, abortì dopo qualche giorno.

Dopo la grande eruzione del 23 marzo 1910, si sono avute le eruzioni del 1911, del 1918 della durata di poche ore, del 1923 e quella del 2 novembre 1928, iniziatasi alle ore 16,30, senza nessun segno precursore, soltanto un altissimo pino innalzatosi dal cratere di N.E.

Una bocca apertasi in seguito verso le ore 18 nella valle del Leone (2700 sul livello del mare) emise lava per circa 250 metri e frattanto il corso sotterraneo della lava si diresse a sud di M.^{te} Frumento fino al fianco orientale di M.^{te} Cubania, ove si aprì la seconda bocca effusiva.

Verso la sera del 3 novembre, un maggiore efflusso lavico fece prolungare il corso sotterraneo della lava fino alla regione Naca (1150 m. sul livello del mare) ove si aprì la terza bocca e lungo il canale si manifestarono moltissimi piccoli crateri con diversa attività.

Nel complesso questa eruzione ebbe breve durata, essendo cessata definitivamente il 20 novembre e per la scarsezza del materiale frammentario, le bocche dell'apparecchio eruttivo non poterono formare quei grandi coni, che come monumenti, indicano ai posteri le centinaia di eruzioni eccentriche dell'Etna.

Anche in questa eruzione si sono notati blocchi di lave antiche, divelte dagli strati profondi del suolo, che formano parte dell'ossatura dell'Etna, simili alle rocce che si osservano negli strati denudati e nei dicchi della valle del Bove e inclusi di arenaria, bianca, friabile, dell'*eocene inferiore*, che fa parte della base sedimentaria dell'Etna.

La lava della recente eruzione è di colore grigio oscuro, tendente anche al rossastro, assai pesante e microscopicamente analoga, non solo a quella delle ultime eruzioni etnee, ma anche di alcune delle più antiche.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di mineralogia della R. Università di Catania.

(2) Nella seduta del 5 gennaio 1930.

Da uno studio sulle lave dell'Etna, che ho quasi ultimato, ho raggruppatato le lave di questo vulcano nei seguenti tipi:

- Tipo I.^o - *Lave senza fenocristalli.*
 » II.^o - *Lave ricche di grossi fenocristalli di plagioclasio.*
 » III.^o - *Lave con fenocristalli di plagioclasio e di augite.*
 » IV.^o - *Lave con abbondanti fenocristalli di augite e di olivina.*
 » V.^o - *Lave ricche di fenocristalli di augite.*
 » VI.^o - *Lave ricchissime di olivina.*
 » VII.^o - *Lave ad orneblenda.*

Si ha così una serie di esemplari che va dalle lave senza segregazioni, sino a quelle con molte segregazioni di natura differente.

Il tipo senza segregazioni è molto raro, e nella maggior parte dei casi si notano fenocristalli porfioricamente disseminati nella massa fondamentale.

Alcune lave appartengono ai *basalti*, altre alle *andesiti* e ciò nelle linee generali, con variazioni sul tipo del *plagioclasio*, che va dall'*oligoclase* alla *bitownite*, ma più frequentemente è *andesina basica* o tipica *labradorite* ed anche miscele *labradoritiche-bitownitiche*.

Le lave ad *oligoclase* sono più frequenti nelle più antiche correnti.

Inoltre ho potuto notare che le lave recenti, sono molto più uniformi, in confronto delle lave antiche e preistoriche.

La lava dell'eruzione del 1928 in sezione, osservata al microscopio, presenta fenocristalli di *plagioclasio*, di *augite* e di *olivina*, sparsi in una massa fondamentale costituita da *plagioclasio*, *augite*, abbondante *magnetite* e discreta sostanza vetrosa; appartiene quindi al III.^o tipo della mia classificazione.

I fenocristalli di *plagioclasio* sono i più abbondanti, quasi sempre geminati secondo la legge di Carlsbad e contengono molte inclusioni, generalmente di sostanza vetrosa, che in gran parte sono accumulate al centro, lasciando un orlo chiaro, oppure sparsi dando l'aspetto ai cristalli come se fossero cariati; notevole la presenza d'inclusioni di frammenti di *augite*.

Alcuni *plagioclasii* hanno spigoli arrotondati e a nicols incrociati mostrano estinzione ondulata; altri hanno spigoli netti e le estinzioni simmetriche raggiungono valori compresi tra 22° e 27°.

Nei geminati doppi si ha:

I	II
28°	12°
29°	13°
32°	18°

Caratteri che fanno riferire il *plagioclasio* alla *labradorite* Ab₁ An₁.

In altre sezioni le lamelle di *plagioclasio* a geminazione albitica danno, per le estinzioni, nella zona normale a (010) valori massimi di 24°.

Distaccate alcune laminette determinai la rifrazione per confronti con assenze a noto indice ed ottenni:

$$1,557 > \alpha' > 1,548$$

$$\gamma' = 1,557$$

Si tratta di *andesina basica* al limite con *labradorite* $Ab_x An_x$.

L'*augite* in fenocristalli è meno frequente del *plagioclasio*, però si presenta in cristalli più voluminosi e spessissimo in aggruppamenti di parecchi individui, di colore verdastro o giallastro, secondo la direzione della sezione, con inclusioni di grossi granuli di *magnetite*.

Su (010) l'estinzione $c : c = 43^\circ$.

I fenocristalli di *olivina* si presentano idiomorfi con spigoli nettissimi, esagonali, raramente con spigoli arrotondati e non raggiungono mai le dimensioni dei più grandi individui di *augite*.

Hanno i soliti caratteri, con accenno alle linee di sfaldatura (010) (100) e contengono incluso qualche granulo di *magnetite*.

La massa fondamentale non ha una caratteristica tessitura.

Il *plagioclasio* della massa fondamentale ha estinzioni simmetriche che raggiungono i 23° e i geminati doppi danno:

I	II
22°	12°
24°	13°

Valori di *andesina basica* $Ab_2 An_3$.

L'*augite* della massa fondamentale è in granuli e quasi della stessa quantità del *plagioclasio*.

La *magnetite* in cristallini e in granuli è abbondante e l'*olivina* come componente della pasta fondamentale non è presente.

La sostanza vetrosa di colore bruno oscuro è discretamente frequente.

Minerali accessori sono: l'*ematite* in laminette di colore rosso rubino e l'*apatite* in piccoli cristalli.

La lava dell'eruzione del 1928 è un *basalte andesinico*.

L'analisi chimica mi ha dato i seguenti risultati:

SiO_2	. . .	48,52
TiO_2	. . .	1,96
Al_2O_3	. . .	16,86
Fe_2O_3	. . .	2,97
FeO	. . .	7,54
MnO	. . .	0,09

MgO . . .	4,93
CaO . . .	10,03
Na ₂ O . . .	4,88
K ₂ O . . .	1,83
P ₂ O ₅ . . .	0,53
H ₂ O . . .	0,05

Somma . . . 100,19

Formula magmatica di LOEWINSON-LESSING:

$$2,70 \overline{RO} \cdot R_2O_3 \cdot 4,40 SiO_2 \quad \alpha = 1,41$$

$$R_2O : RO = 1 : 4,15 \quad \beta = 85,34$$

$$K_2O : Na_2O = 1 : 4,03$$

Secondo OSANN:

S	= 53,92
A	= 6,47
C	= 4,22
F	= 24,59
a	= 5,5
c	= 3,5
f	= 21
n	= 8,0
ser.	= α
K	= 0,7

Parametri di OSANN:

S	Al	F	Al	C	Alk	NK	MC
17.5	3.5	9	11	12	7	8.0	4.1

Diagramma di NIGGLI:

si	qz	al	fm	c	alk	k	mg	m
117	— 37	23	38	26	13	0.19	0.46	4

I parametri di Osann, calcolati dai risultati analitici della lava dell'eruzione dell'Etna del 1928, si avvicinano a quelli del *basalte plagioclasico* di M.^{te} Saddle (773) e della *dolerite* di Valmont Col. (772).

	S	Al	F	Al	C	Alk	NK	MC
Lava dell'eruzione del 1928	17.5	3.5	9	11	12	7	8.0	4.1
773 - Basalte plagioclasico, Saddle M.	17.5	3.5	9	12	11.5	6.5	6.4	5.0
772 - Dolerite, Valmont Col.	17.5	3.5	9	12	11	7	5.5	4.9

Invece la rappresentazione secondo il metodo di Niggli, dedotta dai risultati dell'analisi dell'eruzione etnea del 1928, è molto prossima a quella del *gabbro essexitico*, Cantal (2).

	si	qz	al	fm	c	alk	k	mq	m
Lava dell'eruzione del 1928 . . .	117	— 37	23	38	26	13	0.19	0.46	4
2 - Gabbro essexitico, Cantal . .	116	— 34	25	36	26.5	12.5	0.34	0.50	5

Assai interessante risulta il confronto dei risultati dell'analisi chimica della lava dell'eruzione del 1928, con quelli della lava dell'eruzione del 1669 (Monti Rossi) e del 1910 (Monti Recupero).

	Di Franco Eruzione 1669	Di Franco Eruzione 1910	Di Franco Eruzione 1928
SiO ₂	49.21	49.15	48.52
TiO ₂	1.74	1.89	1.96
Al ₂ O ₃	17.18	16.11	16.86
Fe ₂ O ₃	3.15	3.50	2.97
FeO	6.94	7.33	7.54
MnO	0.08	0.11	0.09
MgO	5.89	4.79	4.93
CaO	10.07	9.95	10.03
Na ₂ O	4.13	4.71	4.88
K ₂ O	1.15	1.73	1.83
P ₂ O ₅	0.52	0.63	0.53
H ₂ O	0.09	0.07	0.05
Somma	100.15	99.97	100.19

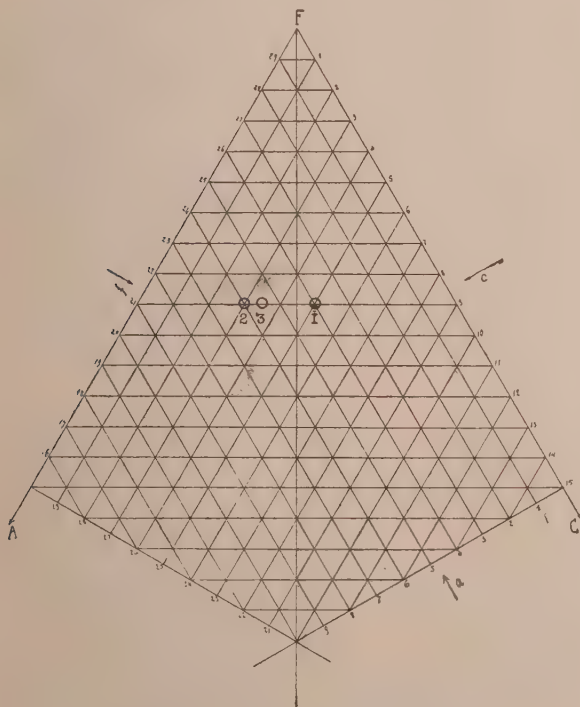
Formule magmatiche secondo LOEWINSON-LESSING :

	RO	R ₂ O ₃	SiO ₂	α	β	R ₂ O : RO	K ₂ O : Na ₂ O
Lava dell'eruzione del 1669	2.67	1	4.36	1.55	84.29	1 : 5.39	1 : 5.49
Lava dell'eruzione del 1910	2.21	1	4.55	1.56	82.40	1 : 4.24	1 : 4.13
Lava dell'eruzione del 1928	2.70	1	4.40	1.41	85.34	1 : 4.15	1 : 4.03

Secondo OSANN :

	s	A	C	F	a	c	f	n	ser.	K
Lava dell'eruzione del 1669	54.09	5.19	5.64	24.13	4	5	21	8.5	α	0.8
Lava dell'eruzione del 1910	54.53	6.25	3.96	24.91	6	3	21	8.1	α	0.8
Lava dell'eruzione del 1928	53.92	6.47	4.22	24.59	5.5	3.5	21	8.0	α	0.7

Diagramma secondo OSANN :



1 = Lava eruzione etnea del 1669
 2 = » » » » 1910
 3 = » » » » 1928

Parametri di OSANN:

	S	Al	F	Al	C	Alk	NK	MC
Lava dell'eruzione del 1669	17	3.5	9.5	12	12.5	5.5	8.5	4.5
" " " 1910	17.5	5	9.5	11	12.5	6.5	8.1	6.5
" " " 1928	17.5	3.5	9	11	12	7	8.0	4.1
Media . . .	17.5	3	9.5	11	12.5	6.5	8.2	5.0
770 - Basalte plagioclasico, Cuernavaca, Messico . .	17.5	5	9.5	12.5	12.5	6	8.2	6.0
771 - Basalte plagioclasico, Tres Nuraghes, Sardegna	17.5	5	9.5	12	11	7	7.0	5.7
688 - Andesite, Cap Vert, Senegal	17	5	10	11	12.5	6.5	8.3	4.7
780 - Basalte plagioclasico. M.te Ponente	17	5	10	12	15	5	8.5	5.1

La media dei parametri ricavati dalle analisi delle lave delle eruzioni del 1669, 1910 e 1928, risulta uguale ai parametri di Osann, dedotti dai risultati dell'analisi della lava dell'eruzione del 1910 ed è molto prossima a quelli del *basalte plagioclasico* di Cuernavaca, Messico (770), del *basalte plagioclasico* di Tres Nuraghes (M.^{te} Pedrosu) in Sardegna (771), dell'*andesite* del Cap Vert, Senegal (688) e del *basalte plagioclasico* di M.^{te} Ponente (780).

Diagrammi di NIGGLI:

	si	q	al	fm	c	alk	s	mg	m
Lava dell'eruzione del 1669 . . .	118	— 25	24	39	26	11	0.15	0.51	4
" " " 1910 . . .	120	— 33	25	38	26	15	0.19	0.44	4
" " " 1928 . . .	117	— 37	25	38	26	15	0.19	0.46	4
Media . . .	118	— 32	24.5	38.5	26	12	0.18	0.47	4
2 - Gabbro essexitico, Cantal . .	116	— 34	25	36	26.5	12.5	0.34	0.51	5
6 - Gabbro teralitico, Cantal . .	120	— 34	25.5	40	25	15.5	0.30	0.49	4

Invece la media dei diagrammi di Niggli, calcolati dai risultati analitici delle lave delle eruzioni etnee del 1669, 1910 e 1928, sta tra il *gabbro essexitico*, Cantal (2) e il *gabbro teralitico*, Cantal (6) e si avvicina al diagramma ricavato dai risultati dell'analisi della lava della eruzione del 1669.

Biologia. — *Ulteriori ricerche sull'azione esercitata da un radio-oscillatore per onde ultracorte di $\lambda = 2-3$ m., sulla germinazione dei semi e sull'accrescimento delle piante.* Nota II di G. MEZZADROLI e E. VARETON, presentata ⁽¹⁾ dal Socio B. LONGO.

PARTE II.

Azione delle onde elettromagnetiche ultracorte sulle piante poste entro un circuito in risonanza con il Radio-oscillatore.

Abbiamo esposto i semi e le piantine, all'azione delle onde elettromagnetiche ultracorte $\lambda = 2-3$ m. entro un circuito oscillante, posto in risonanza con il Radio-oscillatore.

Il circuito oscillante venne posto in posizione orizzontale, superiormente vi era la spira del risonatore pure orizzontale, debitamente isolata, munita di un condensatore variabile, che veniva regolato in modo da permettere di registrare nel circuito il passaggio di una corrente di 80 milliampère quando il Radio-oscillatore funzionava nelle solite condizioni di esperienza.

L'azione riscontrata entro questo circuito oscillante è nettamente superiore a quella che le stesse onde corte esercitano sulle piante poste nella diretta vicinanza del Radio-oscillatore, e sotto il sistema di fili Lechner (onde stazionarie).

Riportiamo nelle tabelle unite i risultati delle esperienze eseguite su semi di orzo, di fagiolo, di pisello, di granoturco, esposti all'azione delle onde elettromagnetiche ultracorte, entro questo circuito oscillante, per 90 minuti al giorno, suddivisi in tre tempi di 30 minuti ciascuno e così distribuiti.

1° tempo: 9-9.30; 2° tempo: 15-15.30; 3° tempo: 19-19.30.

Per durate di esposizione di 30 minuti al giorno, si ottengono già risultati leggermente superiori delle prove esposte per 90 minuti al giorno direttamente vicino all'oscillatore.

Riteniamo interessante riportare accanto ai dati relativi ai semi e alle piante poste entro il circuito oscillante in risonanza col Radio-oscillatore, anche quelli delle prove sottoposte nelle identiche condizioni all'azione delle onde corte nella immediata vicinanza del Radio-oscillatore, così si rileva chiaramente la differenza.

(1) Nella seduta del 15 dicembre 1929.

TABELLA III.

Orzo.

50 semi di orzo seminati su substrato di cotone idrofilo inumidito.

50 Semi seminati al giorno zero	Confronto		Vicino al Radio-oscillatore		Nel circuito in risonanza col Radio-oscillatore	
	Numero di semi germinati	Lunghezza totale delle piantine in cm.	Numero di semi germinati	Lunghezza totale delle piantine in cm.	Numero di semi germinati	Lunghezza totale delle piantine in cm.
1° giorno	—	—	—	—	—	—
2° »	15	—	18	—	21	—
3° »	19	—	24	—	28	—
4° »	29	29.5	32	35	43	60
5° »	—	110	—	130	—	184
6° »	—	198	—	220	—	287
7° »	—	230	—	270	—	310

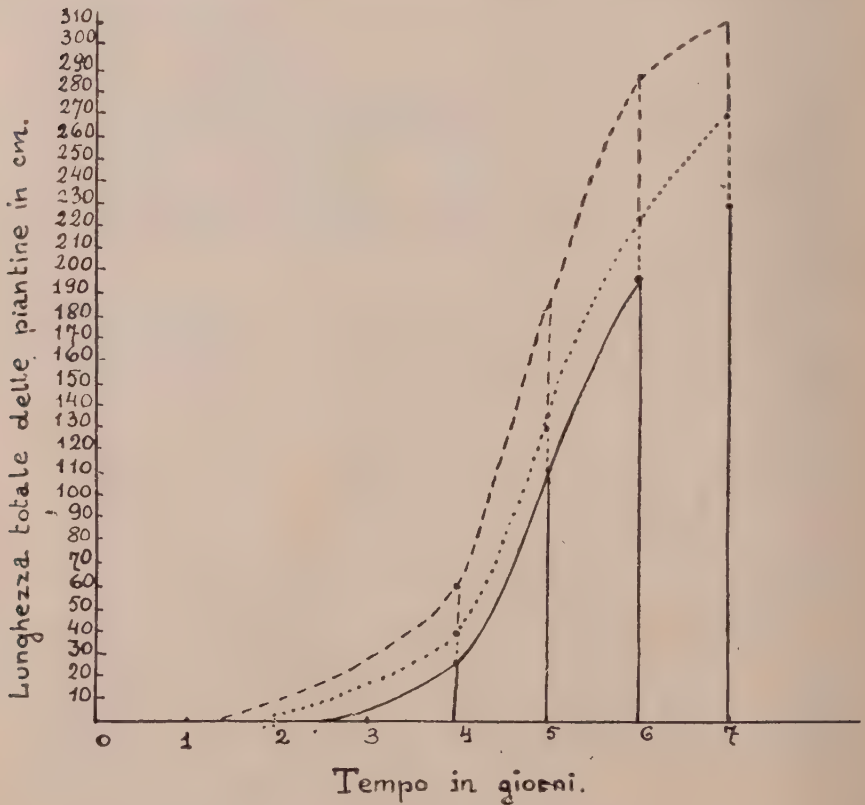


Fig. 3. — Orzo.

Al settimo giorno abbiamo aggiunto della terra ed abbiamo continuato il trattamento. Dopo 7 giorni, abbiamo tagliato le piantine rasente terra e le abbiamo pesate.

Peso totale delle piantine di orzo della prova di confronto gr. 3.9
 Peso totale delle piantine di orzo poste vicino al Radio-oscillatore » 5.2
 Peso totale delle piantine di orzo nel circuito in risonanza col Radio-oscillatore » 6

TABELLA IV.

Fagioli.

25 semi di fagiolo seminati su substrato di cotone idrofilo inumidito (t. m. = 21° C.).

25 Semi di fagiolo seminati il giorno zero	Confronto		Vicino al Radio-oscillatore		Nel circuito in risonanza col Radio-oscillatore	
	Numero di semi germinati	Lunghezza totale delle piantine in cm.	Numero di semi germinati	Lunghezza totale delle piantine in cm.	Numero di semi germinati	Lunghezza totale delle piantine in cm.
1° giorno	—	—	—	—	—	—
2° »	4	—	5	—	5	—
3° »	7	—	9	—	12	—
4° »	9	I = 4	10	I = 5	20	I = 11.5
5° »	10	I = 12	16	I = 16	23	I = 32
6° »	17	I = 16	22	I = 24	—	I = 67
7° »	—	I = 32	—	I = 48	—	I = 107
8° »	—	I = 64	—	I = 95	—	I = 150
9° »	—	I = 110	—	I = 150	—	I = 320

Al settimo giorno abbiamo aggiunto della terra ed abbiamo continuato il trattamento delle piantine. Dopo 7 giorni le piantine furono tagliate rasente terra e pesate.

Peso totale delle piantine di fagiolo della prova di confronto gr. 6
 Peso totale delle piantine di fagiolo poste vicino al Radio-oscillatore » 9.4
 Peso totale delle piantine di fagiolo poste nel circuito in risonanza col Radio-oscillatore » 12.8

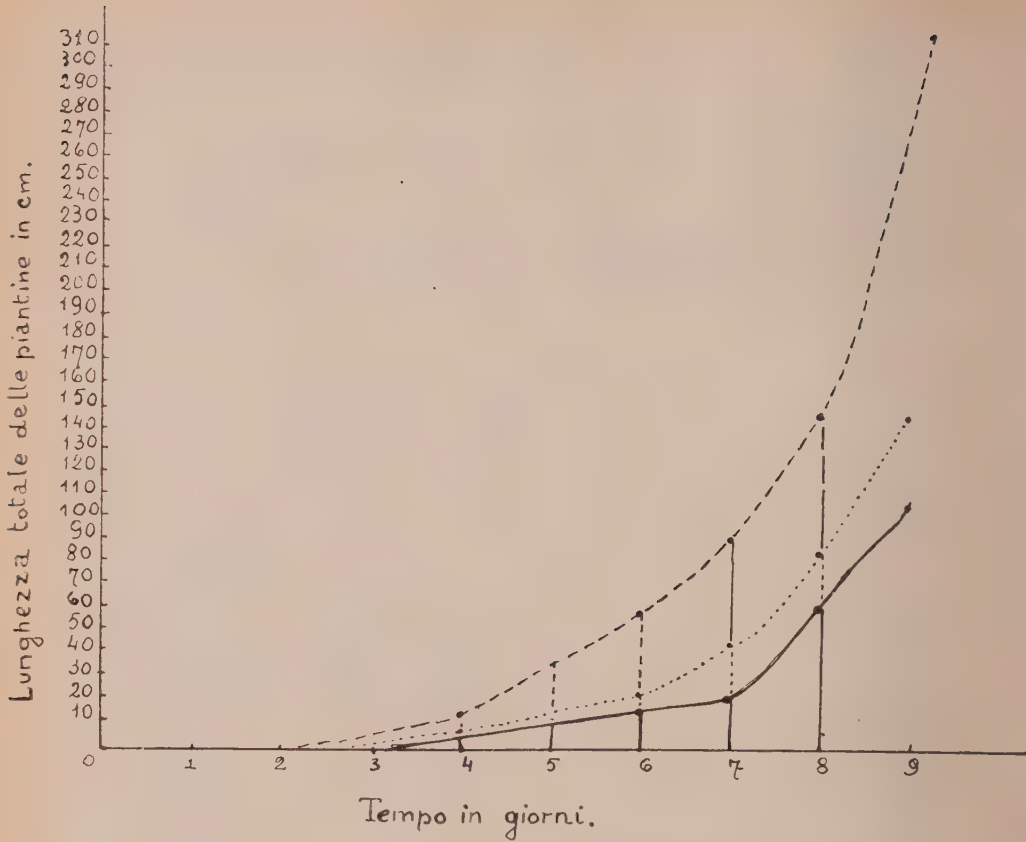


Fig. 4. — Fagioli.

TABELLA V. - *Piselli*.

25 semi di pisello seminati su substrato di cotone idrofilo
(t. m. = 21° C.).

25 Semi di pisello seminati al giorno zero	Confronto		Vicino al Radio-oscillatore		Nel circuito in risonanza col Radio-oscillatore	
	Numero di semi germinati	Lunghezza totale delle piantine in cm.	Numero di semi germinati	Lunghezza totale delle piantine in cm.	Numero di semi germinati	Lunghezza totale delle piantine in cm.
1° giorno	—	—	—	—	—	—
2° »	6	—	9	—	12	—
3° »	9	—	12	—	23	—
4° »	10	1 = 2	13	1 = 12	23	1 = 14
5° »	14	1 = 6	20	1 = 29	23	1 = 40
6° »	—	1 = 50	—	1 = 113	—	1 = 200
7° »	—	1 = 110	—	1 = 210	—	1 = 400

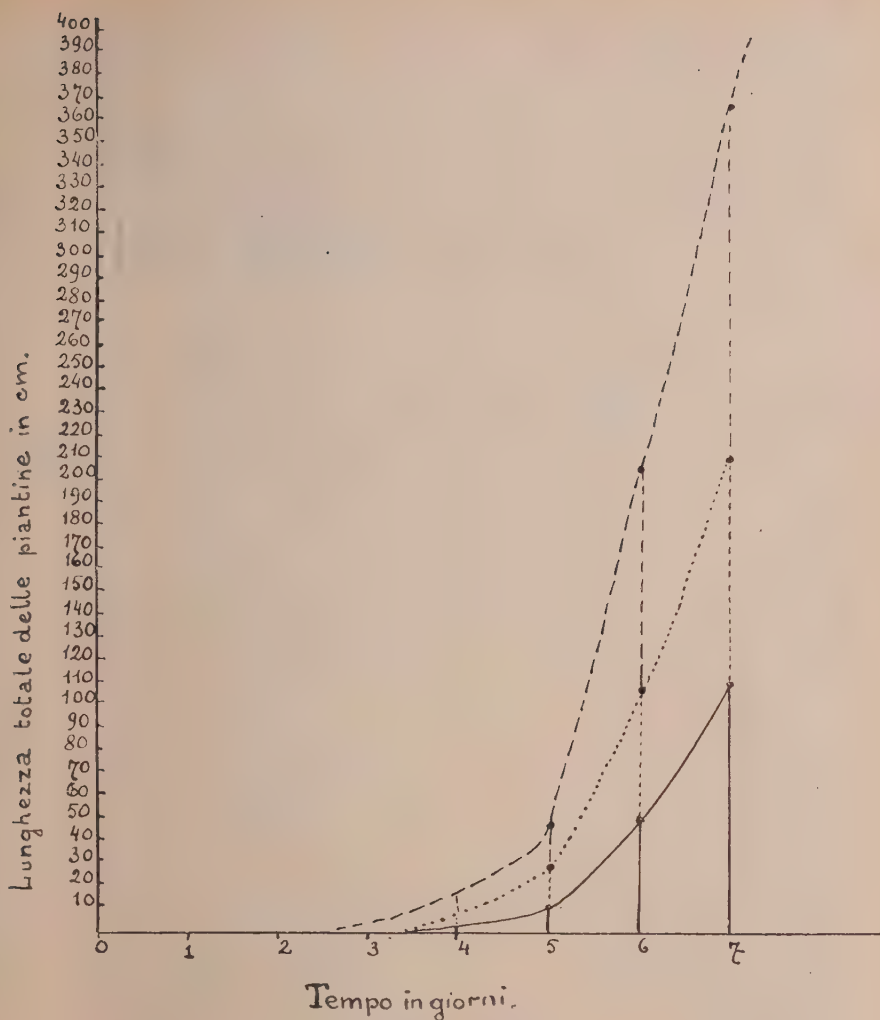


Fig. 5. — Piselli.

Al settimo giorno abbiamo aggiunto della terra ed abbiamo continuato il trattamento delle piantine. Dopo 7 giorni le piantine furono tagliate rasente terra e pesate.

Peso totale delle piantine di pisello della prova di confronto	gr. 4
Peso totale delle piantine di pisello poste vicino al Radio-oscillatore	» 6.8
Peso totale delle piantine di pisello poste nel circuito in risonanza col Radio-oscillatore	» 10

TABELLA VI. - *Mais*.

50 semi di mais seminati su substrato di cotone idrofilo inumidito.
(t. m. = 21° C.).

50 Semi di mais seminati al giorno zero	Confronto		Vicino al Radio-oscillatore		Nel circuito in risonanza col Radio-oscillatore	
	Numero di semi germinati	Lunghezza totale delle piantine in cm.	Numero di semi germinati	Lunghezza totale delle piantine in cm.	Numero di semi germinati	Lunghezza totale delle piantine in cm.
1° giorno	—	—	—	—	—	—
2° »	8	—	15	—	18	—
3° »	16	—	23	—	25	—
4° »	23	I = 28	30	I = 37	40	I = 50
5° »	—	I = 44	—	I = 56	—	I = 92
6° »	—	I = 66	—	I = 90	—	I = 116
7° »	—	I = 119	—	I = 165	—	I = 230

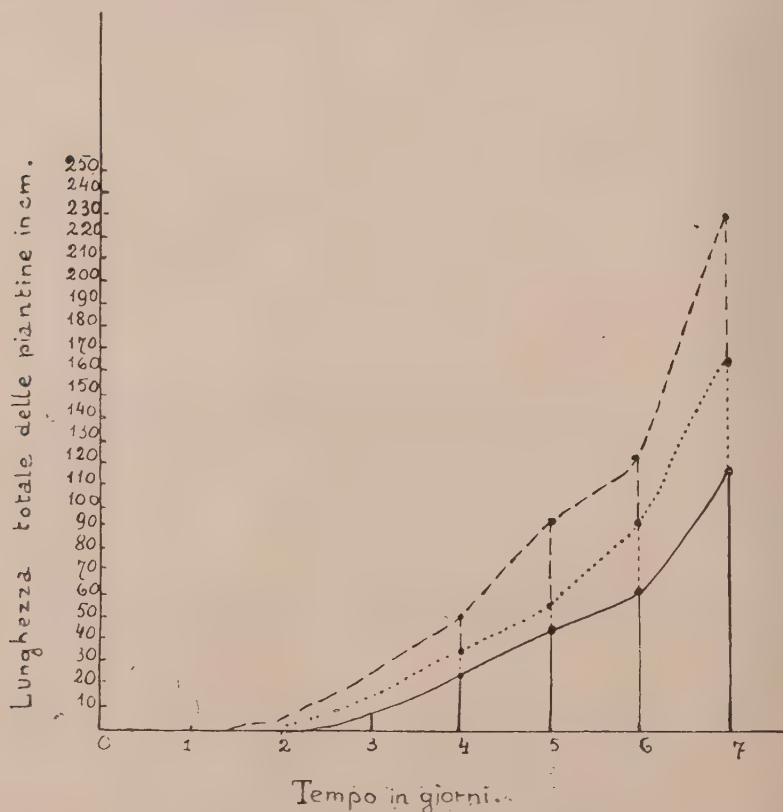


Fig. 6. — *Mais*.

A settimo giorno abbiamo aggiunto della terra ed abbiamo continuato il diverso trattamento delle piantine. Dopo 7 giorni le piantine furono tagliate rasente terra e pesate.

Peso totale delle piantine di mais della prova di confronto	gr. 9
Peso totale delle piantine di mais poste vicino al Radio-oscillatore	» 12.5
Peso totale delle piantine di mais poste nel circuito in risonanza col Radio-oscillatore	» 15

Conclusioni.

In base alle numerose esperienze eseguite sulla germinazione dei semi e sulla crescita delle piante sottoposte all'azione delle onde ultracorte ($\lambda = 2-3$ m.), entro un circuito oscillante in risonanza col Radio-oscillatore possiamo concludere quanto segue:

Sottoponendo i semi e le piante all'azione delle onde corte, e collocando i germinatoi entro le spire del circuito oscillante ricevente, si nota un'azione ancora più grande di quella riscontrata con l'interposizione del circuito oscillante Lakhovsky e di quella ottenuta col sistema dei fili di Lecher nelle zone di maggior intensità. (Vedi Parte I di questa Nota).

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 febbraio 1930 (Anno VIII)

Presidenza del sen. prof. A. GARBASSO

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica (Geometria). — *Reti di complessi lineari dello spazio S_5 aventi una rigata assegnata di rette-centri*. Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. GINO FANO.

1. La geometria della retta, in particolare dei complessi lineari di rette e loro fasci, in uno spazio qualsiasi è stata già abbastanza ampiamente studiata ⁽²⁾. Nello spazio a 5 dimensioni, un complesso lineare di rette è in generale privo di punti singolari (complesso *generale*), ma può anche avere una *retta-centro* oppure uno *spazio S_3 -centro*, luoghi di punti singolari (complessi *singolari*, o degeneri, risp. di 1^a e di 2^a specie). Rappresentato il complesso coll'equazione lineare in coordinate di retta $\sum a_{ik} p_{ik} = 0$, contenente 15 termini corrispondenti alle combinazioni binarie degli indici da 1 a 6, i tre casi corrispondono all'ipotesi che, assunto $a_{hi} = -a_{ih}$, la caratteristica del determinante emisimmetrico $|a_{ik}|$, che è certamente pari, valga risp. 6, 4, 2. La polarità rispetto a un complesso generale associa ad ogni retta un S_3 polare e viceversa, senza eccezioni; questo S_3 non incontra quella retta, oppure la contiene, secondo che la retta non appartiene o

(1) Presentata nella seduta del 2 febbraio 1930.

(2) Per la letteratura relativa, cfr. nella *Encykl. der Mathem. Wissenschaften* i due articoli III C 7 (SEGRE, *Mehrdimensionale Räume*, in part. n. 22) e III C 8 (ZINDLER, *Algebraische Liniengeometrie*, in part. n. 23). V. anche BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*... (2^a ediz., 1923; cap. V). Fra i lavori più recenti in argomento ricordo COMESSATTI, «Atti R. Ist. Veneto», to. 80, parte 2^a, 1920-21, p. 387.

appartiene al complesso. Ad ogni piano viene associato un piano polare, che ha a comune col primo un solo punto, oppure coincide con esso; in quest'ultimo caso si ha un *piano totale* del complesso (cioè le cui rette appartengono tutte al complesso). Un complesso singolare di 1^a specie si compone degli ∞^3 spazi S_3 rigati (S_3 totali) che dalla retta-centro proiettano le rette di un complesso lineare generale di uno spazio S_3 non incidente alla retta-centro; un complesso singolare di 2^a specie si compone delle rette incidenti al suo spazio S_3 -centro.

I vari tipi di fasci di complessi lineari in S_3 sono stati determinati da E. v. Weber⁽¹⁾. Per sistemi lineari di tali complessi di dimensione > 1 alcune caratteristiche numeriche sono state determinate da F. Palatini⁽²⁾. Avendo avuto occasione di approfondire questioni ulteriori, mi è parso che alcuni risultati presentino un certo interesse: ad essi sono dedicati la Nota presente, ed una successiva. Riferendomi soltanto a complessi *lineari*, quest'ultima qualifica sarà talvolta sottintesa.

2. Una rete di complessi lineari di S_3 del tipo più generale contiene un sistema ∞^1 ellittico d'indice 3 di complessi singolari di 1^a specie, le cui rette-centri formano una rigata ellittica del 6° ordine R^6 ⁽³⁾. Ogni R^6 di S_3 ha sempre almeno una cubica piana direttrice; e ne ha precisamente 1) o due (sole) distinte, ed è il caso più generale; oppure 2) una sola

(1) *Theorie der Systeme Pfaff'scher Gleichungen*, «Math. Ann.», 55, 1901, p. 386; cfr. in part. § 7. Come appare dal titolo, la classificazione dei fasci di complessi viene applicata allo studio dei sistemi di equazioni Pfaffiane. Dovendone approfittare in seguito, indico qui gli 11 tipi di fasci, con qualche maggior dettaglio geometrico:

I. Fasci il cui complesso generico non è singolare. Il fascio può allora contenere: 1) tre distinti complessi singolari di 1^a specie; si determina con due di questi, scelti in modo che la retta-centro di ciascuno dei due non appartenga all'altro; 2) due soli complessi singolari di 1^a specie, uno dei quali ne assorbe due del caso precedente; 3) un unico complesso singolare di 1^a specie; la sua retta-centro appartiene a tutti gli altri complessi del fascio, e ha come S_3 polare fisso un S_3 totale del primo; 4) due complessi singolari risp. di 1^a e 2^a specie, a retta-centro e spazio-centro sghembi; 5) un solo complesso singolare di 2^a specie, il cui spazio-centro ha rispetto agli altri complessi del fascio una retta polare fissa, in esso contenuta.

II. Fasci di complessi tutti singolari, generalmente di 1^a specie: 6) Le rette-centri sono a 2 a 2 sghembe e formano un regolo, il cui spazio è S_3 totale per tutto il fascio; 7), 8) le rette-centri passano per uno stesso punto P e formano un cono quadrico, o risp. un fascio di rette; i due casi si distinguono secondo che i complessi hanno a comune un unico S_3 totale, o un fascio di tali S_3 ; il fascio 8) contiene anche un complesso singolare di 2^a specie; 9), 10) fasci a retta-centro fissa, che proiettano da questa fasci di complessi lineari di S_3 contenenti due complessi speciali distinti, ovvero uno solo. Infine: 11) fascio di complessi tutti singolari di 2^a specie, i cui spazi-centro formano anche fascio (cioè stanno in un S_4 , e hanno a comune un S_2).

(2) «Atti R. Ist. Veneto», 40, parte 2^a, 1900-01, p. 371. Un lavoro successivo dello stesso A. («Giorn. di Matem.», 41, 1903) è dedicato ai complessi lineari e loro fasci in uno spazio qualunque.

(3) PALATINI, nota cit. degli «Atti Ist. Veneto».

(due infinitamente vicine); o infine 3) un intero fascio (razionale)⁽¹⁾. Il tipo 1) è generato da due cubiche piane in piani indipendenti, riferite in una corrispondenza birazionale non proiettiva. Il tipo 2) è caratterizzato dalla proprietà che lo spazio S_4 determinato dalle 3 generatrici uscenti da punti allineati della direttrice cubica contiene sempre il piano di questa stessa linea. Il tipo 3) è generato da cubiche in piani indipendenti e in corrispondenza proiettiva; pensando questa corrispondenza proiettiva estesa agli interi piani delle due cubiche, le congiungenti delle ∞^2 coppie di punti omologhi sono le direttrici rettilinee di una V_3^3 , varietà ∞^1 razionale normale di piani⁽²⁾, i cui piani contengono le ∞^1 direttrici cubiche di R^6 .

I tre tipi anzidetti di R^6 dipendono risp. da 36, 35, 33 parametri. Poichè anche le reti di complessi lineari di S_5 dipendono da 36 parametri, nasce la domanda se ogni R^6 del tipo 1) sia luogo delle rette-centri dei complessi singolari di qualche rete, e di quante. Vedremo ch'essa è tale per *quattro* reti, una delle quali però degenera nei casi 2) e 3).

Sia R^6 una rigata del tipo 1), colle direttrici cubiche γ, γ' contenute rispettivamente nei piani π, π' . Per ogni rete di complessi lineari avente R^6 come rigata delle rette-centri dei complessi singolari, i piani π, π' saranno piani totali della varietà base. Viceversa, ogni generatrice k di R^6 è retta-centro di ∞^3 complessi singolari di 1^a specie contenenti i piani totali π, π' , e nessuno dei quali contiene R^6 ; infatti R^6 è proiettata da k sopra un S_3 secondo una rigata R^4 con due rette direttrici doppie, e fra gli ∞^3 complessi lineari di S_3 contenenti queste due rette nessuno contiene R^4 . Gli ∞^3 complessi considerati di retta-centro k segano dunque ulteriormente R^6 secondo i gruppi di generatrici di una serie lineare completa g_4^3 , fra i quali gruppi precisamente *quattro* (distinti) G_4 costituiscono gli elementi doppi di involuzioni razionali g_2^1 sopra R^6 ⁽³⁾; e queste quattro g_2^1 hanno a loro volta quella g_4^3 come serie lineare doppia⁽⁴⁾. Variando k sopra R^6 , i gruppi somme di k contata due volte e dei corrispondenti G_4 appartengono sempre alla g_6^5 segata su R^6 dalla totalità di complessi lineari di S_5 ; perciò le serie somme di k e delle 4 corrispondenti g_2^1 coincideranno sempre rispettivamente colle 4 ben determinate g_3^2 aventi per serie doppia la detta g_6^5 . Questa g_6^5 è inoltre la serie somma delle due g_3^2 (di-

(1) C. SEGRE, *Ricerche sulle rigate ellittiche...*, «Atti R. Accad. di Torino», 21, 1885-86. V. anche U. PERAZZO, *Sulla incidenza di rette, piani e spazi ordinari...*, «Mem. R. Accad. di Torino» (2), 54, 1904.

(2) C. SEGRE, *Sulle varietà normali a tre dimensioni...*, «Atti R. Accad. di Torino», 21, 1885-86.

(3) Rappresentata la g_4^3 con una quartica ellittica di S_3 , sono queste le g_2^1 aventi gli elementi doppi in un piano; cioè quelle determinate dalle generatrici dei 4 coni quadrici passanti per la quartica.

(4) Sopra una cubica piana (ad es.), ogni g_2^1 è segata dalle rette passanti per un punto fisso della cubica, e il gruppo dei suoi 4 elementi doppi da una conica tangente alla cubica in questo stesso punto.

stinte) costituite dalle terne di generatrici di R^6 che incontrano rispettivamente le cubiche γ o γ' in punti allineati (lo si vede subito riferendosi a un complesso singolare di 2^a specie con spazio-centro incidente secondo rette sia a π che a π').

Fissiamo ora ad arbitrio sopra R^6 una delle quattro g_3^2 aventi come serie doppia la g_6^5 segata dai complessi lineari. Rispetto a questa g_3^2 ogni generatrice k di R^6 ha una g_2^1 residua, e vi è sempre un determinato complesso singolare Γ , di retta-centro k , contenente i 4 elementi doppi (G_4) di questa g_2^1 e i piani totali π, π' , ma non R^6 . Al variare di k sopra R^6 , questi gruppi $k^2 + G_4$ (di sei generatrici) non solo sono equivalenti, ma stanno in una g_6^2 (rappresentata la g_3^2 iniziale con una cubica piana, sono i gruppi ivi segati dalle coniche polari dei punti della cubica; coniche contenute a loro volta nella rete di tutte le coniche polari). E il minimo sistema lineare contenente gli ∞^1 complessi Γ è appunto una rete. Basta all'uopo accertare che l'insieme dei complessi Γ , ∞^1 ed ellittico, è d'indice 3. Ora per una generatrice arbitraria k di R^6 passano esclusivamente un complesso Γ in corrispondenza alla g_2^1 che ha k come elemento doppio, e quell'altro per cui k è retta-centro. Per il primo, k è intersezione semplice con R^6 ; sicchè R^6 non giace sull'involuppo dei complessi Γ , e perciò quel Γ conta semplicemente fra i complessi del sistema passanti per k . Conta invece doppiamente il secondo, pel quale k è retta doppia. Complessivamente se ne hanno dunque 3 passanti per k .

In corrispondenza alle 4 serie g_3^2 sopra considerate, troviamo altrettanti sistemi di complessi Γ ; e altrettante reti che li contengono e hanno R^6 come luogo delle rette-centri dei complessi singolari. Entro ciascuna di queste reti, appartengono ad un fascio quei complessi che segano su R^6 gruppi di generatrici di una stessa g_6^1 ; e a questi gruppi corrispondono, sulla cubica rappresentativa della g_3^2 , quelli segati da coniche polari di punti allineati. Perciò la g_3^2 inizialmente fissata su R^6 è quella costituita dalle terne di generatrici che sono rette-centri di complessi Γ di un medesimo fascio.

Pertanto: Le generatrici di una rigata ellittica R^6 di S_5 con due (e non più) direttrici cubiche distinte sono rette-centri dei complessi singolari (di 1^a specie) di quattro diverse reti. Le terne di generatrici che sono rette-centri di complessi di un medesimo fascio entro le singole reti formano le quattro diverse g_3^2 aventi come g_6^5 doppia la serie segata su R^6 dalla totalità dei complessi lineari di S_5 . La stessa g_6^5 è altresì somma delle due g_3^2 (distinte) costituite dalle terne di generatrici appoggiate all'una o rispettivamente all'altra direttrice cubica in punti allineati.

Il ragionamento precedente è applicabile alle rigate R^6 dei tipi 2) e 3) solo con opportune modificazioni; invero R^6 è allora proiettata da una sua generatrice nel caso 3) secondo una quadrica doppia, e nel caso 2) secondo una R^4 con un'unica direttrice rettilinea, tale perciò che vi sono ∞^1 com-

plessi lineari di S_3 contenenti R^4 e questa direttrice. Senza trattenermi su queste modificazioni, mi limito a osservare che in questi casi vengono a coincidere, su R^6 , le due g_3^2 delle terne di generatrici appoggiate a γ e rispettivamente γ' in punti allineati, e con essi perciò anche la g_3^2 delle rette-centri dei complessi di uno stesso fascio entro una delle 4 reti trovate. Questa rete, al limite, risulta composta di complessi tutti singolari di 2^a specie, cogli spazi-centro passanti nel caso 2) per il piano dell'unica cubica direttrice, nel caso 3) per il piano di una fra le ∞^1 cubiche. La rigata R^6 rimane luogo delle rette-centri dei complessi singolari di altre tre reti. Per la R^6 con ∞^1 direttrici cubiche questo viene anche confermato dalle considerazioni esposte al n.º seguente.

3. Quando le rette-centri dei complessi singolari di una rete formano una rigata R^6 del tipo 3)⁽¹⁾, la varietà base della rete contiene come piani totali i piani delle ∞^1 direttrici cubiche di R^6 , formanti una V_3^3 ; e la rete è perciò contenuta nel sistema lineare Λ di tutti i complessi contenenti questi ∞^1 piani rigati. Nella varietà M_8^{14} di S_{14} costituita dalle rette di S_3 , questi ∞^1 piani rigati sono anche piani, e formano una V_3^6 di S_8 con ∞^2 coniche direttrici (immagini dei regoli direttori di V_3^3); per i detti piani rigati passano dunque (precisamente) ∞^1 complessi lineari di S_3 . Rappresentando proiettivamente il loro sistema Λ sopra uno spazio Σ_3 , ai complessi singolari di 1^a e 2^a specie contenuti in Λ corrispondono rispettivamente punti di una M_4^3 e di una superficie F^4 di Veronese; quest'ultima doppia per la M_4^3 , mentre la prima è luogo dei piani tangenti di F^4 e dei piani delle sue ∞^2 coniche. Alle reti di complessi contenute in Λ corrispondono perciò i piani di Σ_3 ; e per questa via si possono determinare tutti i vari tipi di quelle reti: nelle reti di tipo più generale i complessi singolari hanno per rette-centri appunto le generatrici di una R^6 contenuta in V_3^3 . - In particolare, i piani delle coniche di F^4 sono immagini di reti di complessi singolari aventi una retta centro fissa, direttrice di V_3^3 . Nasce così una corrispondenza proiettiva fra i due sistemi ∞^2 delle coniche di F^4 e delle direttrici rettilinee di V_3^3 ; e a una R^6 ellittica formata da queste direttrici corrisponde un sistema ellittico ∞^1 d'indice 3 di coniche di F^4 . Accoppiando queste coniche secondo le tre involuzioni ellittiche di 2º ordine contenute nel loro sistema, si hanno su F^4 quartiche riducibili di tre diverse reti; i piani assi di queste reti (tutti incidenti ai piani di quelle ∞^1 coniche di F^4) sono le immagini, in Σ_3 , delle tre reti di complessi aventi la data R^6 come rigata delle rette-centri.

Risulta così confermato che *Ogni rigata ellittica R^6 con ∞^1 cubiche direttrici è luogo delle rette-centri di tre diverse reti di complessi lineari.*

(1) Il prof. G. GHERARDELLI mi comunica che gli ∞^2 complessi lineari contenenti la rigata delle tangenti di una C^6 ellittica normale formano appunto una rete di questo tipo particolare. Mi auguro egli possa presto pubblicare i suoi risultati, applicandoli altresì allo studio delle C^6 ellittiche di S_3 appartenenti a un complesso lineare.

Un piano di Σ , non contenuto nella M_2^4 anzidetta può incontrare F^4 in 1, 2, 3 punti: esso è allora immagine di una rete contenente un egual numero di complessi singolari di 2^a specie (oltre a ∞^1 complessi singolari di 1^a specie). Nel primo caso si hanno le reti più generali contenenti un complesso singolare di 2^a specie. Le rette-centri degli ∞^1 complessi singolari di 1^a specie formano allora una rigata razionale R^2 con ∞^1 coniche direttrici. Lo spazio-centro del complesso singolare di 2^a specie contiene due generatrici di R^2 (distinte o coincidenti). Una stessa R^2 è luogo delle rette-centri dei complessi di ∞^1 reti diverse, tutte contenenti lo stesso complesso singolare di 2^a specie: i fasci contenuti in queste reti determinano su R^2 , colle loro terne di rette-centri, le ∞^1 serie g_2^2 per le quali le due generatrici contenute nello spazio-centro del complesso singolare di 2^a specie formano una coppia neutra.

Matematica (Geometria). — *Sulle sezioni spaziali della varietà grassmanniana delle reti dello spazio a cinque dimensioni.* Nota del Corresp. GINO FANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astronomia. — *Sopra la teoria moderna dell'evoluzione delle stelle.* Nota ⁽¹⁾ del Socio G. ARMELLINI.

1. — Un gran numero di fatti dati dalle osservazioni mostra che le stelle, durante la prima fase della loro esistenza (stelle giganti), hanno grande volume, debolissima densità media ed elevato splendore. Col progredire del tempo, lo splendore decresce lentamente ma incessantemente, mentre la densità aumenta. Invece la temperatura effettiva della fotosfera, misurabile con osservazioni spettro-fotometriche, dimostra una variazione più complessa: e cioè essa aumenta in un primo tempo finchè, giunta ad un massimo, comincia a decrescere (stelle nane).

2. — Questi fenomeni sembrarono spiegati da una teoria emessa nel 1913 dall'astronomo H. N. Russell, supponendo che il calore dell'astro fosse generato dalla contrazione e cioè a spese del lavoro gravitazionale. Allora, per un celebre teorema di termodinamica dei gas dimostrato dal Lane ⁽²⁾, ne risultava che l'astro, contraendosi doveva riscaldarsi non ostante il calore perduto per irradiazione, e ciò spiegava il primo periodo della vita stellare

(1) Presentata nella seduta del 2 febbraio 1930.

(2) Cfr. POINCARÉ, *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques*, pp. 221 e sgg. (Paris, Hermann, 1913).

(stelle giganti). Giunto l'astro ad una certa temperatura, il Russell supponeva che i gas che lo costituiscono cessassero di ubbidire alla legge dei gas perfetti a causa della notevole densità raggiunta nella contrazione. Il teorema di Lane diveniva allora inapplicabile e l'astro cominciava a raffreddarsi per irradiazione come un corpo liquido o solido.

3. - Questa teoria, assai suggestiva per la sua grande semplicità ed anche oggi spesso ripetuta, ebbe però breve vita. Infatti, nel 1924, Eddington prendendo in esame l'estrema compressibilità dei gas altamente ionizzati - come sono i gas stellari - fece vedere che anche nella seconda metà della vita dell'astro non ha luogo quello scostamento dai gas perfetti che è fondamentale nella teoria del Russell.

Non solo: gli studi moderni hanno ormai mostrato che la massima parte del calore stellare proviene dalla trasformazione della materia in energia e non già dal lavoro effettuato nella contrazione. Infatti il calcolo dimostra che il calore risultante dalla contrazione sarebbe appena sufficiente per pochi milioni di anni, mentre sembra ormai sicuro che la vita delle stelle debba misurarsi in triloni di anni.

Caduta dunque la prima teoria del Russell, lo stesso astronomo ne ha immaginato una seconda, semplice e brillante come la prima, ma disgraziatamente un po' artificiosa, giacchè postula l'esistenza di varie specie di materia convertibili in energia a diverse temperature. Inoltre, secondo gli studi del Jeans, sorgerebbero contro la teoria del Russell gravi obiezioni sopra la stabilità stellare dal punto di vista meccanico e termico⁽¹⁾.

Un'altra teoria è dovuta invece al citato Jeans, il quale non pone alcuna ipotesi artificiosa, ma abbozza solo una dimostrazione intuitiva fondandosi, più che altro, su diagrammi grafici⁽²⁾, ciò che permette di dubitare delle sue conclusioni.

Esposto così lo stato attuale della questione, che ho avuto occasione di esaminare per la preparazione del secondo volume del mio *Trattato di Astronomia Siderale*, mi è sembrato utile di riprendere il problema del Jeans, escludendo i procedimenti grafici e ponendolo sopra un terreno rigorosamente analitico. Sono giunto in tal modo ad una dimostrazione matematica che forma appunto oggetto della presente Nota.

4. - Cominciamo a ricordare che gli astronomi misurano la quantità di energia Q irradiata da un astro nell'unità di tempo, per mezzo di un parametro M che si chiama « grandezza bolometrica assoluta » e che - a meno di una costante additiva dipendente dall'origine della scala - è eguale al logaritmo decimale di Q moltiplicato per il fattore $-2,5$. Ora, poichè Q è evidentemente proporzionale alla velocità con cui la massa stellare μ si tra-

(1) Cfr JEANS, *Astronomy and Cosmogony*, p. 166. (Cambridge, University Press, 1928).

(2) Cfr JEANS, op. cit., p. 169.

si trasforma in energia, e cioè è proporzionale alla derivata di μ rispetto al tempo t , avremo l'equazione:

$$(1) \quad M = \text{costante} - 2,5 \log \frac{d\mu}{dt}.$$

D'altra parte ammettiamo, col Jeans, che la quantità di materia che si trasforma in energia in un tempo infinitesimo sia proporzionale alla quantità totale di materia realmente trasformabile. Avremo allora l'equazione:

$$(2) \quad \frac{d\mu}{dt} = -\varepsilon(\mu - \mu_r)$$

dove ε è un coefficiente positivo molto piccolo e dove μ_r indica quella parte della massa stellare che è costituita da materiali eventualmente refrattari alla trasformazione in energia.

Infine, supponendo che l'astro si trovi in equilibrio radiativo, la massa μ , la grandezza bolometrica assoluta M e la temperatura effettiva fotosferica T sono legate tra loro dall'equazione⁽¹⁾ di Eddington:

$$(3) \quad M = \text{costante} - 3,5 \log \mu - 3,75 \log (1 - \beta) - 2 \log T$$

dove i logaritmi sono sempre a base decimale, la massa μ è misurata prendendo per unità quella del Sole ed il coefficiente β è l'unica radice reale positiva dell'equazione algebrica:

$$(4) \quad 0,061 \mu^2 \beta^4 + \beta - 1 = 0.$$

Si dimostra poi immediatamente dalla (4) che, variando μ da zero ad infinito, β varia da 1 a zero.

5. - Ora le (1), (2), (3) e (4) formano un sistema tra le quattro variabili M , T , μ , β ed il tempo t . Risolvendole si potrà quindi conoscere la storia dell'astro e cioè sapere come variano, col tempo, il suo splendore, la sua massa e la sua temperatura fotosferica. Cerchiamo dunque di affrontare il problema.

Intanto, integrando la (2) si ha immediatamente:

$$(5) \quad \mu = \mu_r + (\mu_0 - \mu_r) e^{-\varepsilon t}$$

dove μ_0 è il valore iniziale della massa dell'astro ed t indica, al solito, la base dei logaritmi naturali. Derivando, otteniamo:

$$(6) \quad \frac{d\mu}{dt} = -\varepsilon(\mu_0 - \mu_r) e^{-\varepsilon t}$$

(1) Cfr. EDDINGTON, *The internal constitution of the Stars*. (Cambridge, University Press, 1926).

e quindi la (1) diviene:

$$(7) \quad M = \text{costante} + 2,5 N \epsilon t$$

dove N è il logaritmo decimale di ϵ . La (7) mostra subito che M cresce e quindi che lo splendore dell'astro decresce col tempo, ciò che è conforme ai risultati delle osservazioni.

6. — Esaminiamo ora come vari la temperatura fotosferica.

A tale scopo, derivando la (3) rispetto al tempo e ricordando che in essa i logaritmi sono a base decimale, abbiamo:

$$(8) \quad \frac{2}{NT} \frac{dT}{dt} = - \frac{dM}{dt} - \frac{3,5}{N\mu} \frac{d\mu}{dt} + \frac{3,75}{N(1-\beta)} \frac{d\beta}{d\mu} \frac{d\mu}{dt}$$

dalla quale, sostituendo al posto di $\frac{dM}{dt}$ il suo valore ricavato dalla (7), otteniamo:

$$(9) \quad \frac{2}{NT} \frac{dT}{dt} = - 2,5 N \epsilon - \frac{3,5}{N\mu} \frac{d\mu}{dt} + \frac{3,75}{N(1-\beta)} \frac{d\beta}{d\mu} \frac{d\mu}{dt}.$$

Essendo $N = 0,43429$ e ponendo per $\frac{d\mu}{dt}$ il valore dato da (6), la (9) diviene:

$$(10) \quad \frac{2}{NT} \frac{dT}{dt} = \epsilon P$$

dove, per brevità, abbiamo chiamato con P l'espressione:

$$(11) \quad P = - 1,086 + \frac{8,059(\mu_0 - \mu_r)}{\mu} e^{-\epsilon t} - \frac{8,636}{1-\beta} (\mu_0 - \mu_r) \frac{d\beta}{d\mu} e^{-\epsilon t}.$$

Ora la (4) ci dà, derivando e riducendo,

$$(12) \quad \frac{d\beta}{d\mu} = - \frac{0,494 \beta^3 \sqrt{1-\beta}}{4-3\beta}$$

mentre, risolvendo la (4) stessa rispetto a μ , otteniamo:

$$(13) \quad \mu = \frac{4,05 \sqrt{1-\beta}}{\beta^2}.$$

In conseguenza la (11) diviene:

$$\begin{aligned} (14) \quad P &= - 1,086 + \frac{1,990(\mu_0 - \mu_r) \beta^2 e^{-\epsilon t}}{\sqrt{1-\beta}} + \frac{4,266(\mu_0 - \mu_r) \beta^3 e^{-\epsilon t}}{(4-3\beta) \sqrt{1-\beta}} = \\ &= - 1,086 + \frac{(\mu_0 - \mu_r) \beta^2 e^{-\epsilon t}}{\sqrt{1-\beta}} \left[\frac{1,990(4-3\beta) + 4,266\beta}{4-3\beta} \right] = \\ &= - 1,086 + \frac{(\mu_0 - \mu_r) \beta^2 e^{-\epsilon t}}{\sqrt{1-\beta}} \cdot \frac{7,960 - 1,704\beta}{4-3\beta}. \end{aligned}$$

Ma, dalla (5) e dalla (13) ricaviamo:

$$(15) \quad (\mu_0 - \mu_r) e^{-\epsilon r} = \mu - \mu_r = \frac{4,05 \sqrt{1 - \beta}}{\beta^2} - \mu_r$$

onde la (14) diviene, sostituendo e riducendo:

$$(16) \quad P = -1,086 + \frac{7,960 - 1,704\beta}{4 - 3\beta} \left[4,05 - \frac{\mu_r \beta^2}{\sqrt{1 - \beta}} \right].$$

Ora, quando la stella è appena formata, la sua massa è assai grande e quindi, per la (4), β è assai prossima a zero. In conseguenza secondo la (16) P è positiva e quindi, per la (10), la temperatura fotosferica cresce: precisamente come indicano le osservazioni.

Ma vediamo che cosa avviene col progredire del tempo. Per la (10) è evidente che l'incremento di temperatura continuerà fino a quando P si annulla, ciò che corrisponde ad un massimo di T . Ora eguagliando P a zero, si ha dalla (16):

$$(17) \quad 4,05 - \frac{\mu_r \beta^2}{\sqrt{1 - \beta}} = \frac{1,086(4 - 3\beta)}{7,960 - 1,704\beta}$$

e cioè

$$(18) \quad \frac{\mu_r \beta^2}{\sqrt{1 - \beta}} = \frac{a - b\beta}{c - \beta}$$

dove abbiamo posto per semplicità:

$$(19) \quad a = 16,35 \quad ; \quad b = 2,14 \quad ; \quad c = 4,66.$$

Ora la (18) ci dà, elevando a quadrato e riducendo,

$$(20) \quad F(\beta) = \mu_r^2 \beta^4 (c - \beta)^2 + (\beta - 1)(a - b\beta)^2 = 0$$

equazione in cui compare l'unica variabile β , e che deve essere soddisfatta ogni volta che la temperatura T raggiunge un valore estremo (massimo o minimo).

Per esaminare dunque come vari la temperatura fotosferica di un astro durante la sua esistenza, occorre studiare le radici della (20) nell'intervallo $0 \leq \beta \leq 1$. Infatti — come abbiamo visto poco fa — al principio della vita di un astro, essendo la massa grandissima, β è prossima a zero; mentre alla fine, essendo la massa divenuta piccola per trasformazione in energia, β è prossima ad 1 come indica l'equazione (4).

Ora dico che nell'intervallo $0 \leq \beta \leq 1$, la (20) ha una sola radice. Infatti derivando si ha:

$$(21) \quad F'(\beta) = 4\mu_r^2 \beta^3 (c - \beta)^2 - 2\mu_r^2 \beta^4 (c - \beta) + (a - b\beta)^2 - 2b(\beta - 1)(a - b\beta) = \\ = 2\mu_r^2 \beta^3 (c - \beta) [2c - 3\beta] + (a - b\beta)^2 + 2b(1 - \beta)(a - b\beta)$$

e quindi, a causa dei valori dati di a, b, c , la $F'(\beta)$ si conserva positiva nell'intervallo $0 \leq \beta \leq 1$, ciò che mostra che $F(\beta)$ è funzione crescente nel medesimo intervallo. D'altra parte, come è facile vedere dalla (20), $F(\beta)$ è negativa per $\beta = 0$ e positiva per $\beta = 1$: essa quindi ha una ed una sola radice nell'intervallo studiato.

Ne segue che nell'intervallo $0 \leq \beta \leq 1$, la P si annullerà una ed una sola volta passando dal segno positivo che ha per β prossima a zero al segno negativo che ha per β prossima ad 1. In conseguenza, per le (10), la temperatura fotosferica T dopo essere cresciuta fino ad un dato valore comincerà nuovamente a decrescere, fino al termine della vita stellare.

Così la nuova teoria della trasformazione della massa in energia spiegherebbe in modo assai plausibile i risultati che l'osservazione ha raccolto sopra le vicende della vita stellare ⁽¹⁾.

Geofisica. — *Sul campo gravitazionale esterno del geoide ellissoidico.* Nota ⁽²⁾ del Socio C. SOMIGLIANA.

I.

La determinazione delle linee di forza nel campo esterno al geoide ellissoidico, mediante integrazione delle equazioni differenziali di queste linee, presenta qualche difficoltà; poichè la funzione potenziale non è armonica e non è quindi applicabile la ordinaria teoria delle funzioni potenziali simmetriche del Beltrami nel caso dell'ellissoide di rotazione, e nemmeno, nel caso generale, il teorema di Jacobi, che insegna a costruire il secondo integrale mediante una quadratura, quando un primo integrale sia conosciuto.

Possono quindi avere un certo interesse le seguenti proprietà del campo, a cui si giunge con calcoli abbastanza semplici.

(1) In questi ultimi tempi si è scoperta l'esistenza di alcune stelle (*nane bianche*) che hanno temperatura fotosferica elevata e densità straordinariamente grande, anche 50.000 volte superiore a quella dell'acqua.

Logicamente, a causa di questa elevatissima densità che indica una contrazione assai progredita, sembra plausibile di porre tali stelle all'estremo limite della vita astrale, considerandole cioè come astri assolutamente decrepiti. L'elevata temperatura fotosferica, che dà loro il colore bianco da cui vengono chiamate, si potrebbe spiegare ammettendo che — verso la fine della vita astrale — a causa della straordinaria densità raggiunta siano più facili le collisioni tra elettroni e protoni e quindi si attivi la trasformazione della materia in energia. In tal modo i materiali refrattari μ_r , di cui abbiamo parlato nel testo, si trasformerebbero in energia provocando un ultimo riscaldamento precursore della morte dell'astro.

(2) Presentata nella seduta del 2 febbraio 1930.

Quando l'ellissoide sia di rotazione intorno all'asse minore, la funzione potenziale W si può porre sotto la forma ⁽¹⁾

$$W = \alpha V_o + \beta V_1 + \frac{\omega^2}{2} r^2$$

dove

$$V_o = A_o(u) \quad V_1 = A_o(u) - r^2 A_1(u) - \chi^2 A_3(u)$$

$$A_o(u) = \int_u^\infty \frac{ds}{\sqrt{R(s)}} \quad A_1(u) = \int_u^\infty \frac{ds}{(a^2 + s) \sqrt{R(s)}}$$

$$A_3(u) = \int_u^\infty \frac{ds}{(c^2 + s) \sqrt{R(s)}}$$

ed α, β sono costanti definite dalle relazioni

$$2\alpha = \gamma M - \frac{2}{3} \frac{a^2 \omega^2}{A_1 a^2 - A_3 c^2} \quad 2\beta = \frac{a^2 \omega^2}{A_1 a^2 - A_3 c^2};$$

γ è la costante dell'attrazione, A_1, A_3 i valori degli integrali $A_1(u), A_3(u)$ per $u = 0$.

Da questa espressione della funzione potenziale del campo della gravitazione, valida in tutto lo spazio esterno all'ellissoide, e sull'ellissoide stessa, si ricavano per le componenti della gravità

$$g_r = - \frac{\partial W}{\partial r} \quad g_\chi = - \frac{\partial W}{\partial \chi},$$

mediante facili riduzioni, le seguenti espressioni

$$(I) \quad \begin{cases} g_r = \frac{2\alpha}{\sqrt{R(u)}} \frac{1}{h^2(u)} \frac{r}{a^2 + u} + A(u) r \\ g_\chi = \frac{2\alpha}{\sqrt{R(u)}} \frac{1}{h^2(u)} \frac{\chi}{c^2 + u} + B(u) \chi \end{cases}$$

dove si è posto

$$A(u) = 2\beta A_1(u) - \omega^2 \quad B(u) = 2\beta A_3(u) \quad h^2(u) = \frac{r^2}{(a^2 + u)^2} + \frac{\chi^2}{(c^2 + u)^2}.$$

(1) Cfr. anche per il significato delle notazioni usate: *Teoria generale del campo gravitazionale dell'ellissoide di rotazione*, C. SOMIGLIANA, « Mem. della Soc. Astron. italiana », vol. IV, 1929.

Le formole (1) si possono anche scrivere

$$(2) \quad \begin{cases} g_r = \left\{ \frac{2\alpha}{\sqrt{R(u)}} \frac{1}{h(u)} + A(u)(a^2 + u)h(u) \right\} \frac{r}{a^2 + u} \frac{1}{h(u)} \\ g_z = \left\{ \frac{2\alpha}{\sqrt{R(u)}} \frac{1}{h(u)} + B(u)(c^2 + u)h(u) \right\} \frac{z}{c^2 + u} \frac{1}{h(u)} \end{cases}$$

mettendo così in evidenza i coseni di direzione della normale all'ellissoide $u = \text{cost.}$ omofocale all'ellissoide geoidica. Siccome su questa superficie $u = 0$, ed inoltre

$$A(0)a^2 = B(0)c^2,$$

dalle formole precedenti risulta subito che l'ellissoide iniziale $u = 0$ è superficie equipotenziale e si ricava, per la gravità su di essa, la nota espressione

$$g = \frac{2\alpha}{a^2 c} \frac{1}{h(0)} + 2\beta A_3(0) c^2 h(0).$$

Ma è interessante ricavare dalle formole (1) o (2) la espressione della componente g_v della gravità secondo la normale ad una qualsiasi delle ellissoidi u , omofocali al geoide.

Poichè

$$g_v = \frac{g_r}{h(u)} \frac{r}{a^2 + u} + \frac{g_z}{h(u)} \frac{z}{c^2 + u}$$

dalle (2) si ha subito

$$(3) \quad g_v = \frac{1}{h(u)} \left\{ \frac{2\alpha}{\sqrt{R(u)}} + \frac{r^2 A(u)}{a^2 + u} + \frac{z^2 B(u)}{c^2 + u} \right\}.$$

Ora se dalle precedenti formole (1) o (2) si ricavano i valori della gravità all'equatore ed al polo della ellissoide u , che rispettivamente indicheremo con g_e^* , g_p^* , si trova

$$\begin{aligned} g_e^* &= \left(\frac{2\alpha}{\sqrt{R(u)}} + A(u) \right) \sqrt{a^2 + u} \\ g_p^* &= \left(\frac{2\alpha}{\sqrt{R(u)}} + B(u) \right) \sqrt{c^2 + u} \end{aligned}$$

e quindi si ha identicamente

$$\frac{g_e^* r^2}{(a^2 + u)^{\frac{3}{2}}} + \frac{g_p^* z^2}{(c^2 + u)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\alpha}{\sqrt{R(u)}} + \frac{A(u) r^2}{a^2 + u} + \frac{B(u) z^2}{c^2 + u}$$

ossia confrontando colla (3)

$$(4) \quad g_v = \frac{1}{h(u)} \left\{ \frac{g_e^* r^2}{(a^2 + u)^{\frac{3}{2}}} + \frac{g_p^* \chi^2}{(c^2 + u)^{\frac{3}{2}}} \right\}.$$

Questa formola è una generalizzazione della espressione da me trovata per la gravità alla superficie dell'ellissoide⁽¹⁾. Se infatti si pone $u = 0$ e si introduce la latitudine φ , per cui

$$r = a^2 h(0) \cos \varphi \quad \chi = c^2 h(0) \sin \varphi,$$

si trova

$$(5) \quad g = \frac{ag_e \cos^2 \varphi + cg_p \sin^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + c^2 \sin^2 \varphi}}$$

che è appunto la formola indicata. Ora se si osserva che $(a^2 + u)^{\frac{1}{2}}$, $(c^2 + u)^{\frac{1}{2}}$ sono i semiassi dell'ellissoide $u = \text{cost.}$ si trova facilmente che anche la (4) si può porre sotto una forma identica alla (5), purchè con a, c si intendano i semiassi dell'ellissoide omofocale che si considera, e con φ la corrispondente latitudine. Possiamo quindi concludere:

La legge di distribuzione della componente normale della gravità è la stessa su tutte le ellissoidi omofocali all'ellissoide geodica, vale a dire: dipende in modo identico dai semiassi di tali ellissoidi e dai valori della gravità al polo ed all'equatore di essi.

Dalle espressioni (1) ricaviamo anche facilmente la componente della gravità secondo la tangente al meridiano λ . Si trova

$$g_\lambda = - \frac{r\chi}{h(u)} \left\{ \frac{A(u)}{c^2 + u} - \frac{B(u)}{a^2 + u} \right\}.$$

Il rapporto $g_\lambda : g_v$ ci dà la deviazione della gravità dalla normale alla ellissoide omofocale passante pel punto considerato.

II.

Proprietà analoghe a quelle dimostrate valgono anche nel caso in cui l'ellissoide geodico abbia tre assi differenti. Le espressioni per le componenti g_x, g_y, g_z della gravità nel campo esterno trovate da Pizzetti in questo caso (*Principi della teoria meccanica della figura dei pianeti*, cap. V, § 28) si possono porre sotto la forma seguente:

(1) C. SOMIGLIANA, V. loc. cit., cap. II, § 2.

$$(7) \quad \begin{cases} g_x = \left(\frac{H(u)}{b^2(u)\sqrt{R(u)}} \frac{1}{a^2 + u} - A(u) \right) x \\ g_y = \left(\frac{H(u)}{b^2(u)\sqrt{R(u)}} \frac{1}{b^2 + u} - B(u) \right) y \\ g_z = \left(\frac{H(u)}{b^2(u)\sqrt{R(u)}} \frac{1}{c^2 + u} - C(u) \right) z. \end{cases}$$

In queste formole

$$H(u) = \gamma \left(\frac{4k_1 x^2}{(a^2 + u)^2} + \frac{4k_2 y^2}{(b^2 + u)^2} - M \right)$$

essendo γ la costante dell'attrazione, M la massa totale del geoide, k_1, k_2 costanti.

Inoltre

$$(8) \quad \begin{cases} A(u) = 2\gamma (3k_1 A_{11}(u) + k_2 A_{12}(u)) - \omega^2 \\ B(u) = 2\gamma (k_1 A_{12}(u) + 3k_2 A_{22}(u)) - \omega^2 \\ C(u) = 2\gamma (k_1 A_{13}(u) + k_2 A_{23}(u)) \end{cases}$$

essendo ω la velocità rotazione e

$$A_{11}(u) = \int_u^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)^2 \sqrt{R(s)}} \quad A_{12}(u) = \int_u^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)(b^2 + s)\sqrt{R(s)}}, \dots$$

$$R(s) = (a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s).$$

Per $u = 0$ si ha

$$(9) \quad a^2 A(0) = b^2 B(0) = c^2 C(0) = E$$

con

$$E \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) = \frac{4\gamma}{abc} \left(\frac{k_1}{a^2} + \frac{k_2}{b^2} \right) - 2\omega^2.$$

Le (9) sono anche le equazioni che definiscono le costanti k_1, k_2 . Da queste relazioni si vede subito come, per $u = 0$, il vettore gravitazionale (g_x, g_y, g_z) risulti normale alla ellissoide geoidica.

Ma noi dobbiamo occuparci di un'altra relazione generale che deriva dalle formole (7). Da queste possiamo ricavare i valori della gravità ai vertici di una ellissoide qualsiasi u , omofocale all'ellissoide geoidica.

Indicheremo rispettivamente questi valori g_x^*, g_y^*, g_z^* in corrispondenza ai tre assi coordinati. Si trova così facilmente

$$(8) \quad \begin{cases} g_x^* = \frac{4 \gamma k_1}{\sqrt{(a^2 + u) R(u)}} - \left(\frac{\gamma M}{\sqrt{R(u)}} + A(u) \right) \sqrt{a^2 + u} \\ g_y^* = \frac{4 \gamma k_2}{\sqrt{(b^2 + u) R(u)}} - \left(\frac{\gamma M}{\sqrt{R(u)}} + B(u) \right) \sqrt{b^2 + u} \\ g_z^* = - \left(\frac{\gamma M}{\sqrt{R(u)}} + C(u) \right) \sqrt{c^2 + u}. \end{cases}$$

Da queste relazioni si ottiene subito per la espressione

$$(9) \quad S = \frac{x^2 g_x^*}{(a^2 + u)^{\frac{3}{2}}} + \frac{y^2 g_y^*}{(b^2 + u)^{\frac{3}{2}}} + \frac{z^2 g_z^*}{(c^2 + u)^{\frac{3}{2}}}$$

il valore

$$(10) \quad S = \frac{H(u)}{\sqrt{R(u)}} - \frac{x^2 A(u)}{a^2 + u} - \frac{y^2 B(u)}{b^2 + u} - \frac{z^2 C(u)}{c^2 + u}.$$

Ma se dalle (7) calcoliamo il valore della componente g_v della gravità normale all'ellissoide u , cioè

$$g_v = \frac{1}{h(u)} \left(\frac{x g_x}{a^2 + u} + \frac{y g_y}{b^2 + u} + \frac{z g_z}{c^2 + u} \right),$$

troviamo

$$g_v = \frac{H(u)}{h(u) \sqrt{R(u)}} - \frac{1}{h(u)} \left(\frac{x^2 A(u)}{a^2 + u} + \frac{y^2 B(u)}{b^2 + u} + \frac{z^2 C(u)}{c^2 + u} \right).$$

Confrontando quindi colle (9), (10) possiamo scrivere

$$(11) \quad g_v = \frac{1}{h(u)} \left(\frac{x^2 g_x^*}{(a^2 + u)^{\frac{3}{2}}} + \frac{y^2 g_y^*}{(b^2 + u)^{\frac{3}{2}}} + \frac{z^2 g_z^*}{(c^2 + u)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

ove

$$h(u) = \sqrt{\frac{x^2}{(a^2 + u)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + u)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + u)^2}}.$$

Questa formola corrisponde precisamente alla (4) che abbiamo trovato nel caso dell'ellissoide di rotazione; questa anzi non è che un caso speciale della (11).

Se introduciamo le coordinate geografiche

$$x = (a^2 + u) h(u) \cos \varphi \cos \psi$$

$$y = (b^2 + u) h(u) \cos \varphi \sin \psi$$

$$z = (c^2 + u) h(u) \sin \varphi$$

dalla (11) ponendo

$$a_u = (a^2 + u)^{\frac{1}{2}} \quad b_u = (b^2 + u)^{\frac{1}{2}} \quad c_u = (c^2 + u)^{\frac{1}{2}}$$

troviamo

$$(12) \quad g_v = \frac{(a_u g_x^* \cos^2 \psi + b_u g_y^* \sin^2 \psi) \cos^2 \varphi + c_u g_z^* \sin^2 \varphi}{\sqrt{(a_u^2 \cos^2 \psi + b_u^2 \sin^2 \psi) \cos^2 \varphi + c_u^2 \sin^2 \varphi}}$$

e possiamo così concludere che anche nel caso dell'ellissoide a tre assi: *la legge della distribuzione della componente normale della gravità è identica su tutte le ellissoidi omofocali all'ellissoide geoidica.*

Per $u=0$ la formola precedente (12) costituisce una generalizzazione della (5) alla quale è giunto, per altra via, anche il prof. Mineo ⁽¹⁾.

Da un punto di vista generale è interessante che un'espressione della gravità, analoga a quella valida sulla superficie del geode, continui a sussistere anche nelle regioni esterne, abbastanza prossime a questa superficie, perchè possa essere considerata trascurabile la componente tangenziale.

Fisica (Fisica-Matematica). — Elettrostatica piana. Nota ⁽²⁾ del Corrisp. U. CISOTTI.

1. *Conduttore cilindrico.* — Si consideri un cilindro conduttore isolato, elettrizzato in modo che il campo elettrico da esso mantenuto, sia identico in ogni sezione piana normale alle generatrici, essendo gli stessi gli elementi caratteristici del campo nei punti di una stessa retta parallela alle generatrici. Il campo è allora completamente caratterizzato quando sia noto il suo comportamento in una generica sezione piana normale alle generatrici. Sieno x, y le coordinate di un punto generico di questo piano, c la sezione del cilindro: detto ψ il potenziale elettrostatico del campo, esso assume valore costante su c ed ha il ben noto comportamento dei potenziali logaritmici. Se μ designa la densità di distribuzione lineare dell'elettricità su c , si ha, per la nota formola di Coulomb,

$$(1) \quad \mu = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{d\psi}{dn} \right|, \text{ nei punti di } c,$$

essendo n la normale a c nel punto che si considera.

È noto che, se si introduce la funzione φ , armonica coniugata di ψ , risulta $f = \varphi + i\psi$ funzione di $z = x + iy$ — *potenziale complesso* — e inoltre, per le condizioni di monogeneità si ha, in particolare, lungo c

$$\left| \frac{d\psi}{dn} \right| = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|,$$

(1) *Sulla gravità superficiale d'un pianeta supposto ellissoidico a tre assi*, « Boll. Un. Mat. It. », 1928, p. 80.

(2) Presentata nella seduta del 2 febbraio 1930.

per cui la (1) può scriversi altresì

$$(2) \quad \mu = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|, \text{ nei punti di } c.$$

Si noti che, essendo lungo c $d\psi = 0$, risulta pure $df = d\varphi$; inoltre

$$|ds| = |\sqrt{dx^2 + dy^2}| = |d\zeta|,$$

per cui la precedente può scriversi

$$(3) \quad \mu = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{df}{d\zeta} \right|, \text{ nei punti di } c.$$

2. *Conduttore circolare.* — Sia $\zeta = \xi + i\eta$; la funzione

$$(4) \quad f = iq \log \zeta$$

definisce il potenziale elettrostatico complesso nel piano ζ , corrispondente a un conduttore circolare γ , col centro nel punto $\zeta = 0$, essendo q la quantità di elettricità. Se è unitario il raggio di γ l'applicazione della (3) al caso attuale fornisce $\mu = \frac{q}{2\pi}$, com'è noto.

3. *Altra forma della formula di Coulomb.* — Si immagini di far corrispondere il piano forato $|\zeta| \geq 1$ del numero precedente, in modo conforme, sopra il piano $z = x + iy$ di cui al n. 1^o. Se è nota la relazione che lega tra di loro z e ζ il problema elettrostatico, risolto dalla (4) pel conduttore circolare, è altresì risolto per il conduttore c , il potenziale elettrostatico complesso essendo definito ancora dalla (4) quando ζ si consideri funzione di z . La densità di distribuzione dell'elettricità su c si otterrà dalla (3), tenendo presente che, per la (4), risulta:

$$\frac{df}{d\zeta} = \frac{df}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = \frac{iq}{\zeta} \frac{d\zeta}{dz}$$

e quindi su c , $\left| \frac{df}{d\zeta} \right| = q \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|$. Pertanto la (3) può sostituirsi colla seguente⁽¹⁾

$$(5) \quad \mu = \frac{q}{2\pi} \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|, \text{ nei punti di } c.$$

(1) Cfr. la mia Nota *Tipi di profili rigidi isolati che subiscono un'azione dinamica parte di una corrente fluida locale circolante intorno ad essi*. Questi «Rendiconti», vol. X, 2^o sem. 1929, p. 469.

(2) Cfr. JEANS, *The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism*. (Fifth Edition); Cambridge, University Press 1927, §§ 313, 314. Il 4π assunto dall'A. è qui sostituito con 2π .

È facile di constatare che q continua ancora a rappresentare la quantità di elettricità distribuita su c . Infatti tale quantità è, per la precedente,

$$\int_c \mu |d\zeta| = \frac{q}{2\pi} \int_c \left| \frac{d\zeta}{d\chi} \right| |d\chi| = \frac{q}{2\pi} \int_{\gamma} |d\zeta| = \frac{q}{2\pi} \cdot 2\pi = q.$$

4. *Esempio: conduttore rettilineo.* — Sia c un conduttore rettilineo. Ponendo

$$(6) \quad \chi = \frac{l}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right),$$

il piano ζ , forato circolarmente, viene messo in corrispondenza conforme col piano χ , tagliato lungo il segmento rettilineo $-l \leq x \leq l$ dell'asse reale.

Avendosi da (6)

$$\frac{d\chi}{d\zeta} = \frac{l}{2} \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) \quad \text{e quindi} \quad \frac{d\zeta}{d\chi} = \frac{2\zeta^2}{l(\zeta^2 - 1)},$$

risulta per $\zeta = e^{i\sigma}$

$$\left| \frac{d\zeta}{d\chi} \right| = \frac{1}{l |\sin \sigma|},$$

d'altra parte dalla stessa (6) si deduce per $\zeta = e^{i\sigma}$: $\chi = l \cos \sigma$, $y = 0$, pertanto

$$|\sin \sigma| = \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}},$$

ne segue che su c ,

$$\left| \frac{d\zeta}{d\chi} \right| = \frac{1}{\sqrt{l^2 - x^2}}, \quad (-l \leq x \leq l),$$

per questa la (5) diviene:

$$(7) \quad \mu = \frac{q}{2\pi \sqrt{l^2 - x^2}}, \quad (-l \leq x \leq l),$$

formula, notevolmente semplice, che esprime la legge di distribuzione dell'elettricità sul conduttore rettilineo. È quasi superfluo far rilevare che si ha una doppia distribuzione, nel senso che l'elettricità viene distribuita, in modo eguale, su entrambi i bordi del segmento stesso, rivolti uno verso il semipiano di ordinate positive e l'altro verso l'altro semipiano.

5. *Problema inverso.* — In sostanza il problema elettrostatico diretto: determinazione della distribuzione dell'elettricità su una nota quantità di elettricità e la forma di c , è completamente risolubile, per mezzo della (5), quando sia nota la relazione tra ζ e χ . Prendiamo ora in esame il problema inverso: quale deve essere la forma del conduttore c perchè su di

esso la densità elettrica sia assegnata *a priori*? Bisogna intendersi bene sopra questa assegnazione *a priori*: evidentemente non si può dare preventivamente la forma di c e la densità su di esso perchè il potenziale elettrostatico, funzione armonica, soddisfacente alle solite condizioni all'infinito, dovrebbe avere contemporaneamente su c un valore costante e la sua derivata normale assegnata, ciò che è troppo. Ma se noi consideriamo incognita la forma di c e assegnata la densità μ nei punti del contorno circolare γ , corrispondente a c , allora il profilo c risulta determinato. Poniamo, infatti

$$(8) \quad \frac{d\zeta}{d\chi} = e^{\Omega} = e^{\alpha + i\beta}, \quad \Omega = \alpha + i\beta,$$

α e β reali, assumendo per Ω quella determinazione che corrisponde a $\Omega = 0$ quando $\frac{d\zeta}{d\chi} = 1$. Dalla precedente segue:

$$\left| \frac{d\zeta}{d\chi} \right| = e^{\alpha},$$

per cui, per la (5), si ha

$$(9) \quad \alpha = \log \frac{2\pi\mu}{q}.$$

L'assegnare μ funzione dei punti $\zeta = e^{i\sigma}$ di γ determina α in funzione di σ . Allora la funzione Ω risulta determinata per mezzo della formula di Schwarz ⁽¹⁾.

$$(10) \quad \Omega(\zeta) = ik + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(\sigma) \frac{\zeta + e^{i\sigma}}{\zeta - e^{i\sigma}} d\sigma.$$

Questa determina, a meno della costante puramente immaginaria ik , la funzione $\Omega(\zeta)$. Allora dalla (8) si ricava:

$$(11) \quad \chi - \chi_0 = \int_{\zeta_0}^{\zeta} e^{-\Omega} d\zeta.$$

Questa formula stabilisce la corrispondenza conforme tra il piano forato $|\zeta| \geq 1$ e il piano χ esterno a un contorno c , corrispondente alla circonferenza $|\zeta| = 1$; le costanti arbitrarie della (11) consentono di far corrispondere a tre punti di γ tre punti qualsivogliano di c . Questo contorno c è precisamente la forma che deve avere il conduttore elettrico perchè su di esso la elettricità sia distribuita colla densità μ preventivamente assegnata su γ . Il corrispondente potenziale elettrostatico complesso è definito dalla (4), quando si intende espresso per la χ mediante la (11).

(1) Cfr., ad es., la mia *Idromeccanica piana*. Milano, Tambarini, 1921, p. 14, (1). La formula citata vale pel problema interno; pel problema esterno, come nel caso attuale, basta cambiare segno al secondo membro.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica (Fisica-matematica). — *Forma intrinseca delle equazioni dell'equilibrio dei mezzi elastici*. Nota I di A. TONOLO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

È noto che Lamé per dare forma geometrica alle equazioni dell'equilibrio dei mezzi elastici, assunse come sistema di riferimento tre famiglie di superficie isostatiche mutuamente ortogonali. Disgraziatamente queste superficie non esistono, in generale, nel mezzo che si considera, onde le equazioni geometriche di Lamé, così espressive e di rara eleganza, non possono considerarsi come quelle che reggono l'equilibrio di un corpo elastico quale si voglia.

Però, se non è lecito fissare nel mezzo un tale sistema di superficie, è sempre possibile stabilire in esso l'esistenza di una terna ortogonale di congruenze di linee. Questa ci viene offerta, sia dalle tre *direzioni principali* (direzioni che sono ortogonali prima e dopo la deformazione), sia da quelle tre direzioni per cui gli elementi superficiali ad esse perpendicolari, sono sottoposti a sforzi puramente normali. Queste due terne ortogonali di congruenze generalmente sono distinte, tranne nei corpi isotropi, nei quali coincidono. Ho fissato l'attenzione sopra la prima terna. Detti ε_i gli *allungamenti principali*, la deformazione del mezzo è caratterizzata dalla suddetta *terna di congruenze principali* e dalle ε_i . Si tratta ora di stabilire le equazioni indefinite dell'equilibrio dell'elasticità che fanno intervenire le caratteristiche della deformazione attraverso le dilatazioni ε_i ed elementi geometrici intrinseci alle congruenze principali. Ciò è, in sostanza, un ritorno corretto all'idea di Lamé. Lo sviluppo matematico del criterio direttivo testè formulato forma l'oggetto di tre Note, riservandomi in seguito ricavare qualche conseguenza, od applicazione significativa, dalle equazioni qui esposte ⁽²⁾.

(1) Nella seduta del 2 febbraio 1930.

(2) La teoria matematica della elasticità veniva svolta dal prof. Ricci nelle Sue Lezioni all'Università di Padova secondo i canoni del Suo Calcolo Assoluto. Purtroppo queste mirabili Lezioni non sono stampate: ho potuto avere i fascicoli, ove esse sono raccolte, dalla gentilezza dell'amico prof. PALATINI, che qui vivamente ringrazio.

Nello svolgimento della presente ricerca ho usufruito di alcune formule che si trovano in questi fascicoli. Ma non essendo essi diffusi, per la chiara intelligenza del lavoro ho preferito ricavarle con altro procedimento.

Colgo qui l'occasione per esprimere l'augurio di veder pubblicata tutta la produzione scientifica del Ricci, comprese, cioè, le Sue Lezioni di Fisica-matematica e di Geometria Superiore. Egli usava raccoglierle in fogli che poi passava, per la copia, agli allievi. Sono Lezioni di altissimo valore scientifico, ma, purtroppo, conosciute da poche persone.

§ I. — *Richiamo di alcune formule della teoria dell'elasticità
in coordinate cartesiane ortogonali.*

1. Sia S un corpo elastico i cui punti vengano riferiti ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali y^v ($v = 1, 2, 3$). In una deformazione infinitesima del corpo, ogni suo punto P di coordinate y^v va ad assumere un'altra posizione P' di coordinate $y^v + u^v$, le u^v essendo funzioni infinitesime delle coordinate del punto P . Nel corpo S , non ancora deformato, consideriamo due elementi lineari ds e δs spiccati dallo stesso punto P , e sia δ l'angolo da essi formato: dopo la deformazione quest'angolo valga $\delta - 2\varphi$.

Se diciamo $\frac{dy^v}{ds}$, $\frac{\delta y^v}{\delta s}$ i coseni direttori dei due elementi ds e δs , sussiste la formula (1):

$$(1) \quad \varphi \sin \delta + \varepsilon \cos \delta = \xi_{\mu\nu} \frac{dy^\mu}{ds} \frac{\delta y^\nu}{\delta s},$$

nella quale ε è la media aritmetica degli allungamenti unitari degli elementi ds e δs , e le $\xi_{\mu\nu}$ sono funzioni delle coordinate y^v definite dalle posizioni:

$$(2) \quad 2\xi_{\mu\nu} = \frac{\partial u^\mu}{\partial y^\nu} + \frac{\partial u^\nu}{\partial y^\mu}.$$

È ben noto che la deformazione è caratterizzata dalle sei quantità $\xi_{\mu\nu} = \xi_{\nu\mu}$, le quali perciò si chiamano *componenti di deformazione*.

2. Lo stato di tensione del corpo S deformato è invece individuato da altre sei funzioni delle y^v , $\Phi^{\mu\nu} = \Phi^{\nu\mu}$, le quali si esprimono in modo lineare ed omogeneo a mezzo delle $\xi_{\mu\nu}$: abbiamo così le formule (2):

$$(3) \quad \Phi^{\mu\nu} = c^{\mu\nu, \rho\sigma} \xi_{\rho\sigma},$$

ove i coefficienti $c^{\mu\nu, \rho\sigma}$ dipendono soltanto dalla natura del mezzo elastico, e sono legati dalle relazioni:

$$(4) \quad c^{\mu\nu, \rho\sigma} = c^{\nu\mu, \rho\sigma} = c^{\mu\nu, \sigma\rho}.$$

(1) Ora, e nel seguito, non scriveremo il segno Σ quando esso si riferisce ad indici che figurano due volte in una medesima espressione, e cioè *una volta sopra e una volta sotto* (indici tensoriali), mentre questo segno verrà indicato, quando si riferisce ad indici che sono puramente ordinali (Beinindizes, secondo EINSTEIN). Per indicare i primi useremo sempre le lettere greche $\alpha, \mu, \nu, \rho, \sigma$; mentre per i secondi le lettere latine i, j, h, k .

(2) U. CISOTTI, *Lezioni di Calcolo tensoriale*. (Milano, Libreria Editrice Politecnica, 1928), cap. IV.

Le funzioni $\Phi^{\mu\nu}$ sono le *componenti degli sforzi*; precisamente, fissato un valore dell'indice ν , la $\Phi^{\nu\nu}$ dà lo sforzo che si esercita normalmente all'elemento superficiale perpendicolare all'asse y^ν , mentre le $\Phi^{\mu\nu}$ ($\nu \neq \mu$) danno gli sforzi che si esercitano tangenzialmente a questo elemento.

3. Il *potenziale elastico* è dato da una forma quadratica definita negativa nelle componenti di deformazione, i cui coefficienti sono quelli che figurano nelle (3), con l'aggiunta delle ulteriori relazioni:

$$(5) \quad c^{\mu\nu, \rho\sigma} = c^{\rho\sigma, \mu\nu},$$

le quali, assieme alle (4), riducono a 21 il numero di questi coefficienti distinti. Chiamato 2Π il potenziale, abbiamo:

$$(6) \quad 2\Pi = c^{\mu\nu, \rho\sigma} \xi_{\mu\nu} \xi_{\rho\sigma}.$$

In particolare nei corpi isotropi, si ha:

$$(7) \quad 2\Pi = (2B - A)\Theta^2 - 2BJ,$$

essendo A e B le costanti di elasticità adottate da Green, e

$$(8) \quad \Theta = \sum_i \xi_{ii} \quad J = \sum_{ij} \xi_{ij} \xi_{ji}.$$

4. Siano Y^ν le componenti, rispetto agli assi y^ν , delle forze di massa ridotte all'unità di volume. Abbiamo:

$$(9) \quad \Phi^{\mu\nu} = \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_{\mu\nu}}.$$

Le equazioni indefinite dell'equilibrio dei mezzi elastici sono le seguenti:

$$(10) \quad \frac{\partial \Phi^{\mu\nu}}{\partial y^\mu} = Y^\nu.$$

§ II. — Riferimento a coordinate curvilinee.

Riferiamo il corpo S ad un sistema di coordinate curvilinee x^ν qualsiasi ($\nu = 1, 2, 3$), e cerchiamo di scrivere le equazioni del § precedente in questo sistema di coordinate, senza naturalmente rifare nelle variabili x^ν quei ragionamenti che nelle variabili cartesiane y^ν conducono alle suddette equazioni. Basterà, perciò, scrivere nelle variabili x^ν delle equazioni che hanno carattere tensoriale, e che inoltre si riducano alle precedenti quando le x^ν si riducono alle y^ν .

1. Sia

$$(11) \quad ds^2 = a_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

la forma che dà il quadrato dell'elemento lineare nelle variabili x^{ν} dello spazio occupato dal corpo S. Indichiamo con $a^{\mu\nu}$ il tensore reciproco del tensore fondamentale $a_{\mu\nu}$. Rappresentiamo con u^{ν} tre funzioni delle x^{ν} infinitesime che formino le componenti di un tensore semplice contravariante, le quali, in coordinate y^{ν} , diventino le funzioni u^{ν} del n. 1 del § precedente. Posto:

$$u_{\mu} = a_{\mu\nu} u^{\nu},$$

indichiamo con $u_{\mu\nu}$ le derivate covarianti delle u_{μ} rispetto alla forma (11), e introduciamo le funzioni

$$(12) \quad 2 \xi_{\mu\nu} = u_{\mu\nu} + u_{\nu\mu},$$

che costituiscono manifestamente le componenti di un tensore covariante doppio simmetrico.

Siano ancora

$$(13) \quad \mu^{\nu} = \frac{dx^{\nu}}{ds}, \quad \mu^{\nu} = \frac{\delta x^{\nu}}{\delta s}$$

i parametri di due congruenze di linee tracciate nel corpo S, e costruiamo l'invariante

$$(14) \quad \xi_{\rho\sigma} \mu^{\rho} \mu^{\sigma}.$$

Questo nelle coordinate y^{ν} si riduce al secondo membro della (1): il primo membro della (1) per il suo significato non dipende dalla scelta delle variabili di riferimento. Possiamo quindi scrivere nelle variabili x^{ν} ,

$$(15) \quad \varphi \sin \delta + \varepsilon \cos \delta = \xi_{\rho\sigma} \mu^{\rho} \mu^{\sigma}.$$

Ricaviamo dalla (15) due conseguenze che ci saranno utili in seguito.

Chiamando ε_{μ} l'allungamento unitario lungo una linea della congruenza μ^{ν} ; abbiamo, dalla (15),

$$(16) \quad \varepsilon_{\mu} = \xi_{\rho\sigma} \mu^{\rho} \mu^{\sigma}.$$

Si supponga ora che le linee delle due congruenze μ^{ν} e μ^{σ} , passanti per uno stesso punto, siano ortogonali prima della deformazione; allora la (15) dà il loro scorrimento φ :

$$(17) \quad \varphi = \xi_{\rho\sigma} \mu^{\rho} \mu^{\sigma}.$$

Matematica (Analisi). — *Una questione di stabilità.* Nota di R. CACCIOPOLI, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. G. SCORZA.

È noto che ogni integrale dell'equazione

$$(1) \quad y''(x) + \varphi(x)y(x) = 0,$$

dove $\varphi(x)$ è una funzione positiva verificante le limitazioni

$$(2) \quad 0 < a \leq \varphi(x) \leq b,$$

oscilla indefinitamente al tendere di x all'infinito (annullandosi infinite volte). Nei casi più semplici (in particolare quando φ è costante) le oscillazioni hanno sempre ampiezza limitata, e non v'ha alcun integrale asintotico allo zero: i limiti di indeterminazione di $y^2 + y'^2$ essendo entrambi finiti e positivi. Si pone allora il problema se queste circostanze abbiano luogo in generale, se cioè ad assicurare la *stabilità* degli integrali della (1) basti la condizione (2).

In una Nota postuma di Fatou, recentemente pubblicata⁽²⁾, è tentata una risposta affermativa a questa domanda. Per consiglio del prof. Picòne, ho preso a studiare il problema, ed ho dovuto concludere che la risposta è invece negativa. Espongo qui le mie considerazioni, e dimostro la sufficienza di una condizione di stabilità, necessariamente assai più restrittiva della (2).

1. — Definiamo una funzione $\varphi(x)$ di periodo $\frac{3\pi}{4}$, costante a tratti, ponendo $\varphi = 1$ nell'intervallo $(0, \frac{\pi}{2})$, e $\varphi = 4$ nell'intervallo $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$; e calcoliamo l'integrale della (1) definito dalle condizioni iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Nell'intervallo $(0, \frac{\pi}{2})$ si ha

$$y = \sin x;$$

nell'intervallo $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$

$$y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right);$$

(1) Nella seduta del 2 febbraio 1930.

(2) « Comptes Rendus », p. 867 del to. 189.

nell'intervallo $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$

$$y = -2 \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right);$$

nell'intervallo $\left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$

$$y = -2 \sin(2x - 2\pi),$$

e così via. Invece nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$

$$y = -\frac{1}{2} \sin(2x + \pi),$$

e nell'intervallo $\left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$

$$y = -\frac{1}{2} \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right), \text{ ecc.}$$

In generale, la y è prolungata oltre l'intervallo $\left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$ secondo la relazione

$$y\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = -2y(x).$$

Sicchè evidentemente

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} [y^2(x) + y'^2(x)] &= \infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [y^2(x) + y'^2(x)] &= 0. \end{aligned}$$

2. — In quest'esempio il coefficiente $\varphi(x)$ è discontinuo. Ma si vede subito che l'instabilità può anche presentarsi con una funzione continua. Sia infatti $\varphi_1(x)$ una tale funzione, e sia $y_1(x)$ l'integrale dell'equazione

$$(3) \quad y_1''(x) + \varphi_1(x) y_1(x) = 0$$

che prende gli stessi valori iniziali di $y(x)$. Posto $\varphi_1 = \varphi + \psi$, $y_1 = y + \chi$, si ottiene per χ l'equazione

$$\chi'' + \varphi_1 \chi = -\psi y,$$

con i dati iniziali $\chi(0) = \chi'(0) = 0$; donde, indicando con $\eta_1(x)$ l'integrale della (3) definito dalle condizioni $\eta_1(0) = 1$, $\eta_1'(0) = 0$, si ricava

$$\chi = \eta_1 \int_0^x \psi y y_1 dx - y_1 \int_0^x \psi y \eta_1 dx.$$

Ora supponiamo il prodotto ψy sommabile, condizione questa evidentemente compatibile con la continuità di $\varphi_1^{(1)}$. Allora gli integrali γ_1 e η_1 della (3) non potranno essere entrambi limitati: poichè lo sarebbe γ , e quindi γ , contro quanto abbiamo dimostrato.

3. — Passiamo ora a cercare un criterio di stabilità per l'equazione (1). Supposta $\varphi(x)$ assolutamente continua e dotata di derivata sommabile tra $-\infty$ e ∞ , poniamo

$$f(x) = \varphi(x) y^2(x) + y'^2(x).$$

Derivando otterremo

$$f'(x) = \varphi'(x) y^2(x),$$

donde

$$|f'(x)| \leq \frac{|\varphi'(x)|}{\varphi(x)} f(x),$$

donde ancora

$$f(x) e^{-\int_0^x \frac{|\varphi'|}{\varphi} dx} \leq f(0) e^{\int_0^x \frac{|\varphi'|}{\varphi} dx}.$$

Sia ora $\varphi(x)$ una funzione a variazione limitata tra $-\infty$ e ∞ . Potremo costruire una successione $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ di funzioni assolutamente continue tendenti a φ , tali che gli integrali $\int_0^x \frac{|\varphi'_n|}{\varphi_n} dx$ tendano uniformemente all'integrale di Stieltjes

$$\int_0^x \frac{1}{\varphi} d\varphi_1.$$

Un integrale $\gamma_n(x)$ dell'equazione

$$\gamma_n''(x) + \varphi_n(x) \gamma_n(x) = 0,$$

definito da condizioni iniziali fisse qualunque, tenderà uniformemente all'in-

(1) Si potrà infatti, p. es., spezzare l'asse x in infiniti intervalli finiti b_r , e determinare in b_r la φ_1 in modo che negli estremi essa prenda un valore fisso a , e che l'integrale

$$\int_{b_r} |\psi y| dx$$

non superi il termine generale b_r di una serie convergente Σb_r .

tegrale $y(x)$ della (1), definito dalle stesse condizioni, ed insieme y'_n tenderà ad y' . Pertanto y soddisferà la disequaglianza

$$f(0) e^{-\int_0^x \frac{|d\varphi|}{\varphi}} \leq f(x) \leq f(0) e^{\int_0^x \frac{|d\varphi|}{\varphi}}.$$

Conchiudendo, gli integrali della (1) sono stabili se oltre alla condizione (2) la φ verifica quella di avere variazione limitata, ed in tal caso due limiti d'indeterminazione di $\varphi y^2 + y'^2$ sono

$$[\varphi(0) y^2(0) + y'^2(0)] e^{-\int_0^\infty \frac{|d\varphi|}{\varphi}} \quad \text{e} \quad [\varphi(0) y^2(0) + y'^2(0)] e^{\int_0^\infty \frac{|d\varphi|}{\varphi}}.$$

Più generalmente, osservando che la stabilità richiede solo condizioni verificate da un certo valore di $|x|$ in poi, possiamo enunciare che: Se φ ha variazione limitata esternamente ad un certo intervallo finito, e se i limiti di φ per $x \rightarrow \infty$ e $x \rightarrow -\infty$ sono positivi, gli integrali della (1) sono stabili e non asintotici allo zero.

Questo criterio ha certamente scarsa portata, poichè implica in fondo che la (1) sia asintotica, per $x \rightarrow \infty$ (e similmente per $x \rightarrow -\infty$) ad un'equazione a coefficiente costante positivo. Ma non v'ha luogo a cercarne uno sostanzialmente più generale, dato che sul modello dell'esempio del n. 1 si costruiscono subito altre funzioni φ , aventi oscillazioni arbitrariamente piccole, che diano luogo allo stesso comportamento degli integrali.

Matematica. — Alcune osservazioni suggerite da un teorema sulle varietà abeliane reali. Nota di S. CHERUBINO, presentata⁽¹⁾ dal Socio G. SCORZA.

Al teorema dimostrato nella Nota che precede aggiungiamo le osservazioni seguenti, che ne mettono in maggior rilievo l'interessante significato geometrico e la portata ch'esso può avere nella teoria delle varietà abeliane reali.

Per comodità del lettore lasciamo inalterate le numerazioni dei paragrafi e delle formole.

3. Se si fissa su V^* una involuzione di ordine 2λ generata da un gruppo di trasformazioni involutorie di 2° specie scelto comunque, questa involuzione non è sempre l'immagine di una V con una S di carattere reale λ . Ecco però quello che in tal caso può dirsi:

(1) Nella seduta del 19 gennaio 1930.

Poniamo che la involuzione ed il gruppo che la generano si individuino coi (7)*. Il sistema determinato da questi può sempre supporre generato⁽¹⁾ dalle colonne di una matrice quadrata intera che questa volta, non essendo (7)* necessariamente di carattere reale λ , dovrà scriversi $N \cdot (2m^*, 2n^*)_{-1} = N \cdot 2 \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1}^{-1}$ con N matrice unimodulare ed $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ matrice caratteristica minima regolare di una simmetria di carattere reale λ . Perciò si pone $\omega = \omega^* N \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1}^{-1}$ cosicchè, prendendo $\omega^{**} = \omega^* N$, si ha

$$\omega^{**} \cdot N^{-1} I_0 N = \omega^* I_0 N = \omega^* N = \omega^{**}.$$

Dunque ω^{**} è una matrice riemanniana legata ad una varietà abeliana V^{**} birazionalmente identica a V^* e su V^{**} esiste una simmetria \mathfrak{J} la cui corrispondente antisostituzione riemanniana involutoria per ω^{**} è di matrice dei coefficienti $\mathfrak{J} = N_{-1} I_0 N_{-1}^{-1}$, quindi di carattere reale zero⁽²⁾.

Dopo ciò può scriversi $\omega = \omega^{**} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1}^{-1}$ e si ha

$$\bar{\omega} = \omega \cdot \left| \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1}^{-1} \mathfrak{J} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \right|_{-1} = \omega S_{-1}.$$

Si ottiene così che la varietà abeliana V legata alla matrice riemanniana ω possiede una trasformazione involutoria corrispondente alla antinvoluzione riemanniana la cui matrice dei coefficienti è $S = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}^{-1} \cdot \mathfrak{J} \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$.

Poniamo che questa matrice sia intera: poichè il suo modulo è $(-1)^p$, si tratta di un'antisostituzione riemanniana involutoria, quindi la varietà abeliana reale legata ad ω ammette la (schiera della) simmetria S corrispondente a questa antisostituzione.

Il carattere reale di S è dato dalla caratteristica mod. 2 della matrice

$$S \pm I = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}^{-1} (\mathfrak{J} \pm I) \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

ove, essendo \mathfrak{J} di carattere reale zero, sarà $\mathfrak{J} \pm I$ di caratteristica zero mod. 2, cioè questa matrice è di interi tutti pari. Allora si ha

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} (S \pm I) = (\mathfrak{J} \pm I) \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \equiv 0 \pmod{2}$$

e poichè $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ è di caratteristica $2p - \lambda \pmod{2}$, la $S \pm I$ non può

(1) Sugli n -intieri... [«Rend. Acc. Napoli», 1929], n. 10 c).

(2) Le matrici caratteristiche delle simmetrie sulle varietà abeliane reali [«Rend. Lincei», vol. VII, serie 6^a (1928)] Nota III, n. 6.

essere⁽³⁾, rispetto al mod. 2, di caratteristica superiore a λ . Dunque il carattere reale di S non supera λ .

Riferendosi alla ω^{**} le (6)* diventano

$$(6)^{**} \quad u^{*(j)} = u^* + \frac{1}{2} \omega^{**} N^{-1} h^{*(j)} \quad (j = 0, 1, 2, \dots, v-1)$$

e poichè il sistema (7)* è generato da $N(2m^*, 2n^*)_{-1}$ e si ha

$$\binom{m}{n}_{-1} \cdot N^{-1} \cdot N \cdot (2m^*, 2n^*)_{-1} = 2I$$

si può porre anche

$$\binom{m}{n}_{-1} \cdot N^{-1} \cdot h^{*(j)} = 2h^{(j)} \quad (j = 0, 1, \dots, v-1)$$

ove gli $h^{(j)}$ sono $v = 2^\lambda 2p$ -intieri distinti⁽⁴⁾ mod. 2. Dunque si ha, dalle (6)**

$$(13) \quad u^{*(j)} = u^* + \frac{1}{2} \omega^{**} \cdot \binom{m}{n}_{-1}^{-1} \cdot 2h^{(j)} = u + \omega h^{(j)} \quad (j = 0, 1, \dots, v-1)$$

cosicchè il gruppo di $v = 2^\lambda$ punti di V^* assegnato da queste (13), ossia dalle (6)** corrisponde al punto P di V assegnato dai parametri $u = u^*$.

Se la matrice S non è intera, essa dà però sempre un'antimografia riemanniana involutoria di ω : e poichè $S^2 = I$, questa è a catena fondamentale⁽⁵⁾. In definitiva possiamo enunciare che:

Data una varietà abeliana reale V^ possedente una simmetria di carattere reale zero, e fissata su essa una involuzione di ordine 2^λ generata da un gruppo di 2^λ trasformazioni ordinarie involutorie di 2ª specie per V^* , si ha sempre che questa involuzione è birazionalmente identica ad una varietà abeliana reale V possedente una simmetria di carattere reale $\equiv \lambda$ oppure ad una varietà abeliana possedente una trasformazione (iperalgebrica) legata ad una antinvoluzione riemanniana a catena fondamentale.*

4. È noto che⁽⁶⁾ le simmetrie di una varietà abeliana reale che hanno le stesse matrici caratteristiche sono tutte e sole quelle che appartengono

(3) Nota cit. (1), n. 6.

(4) Distinti poichè, avendosi

$$h^{*(j)} = N \cdot 2 \binom{m}{n}_{-1}^{-1} \cdot h^{(j)} = N \cdot (2m^*, 2n^*)_{-1} \cdot h^{(j)}$$

se gli $h^{(j)}$ non fossero distinti mod. 2 non lo sarebbero nemmeno gli $h^{*(j)}$.

(5) Cfr. la mia Memoria I: *Sulle varietà abeliane reali e sulle matrici di Riemann reali* [«Giorn. di Matem.», vol. 60 (1922)] § 2, n. 10.

(6) Nota III, cit. (2), n. 3.

ad una stessa schiera o a schiere accoppiate⁽⁷⁾. Inoltre se $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ ed $\begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix}$ sono due matrici caratteristiche minime della stessa simmetria S, ovvero una di S l'altra di $-S$, si ha⁽⁸⁾

$$(14) \quad \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} ; \quad \text{oppure} \quad \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \nu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

ove μ e ν sono 2 matrici unimodulari di ordine p . Perciò, le 3 matrici di Riemann

$$\omega^* = \omega \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1} ; \quad \omega^{*(1)} = \omega \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix}_{-1} = \omega^* \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}_{-1} ; \quad \omega^{*(2)} = \omega^* \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \nu & 0 \end{pmatrix}_{-1}$$

sono fra loro *equivalenti* ed appartengono alla stessa varietà abeliana V^* (o a varietà birazionalmente identiche). Non solo, ma poichè⁽⁹⁾ il sistema delle soluzioni della (10) non è che quello generato dalle righe della matrice $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$, e poichè questo, quindi il sistema (7), a causa della (14) resta lo stesso se $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ si sostituisce con $\begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix}$, si conclude che:

a) *la varietà abeliana reale V^* e la involuzione di ordine 2λ su essa di cui è immagine V , restano inalterate se la matrice caratteristica minima della simmetria S considerata su V si muta in un'altra della stessa S, ed anche se S si scambia con ogni altra simmetria della sua schiera o della schiera accoppiata.*

Dalla stessa V^* e dalla stessa involuzione considerata su di essa, si siano ottenute le due varietà V e V' , rispettivamente legate alle due matrici

$$(15) \quad \omega = \omega^* \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1}^{-1} ; \quad \omega' = \omega^* \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix}_{-1}^{-1}$$

sulle quali la I_0 di V^* subordini le 2 simmetrie di carattere reale $\lambda > 0$

$$(16) \quad S = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1}^{-1} I_0 \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} ; \quad S' = \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix}_{-1}^{-1} I_0 \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix}.$$

Da V e V' si passa alla stessa V^* e alla involuzione predetta, mediante le due matrici caratteristiche minime $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ ed $\begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix}$. Poichè, per la a) ora

(7) Schiere accoppiate sono quelle corrispondenti a due sostituzioni antiriemanniane involutorie a matrici opposte: S e $-S$.

(8) Nota II', cit. (6), n. 1 a).

(9) Nota cit. (1), n. 9.

dimostrata, queste ultime si possono scegliere a piacere fra quelle di S e di S' , le potremo sempre ritenere *regolari* ⁽¹⁰⁾ e porre

$$(17) \quad \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = P_{\lambda}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} m \\ g \\ n \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix} = P_{\lambda}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} m' \\ g' \\ n' \end{pmatrix}$$

dove P_{λ}^{-1} ed $\begin{pmatrix} m \\ g \\ n \end{pmatrix}$ sono simboli di due matrici intiere, di cui la seconda unimodulare, già altrove introdotte ⁽¹¹⁾.

Dalle (17) si ottiene

$$(18) \quad \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} m' \\ g' \\ n' \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} m \\ g \\ n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}^{-1} = T \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}^{-1}$$

con T matrice unimodulare. Dalle (15) segue dunque $\omega' = \omega T_{-1}$ cioè ω ed ω' sono equivalenti, cosicchè V e V' coincidono (a meno di trasformazioni birazionali). La (18) ci assicura anche ⁽¹²⁾ che le colonne di $2 \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1}^{-1}$ e di $2 \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix}_{-1}^{-1}$ generano lo stesso sistema (7)*.

Infine, dalle (16) si ha

$$(19) \quad S' = T \cdot S \cdot T^{-1}$$

relazione che esiste sempre fra le antisostituzioni riemanniane involutorie corrispondenti a due simmetrie dello stesso carattere reale, sulla stessa varietà abeliana ⁽¹³⁾.

Enunciamo quindi che:

b) *fissata su V^* una involuzione di carattere reale λ , resta individuata una varietà abeliana reale V , ed una sola, che è l'immagine di questa involuzione e che possiede (almeno) una coppia di schiere accoppiate di simmetrie di carattere reale λ .*

5. La V ammetta due simmetrie S ed S' non appartenenti alla stessa schiera nè a schiere accoppiate. Allora V è singolare ⁽¹⁴⁾, cioè ammette tra-

(10) *Sul problema...* [«Atti Ist. Ven.», t. 88] (N), n. 2, a) § I.

(11) Vedi il n. 5 della Nota III ed il n. 4 della (N). Per P_{λ}^{-1} vedi anche la (14) del n. 7 ed il n. 9 della stessa (N).

(12) Nota cit. (1), fine del n. 8.

(13) Cfr. il n. 6 della Nota III, nonchè COMESSATTI, *Sulle trasformazioni involutorie delle varietà algebriche* [«Atti Ist. Veneto», 1925-1926, t. LXXXV].

(14) Vedi il n. 17, § 4, della mia Memoria II dal titolo: *Sulle varietà abeliane reali* [«Giorn. di Matem.», vol. 61 (1923)].

sformazioni birazionali singolari in sè: poniamo però che S ed S' appartengano allo stesso sistema di realtà⁽¹⁵⁾ di V , cioè che esista una trasformazione birazionale T di V in sè che porta S in S' .

Se gli u sono parametri reali per S , questa dà luogo alle solite relazioni⁽¹⁶⁾

$$(20) \quad \bar{u}' = u + c \quad ; \quad \bar{\omega} = \omega S_{-1}$$

mentre, sugli stessi parametri e per la stessa ω , la T si rappresenta con l'altra coppia di relazioni⁽¹⁷⁾

$$(21) \quad u' = \tau u + \gamma \quad ; \quad \tau \omega = \omega T_{-1}$$

ove T è la matrice dei coefficienti della sostituzione riemanniana modulare che corrisponde alla trasformazione T .

Fra le matrici S, S', T sussisterà la relazione (19) cosicchè le seconde delle (20) e (21) ci danno $\bar{\omega} T_{-1} = \tau \omega S'_{-1}$, ossia, per la (21)

$$(22) \quad \tau \bar{\omega} = \tau \omega \cdot S'_{-1}.$$

Questa ci dice che i $v = \tau u$ sono parametri reali per S' . Onde, posto $\omega' = \tau \omega$, matrice dei periodi per i parametri v sui cicli C_k , la S' si rappresenta con le relazioni

$$(23) \quad \bar{v}' = v + c' \quad , \quad \bar{\omega}' = \omega' \cdot S'_{-1}.$$

Dette allora $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ ed $\begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix}$ due matrici caratteristiche minime, una per S , l'altra per S' , sui cicli C_k , dalla V si deducono le 2 varietà V^* e V^{**} legate alle due matrici $\omega^* = \omega \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1}$; $\omega^{**} = \omega' \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix}_{-1}$.

Ma dalla (19) segue che si può sempre ritenere

$$(24) \quad \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} T_{-1}$$

quindi, tenendo ancora presente la seconda delle (21), si ha

$$\omega^{**} = \omega' T_{-1}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1} = \tau \omega T_{-1}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1} = \omega \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1} = \omega^*$$

cosicchè coincidono anche V^* e V^{**} (a meno di trasformazioni birazionali).

Viceversa, le 2 simmetrie S ed S' assegnate su V mediante le 2 coppie di relazioni (20) e (23) diano luogo, quando ω ed ω' si moltiplicano, a

(15) Vedi il n. 26, § 6 della mia Memoria I cit. (5).

(16) Cfr. Nota III cit. (6), n. 1.

(17) G. SCORZA, *Intorno alla teoria...* [«Rend. Pal.» (1916)], parte II, § 1, n. 2.

destra, per $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1}$ e per $\begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix}_{-1}$, alla stessa matrice di Riemann:

$$(25) \quad \omega^* = \omega \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1} = \omega' \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix}_{-1}.$$

Supponiamo ancora che S ed S' abbiano lo stesso carattere reale, quindi che valgano la (19) e la (24). Allora segue che $\omega \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1} = \tau \omega T_{-1}^{-1} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1}$ e perciò $\tau \omega = \omega T_{-1}$.

Questa ci dice che esiste una trasformazione birazionale di V in sè la cui corrispondente sostituzione riemanniana modulare ⁽¹⁸⁾ ha per matrice dei coefficienti la T . E poichè vale la (19), questa trasformazione porta S in S' , cioè queste due simmetrie appartengono allo stesso sistema di realtà.

Da quanto precede si raccoglie che le due simmetrie \mathfrak{I} ed \mathfrak{I}' corrispondenti ad S e ad S' su V^* danno luogo alla stessa ω^* inerente a entrambe, quindi alla stessa antisostituzione riemanniana involutoria di matrice I_0 . Ne segue senz'altro, salvo a tener conto del duplice riferimento fra V e V^* , che \mathfrak{I} ed \mathfrak{I}' , oltre ad avere entrambe carattere reale zero, coincidono ovvero appartengono alla stessa schiera, cosicchè il risultato ottenuto assume la forma assai espressiva:

Le simmetrie di V , di schiere distinte, che appartengono allo stesso sistema di realtà di una S , sono tutte e sole quelle che danno luogo alla stessa V^ e, su questa, alla stessa simmetria ovvero a simmetrie della stessa schiera ⁽¹⁹⁾.*

(18) Si noti che nella (19) si può sempre supporre che T sia modulare, poichè $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ ed $\begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix}$ possono scegliersi con determinanti eguali.

(19) Per questa proposizione abbiamo tenuto presente il n. 22 del § 5 della nostra Memoria I cit. (19) e segnatamente la proposizione 6, che ci ha consentito di non tener conto delle costanti additive c , c' e γ .

Matematica. — *Sistemi di normali principali ad una varietà nel suo Π_3 .* Nota II di RINA BALDONI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Basandomi sulle definizioni della Nota precedente, passo a dimostrare l'esistenza dei sistemi principali nel Π_3 .

1. Supponiamo che la varietà V_n abbia il σ_2 con $\frac{n(n+3)}{2}$ dimensioni e sia ν il numero delle dimensioni del Π_3 .

Se indichiamo con $f_{r,s,p}$ il terzo ricciano di f e con X un parametro normale del Π_3 , porremo:

$$x_{r,s,p} = \int_g X f_{r,s,p} dt$$

e diremo che $x_{r,s,p}$ è il covariante associato a X .

Definizione. — Un sistema di ν parametri normali e a 2 a 2 ortogonali

$$X_1, X_2, \dots, X_\nu$$

si dirà un *sistema principale di normali nel Π_3* se, essendo $x_{r,s,p}$ il covariante di X_i , si ha:

$$\begin{pmatrix} x & x \\ i & j \end{pmatrix} = 0$$

per ogni coppia di indici i, j diversi, scelti fra i numeri

$$1, 2, 3, \dots, \nu.$$

2. *Teor.* — Esiste almeno un sistema principale di normali nel Π_3 .

Dim. — Supponiamo che esista già un sistema principale di normali nel Π_3 costituito dai parametri $X_i (i = 1, 2, \dots, \nu)$ in modo che si abbia $\begin{pmatrix} x & x \\ i & j \end{pmatrix} = 0$ per ogni coppia i, j di numeri diversi scelti fra i numeri $1, 2, \dots, \nu$. È:

$$[I] \quad f_{r,s,p} = \sum_i x_{r,s,p} X_i.$$

(1) Nella seduta del 19 gennaio 1930.

Moltiplicando per

$$x_j^{r,s,p} = \sum_{h,k,q} W_{r,s,p;h,k,q} x_{h,k,q}$$

e sommando rispetto a r,s,p si ha:

$$\sum_{r,s,p} x_j^{r,s,p} f_{r,s,p} = \left(x, x \right)_j X.$$

Moltiplicando ora per $f_{h,k,q}$ ed integrando lungo g :

$$\sum_{r,s,p} A_{r,s,p;h,k,q} x_j^{r,s,p} = \left(x, x \right)_j x_{h,k,q} = \left(x, x \right)_{r,s,p} \sum_{r,s,p} W_{r,s,p;h,k,q} x_j^{r,s,p}$$

e cioè:

$$[2] \quad \sum \left[A_{r,s,p;h,k,q} - \left(x, x \right)_j W_{r,s,p;h,k,q} \right] x_j^{r,s,p} = 0.$$

Si vede così che le $x_j^{r,s,p}$ costituiranno quindi una soluzione non nulla delle [2] e che il determinante dei coefficienti di tali equazioni dovrà essere nullo, cioè le $\left(x, x \right)_j$ devono essere soluzioni dell'equazione:

$$[3] \quad \Delta(\rho) = 0$$

dove $\Delta(\rho)$ indica il determinante formato cogli elementi:

$$A_{r,s,p;h,k,q} = A_{r,s,p;h,k,q} - \rho W_{r,s,p;h,k,q}$$

come il determinante W è stato formato coi $W_{r,s,p;h,k,q}$. L'equazione [3] è un'equazione secolare⁽¹⁾ e quindi ha tutte le radici reali. Le radici poi, diverse dallo zero (siccome la caratteristica della matrice $\Delta(0)$ è eguale a v) sono in numero $\leq v$; siano esse:

$$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_r.$$

Se m_i è l'ordine di molteplicità della radice ρ_i , posto:

$$m = \sum_i^r m_i$$

sarà $m \leq v$, e il sistema di equazioni:

$$[4] \quad \sum [A_{r,s,p;h,k,q} - \rho_i W_{r,s,p;h,k,q}] \lambda^{r,s,p} = 0$$

ha, (se $m_i > 1$) infinite soluzioni che sono tutte le combinazioni lineari di m_i di esse fra loro indipendenti; a queste soluzioni corrisponderanno i parametri di direzione

$$[5] \quad \sum f_{r,s,p} \lambda^{r,s,p}$$

(1) Vedi G. H., p. 134.

che danno tutte le direzioni di uno spazio lineare a m_i dimensioni. Scegliamo allora un sistema di m_i soluzioni delle [4] in modo che i corrispondenti parametri [5] formino un sistema ortogonale di parametri normali; fatto questo per tutte le radici ρ_i si avranno m parametri normali

$$[6] \quad X_i = \sum_i \lambda^{r,s,p} f_{r,s,p} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

ciascuno dei quali corrisponde ad una radice ρ_{h_i} dove h_i è uno dei numeri $1, 2, \dots, \tau$, e per essa è:

$$[7] \quad \sum [A_{r,s,p; h_i, k, q} - \rho_{h_i} W_{r,s,p; h_i, k, q}] \lambda^{r,s,p} = 0.$$

Moltiplicando i due membri per $\lambda^{b,k,q}$ e sommando si ha

$$\int_g \sum_i X_i X_{dl} = \rho_{h_i} \sum W_{r,s,p; h_i, k, q} \lambda^{r,s,p} \lambda^{b,k,q}$$

e se $\rho_{h_i} = \rho_{h_j}$ i parametri X_i, X_j sono ortogonali, cioè:

$$[8] \quad \int_k X_i X_j = 0$$

e quindi anche

$$[9] \quad \sum W_{r,s,p; h_i, k, q} \lambda^{r,s,p} \lambda^{b,k,q} = 0.$$

Se $\rho_{h_i} \neq \rho_{h_j}$ scambiando fra loro i con j si ritrovano ancora la [8] e la [9]; i parametri [6] formano quindi un sistema ortogonale.

Si ha inoltre dalla [7] e per la [6]

$$x_{b,k,q} = \sum_{r,s,p} W_{r,s,p; h_i, k, q} (\rho_{h_i} \lambda^{r,s,p})$$

e quindi i sistemi $x_{b,k,q}$ e $\rho_{h_i} \lambda^{b,k,q}$ sono pseudo-reciproci; allora:

$$(x_i, x_j) = \sum_i x_{b,k,q} x_j^{b,k,q} = \rho_{h_i} \rho_{h_j} \sum W_{r,s,p; h_i, k, q} \lambda^{r,s,p} \lambda^{b,k,q} = 0.$$

Dunque se $m = v$ il sistema [5] è un sistema principale di normali nel Π_3 .

Supponiamo ora che m non sia eguale v , ma sia $< v$; completiamo allora i parametri [6] con altri $v - m$ parametri

$$X_{m+1}, X_{m+2}, \dots, X_v$$

in modo da formare un sistema di v parametri normali a 2 a 2 ortogonali dello spazio Π_3 .

Moltiplicando ambo i membri della [I] per $x^{r,s,p}$ con $i \leq m$, si ottiene:

$$\sum_i x^{r,s,p} f_{r,s,p} = \binom{x, x}{i, i} X_i + \binom{x, x}{i, m+1} X_{m+1} + \binom{x, x}{i, m+2} X_{m+2} + \dots + \binom{x, x}{i, v} X_v,$$

cioè:

$$\binom{x, x}{i, m+1} X_{m+1} + \binom{x, x}{i, m+2} X_{m+2} + \dots + \binom{x, x}{i, v} X_v = 0$$

e quindi dovrà essere:

$$\binom{x, x}{i, m+1} = \binom{x, x}{i, m+2} = \dots = \binom{x, x}{i, v} = 0.$$

Consideriamo il sistema nelle p_j :

$$\sum_{r=1}^v p_j \binom{x, x}{i, j} = \rho p_i \quad (i = m+1, \dots, v).$$

Esso sarà soddisfatto da un sistema di valori delle p_j corrispondente ad una radice ρ dell'equazione secolare:

$$\begin{vmatrix} \binom{x, x}{m+1, m+1} - \rho & \binom{x, x}{m+1, m+2} & \dots & \binom{x, x}{m+1, v} \\ \binom{x, x}{m+2, m+1} & \binom{x, x}{m+2, m+2} - \rho & \dots & \binom{x, x}{m+2, v} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{x, x}{v, m+1} & \binom{x, x}{v, m+2} & \dots & \binom{x, x}{v, v} - \rho \end{vmatrix} = 0.$$

Ma è:

$$\sum_{r,s,p} x^{r,s,p} f_{r,s,p} = \sum_{m+1}^v \binom{x, x}{i, j} X_i$$

e moltiplicando per p_j e sommando rispetto a j

$$(\alpha) \quad \sum_{r,s,p} y^{r,s,p} f_{r,s,p} = \rho \sum_{m+1}^v p_i \binom{x, x}{i, i} X_i$$

dove

$$y^{r,s,p} = \sum_j p_j x^{r,s,p}.$$

Ora moltiplicando le (α) per $f_{h,k,q}$ ed integrando ho

$$\sum A_{r,s,p; h,k,q} y^{r,s,p} = \rho \sum p_i \sum_{r,s,p} W_{r,s,p; h,k,q} x^{r,s,p} = \rho \sum_{r,s,p} W_{r,s,p; h,k,q} y^{r,s,p}$$

e cioè:

$$(7') \quad \sum [A_{r,s,p;h,k,q} - \rho W_{r,s,p;h,k,q}] y^{r,s,p} = 0.$$

Da cui si deduce che ρ è una radice dell'equazione $\Delta(\rho) = 0$. Ma prima per formare il sistema [6] ho considerato *tutte* le soluzioni del sistema [7] corrispondenti a tali radici e quindi $y^{r,s,p}$ non può essere un'altra soluzione di [7] come vorrebbe la (7').

Dovrà dunque essere $\rho = 0$. Si conclude che l'equazione secolare considerata ha la radice $\rho = 0$ multipla di ordine v e quindi per $\rho = 0$ diventa un determinante di caratteristica zero. Ne consegue

$$\begin{pmatrix} x & x \\ i & f \end{pmatrix} = 0$$

e cioè il sistema

$$\sum_i \dots (i = 1, 2, \dots, v)$$

è un sistema principale.

Si vede inoltre che se almeno uno dei numeri m_i è maggiore di uno, esistono infiniti sistemi principali. In tale caso si dirà che il punto di V_n che si considera, è *ciclico*.

Matematica. — *Derivazioni generalizzate e classificazione degli spazi di Riemann.* Nota di PIA NALLI, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una precedente Nota⁽²⁾ abbiamo fatto osservare che, fissato lungo i punti di una linea L , in uno spazio di Riemann ad n dimensioni, un gruppo di $h \leq n - 1$ vettori unitari

$$(1) \quad u_1, u_2, \dots, u_h$$

tale che sia costante lungo L ciascuno dei prodotti scalari $u_i \times u_j$, rimane fissato un trasporto rigido della intera stella di vettori lungo L che trasporta ciascuno dei vettori u_i su se stesso.

Inversamente, ad ogni trasporto rigido si può fare corrispondere un intero $h \leq n - 1$ ed infiniti gruppi di vettori (1).

Ad ogni trasporto rigido lungo una linea L corrisponde poi una *derivazione generalizzata* di un vettore u lungo L e l'annullarsi del derivato di

(1) Nella seduta del 5 gennaio 1930.

(2) PIA NALLI, *Spostamenti rigidi e derivazioni generalizzate*, in corso di stampa, in questi « Rendiconti ».

un vettore u esprime che esso si trasporta su se stesso nel detto trasporto rigido.

A tale derivazione generalizzata si può arrivare anche molto semplicemente con le seguenti considerazioni.

In un spazio di Riemann sia una linea L riferita ad un parametro t . Sia poi fissato lungo L un trasporto rigido della intera stella di vettori.

Sia u un vettore funzione dei punti della linea: in un punto P esso avrà la determinazione $u(t)$ e nel punto P' , infinitamente vicino a P , la determinazione $u(t + \Delta t)$. D'altra parte, nel dato trasporto rigido il vettore $u(t)$, applicato in P , si trasporta in P' nel vettore v : il limite del rapporto

$$\frac{u(t + \Delta t) - v}{\Delta t}$$

per Δt tendente a zero è il derivato generalizzato di u nel punto P , lungo L , con referenza a t , relativo al trasporto rigido in quistione.

In fondo, si estende agli spazî di Riemann il concetto (ben noto dalla cinematica) della *derivata vettoriale rispetto ad assi in moto*.

La derivazione ordinaria corrisponde al trasporto per parallelismo.

Per esempio: nello spazio ordinario il vettore u unitario situato sulla binormale ad una linea L determina un trasporto rigido nel quale ogni vettore tangenziale all'involuppo dei piani rettificanti si trasporta per parallelismo sul detto involuppo. Ciò caratterizza completamente il trasporto rigido. Per un vettore, l'aver nullo il derivato generalizzato corrispondente a tale trasporto rigido, significa che esso è legato rigidamente al triedro fondamentale della linea.

Tenendo conto che per la derivazione generalizzata vale la stessa formula della derivazione ordinaria

$$\frac{d}{dt}(u \times v) = \dot{u} \times v + u \times \dot{v},$$

risulta chiaro che nello spazio ordinario, o, più in generale, in una varietà a tre dimensioni, partendo da un vettore unitario funzione dei punti di una linea (ed, in particolare, dal versore tangenziale) per ogni derivazione generalizzata si hanno delle formule analoghe a quelle di Frenet e, generalmente, per una varietà qualunque si hanno le analoghe delle estensioni delle formule di Frenet.

Si presentano ancora altre estensioni immediate: per ogni trasporto rigido lungo una linea L si ha in ogni punto di questa un invariante che si potrebbe chiamare *curvatura generalizzata*, che si riduce alla curvatura geodetica nel trasporto per parallelismo.

La derivazione generalizzata, che abbiamo definita per i vettori, si estende poi ai tensori.

Se $A_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$ è un tensore funzione dei punti di L , è noto che si chiama derivato di $A_{(i)}^{(j)}$ lungo L , con referenza ad un parametro t , il tensore $B_{(i)}^{(j)}$ le cui componenti sono

$$B_{(i)}^{(j)} = \frac{dA_{(i)}^{(j)}}{dt} + \sum_r^q \sum_k^n \left\{ \begin{matrix} k & l \\ j_r & \end{matrix} \right\} A_{i_1 \dots i_{r-1} k i_{r+1} \dots i_p}^{j_1 \dots j_{r-1} j_r + 1 \dots j_q} \frac{dx_l}{dt} - \sum_r^p \sum_k^n \left\{ \begin{matrix} i_r & l \\ k & \end{matrix} \right\} A_{i_1 \dots i_{r-1} k i_{r+1} \dots i_p}^{(j)} \frac{dx_l}{dt}.$$

Fissato ora lungo L il gruppo di vettori (1) che, per semplicità, supporremo a due a due ortogonali, denotiamo con u_i^k ed $u_{i|k}$ rispettivamente le componenti controvarianti e covarianti di u_i , con τ_i^k e $\tau_{i|k}$ le componenti controvarianti e le covarianti di \dot{u}_i .

Chiameremo derivato generalizzato di $A_{(i)}^{(j)}$, lungo L , con referenza al parametro t , relativo al gruppo (1), il vettore $C_{(i)}^{(j)}$ le cui componenti sono

$$\begin{aligned} C_{(i)}^{(j)} = & B_{(i)}^{(j)} - \sum_r^q \sum_k^n \sum_i^b u_i^{j_r} (\dot{u}_i \times u_j) A_{i_1 \dots i_{r-1} k i_{r+1} \dots i_p}^{j_1 \dots j_{r-1} j_r + 1 \dots j_q} u_{j|k} \\ & - \sum_r^p \sum_k^n \sum_i^b u_{i|i_r} (\dot{u}_i \times u_j) A_{i_1 \dots i_{r-1} k i_{r+1} \dots i_p}^{(j)} u_j^k \\ & + \sum_r^q \sum_k^n \sum_i^b u_i^{j_r} A_{i_1 \dots i_{r-1} k i_{r+1} \dots i_p}^{j_1 \dots j_{r-1} j_r + 1 \dots j_q} \tau_{i|k} \\ & + \sum_r^p \sum_k^n \sum_i^b u_{i|i_r} A_{i_1 \dots i_{r-1} k i_{r+1} \dots i_p}^{(j)} \tau_i^k \\ & - \sum_r^q \sum_k^n \sum_i^b \tau_i^{j_r} A_{i_1 \dots i_{r-1} k i_{r+1} \dots i_p}^{j_1 \dots j_{r-1} j_r + 1 \dots j_q} u_{j|k} \\ & - \sum_r^p \sum_k^n \sum_i^b \tau_{i|i_r} A_{i_1 \dots i_{r-1} k i_{r+1} \dots i_p}^{(j)} u_i^k. \end{aligned}$$

La derivazione generalizzata obbedisce alle solite leggi relativamente all'addizione, alla moltiplicazione ed alla composizione dei tensori.

Notevole il fatto che il derivato del tensore fondamentale a_{ij} è nullo.

Se poi le $A_{(i)}^{(j)}$ e gli u_i non sono soltanto funzioni dei punti di una linea, ma di tutti i punti della varietà, potendosi porre:

$$C_{(i)}^{(j)} = \sum_l^n H_{(i)l}^{(j)} \frac{dx_l}{dt},$$

ne viene che $H_{(i)l}^{(j)}$ è un tensore che generalizza il derivato covariante di $A_{(i)}^{(j)}$ e che si potrà chiamare *derivato covariante di $A_{(i)}^{(j)}$ relativo al gruppo (1)*.

Anche qui è da notare che il derivato covariante generalizzato del tensore fondamentale a_{ij} è nullo. Si estende in tal modo il lemma di Ricci.

È anche nullo il derivato covariante di ognuno degli u_i .

Anche la derivazione covariante generalizzata obbedisce alle solite leggi relativamente all'addizione, alla moltiplicazione ed alla composizione dei tensori.

Chiuderemo con le seguenti osservazioni.

L'equazione:

$$u[u_1, u_2, \dots, u_k] = 0$$

equivale ad un sistema di n equazioni differenziali nelle n componenti del vettore u .

Quando gli u_i sono dati non soltanto lungo una linea, ma in tutti i punti della varietà, si può leggere il detto sistema come un sistema di equazioni ai differenziali totali e domandarsi in quali casi esso è illimitatamente integrabile.

Ed allora, fissato un intero h , si possono cercare tutte le varietà ad $n > h$ dimensioni per il quale il detto sistema è illimitatamente integrabile, quando si fissino opportunamente i vettori (1).

Si potranno quindi classificare gli spazi di Riemann secondo il minimo numero h possibile. Per $h = 0$ si hanno gli spazi euclidei, per $h = 1$ si hanno le superficie non sviluppabili ed altre varietà. Per un h generico si hanno le varietà ad $h + 1$ dimensioni non comprese nelle classi precedenti ed altre, e si possono trovare forme canoniche per i ds^2 delle varietà corrispondenti ad un dato h .

Matematica. — *Sopra la nozione di sorgente puntuale del calore in un piano irradiante in equilibrio termico.* Nota di M. BRELOT, presentata ⁽¹⁾ dal Socio V. VOLTERRA.

1. — Si sa che l'equilibrio della temperatura u in un piano conduttore posto in uno spazio a 0°, con un coefficiente di raggiamento variabile $r(x, y) \geq 0$ e un coefficiente di conduttibilità costante $k > 0$ soddisfa all'equazione:

$$(I) \quad \Delta u = c(x, y) u \quad \text{dove} \quad c = \frac{r}{k}$$

e, se non vi è raggiamento, all'equazione di Laplace.

In questo ultimo caso, lo studio della nozione di sorgente non è che una applicazione immediata delle proprietà conosciute delle singolarità pun-

(1) Nella seduta del 2 febbraio 1930.

tuali delle funzioni armoniche. Al contrario, in ciò che concerne l'equazione (1), con $c > 0$ e dotata di derivate prime continue, io non ho visto niente altro che ciò che si è sviluppato, cap. X dell'opera recente di Picard *Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles*. Vi si dimostra che esiste un integrale unico prendendo dei valori dati (in successione continua) su un piccolo contorno γ di Jordan circostante un punto O e comportandosi nelle vicinanze di questo punto come $A \log \frac{1}{OM} + V_1(M)$ in cui $A = \text{cost.}$, $V_1(M)$ tale che $OM \cdot V_1$ e $OM \frac{dV_1}{d \cdot OM}$ tendono a 0 con OM ($\frac{dV_1}{d \cdot OM}$, derivata nella direzione \overrightarrow{OM}). E questo integrale è tale che V_1 ammette derivate prime continue in O .

È importante sapere se questa forma matematica è veramente una conseguenza necessaria, come per il caso armonico, delle condizioni derivanti dall'interpretazione fisica, che v è nelle vicinanze di O limitata inferiormente (o superiormente) e tale che $\int_{\gamma} \frac{du}{dn} ds$ abbia un limite finito quando il contorno γ si riduce al punto O .

Considererò anche il caso più generale in cui non si fa alcuna ipotesi su $c(x, y)$ in O stesso, supponendo solamente che nelle vicinanze, ammetta derivate prime continue e sia > 0 . E riprendo dal principio la nozione di sorgente puntuale.

2. — Sia per $\Delta u = 0$, sia per $\Delta u = cu$, in cui $c(x, y)$ è in ogni punto $\neq O$ delle vicinanze di O , positiva e dotata di derivate prime continue, dirò che per una distribuzione termica in equilibrio caratterizzata dall'integrale u , il punto O è una sorgente se $\int_{\gamma_{\text{int}}} \frac{du}{dn} ds$ ha un limite determinato finito (detto *flusso*) quando il contorno semplice γ circondante O varia in una successione γ_n arbitraria riducendosi a O .

Basta applicare la formula di Green al campo D_n compreso fra Γ fissa e γ_n

$$(2) \quad \iint_{D_n} \Delta u \, d\sigma = \int_{\gamma_n \text{ int}} \frac{du}{dn} ds - \int_{\Gamma \text{ int}} \frac{du}{dn} ds$$

per concludere senza difficoltà che la nostra definizione della sorgente equivale alla condizione che $\iint_{\delta} \Delta u \, d\sigma$ abbia senso, δ designando le vicinanze di O .

Dirò che la sorgente è semplice, se nelle vicinanze di O , u non può prendere valori infinitamente grandi positivi e negativi insieme; non consi-

dererò in seguito che sorgenti semplici e basterà esaminare il caso in cui u è limitata *inferiormente*, dirò, caso della *sorgente calda*.

3. — Consideriamo il *caso armonico* e ricordiamo che se nelle vicinanze di un punto O una funzione armonica è limitata inferiormente, essa è necessariamente della forma

$$A \log \frac{1}{OM} + f(M)$$

dove $A = \text{cost.} \geq 0$, $f(M)$ armonica regolare anche in O .

È, per es., un caso particolare di una proposizione indicata da Stozek ⁽¹⁾ ma si ottiene anche questo risultato modificandone leggermente delle dimostrazioni semplicissime di Picard ⁽²⁾.

Allora per una sorgente calda di flusso φ , u è della forma

$$\frac{\varphi}{2\pi} \log \frac{1}{OM} + f(M)$$

e reciprocamente.

4. — Passiamo *al caso dell'equazione (1)* (senza ipotesi in O per $c > 0$) e studiamo in primo luogo dal punto di vista precedente *gli integrali di modulo limitato*. Vedremo che, per questi, O è una *sorgente di flusso nullo*.

Ho già studiato questi integrali di (1) nelle vicinanze d'un punto singolare di $c(x, y)$ ⁽³⁾. Ho mostrato che ne esiste uno e uno solo prendente valori dati su γ contornante O (differenza di due soluzioni ≥ 0 corrispondenti a valori ≥ 0 su γ) e che per una tale soluzione

$$\iint_{\gamma} c(P) u(P) d\sigma_P \quad \text{e anche} \quad \iint_{\gamma} \log \frac{1}{OP} c(P) u(P) d\sigma_P$$

hanno senso.

Di più, se g è la funzione di Green per l'interno di γ , $u_o(M)$ la funzione armonica che assume su γ gli stessi valori di u , $u_m(O)$ il « valore medio in O » di u (di cui ho dimostrato l'esistenza, limite della media su una circonferenza di centro O che si riduce a O)

$$(3) \quad \iint_{\gamma} g(O, P) c(P) u(P) d\sigma_P = 2\pi (u_o(O) - u_m(O)).$$

(1) « C.-R. Ac. Sc. », 9 marzo 1925.

(2) « C.-R. Ac. Sc. », 3 aprile 1923.

(3) Nota « C.-R. Ac. Sc. », 3 febbraio 1930, che riassume una Memoria che comparirà nei « Rendiconti di Palermo ».

Consideriamo allora la corona circolare $D_{R,\rho}$ compresa tra due circonferenze C_R, C_ρ ($R > \rho$) di centro O . Per ogni integrale u limitato nel modulo,

$$\iint_{D_{R,\rho}} \log \frac{1}{OP} \Delta u(P) d\sigma_P + \int_{C_{R \text{ int}} + C_{\rho \text{ ext}}} \left(\log \frac{1}{OP} \frac{du}{dn} - u \frac{d \log \frac{1}{OP}}{dn} \right) ds = 0$$

$$\begin{aligned} \iint_{D_{R,\rho}} \log \frac{1}{OP} c(P) u(P) d\sigma_P + \log \frac{1}{R} \int_{C_{R \text{ int}}} \frac{du}{dn} ds - \frac{1}{R} \int_{C_R} u ds \\ = \log \frac{1}{\rho} \int_{C_{\rho \text{ int}}} \frac{du}{dn} ds - \frac{1}{\rho} \int_{C_\rho} u ds. \end{aligned}$$

Quando $\rho \rightarrow 0$, R restando fisso, il primo membro tende a

$$\iint_{C_R} \log \frac{1}{OP} c(P) u(P) d\sigma_P + \log \frac{1}{R} \int_{C_{R \text{ int}}} \frac{du}{dn} ds - \frac{1}{R} \int_{C_R} u ds$$

o, poichè

$$g(O, P) = \log \frac{1}{OP} - \log \frac{1}{R}$$

e tenendo conto di (3), a

$$2\pi [u_o(0) - u_m(0)] + \log \frac{1}{R} \left[\iint_{C_R} c(P) u(P) d\sigma_P + \int_{C_{R \text{ int}}} \frac{du}{dn} ds \right] - 2\pi u_o(0).$$

Siccome nel secondo membro $-\frac{1}{\rho} \int_{C_\rho} u ds$ tende a $-2\pi u_m(0)$, si vede

che $\log \frac{1}{\rho} \int_{C_{\rho \text{ int}}} \frac{du}{dn} ds$ tende a $\log \frac{1}{R} \left[\iint_{C_R} c u d\sigma + \int_{C_{R \text{ int}}} \frac{du}{dn} ds \right]$. Ne risulta vera-

mente che $\int_{C_\rho} \frac{du}{dn} ds$ deve tendere a 0.

Si può precisare questo, considerando

$$\iint_{D_{R,\rho}} \Delta u d\sigma + \int_{C_{R \text{ int}}} \frac{du}{dn} ds = \int_{C_{\rho \text{ int}}} \frac{du}{dn} ds$$

da cui

$$\iint_{C_R} \Delta u d\sigma + \int_{C_{R \text{ int}}} \frac{du}{dn} ds = 0.$$

Se ne conclude che $\log \frac{1}{\rho} \int_{C_\rho} \frac{du}{dn} ds$ tende a 0, cioè che $\int_{C_\rho} \frac{du}{dn} ds$ tende a 0 più presto che $\frac{1}{\log \rho}$.

Dal fatto che $\int_{C_\rho} \frac{du}{dn} ds$ tende a 0 con ρ , risulta che per ogni successione di curve γ_n riducentesi a 0, $\int_{\gamma_n} \frac{du}{dv} ds \rightarrow 0$. Ciò risulta, applicando la formula di Green come per (2), dal fatto che $\iint \Delta u d\sigma$ esteso nella vicinanza di O, ha senso.

Così O è veramente una sorgente di flusso nullo; e si può notare, oltre la proprietà precedente di flusso attraverso una circonferenza di centro O e di raggio $\rightarrow 0$, che per un contorno γ

$$\iint_{\gamma} \Delta u d\sigma = \iint_{\gamma} c u d\sigma = \int_{\gamma_{\text{ext}}} \frac{du}{dn} d\sigma$$

come se O non fosse un punto singolare per c e u .

Così, risulta da questo studio di integrali di modulo limitato, che se, per un integrale u , O non è una sorgente di flusso nullo, $|u|$ non è limitato. E siccome ogni integrale il cui modulo è nelle vicinanze di O di un ordine minore di $\log \frac{1}{OM}$, è di modulo limitato⁽¹⁾, si può aggiungere all'enunciato precedente, che, non solamente $|u|$ non è limitato ma $\frac{u}{\log OM}$ non tende a 0.

5. — Mostriamo ora che, se per un integrale u , O è nel senso precisato, sorgente semplice calda, u è la somma di un integrale di modulo limitato e di un integrale $\cong 0$ per il quale O è una sorgente dello stesso flusso che per u — e cioè, in una vicinanza qualunque di O.

Consideriamo l'integrale u e un contorno γ circondante O; si vede subito, riferendoci al n. 4, che tutto si riduce a provare che, se $u \not\equiv 0$ su γ , è anche $\equiv 0$ nell'interno di γ .

Perciò, consideriamo nell'interno di γ tolto O, l'insieme E dei punti dove $u < 0$ e mostriamo che se esso non è nullo, si arriva ad una contraddizione. Dapprima, se O non è punto limite di E, basta isolare O mediante una piccola circonferenza sulla quale $u \geq 0$, per vedere che u , essendo ≥ 0 su γ e su questa circonferenza, deve essere anche ≥ 0 tra le due. Supponiamo O punto limite di E e notiamo che nella frontiera di E (contenuto in γ) eccettuato il punto O, $u = 0$ e che, d'altra parte ($-u$) è > 0 e

(1) V. la mia Nota loc. cit.

limitata superiormente in E . Allora qualunque sia $\varepsilon > 0$ la funzione $\varphi = \varepsilon \log \frac{D}{OM} > 0$ (dove D è il diametro della vicinanza γ) è, sulla frontiera dell'insieme D_p dedotto da E per eliminazione dei punti contenuti nel cerchio C_p di centro O e raggio p , superiore a $(-u)$, a condizione che si scelga p abbastanza piccolo. Ma, in E_p :

$$\Delta(\varphi + u) = cu < 0,$$

ne risulta⁽¹⁾ che in nessun punto di E_p , $\varphi + u$ non può avere nel piano, dunque anche in E_p , un minimo ≤ 0 . Se dunque $\varphi + u$ prendesse dei valori ≤ 0 in alcuni punti di E_p , il limite inferiore dell'insieme di questi valori sarebbe raggiunto in alcuni punti di E_p poichè è $\varphi + u > 0$ sulla frontiera, e vi sarebbe contraddizione. Così, $\varphi + u > 0$ su E_p , cioè

$$(-u) < \varphi = \varepsilon \log \frac{D}{OM}.$$

A causa dell'arbitrarietà di ε , si deduce che $|u|$ è arbitrariamente piccolo in ogni punto di E , dunque nullo, ciò che ci dà la contraddizione cercata.

La proposizione precedente ci permette dunque di studiare solamente gli integrali ≥ 0 nelle vicinanze di O .

6. — È ora facile stabilire che il flusso di una sorgente semplice calda è ≥ 0 ciò che giustifica anche il linguaggio adottato. Basta vederlo per un integrale $u \geq 0$, come segue:

Riprendiamo la corona circolare $D_{R,p}$ del n. 4 e l'equazione

$$(4) \quad \iint_{D_{R,p}} \log \frac{1}{OM} c(M) u(M) d\sigma_M + \log \frac{1}{R} \int_{C_{R \text{ int}}} \frac{du}{dn} ds - \frac{1}{R} \int_{C_R} u ds \\ = \log \frac{1}{p} \int_{C_p \text{ int}} \frac{du}{dn} ds - \frac{1}{p} \int_{C_p} u ds.$$

Se il flusso fosse negativo, $\log \frac{1}{p} \int_{C_p \text{ int}} \frac{du}{dn} ds$ sarebbe infinitamente grande

negativo, quando $p \rightarrow 0$, e di conseguenza anche il secondo membro. Siccome il primo membro è limitato inferiormente, la contraddizione impone che il flusso sia ≥ 0 .

7. — Ecco un risultato essenziale sulla forma matematica necessaria di un integrale $u \geq 0$ per il quale O è una sorgente calda.

(1) Cfr. PICARD, op. cit., p. 116.

È che nelle vicinanze di O , u sia della forma

$$A(M) \log \frac{1}{AM} \quad \text{dove} \quad 0 \leq A(M) \leq \text{cost. finita.}$$

Consideriamo la funzione

$$u(M) + \frac{1}{2\pi} \iint_{\gamma} g(M, P) c(P) u(P) d\sigma_P$$

dove $g(M, P)$ è la funzione di Green per il contorno γ circondante O . Comunque sia $M \neq O$, l'espressione è una funzione armonica ≥ 0 in γ , dunque, dai risultati ricordati del n. 3, si ha nelle vicinanze di O

$$(5) \quad u(M) + \frac{1}{2\pi} \iint_{\gamma} g(M, P) c(P) d\sigma_P = A \log \frac{1}{OM} + \varphi(M)$$

dove A è una certa cost. ≥ 0 e $\varphi(M)$ armonica regolare in O .

La proposizione enunciata risulta direttamente di là poichè nel primo membro, i due termini sono ≥ 0 .

Aggiungiamo che, poichè un integrale limitato nel modulo, u , soddisfa come l'ho dimostrato ⁽¹⁾ a

$$v(M) + \frac{1}{2\pi} \iint_{\gamma} g(M, P) c(P) v(P) d\sigma_P = u_0(M) \quad \text{armonica regolare in } O$$

l'equazione (5) è ancora vera quando si cambia l'ipotesi $u \geq 0$ con l'ipotesi: u limitata inferiormente.

8. — Continuerò fra poco questo studio, ma voglio ora ritornare al punto di partenza *particolarizzando* $c(M)$.

Se nelle vicinanze di O

$$(6) \quad c(M) \leq \frac{P}{OM^\alpha} \quad P > 0 \quad 0 \leq \alpha < 2$$

risulta, da un teorema ⁽²⁾ che, nell'equazione (5) \iint_{γ} è una funzione continua di M anche in O e possiede altrove derivate prime continue i cui prodotti per OM tendono a 0 con OM .

Dunque, sotto questa ipotesi per $c(M)$, se per un integrale u , O è sorgente semplice di flusso φ

$$u = \frac{\varphi}{2\pi} \log \frac{1}{OM} + f(M)$$

(1) Loc. cit.

(2) Cfr. PICARD, op. cit., p. 180.

dove $f(M)$ è continua anche in O e tale che $OM \frac{\partial f(M)}{\partial x}, OM \frac{\partial f(M)}{\partial y}$ tendono a 0 con OM .

Risulta anche dal teorema al quale si riferisce, che se $0 \leq \alpha < 1$ $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ esistono e sono continue in O .

Sempre con la stessa ipotesi (6) per $c(x, y)$, vi è d'altronde *non molteplicità* di un integrale che prende valori dati su γ circondante O , punto sorgente semplice di flusso dato.

9. — Termino indicando delle *estensioni* facili di alcuni risultati di questa Nota. Senza ipotesi in O per $c > 0$ dotata di derivate prime continue nelle vicinanze:

Se nell'insieme dei punti delle vicinanze di O dove un integrale u è < 0 , $\frac{u}{\log OM}$ tende a 0 con OM (cioè ancora se è $u > -\epsilon \log \frac{1}{OM}$ qualunque sia $\epsilon > 0$ in una vicinanza circolare scelta abbastanza piccola dopo ϵ):

1° u è la somma in ogni vicinanza di un integrale ≥ 0 e di un integrale di modulo limitato;

2° Supponendo inoltre che $\int_{\gamma_n \text{ int}} \frac{du}{dn} ds$ è limitato superiormente per una

successione γ_n di curve circondanti O e riducentesi a questo punto, il punto O è sorgente semplice calda per u , quindi un enunciato immediato, utilizzando il n. 7.

Matematica. — *Sur une formule de Tchebycheff.* Nota di J. GERONIMUS, presentata⁽¹⁾ dal Socio V. VOLTERRA.

Dans son Mémoire *Sur l'interpolation dans le cas d'un grand nombre de données fournies par les observations*⁽²⁾ Tchebycheff trouve la formule suivante

$$(1) \quad f(x) = \sum_{s=0}^r a_s x^s = \sum_{i=-1}^{r+1} A_i \int_{i-1}^i f(x),$$

où il a posé

$$(2) \quad \int_{\eta} u = \int_{-1}^{\eta_1} u dx - \int_{\eta_1}^{\eta_2} u dx + \int_{\eta_2}^{\eta_3} u dx \dots + (-1)^n \int_{\eta_n}^1 u dx.$$

(1) Nella seduta del 2 febbraio 1930.

(2) « Oeuvres », t. I, pp. 387-469.

Les abscisses $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ ont les valeurs suivantes

$$(3) \quad \eta_k = \cos \frac{n-k+1}{n+1} \pi, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Tchebycheff trouve les coefficients A_1, A_2, \dots, A_{r+1} par une méthode très élégante mais artificielle⁽¹⁾.

Nous allons résoudre ce problème par une méthode un peu plus directe et plus courte.

Soit

$$(4) \quad U_m(x) = U_m(\cos \varphi) = \frac{\sin m\varphi}{\sin \varphi}, \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Posons encore

$$(5) \quad b_{m,n+1} = \int_{\eta_1}^{\eta_2} U_m(x) dx - \int_{\eta_2}^{\eta_3} U_m(x) dx + \dots + (-1)^n \int_{\eta_n}^1 U_m(x) dx +$$

Supposons que notre fonction $f(x)$ est représentée par l'expression suivante

$$(6) \quad f(x) = \sum_{s=1}^{r+1} c_s U_s(x).$$

Alors

$$(7) \quad \int_{\eta_1}^1 f(x) dx = \sum_{s=1}^{r+1} c_s b_{s,n+1}.$$

Nous voyons, donc, que l'égalité (1) entraîne l'égalité suivante

$$f(\eta_i) = \sum_{s=1}^{r+1} c_s U_s(\eta_i) = \sum_{i=1}^{r+1} A_i \sum_{s=1}^{r+1} c_s b_{s,i},$$

d'où il s'ensuit que

$$(8) \quad \sum_{i=1}^{r+1} A_i b_{s,i} = U_s(\eta), \quad (s = 1, 2, \dots, r+1).$$

Pour la résolution de ce système d'équations nous allons trouver les valeurs de $b_{m,n+1}$. En vertu de l'égalité

$$\int U_m(x) dx = \frac{1}{m} \cos m\varphi + C$$

(1) Loc. cit., pp. 444-457.

on obtient selon (2)

$$(9) \quad mb_{m,n+1} = 2 \{ \cos m\varphi_1 - \cos m\varphi_2 + \cos m\varphi_3 \dots + (-1)^{n+1} \cos m\varphi_n \} + \\ + (-1)^n - (-1)^m,$$

où on a posé

$$(10) \quad \varphi_k = \arccos \eta_k = \frac{n-k+1}{n+1} \pi, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

En utilisant la formule (1)

$$(11) \quad \sum_{l=1}^n \cos(a + \mu l) = \frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \cos \left(a + \frac{n+1}{2} t \right),$$

on peut trouver la somme

$$(12) \quad \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cos m\varphi_k = \sum_{k=1}^n \cos \left\{ \frac{(n-k+1)m\pi}{n+1} + (k-1)\pi \right\}.$$

Supposons d'abord que $m \equiv (n+1)(2s+1)$, où s est un nombre entier quelconque. Nous trouvons alors que notre somme (12) est égale à $\frac{(-1)^m - (-1)^n}{2}$ est par conséquent $b_{m,n+1} = 0$.

Soit maintenant $m = (n+1)(2s+1)$.

Nous voyons alors que notre somme (12) a la valeur $n(-1)^n$ et

$$(13) \quad b_{m,n+1} = \frac{2(-1)^n(n+1)}{m}.$$

Posons pour la brevité

$$(14) \quad \begin{cases} 2(-1)^{j-1} j A_j = \bar{A}_j, \\ j U_j(x) = \bar{U}_j \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, r+1).$$

Pour simplifier les calculs nous introduisons les symboles suivants

$$(15) \quad \{a\} F = F_a, \quad \{a \pm b\} F = F_a \pm F_b.$$

Nous allons trouver A_k .

A cet effet décomposons le nombre k en facteurs primaires

$$(16) \quad k = 2^\alpha \prod_{i=1}^g (\lambda_i^{\alpha_i+1}), \quad (\alpha_i \geq 0),$$

(1) *Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées*, tome II, vol. 5, p. 85.

et posons

$$(17) \quad \begin{cases} f(x) = 2^\alpha \prod_{i=1}^g [(1 + \lambda_i + \lambda_i^2 + \dots + \lambda_i^{\alpha_i})x + \lambda_i^{\alpha_i+1}], \\ \varphi(x) = 2^\alpha \prod_{i=1}^g [\lambda_i^{\alpha_i}(x + \lambda_i)]. \end{cases}$$

On a alors l'égalité suivante

$$\{f(1)\} \bar{A} = \{\varphi(0)\} \bar{U}.$$

Ensuite on trouve aisément que

$$\{f'(1)\} \bar{A} = \{\varphi'(0)\} \bar{U}$$

et en général

$$(18) \quad \left\{ \frac{1}{s!} f^{(s)}(1) \right\} \bar{A} = \left\{ \frac{1}{s!} \varphi^{(s)}(0) \right\} \bar{U}.$$

Donc, on trouve

$$\left\{ \sum_{s=0}^g \frac{(-1)^s}{s!} f^{(s)}(1) \right\} \bar{A} = \left\{ \sum_{s=0}^g \frac{(-1)^s}{s!} \varphi^{(s)}(0) \right\} \bar{U},$$

ou bien

$$(19) \quad \begin{cases} \{f(0)\} \bar{A} = \{\varphi(-1)\} \bar{U}, \\ \{k\} \bar{A} = \bar{A}_k = \left\{ k \left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{\lambda_g}\right) \right\} \bar{U}. \end{cases}$$

En substituant la valeur de \bar{A}_k

$$\bar{A}_k = 2(-1)^{k-1} k A_k$$

on obtient finalement

$$(20) \quad 2(-1)^{k-1} k A_k = \left\{ k \left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{\lambda_g}\right) \right\} \bar{U},$$

où $\bar{U}_s = s U_s(\gamma)$.

C'est bien la formule voulue de Tchebycheff⁽¹⁾.

(1) Loc. cit., p. 456.

Matematica. — *Quelques pas dans une théorie des fonctions de variable complexe au sens général.* Nota I di N. THÉODORESKO, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. P. BURGATTI.

§ 1. On connaît l'extraordinaire extension du domaine des propriétés des fonctions analytiques, due spécialement aux vertus de simplicité, et d'association par le symbole i , des deux fonctions de variables réelles x, y .

Il paraît, généralement, qu'un symbole tel que $f(z) = P(x, y) + i Q(x, y)$ ($z = x + iy$), n'ait aucune importance particulière si la fonction $f(z)$ n'est plus analytique. On peut citer en faveur de cette opinion, beaucoup d'affirmations des grands savants.

Toutefois, si l'on analyse de plus près le point de vue de Cauchy, et si on cherche à mettre en évidence une voie constructive, on peut oser faire quelques pas, tout en restant fidèle aux principes classiques.

Il est vrai, qu'il existe un abîme entre les fonctions analytiques et les plus générales qu'on peut imaginer au sens des vues modernes de dépendance.

Mais de l'autre côté, les extensions prudentes peuvent servir comme des points d'appui. C'est justement ce que je me propose d'exposer dans ce qui suit, en prenant pour instrument de travail une notion due à M. D. Pompeiu, celle de *dérivée aréolaire* ⁽²⁾.

§ 2. Soit, donc, une fonction $f(z) = P(x, y) + i Q(x, y)$ de variable complexe $x + iy$. Si on suppose que les fonctions P et Q admettent des dérivées partielles continues dans un domaine D , fermé par un contour simple C , alors la dérivée aréolaire est la limite de l'expression :

$$\frac{\int_C f(z) dz}{\frac{1}{2} \int_C x dy - y dx}$$

quand le domaine D tend à s'annuler, en se resserrant au voisinage d'un point x_0, y_0 .

Cette limite est :

$$-\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)_{x_0, y_0} + i \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right)_{x_0, y_0}.$$

(1) Nella seduta del 5 gennaio 1930.

(2) Ses mémoires fondamentaux ont été publiés dans les : « Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo », t. 33, 1912, p. 108; t. 35, 1913, p. 277.

Une autre définition fut donnée par M. G. Calugaréano dans une thèse soutenue en 1928. Par le changement de variables: $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ la fonction $P + iQ$ devient $f(z, \bar{z})$. Cette nouvelle forme est commode pour tous les développements suivants.

La dérivée aréolaire s'exprime alors par: $2i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$.

Elle est donc une dérivée ordinaire dans une direction isotrope du plan.

Dans tout ce qui suit, elle sera désignée par le symbole $\rho[z, \bar{z}]$ (à un facteur près), c'est-à-dire:

$$\rho[z, \bar{z}] = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}.$$

La dérivée aréolaire d'une fonction holomorphe est identiquement nulle. Donc, une telle fonction se comporte comme une constante, par rapport à l'opération définie.

Il sera, donc, naturel de se demander, quelles sont les fonctions qui se comportent linéairement, ou d'une manière plus compliquée.

Avant d'aborder cette question, il faut donner une formule fondamentale, exprimant les valeurs d'une fonction qui admet une dérivée aréolaire continue, en chaque point d'un domaine D, simplement connexe, connaissant cette dérivée aréolaire dans tout le domaine, et les valeurs, représentées par une fonction continue, de la fonction, sur le contour C.

On appelle, pour abréger, une telle fonction, *monogène* (α); d'après la désignation de M. D. Pompeiu, qui a trouvé la formule.

On a:

$$(I) \quad f(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z, \bar{z})}{z - \bar{\zeta}} dz - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\rho(v, \bar{v})}{v - \bar{\zeta}} d\omega.$$

ζ est un point intérieur à D; z est sur le contour C.

v est aussi dans D et le parcourt tout entier.

Cette formule généralise la formule de Cauchy, relative aux fonctions holomorphes. D'ailleurs, on retombe sur ce cas, pour $\rho \equiv 0$.

L'analogie est encore plus intime, en remarquant qu'on a, pour tout point ζ_1 , extérieur à D:

$$(I') \quad 0 = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z, \bar{z})}{z - \bar{\zeta}_1} dz - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\rho(v, \bar{v})}{v - \bar{\zeta}_1} d\omega.$$

On peut, de plus, montrer que (I') est la condition nécessaire et suffisante, pour que deux fonctions continues données arbitrairement sur C et dans D, représentent respectivement les valeurs limites et la dérivée aréolaire d'une fonction monogène (α).

§ 3. On peut se proposer la recherche des fonctions qui s'approchent des fonctions holomorphes; par exemple, pour un premier pas, *les fonctions qui se comportent linéairement, par rapport, à la dérivation aréolaire*, donc les fonctions qui ont la dérivée aréolaire holomorphe, dans un domaine D.

Il faut écrire:

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = f \cdot \text{analytique, ou mieux } \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2} = 0.$$

La forme de f est alors: $f(z, \bar{z}) = \Phi_0(z) + \bar{z} \Phi_1(z)$, où $\Phi_0(z)$, $\Phi_1(z)$ sont des fonctions holomorphes. Cette formule symbolique montre le caractère linéaire de la fonction, et le rôle de constantes, joué par les fonctions analytiques.

La relation (2) est équivalente au système:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0. \end{cases}$$

En particulier:

$$(4) \quad \Delta^2 P = 0 \quad ; \quad \Delta^2 Q = 0 \quad (\Delta^2 \text{ étant le laplacien}).$$

On voit donc, un second point de vue, d'une nature plutôt algébrique, qui doit être examiné parallèlement. C'est l'aspect réel du même problème. L'intégration du système (3), au sens moderne, c'est-à-dire, la recherche d'une solution particulière satisfaisant à certaines conditions aux limites, revient à la recherche d'une fonction telle que (2), unique dans certaines conditions⁽¹⁾.

Une fonction, à dérivée aréolaire monogène, est déterminée à l'intérieur d'un domaine D, simplement connexe, en connaissant sur le contour simple C, les valeurs de la fonction et de sa dérivée aréolaire.

La formule est la suivante:

$$(5) \quad f(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(\bar{\zeta}, \bar{\zeta})}{\bar{\zeta} - \zeta} d\bar{\zeta} + \frac{1}{2i\pi} \int_C (\zeta - \bar{\zeta}) \frac{\rho(\bar{\zeta})}{\bar{\zeta} - \zeta} d\bar{\zeta}.$$

Pour un point extérieur ζ_1 , on a nécessairement:

$$(6) \quad 0 = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(\bar{\zeta}, \bar{\zeta})}{\bar{\zeta} - \zeta_1} d\bar{\zeta} + \frac{1}{2i\pi} \int_C (\zeta_1 - \bar{\zeta}) \frac{\rho(\bar{\zeta})}{\bar{\zeta} - \zeta_1} d\bar{\zeta}.$$

(1) Voir, par exemple, mes notes aux « Comptes Rendus de l'Académie française », relatives à des problèmes d'intégration dans l'élasticité plane et l'hydrodynamique. « C. R. », t. 189, p. 565; t. 189, p. 969, année 1929.

De plus, si on est tenté d'étudier un développement tel que (5), formé à l'aide de deux fonctions continues, données seulement sur le contour C , on s'aperçoit que celui-ci représente une fonction à dérivée aréolaire holomorphe à l'intérieur de D , et une autre fonction du même genre à l'extérieur. Ces deux fonctions ne se prolongent pas par continuité et la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit représentée sur C , avec sa dérivée aréolaire, par les fonctions continues données, est précisément que l'autre soit identiquement nulle.

Le cas général, celui des fonctions dont la dérivée aréolaire d'ordre n soit analytique, est assez facile à traiter :

La condition symbolique est : $\frac{\partial^{n+1} f}{\partial \bar{z}^{n+1}} = 0$ d'où la forme :

$$(7) \quad f = \Phi_0 + \bar{z} \Phi_1 + \dots + \bar{z}^n \Phi_n(z)$$

$\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_n(z)$ étant des fonctions holomorphes dans le domaine D .

Appelons une telle fonction, un *polynôme aréolaire d'ordre n* ⁽¹⁾.

Mais le problème commence à peine, par la formule (7). Il s'agit de déterminer une fonction unique. En effet : désignons les dérivées aréolaires successives par $\rho, \rho^2, \dots, \rho^n$.

En connaissant sur C les valeurs de la fonction et de ses dérivées aréolaires successives, elle est déterminée par la formule suivante :

$$(8) f(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(\bar{z}, \bar{\bar{z}})}{\bar{z} - \bar{\zeta}} d\bar{z} + \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{\bar{\zeta} - \bar{\bar{z}}}{1!} \cdot \frac{\rho(\bar{z}, \bar{\bar{z}})}{\bar{z} - \bar{\zeta}} d\bar{z} + \dots + \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{(\bar{\zeta} - \bar{\bar{z}})^n}{n!} \cdot \frac{\rho^n(\bar{z})}{\bar{z} - \bar{\zeta}} d\bar{z}.$$

Pour un point ζ_1 extérieur à D , on doit avoir :

$$0 = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(\bar{z}, \bar{\bar{z}})}{\bar{z} - \bar{\zeta}_1} d\bar{z} + \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{\bar{\zeta}_1 - \bar{\bar{z}}}{1!} \cdot \frac{\rho(\bar{z}, \bar{\bar{z}})}{\bar{z} - \bar{\zeta}_1} d\bar{z} + \dots + \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{(\bar{\zeta}_1 - \bar{\bar{z}})^n}{n!} \cdot \frac{\rho^n(\bar{z})}{\bar{z} - \bar{\zeta}_1} d\bar{z}.$$

Le parallélisme entre les deux points de vue : réel et complexe se maintient et suit les extensions d'une manière continue.

En conclusion, dans cette première partie on montre qu'en partant des fonctions holomorphes, on peut construire une succession de fonctions, analogue à celle des nombres entiers.

Les propriétés fondamentales, renfermées dans l'intégrale de Cauchy, et surtout dans la possibilité de représentation par cette intégrale, s'étendent d'une manière naturelle à cette classe, caractérisée par l'ordre de l'exposant de ζ .

(1) C'est M. Pietro Burgatti, le premier qui a obtenu de telles fonctions, en se plaçant dans un autre point de vue.

Il faut nécessairement se reporter à sa Note. Voir : « Boll. Unione Mat. Italiana », anno I, n. 1, 1922.

Matematica. — *Sulle serie di Laplace.* Nota di R. CACCIOPPOLI, presentata dal Corrisp. G. SCORZA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sull'operazione infinitesimale nel gruppo delle derivazioni.* Nota di F. SBRANA, presentata dal Corrisp. G. GIORGI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sur le développement des fonctions entières d'ordre fini en série d'interpolation de Newton.* Nota di A. GELFOND, presentata dal Corrisp. L. TONELLI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulle condizioni di rigidità di una V_m in un S_n .* Nota di G. VRANCEANU, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sopra l'equazione (1) $\Delta u = c(x, y) u(x, y) c \geq 0$.* Nota di M. BRELOT, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sul moto incipiente dei sistemi a legami reversibili.* Nota di E. GUGINO, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sia S un sistema materiale di punti P_i ($i = 1, 2, \dots, N$) di masse m_i a vincoli bilaterali, privi di attrito comunque sollecitato; facciamo esplicitamente l'ipotesi, che i vincoli del sistema, olonomi o più in generale anolonomi, siano reversibili, talchè ad ogni istante e da una qualsivoglia configurazione, insieme con ogni atto di moto conciliabile coi detti legami, risulta pure conciliabile con essi l'atto di moto direttamente opposto.

A partire da una generica configurazione C all'istante t , rimanendo immutata la sollecitazione attiva, supponiamo di far variare la distribuzione della velocità dei punti P_i , compatibilmente coi vincoli al medesimo istante; in corrispondenza di ogni atto di moto v_i^* prescelto, risulta determinato un moto reale M^* caratterizzato, all'istante t , dalle accelerazioni effettive a_i^* , in generale variabili al variare delle velocità prefissate. Tra tutte le possibili scelte dell'atto di moto iniziale, in particolare si scelga — le nostre premesse lo consentono — l'atto di moto nullo (la quiete); nell'ipotesi, che le forze attive F_i non siano atte a mantenere l'equilibrio, si genera, per tale particolare scelta, un moto M^0 , cui recentemente abbiamo dato il nome di moto privilegiato⁽²⁾, per certe condizioni di massimo del lavoro delle forze attive che esso realizza. Denotiamo con a_i^0 la distribuzione di accelerazioni che compete ad S , all'istante t , nel moto privilegiato M^0 .

Si indichi infine con Q^* l'energia di accelerazione del sistema⁽³⁾, all'istante t , animato dal generico moto M^* ; tale quantità, com'è ben noto, viene definita dalla relazione:

$$(1) \quad Q^* = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i a_i^{*2}.$$

Analogamente si definisca con:

$$(1') \quad Q^0 = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i a_i^{02}$$

(1) Nella seduta del 5 gennaio 1930.

(2) Cfr. E. GUGINO, *Sopra una nuova interpretazione ecc.* «Rend. R. Acc. Lincei», vol. VIII. pp. 558-565.

(3) Tale denominazione è stata proposta da M. A. DE SAINT-GERMAIN. «Comptes Rendus», t. CXXX.

l'energia di accelerazione del sistema allo stesso istante, animato però dal moto M^0 .

Ciò posto ci proponiamo di dimostrare, che Q^0 è *minimo fra tutte le possibili determinazioni di Q^** ; in altri termini ha luogo la seguente proposizione:

Per ogni sistema materiale a vincoli bilaterali, privi di attrito e reversibili, comunque sollecitato, a partire da una generica configurazione C all'istante t , restando immutati i vincoli e la sollecitazione attiva, l'energia di accelerazione Q^* del sistema, per effetto di un qualsivoglia moto M^* , realizzato con velocità v_i^* comunque prefissate — purchè compatibili coi vincoli — non è mai minore della analoga energia di accelerazione Q^0 relativa al moto M^0 a partire dalla quiete.

In base a tale proposizione, essendo τ un intervallo di tempo successivo all'istante t , ove si introducano le velocità $v_i^0(t + \tau)$ e $v_i^*(t + \tau)$ di ciascun punto P_i all'istante $t + \tau$ in virtù dei moti M ed M^* rispettivamente; ove si denoti con:

$$(2) \quad T(t + \tau) = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i v_i^{02}(t + \tau)$$

la forza viva del sistema allo istante $t + \tau$ nel suo moto privilegiato M^0 ; con

$$(2') \quad \Theta(\Delta v^*) = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i (\Delta v_i^*)^2$$

la forza viva dovuta alle variazioni di velocità $\Delta v_i^* = v_i^*(t + \tau) - v_i^*(t)$ durante lo stesso intervallo di tempo τ , per effetto del generico moto M^* , vogliamo dimostrare che, per τ abbastanza piccolo, $T(t + \tau)$ non è mai maggiore di $\Theta(\Delta v^*)$. Le espressioni (2) e (2') manifestamente si identificano allorchè il generico atto di moto v_i^* relativo al moto M^* coincida con l'atto di moto nullo.

Assumendo come parametri lagrangiani sovrabbondanti atti a caratterizzare le configurazioni del sistema, le $3N$ coordinate cartesiane ξ_i, η_i, ζ_i dei punti P_i rispetto ad una terna galileiana ortogonale prefissata, i vincoli del sistema, supposti reversibili, vengono in generale espressi da equazioni del tipo:

$$(3) \quad B_k(v) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r)$$

ove le B_k sono, com'è noto, forme lineari nelle componenti $\dot{\xi}_i, \dot{\eta}_i, \dot{\zeta}_i$ delle velocità v_i dei punti P_i a coefficienti dipendenti o dalle sole coordinate (vincoli indipendenti dal tempo) oppure più generalmente dalle coordinate e dal tempo.

Giova pertanto rilevare che, per la speciale natura dei vincoli che si considerano, l'atto di moto nullo è pur sempre compatibile con essi, talchè sarà lecito supporre il sistema a partire dalla quiete, qualunque sia l'istante t e la configurazione C iniziale.

Le accelerazioni \mathbf{a}_i^* che i vincoli consentono ai singoli punti del sistema, sono definite dalle equazioni che si deducono dalle precedenti per derivazione rapporto al tempo:

$$(4) \quad B_k(\mathbf{a}) = C_k(v|P|t) \quad (k = 1, 2, \dots, r)$$

ove le B_k denotano le medesime forme lineari, che compaiono al primo membro delle (3) nelle componenti però $\xi_i, \ddot{\eta}_i, \zeta_i$ delle \mathbf{a}_i , mentre le C_k risultano funzioni quadratiche nelle $\xi_i, \dot{\eta}_i, \zeta_i$ mancanti del termine indipendente dalle variabili, a coefficienti funzioni delle coordinate ed eventualmente del tempo.

Nella ipotesi, che il sistema parta dalla quiete, qualunque sia l'istante t e la configurazione iniziale, tutte le C_k si annullano; la corrispondente distribuzione di accelerazioni \mathbf{a}_i^0 in generale non soddisfa alle (4); però essa certamente verifica le relazioni:

$$(4') \quad B_k(\mathbf{a}^0) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r)$$

le quali, a meno della denominazione delle variabili, coincidono con le

$$B_k(\delta P) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r)$$

che, com'è noto⁽¹⁾, definiscono tutti e soli gli spostamenti virtuali del sistema a partire dalla medesima configurazione. Da ciò ne segue, che nella nostra ipotesi di vincoli reversibili, la distribuzione di accelerazioni \mathbf{a}_i^0 relativa al moto privilegiato M^0 non è in generale una distribuzione di accelerazioni, che i dati vincoli consentono ai singoli punti P_i del sistema a partire dalla configurazione all'istante t e da un generico atto di moto \mathbf{v}_i^* prefissato. Però essa certamente si identifica con uno spostamento virtuale (privilegiato) del sistema a partire dalla medesima configurazione.

Stabilito ciò si consideri un qualsivoglia moto M^* e si applichi ad esso l'equazione generale della dinamica riferita all'istante t ; ove si scelga per spostamento virtuale lo spostamento privilegiato relativo alla configurazione C , ha certamente luogo la relazione:

$$\sum_i^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i^*) \times \mathbf{a}_i^0 = 0.$$

(1) Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale*, vol. I, parte 1^a, cap. VI.

Se invece del generico moto M^* si considera il moto M^0 a partire dalla quiete, analogamente si ha:

$$\sum_1^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i^0) \times \mathbf{a}_i^0 = 0.$$

Da qui, sottraendo membro a membro e tenendo conto delle identità

$$(\mathbf{a}_i^* - \mathbf{a}_i^0) \times \mathbf{a}_i^0 = \frac{1}{2} \mathbf{a}_i^{*2} - \frac{1}{2} \mathbf{a}_i^{02} - \frac{1}{2} (\mathbf{a}_i^* - \mathbf{a}_i^0)^2.$$

in base alle formule di definizione (1) e (1') di Q^* e Q^0 , si ottiene in definitiva

$$(I) \quad Q^* = Q^0 + \frac{1}{2} \sum_1^N m_i (\mathbf{a}_i^* - \mathbf{a}_i^0)^2.$$

La nostra proposizione è così dimostrata.

In luogo di un generico atto di moto \mathbf{v}_i^* si consideri invece il moto naturale M del sistema in un istante generico t ; la Q^* si identifica allora con la energia di accelerazione Q del sistema allo stesso istante. La (I) esprime la circostanza che la Q non è mai minore della energia di accelerazione Q^0 relativa al moto M^0 a partire dalla quiete, ferme restando le altre condizioni; la corrispondente differenza (nulla o positiva) uguaglia sempre l'energia di accelerazione dovuta alle variazioni di accelerazioni che ciascun punto P_i subisce allorchè si passa dal moto naturale M al moto privilegiato M^0 .

Procedendo ulteriormente nelle nostre considerazioni, secondo le notazioni già introdotte, per gli sviluppi del Taylor relativi alle velocità $\mathbf{v}_i^*(t + \tau)$ e $\mathbf{v}_i^0(t + \tau)$ dei punti P_i all'istante $t + \tau$, si può manifestamente scrivere:

$$(5) \quad \begin{cases} \mathbf{v}_i^*(t + \tau) - \mathbf{v}_i^*(t) = \mathbf{a}_i^* \tau + (2^*) \\ \mathbf{v}_i^0(t + \tau) = \mathbf{a}_i^0 \tau + (2^0) \end{cases}$$

I simboli (2^*) e (2^0) denotano in ciascuna formola certi vettori i cui moduli sono del secondo ordine almeno rispetto a τ ; elevando le (5) al quadrato, moltiplicando poi entrambi i membri per $\frac{1}{2} m_i$, sommando rispetto all'indice i e tenendo conto delle (1) (1') e (2) (2') si deduce:

$$\begin{aligned} \Theta(\Delta \mathbf{v}_i^*) &= \tau^2 Q^* + (3^*) \\ T(t + \tau) &= \tau^2 Q^0 + (3^0) \end{aligned}$$

ove le quantità in parentesi denotano vettori aventi moduli del terzo ordine almeno rispetto a τ .

Se si tiene conto delle ultime relazioni, la (I) moltiplicata per τ^2 , assume senz'altro l'aspetto

$$(II) \quad \Theta(\Delta v^*) = T(t + \tau) + \frac{\tau^2}{2} \sum_i^N m_i (a_i^* - a_i^0)^2 + [3]$$

ed il modulo del vettore [3] risulta ancora del terzo ordine almeno rispetto a τ . Ora nel caso particolare che a_i^* coincida con a_i^0 , qualunque sia l'indice i ⁽¹⁾, allora l'energia di accelerazione del sistema risulta indipendente dall'atto di moto iniziale; per la (II) la differenza $\Theta(\Delta v^*) - T(t + \tau)$ si può rendere minore di qualsiasi quantità assegnata ad arbitrio, purchè si scelga opportunamente τ ; ne segue, che per τ infinitesimo $\Theta(\Delta v^*)$ si identifica con $T(t + \tau)$. Se invece, più in generale, in corrispondenza dell'atto di moto v_i^* prescelto, la distribuzione di accelerazioni a_i^* è diversa dalla a_i^0 , si può sempre scegliere τ abbastanza piccolo in maniera che la differenza $\Theta(\Delta v^*) - T(t + \tau)$ risulti essenzialmente positiva. In ogni caso si può sempre affermare, che per τ sufficientemente piccolo, $T(t + \tau)$ non è maggiore di $\Theta(\Delta v^*)$; quindi la forza viva del sistema all'istante $t + \tau$ nel moto M^0 a partire dalla quiete, scegliendo opportunamente τ , si può rendere sempre non maggiore della forza viva dovuta alle variazioni di velocità nello stesso intervallo di tempo, in un qualsivoglia moto M^* a partire da una distribuzione di velocità v_i^* , compatibilmente coi vincoli, comunque prefissati.

Meccanica (Aerodinamica). — *Considerazioni teoriche sul « girante a paletta »*. Nota di E. CARAFOLI, presentata ⁽²⁾ dal Corrispondente A. CROCCO.

Il 18 luglio 1929 il sig. A. Crocco ha presentato all'Accademia Nazionale dei Lincei una Nota del sig. E. Raimondi, dal titolo *Un nuovo fenomeno di aerodinamica*, colla quale viene esposto il fenomeno di attrazione fra una paletta indefinita rotante intorno al suo asse e un piano indefinito parallelo a quell'asse. I risultati dati dall'autore sono giustificati dalle esperienze qualitative eseguite dall'autore stesso.

Ci proponiamo in questa Nota di spiegare e stabilire le leggi di questo fenomeno, il quale può essere collegato col problema generale del moto

(1) Ciò ha sempre luogo a partire da qualsivoglia distribuzione di velocità v_i^* per i sistemi formati da uno o più punti materiali comunque sollecitati, vincolati però a rimanere su piani fissi in qualsiasi modo orientati. Infatti per tali particolari sistemi le equazioni (4) risultano prive di secondo membro e quindi si identificano con le (4'); le distribuzioni di accelerazioni a_i^* non dipendono allora dall'atto di moto v_i^* prefissato.

(2) Nella seduta del 2 febbraio 1930.

intorno ai contorni rotanti, problema che ho trattato in studi anteriori ⁽¹⁾. In tali studi ho stabilito una teoria del *girante a paletta*, immerso in una corrente d'aria di velocità costante. Ci proponiamo ora di stabilire la legge di attrazione nel caso esposto dal sig. E. Raimondi. Tratteremo il problema generale, supporremo cioè che la paletta giri nell'interno oppure all'esterno di un cilindro avente l'asse parallelo all'asse di rotazione della paletta, e poi dedurremo per estensione il caso del piano.

Consideriamo una sezione perpendicolare all'asse del cilindro, e detto: C il centro del cerchio, O l'asse di rotazione, OXY un sistema fisso d'assi,

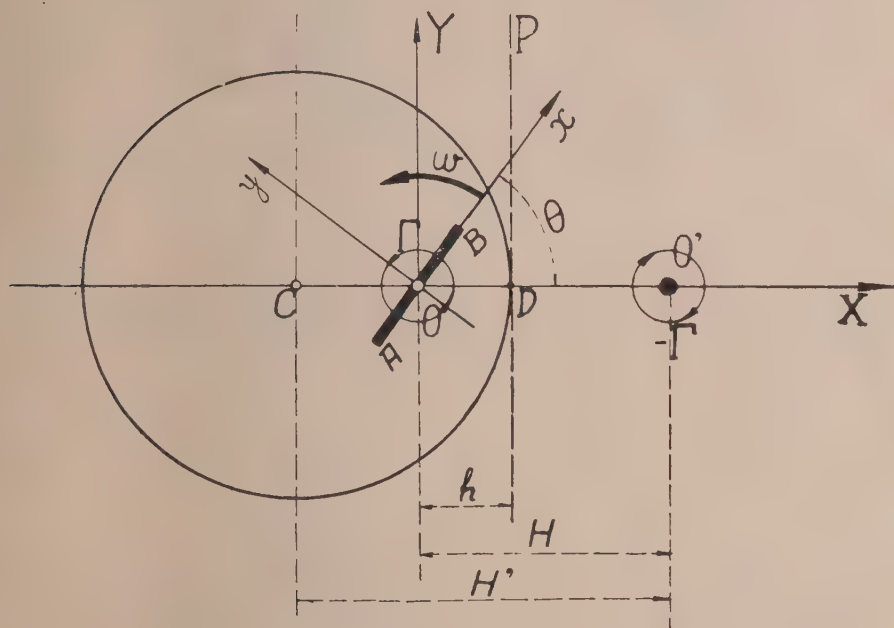


Fig. 1.

con l'asse OX passante per C, Oxy un sistema mobile di assi, rispettivamente parallelo e perpendicolare al segmento AB (rappresentante la paletta), ed ω la velocità angolare (fig. 1).

Sia poi $h = \overline{OD}$, la distanza fra il punto O ed il cerchio, e sia O' un punto sull'asse OX, alla distanza H da O, cosicchè, essendo R il raggio del cerchio, si avrà: *

$$H = H' - (R - h) = \frac{R^2}{R - h} - (R - h) = \frac{(2R - h)h}{R - h}.$$

(1) E. CARAFOLI, *Sur le mouvement général autour d'un contour*, « Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris », séance du 30 avril 1928, t. 186, n. 18 et: Id., *Aérodynamique des ailes d'avion*, Librairie Chiron, 40 rue de Seine, Paris, pp. 27-34 et 54-68.

Se il raggio del cerchio diventa infinito ($R = \infty$), $H = 2b$, ed il cilindro circolare diventa il piano indefinito P , perpendicolare in D all'asse OX .

Per la rotazione della paletta nasce una circolazione Γ intorno ad essa - vedremo più tardi come si possa determinare questa circolazione - che possiamo considerare concentrata approssimativamente nel punto O .

La soluzione esatta del problema consiste nel rappresentare il moto reale, nell'interno d'una corona circolare. (Il problema di H. Villat); ma il problema, considerato in questo modo, presenta difficoltà insormontabili. Daremo perciò una soluzione approssimata, ma che rappresenta sufficientemente il fenomeno.

Prenderemo in considerazione soltanto la circolazione intorno alla paletta, ed in questo caso il contorno del cerchio sarà una linea di flusso (corrente), se introduciamo nel punto O' un vortice d'intensità uguale e di senso opposto a quello rappresentante la circolazione intorno alla paletta.

Possiamo sopprimere allora le pareti del cilindro, ed il problema si riduce a quello di trovare il potenziale intorno alla paletta in presenza di un vortice in O' .

Trasformiamo il moto intorno ad un cerchio di raggio $a = \frac{l}{4}$, dove l è la larghezza della paletta ($l = AB$), mediante la funzione di trasformazione:

$$\tilde{z} = \zeta + \frac{a^2}{\zeta}.$$

Il potenziale nel piano ζ sarà allora:

$$F(\zeta) = -i\omega \frac{a^4}{\zeta^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log \frac{\zeta - a^2 e^{i\varphi}}{\zeta - \chi e^{i\varphi}},$$

dove il primo termine del secondo membro è dovuto alla rotazione semplice⁽¹⁾ ed il secondo termine è dovuto ai due vortici, uno nell'interno del cerchio di raggio a , e l'altro al vortice del piano ζ nel punto corrispondente ad O' del piano Z .

Quest'ultimo vortice sarà posto nel punto $\chi e^{i\varphi}$ che si trova facilmente dalla relazione $Z = \tilde{z} e^{i\theta}$.

$$H e^{-i\theta} = \chi e^{i\varphi} + \frac{a^2}{\chi} e^{-i\varphi}$$

onde, ponendo $\chi = \lambda a$,

$$\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} + 2 \cos 2\varphi = \left(\frac{H}{a}\right)^2 = \mu^2$$

$$\sin(\varphi + \theta) = -\frac{\sin(\varphi - \theta)}{\lambda^2}, \quad \text{ovvero} \quad \frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\theta} = -\frac{\mu^2}{\lambda^2}.$$

(1) Loc. cit.

Determinazione della circolazione. L'espressione della velocità è:

$$\frac{df}{d\zeta} = \frac{dF}{d\zeta} \frac{d\zeta}{d\bar{\zeta}} = \frac{2i\omega \frac{a^4}{\zeta^3} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \left(\frac{1}{\zeta - \frac{a}{\lambda} e^{i\varphi}} - \frac{1}{\zeta - \lambda a e^{i\varphi}} \right)}{1 - \frac{a^2}{\zeta^2}}$$

che diventa infinita per $\zeta = \pm a$, cioè sugli spigoli della paletta, nei punti A e B. Per avere una velocità finita in uno di questi punti, Γ dovrà avere i valori:

$$\Gamma_+ = 4\pi\omega a^2 \frac{\lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi + 1}{\lambda^2 - 1}, \quad \text{per } \zeta = a \text{ (spigolo B)}$$

$$\Gamma_- = 4\pi\omega a^2 \frac{\lambda^2 + 2\lambda \cos \varphi + 1}{\lambda^2 - 1}, \quad \text{per } \zeta = -a \text{ (spigolo A)}.$$

Queste due espressioni essendo diverse l'una dall'altra, risulta che non si può ottenere velocità finita nei due spigoli. Ma i valori medi delle due espressioni nel tempo di una rivoluzione completa sono gli stessi, e perciò considereremo la circolazione media:

$$\Gamma = 4\pi\omega' a^2 \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1}$$

che corrisponde nel medesimo tempo al valore medio delle ambedue circolazioni.

La risultante aerodinamica. Mediante l'espressione del potenziale ottenuta, possiamo dedurre immediatamente la risultante dell'azione dell'aria sulla paletta, applicando la formola generale stabilita nei miei lavori citati. Preferiamo pertanto servirci del seguente artificio:

L'azione esercitata sulla paletta è uguale e di senso opposto all'azione esercitata sulle pareti del cilindro, oppure del piano. Ma siccome d'altra parte questa azione è stata sostituita col vortice di O' , risulta che la risultante aerodinamica è uguale e di senso opposto alla forza esercitandosi sul vortice di O' .

Il valore di questa forza, per unità di lunghezza, è data dalla seguente espressione:

$$R = R_x - iR_y = i\rho\Gamma \left(\frac{df}{dZ} - \frac{1}{Z - H} \right),$$

dove

$$\begin{aligned} \frac{df}{dZ} - \frac{1}{Z-H} &= i e^{-i(\varphi+\theta)} 2 \omega a \left[\frac{e^{-2i\varphi}}{\lambda^2} - \frac{\lambda(\lambda^2+1)}{(\lambda^2-1)^2} \right] \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - e^{-2i\varphi}} = \\ &= i e^{-i(\varphi+\theta)} \frac{2 \omega a}{\lambda} \frac{e^{-2i\varphi} - \lambda^2 \left(1 + \frac{1}{\lambda^2} \right)}{(\lambda^2 - e^{-2i\varphi}) \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right)^2} \end{aligned}$$

rappresenta la velocità presso il vortice di O' , oltre all'azione propria del vortice stesso.

L'espressione della risultante aerodinamica sembra complicatissima nella forma ottenuta. Ma se consideriamo i valori di λ e φ , possiamo ottenere una forma semplicissima.

Così, osservando che $a = \frac{l}{4} < \frac{b}{2}$, avremo

$$\frac{H^2}{a^2} > 4 \frac{H}{b} = 4 \left(2 + \frac{b}{R-b} \right)^2$$

onde $\frac{H}{a} = \mu > 4$ e quindi $\lambda \approx \mu - \frac{\cos 2\varphi}{\mu} = \sim \mu$.

D'altra parte $\frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\theta} = -\frac{\mu^2}{\lambda^2} = \sim -1$, onde $\varphi + \theta = \sim 0$.

E finalmente, trascurando $\frac{1}{\lambda^2}$ rispetto ad 1, risulta:

$$R = i \rho \Gamma \left(\frac{df}{dZ} - \frac{1}{Z-H} \right) = i \rho \Gamma i \frac{2 \omega a}{\lambda} = -\rho \Gamma \cdot \frac{2 \omega' a}{\lambda}$$

ovvero

$$R_x = -\rho \frac{\Gamma^2}{2 \pi H} = -\rho \frac{4 \pi \omega^2 a^4}{H} = -\rho \frac{\pi}{64} \cdot \frac{\omega^2 l^4}{H}, \quad \text{e} \quad R_y = 0.$$

Troveremmo il medesimo risultato se al posto della parete del cilindro o del piano, avessimo un'altra paletta identica colla prima, ma girante in senso opposto. Se la rotazione ha lo stesso senso, la forza che nasce sarà ripulsiva (forza di ripulsione).

Il problema del cilindro ruotante intorno al suo asse è semplice. Sia h la distanza fra il centro del cilindro ruotante ed il cerchio. Il vortice complementare sarà posto nel punto O' , sulla retta COO' , alla distanza $H = \overline{OO'}$:

$$H = h - \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{R - b} + \sqrt{\left(h - \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{R - b} \right)^2 - a^2},$$

dove a è il raggio del cilindro.

Il potenziale del moto sarà allora:

$$f(Z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \log \frac{Z - \frac{a^2}{H}}{Z - H}$$

e la forma di attrazione

$$R_x = \rho \frac{\Gamma^2}{2\pi H}.$$

La circolazione Γ è funzione della velocità periferica $\mu = w'a$ e sarà data dall'esperienza.

Geodesia. — *Stazione astronomico-geodetica compiuta nel vertice di 1° ordine Eremo di Cherasco, nel luglio 1928.* Nota I di U. BARBIERI, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. E. SOLER.

Riserbando per un'altra Nota il resoconto delle operazioni riguardanti la determinazione della longitudine per via radiotelegrafica, daremo ora notizia delle osservazioni di latitudine e azimut, eseguite nella stazione di Eremo di Cherasco, a nord di Mondovì.

Non potendo osservare nel vertice trigonometrico, costituito dall'asse del piccolo campanile dell'antico Eremo, si scelse, in località più acconcia possibile, un ex-centro, i cui elementi di riduzione, eccentricità e angolo fra la direzione al centro e la direzione al vertice circostante di S. Vittoria d'Alba, risultarono i seguenti:

$$e = 57^m,549$$

$$\epsilon = 174^{\circ}51'$$

essendo stata l'eccentricità misurata reiteratamente con un doppio decametro di acciaio, di nota equazione. Gli strumenti adoperati nella stazione, per tutte le operazioni di latitudine, azimut, longitudine e gravità, furono quelli appartenenti all'Istituto di Geodesia dell'Università di Genova; il personale della stazione, oltre a due o tre persone atte ai bisogni materiali della circostanza, fu costituito da me e dalla mia Assistente dott. Ida Gennaro, che badò al funzionamento dell'apparato radiotelegrafico, e alle osservazioni delle coincidenze nelle determinazioni gravimetriche.

DETERMINAZIONE DELLA LATITUDINE.

Occupò le sere del 2, 3, 4, e 5 luglio; il metodo impiegato fu il solito dell'osservazione del passaggio in meridiano di stelle fondamentali: esse furono in numero di 48, distribuite in gruppi di otto ciascuno con modalità

(1) Nella seduta del 2 febbraio 1930.

identiche a quelle seguite nelle altre stazioni precedenti: il tempo vario talvolta impedì l'osservazione, onde le lacune che appaiono nello specchio seguente, nel quale sono riassunti i risultati finali.

Data luglio 1928	Gruppo					
	1°	2°	3°	4°	5°	6°
2	44° 36' 28".3	44° 36' 26".4	44° 36' 26".6	44° 36' 28".9	44° 36' 31".9	44° 36' 31".4
3	29 .1	—	—	32. 0	30 .3	30 .5
4	32 .0	—	—	29 .9	27 .9	29 .2
5	31 .7	32 .8	—	28 .9	28. 7	29. 9
Medie	30. 3	29. 6	26 .6	30 .0	29 .7	30 .2

La media ponderata dei valori trascritti nell'ultima linea, quando ad essi si assegna un peso uguale al numero delle osservazioni che concorsero a formarli, dà per valore definitivo della latitudine della stazione

$$\varphi = 44^{\circ} 36' 29''.8,$$

che ridotto al centro mediante la nota formola

$$\Delta\varphi = \frac{\rho \cos \alpha}{R \operatorname{Arc} 1''},$$

essendo α l'angolo di direzione della visuale al vertice trigonometrico, dedotto mediante l'angolo di direzione noto della visuale ad un vertice circostante, dà quale latitudine di Eremo di Cherasco

$$\varphi = 44^{\circ} 36' 27''.0 \pm 0''.4$$

(Epoca 1928, 5).

DETERMINAZIONE DI AZIMUT.

Varie ragioni, sia di visibilità, di risparmio di tempo, di economia, come altre ancora, indussero a scegliere, quale mira azimutale, il campanile di S. Vittoria d'Alba, vertice trigonometrico di 3° ordine, situato a circa 15 km. dalla stazione, direttamente collegato all'Eremo, e molto bene ad altri vertici di 1° e 2° ordine.

Il metodo usato, servendosi della Polare, fu quello del solito schema MPPM, MPPMMPPM, MPPM, metà dei puntamenti eseguendosi col cerchio a destra, e metà col cerchio a sinistra: il cerchio venne reiterato ogni 45°, ed il cannocchiale invertito sui suoi appoggi a metà delle osservazioni.

I puntamenti si effettuarono al tramonto, in cui sia la visibilità del segnale, che quella della Polare, erano molto buone, evitando in tal modo il dispendio di tempo e di fatica che avrebbe importata l'istallazione di una mira luminosa fuori centro.

Le determinazioni occuparono le sere del 4, 5, 6, 7 luglio; la correzione del cronometro Kullberg fu determinata nelle sere del 3, 4, 5, col metodo di Döllén e con speciale riguardo, tenuto conto che essa doveva soprattutto servire per le determinazioni di longitudine e gravimetriche: disposto il cronometro presso l'apparato radiotelegrafico, esso era congiunto con un circuito al cronografo Cavignato nel casotto dell'Universale, mentre in questo un altro cronometro, Fletch, serviva alla lettura del primo siderale.

I risultati delle osservazioni vengono compendati nella tabella che segue:

Luglio 1928	Reiterazione	Azimut osservato
4	0°	44° 22' 51".8
5	45°	51 .0
6	90°	49 .8
7	135°	49 .3

La media di questi risultati dà, quale valore definitivo

$$A = 44^{\circ} 22' 50''.4 \pm 1''.3.$$

A portarci in centro servirà la nota formula

$$\Delta A = \frac{\rho \operatorname{sen} \varepsilon}{s \operatorname{arc} 1''} + \frac{\rho \operatorname{sen} \alpha}{N \operatorname{arc} 1''} \operatorname{tg} \varphi,$$

dovè ε è l'angolo ex-centro della direzione a S. Vittoria d'Alba con quella relativa al centro trigonometrico, già noto; α l'azimut di questa ultima direzione, ed s la distanza dall'Eremo di S. Vittoria:

$$\log s = 4.1623950 \quad \alpha = 219^{\circ} 13'.$$

A calcoli eseguiti si ricava

$$\Delta A = - 2' 26''.4$$

e pertanto il risultato finale:

Azimut astronomico di S. Vittoria d'Alba sull'orizzonte di Eremo di Cherasco:

$$44^{\circ} 20' 24''.0 \pm 1''.3.$$

ATTRAZIONE LOCALE.

Il confronto fra i risultati testè esposti, ottenuti direttamente dall'osservazione, e gli elementi geodetici, forniti dall'Istituto Geografico M^{re} porta a quanto segue:

Latitudine di Eremo di Cherasco:

$$\begin{array}{rcl} \text{astronomica } \varphi_a & = & 44^{\circ} 36' 27''.0 \\ \text{geodetica } \varphi_g & = & 44^{\circ} 36' 08''.0 \\ \hline \varphi_a - \varphi_g & = & + 19''.0 \end{array}$$

Azimut della direzione Eremo di Cherasco-S. Vittoria d'Alba:

$$\begin{array}{rcl} \text{astronomico } A_a & = & 44^{\circ} 20' 24''.0 \\ \text{geodetico } A_g & = & 44^{\circ} 20' 01''.1 \\ \hline A_a - A_g & = & + 22''.9 \end{array}$$

Se ne ricavano di qui le due componenti dell'attrazione locale:

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi_a - \varphi_g & = & + 19''.0 \\ \eta &= (A_a - A_g) \cotg \varphi_a & = & + 23''.2 \end{aligned}$$

e, per note relazioni, i valori dell'attrazione locale e del suo azimut

$$\Theta = 29''.75$$

$$A = 51^{\circ} 17' 51''.$$

Chimica. — *Un nuovo modo di formazione di neri di pirrolo* ⁽¹⁾.
Nota I di A. QUILICO e M. FRERI, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. BRUNI.

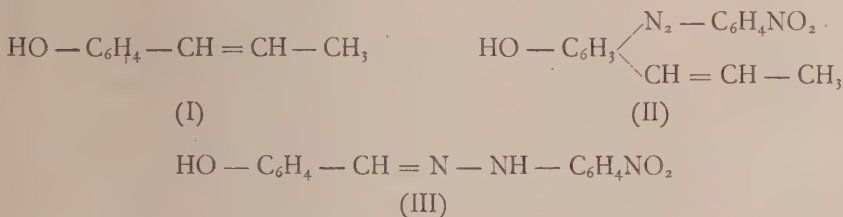
Questo lavoro si riattacca alle nostre precedenti ricerche ⁽³⁾ sull'azione dei sali di diazonio in soluzione acetica glaciale ed alcoolica sui composti non saturi. Avemmo allora occasione di osservare che gli eteri fenolici ed i fenoli non saturi a catena propenilica, come l'aneltolo, l'isosafrolo, l'isoeugenolo ecc., esibiscono in queste condizioni un comportamento anomalo alla copulazione, verificandosi lo spezzamento della catena laterale in corrispondenza del doppio legame, con formazione quasi quantitativa dei fenilidrazoni delle corrispondenti aldeidi.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale del R. Politecnico di Milano.

(2) Nella seduta del 2 febbraio 1930.

(3) A. QUILICO e M. FRERI, « Gazz. Chim. It. », 58, 1^o, 380 (1928); A. QUILICO e E. FLEISCHNER, « Id. », 59, 1^o, 39 (1929); A. QUILICO e M. FRERI, « Id. », 59, 2^o, 600 (1929).

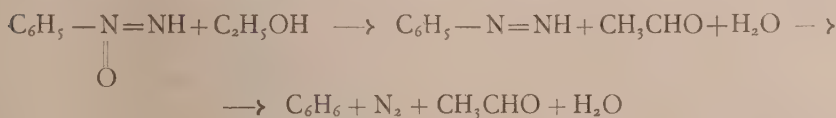
Considerando, ad es., il p. propenilfenolo (I) (p. anolo), questo copula normalmente in soluzione acquosa alcalina col diazo di p. nitroanilina dando l'ossiazocomposto (II), mentre che in soluzione alcoolica od acetica, accanto ad un prodotto secondario la cui costituzione non ci è stato ancora possibile chiarire, si forma il p. nitrofenilidrazone dell'aldeide p. ossibenzoica (III):



Nulla possiamo ancora dire di sicuro sul meccanismo della reazione, ma, come a suo tempo facemmo osservare, il risultato finale appare come una ossidazione ad aldeide del composto non saturo, ed una riduzione a fenilidrazina del diazocomposto ⁽¹⁾. Essa presenta pertanto notevoli analogie con quella classica di Griess, riguardante l'azione degli alcoli sui sali di diazonio, nella quale si ha una ossidazione dell'alcool ad aldeide ed una riduzione del diazo ad idrocarburo, ma mentre quest'ultima si effettua solo a caldo e con difficoltà, tanto che potemmo impiegare l'alcool come solvente nelle nostre esperienze, la reazione con i fenoli e gli eteri fenolici non saturi procede già a 0° con notevole rapidità, ciò che si accorda bene con la costituzione di alcoli non saturi da noi attribuita a questi composti.

Nella nostra reazione, come in quella di Griess, i sali di diazonio mostrano di possedere proprietà ossidanti paragonabili a quelle degli agenti inorganici più energici, quali l'acido cromico, l'acido permanganico ecc.

Le belle e recentissime ricerche di Angeli e dei suoi collaboratori ⁽²⁾ hanno messo in evidenza le energiche proprietà ossidanti dei diazoidrati normali, che si esplicano, ad es., nell'ossidazione dei sali ferrosi a ferrici, dei ferrocianuri a ferricianuri ecc., e che sono evidentemente connesse alla presenza in essi di un atomo di ossigeno doppiamente legato all'azoto; secondo i risultati di queste ricerche, la reazione di Griess si può così formulare:



(1) A questo riguardo facciamo notare che, da esperienze ancora in corso ci risulta che il sottoprodotto p. f. 228° dec. capace di dare sali azzurri con gli alcali, da noi costantemente ottenuto nella reazione tra eteri fenolici e diazo di p. nitroanilina, si forma anche da diazo di p. nitro e p. nitrofenilidrazina in soluzione acetica o alcoolica.

(2) A. ANGELI e Z. JOLLES, questi « Rendiconti », serie 6ª, vol. X, 2° sem., p. 141, 320 (1929).

Ora è molto probabile che nelle nostre esperienze con i fenoli non saturi, il sale di diazonio soggiaccia ad un processo di idrolisi o di alcoolisi, dando origine al diazoidrato normale che è quello che agirebbe da ossidante⁽¹⁾; la formazione dei fenilidrazoni si effettuerebbe poi per un processo analogo all'artificio escogitato da Angeli (aggiunta di aldeide benzoica) per caratterizzare la fenilimmide labile $C_6H_5 - N = NH$ che è il primo prodotto di scissione del diazoidrato quando questo agisce da ossidante.

Riguardo poi al duplice comportamento dei fenoli non saturi in soluzione acquosa alcalina ed in soluzione acetica od alcoolica, è molto verosimile che esso si debba attribuire alla diversa velocità con cui si compiono i due processi di ossidazione e di copulazione: in soluzione alcalina la copulazione procede molto più rapidamente dell'ossidazione, mentre in soluzione acetica la copulazione viene ad essere ostacolata, e prevale l'azione ossidante.

Una nuova conferma di quanto abbiamo esposto, abbiamo avuta sperimentando con il pirrolo. È noto che uno dei fatti più salienti sui quali si basa l'analogia tra fenolo e pirrolo, è la facilità con la quale questo ed i suoi omologhi copulano in soluzione alcalina, neutra od acida con i diazocomposti, per dare degli azo e disazopirroli⁽²⁾ ben cristallizzati e stabili, frequentemente utilizzati alla caratterizzazione dei pirroli.

Noi abbiamo trovato che aggiungendo invece il pirrolo alla soluzione acetica glaciale od alcoolica di un sale di diazonio⁽³⁾ raffreddata e mantenuta in continua agitazione, si ha subito una colorazione rosso-violacea scurissima, e dopo qualche minuto si separano notevoli quantità di una polvere nerissima, infusibile ed insolubile in tutti i solventi, che ha tutto l'aspetto e le proprietà dei *neri di pirrolo* tipici ottenuti da Angeli per ossidazione del pirrolo con peridrolo in soluzione acetica⁽⁴⁾, con acido cromatico⁽⁵⁾, chinoni⁽⁶⁾, nitrosofenolo⁽⁷⁾, ecc.

Contemporaneamente si avverte sviluppo di azoto, e nel liquido filtrato si può constatare la presenza dei prodotti di riduzione del diazo impiegato: ad es., con diazo di o. p. dinitroanilina, si formano notevoli quantità di

(1) Questo è tanto più probabile per le esperienze col pirrolo che qui descriveremo, in quanto che, come gentilmente ci ha fatto osservare il prof. Angeli, questo possiede delle nette, per quanto deboli, proprietà basiche.

(2) Per la letteratura sugli azopirroli, vedi il MEYER-JACOBSON, 2° vol., 1ª parte, p. 18.

(3) Dato che l'acido nitroso è capace di alterare di per se il pirrolo dando dei neri analoghi a quelli di cui ci stiamo occupando (ANGELI e CUSMANO, « Gazz. Chim. It. », 47, I, 207 (1917); ANGELI, « Id. », 48, II, 21 (1918), abbiamo sempre impiegati i solfati di diazonio cristallizzati e ben lavati con etere, preparati col metodo di Hantsch.

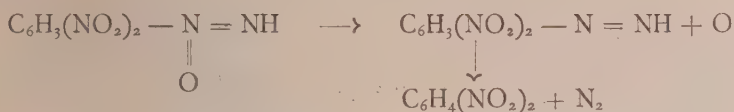
(4) A. ANGELI, « Gazz. », 46, 279 (1916); A. ANGELI e L. ALESSANDRI, « Gazz. », 46, 283 (1916).

(5) A. ANGELI, « Gazz. », 48, 21 (1918).

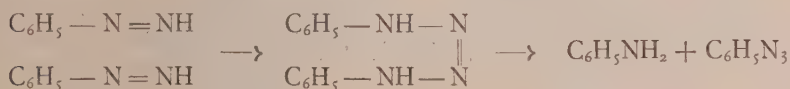
(6) A. ANGELI e C. LUTRI, « Gazz. », 50, 128 (1920).

(7) A. ANGELI e C. LUTRI, « Gazz. », 51, 32 (1921).

m. dinitrobenzolo, ciò che dimostra che ha avuto luogo il processo di riduzione:



Non abbiamo ancora identificati tutti i prodotti secondari che si formano, ma nel caso del diazo di anilina, di p. bromoanilina e delle nitroaniline, furono ricavati dalle acque madri del nero anche i solfati delle ammine, che, secondo i risultati di Angeli nella riduzione dei diazoidrati normali con sali ferrosi, provengono verosimilmente dalla scissione del prodotto di polimerizzazione della fenilimide:



I neri ottenuti furono purificati estraendoli in Soxhlet per molte ore con acido acetico glaciale fino a che questo passava incolore, poi di nuovo con alcool.

Si presentano così come polveri nerissime, praticamente insolubili in tutti i solventi, e a differenza dei neri di pirrolo tipici, quasi insolubili anche in alcali.

Riscaldati in tubo da saggio non fondono, ma danno dei vapori che arrossano il fuscello di abete umettato di HCl, mentre sulle pareti si condensano gocce oleose e piccole quantità di un sublimato bianco.

Queste sostanze non contengono solo nuclei pirrolici, ma anche nuclei aromatici, avendo il diazocomposto o i suoi prodotti di riduzione, preso parte alla condensazione, probabilmente sotto forma di residui fenilidrazonici⁽¹⁾; come le nostre esperienze sugli eteri fenolici rendono verosimile: a questo riguardo sono quindi paragonabili ai neri ottenuti da Angeli impiegando il chinone ed il nitrosofenolo. Questo appare evidente sia dai rendimenti molto elevati rispetto al pirrolo impiegato, sia dal fatto che per le aniline alogenate (o. p. dicloroanilina, p. bromoanilina) o solfonate (acido solfoanilico), si ottengono dei neri che dopo purificazione contengono notevoli quantità di alogeni e di zolfo.

Anzi, per il nero da pirrolo e diazo solfoanilico, compare la proprietà della quale sono sprovvisti gli altri, di essere facilmente solubile negli alcali e nei carbonati alcalini, e di venire riprecipitato inalterato dagli acidi, ciò che è evidentemente connesso alla presenza di gruppi solfonici nella molecola.

(1) I neri di pirrolo di Angeli, reagiscono con la fenilidrazina: A. ANGELI e A. PIERONI, « Gazz. », 49, 154 (1919).

Abbiamo preparato circa una diecina di queste sostanze, impiegando i solfati di diazonio della 2 : 4 dinitroanilina, delle tre nitroaniline, dell'anilina, della p. bromo e 2 : 4 dicloroanilina, e il diazo solfoanilico. L'analisi dei neri accuratamente purificati e seccati conduce alle seguenti conclusioni:

Il *carbonio* varia da un massimo di 56.5, che si ha per i neri da anilina e dinitroanilina, ad un minimo di 48.5 per quelli dalle aniline alogenate.

L'*idrogeno*, da 4.2 a 3.2.

L'*azoto*, da un massimo di 18.5 per i derivati dalle nitroaniline, ad un minimo di 15.5 per quello dell'anilina.

Naturalmente non abbiamo la sicurezza che si tratti di un composto unico, anzi è molto probabile che si tratti di una miscela di diversi prodotti, tuttavia, nel caso della dinitroanilina, variando le proporzioni tra diazo e pirrolo non abbiamo avuto sensibile cambiamento nei risultati dell'analisi.

Un particolare interesse presentano i derivati alogenati e solforati, perchè ci permettono di avere qualche indizio sul peso molecolare minimo di queste sostanze. Nell'ipotesi che la molecola contenga rispettivamente un atomo di bromo, due di cloro, uno di zolfo, si calcolano i seguenti pesi molecolari minimi:

		P. M.		
Nero di diazo di p. bromoanilina	Br %	13.24	13.64	600
Nero di diazo di o. p. dicloroanilina	Cl %	16.67	16.77	425
Nero di diazo solfoanilico	S %	8.51	8.68	370

È però probabile che alla condensazione prenda parte più di un nucleo benzenico; ad esempio, per il nero da diazo solfoanilico, ammettendo che ogni nucleo pirrolico entri con il suo atomo di azoto, ed il diazo come residuo fenilidrazonico, in base ai risultati dell'analisi si calcolerebbe una formula $C_{32}H_{29}N_9O_9S_2$ o $C_{32}H_{27}N_9O_9S_2$:

Trovato:		Calcolato per $C_{32}H_{29}N_9O_9S_2$	$C_{32}H_{27}N_9O_9S_2$
C %	51.17	51.38	51.53
H	4.10	3.91	3.65
N	16.87	16.86	16.91
S	8.68	8.58	8.60

secondo la quale prenderebbero parte alla condensazione 5 molecole di pirrolo e 2 di diazo, secondo l'equazione:



Per il nero da diazo di p. bromoanilina e pirrolo, sempre nelle stesse ipotesi, apparirebbe più probabile la formazione da 9 molecole di pirrolo e 2 di diazo:

Trovato:

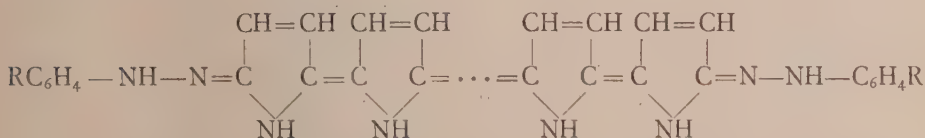
Calcolato per $C_{48}H_{47}N_{13}O_{13}Br_2$

C	49.06	49.10
H	4.22	4.03
N	16.50	15.52
Br	13.64	13.62

Naturalmente non si può fare eccessivo affidamento su queste formule, per la possibilità che il prodotto sia una miscela di differenti composti, e forse anche di neri da sola ossidazione con prodotti di condensazione con i diazocomposti. Ad esempio, la composizione del nero di pirrolo da noi ottenuto con il diazo di anilina, non si scosta molto da quella dei neri tipici da ossidazione con peridolo:

	Nero da pirrolo + diazo di anilina	Nero da pirrolo + H_2O_2 ⁽¹⁾
trovato %:		
C	56.32	58.14
H	4.02	4.31
N	15.58-15.76	15.27-15.30

Intorno alla struttura di questi composti, nulla possiamo aggiungere alle considerazioni fatte da Angeli a proposito dei suoi neri di pirrolo, salvo che i nuclei fenilici entrino come residui fenilidrazonici; una struttura del tipo:



per la sostanza madre (priva di ossigeno) di questi composti, spiegherebbe con l'accumulo di molti doppi legami coniugati, il colore cupo di queste sostanze, nelle quali l'ossigeno farebbe parte di gruppi carbonilici od ossidrilici. Le ricerche ancora in corso sugli omologhi del pirrolo e sull'indolo, permetteranno di chiarire ulteriormente la questione.

Vogliamo infine accennare che, se il pirrolo, anzichè essere un prodotto di laboratorio, si potesse avere in notevole quantità nell'industria, la formazione di questi neri da diazocomposti e pirrolo, che avviene con grande facilità anche su fibra, potrebbe essere suscettibile di pratica applicazione.

(1) A. ANGELI e L. ALESSANDRI, «Gazz.», 46, 2°, 291 (1916).

Geologia. — *Il Retico nella Valle della Lima.* Nota di R. MASINI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. D'ACHIARDI.

Fra i ripiegamenti laterali delle Alpi Apuane, che nell'adiacente Appennino affiorano sotto forma di elissoidi, generalmente incompleti, il più interessante ed esteso è quello della Valle della Lima ⁽²⁾ e dell'Orrido di Botri, dove forma un'isola rupestre, mesozoica, tutta circonscritta da terreni terziari.

La complicata tettonica di questa cupola e la deficienza di fossili, nella parte più profonda e movimentata, non avevano finora permesso, nè di stabilire una scala cronologica dei terreni sottostanti agli strati a *Posidomya Bronni*, nè di ricostruire la tettonica della regione, talchè, nella carta geologica di S. Marcello Pistoiese, tutti i terreni, sottostanti al Lias superiore, erano stati indicati con un'unica tinta e raggruppati in un'unica serie, comprensiva, provvisoriamente ascritta al Lias medio, salvo una piccola placca di Lias inferiore alle Strette di Cocciglia.

I due venerandi geologi della Toscana, ing. Lotti e ing. Zaccagna, non avevano ritenuto di « riportare con sicurezza al Retico » il calcare cavernoso, che veniva riunito « fino a prova in contrario al Lias medio » ⁽³⁾, sembrando « doversi concludere che il calcare cavernoso e il calcare grigio e rossigno con selce », fossero « due forme litologiche complementari, entrambe da attribuirsi alla formazione del Lias medio » ⁽⁴⁾.

Il Lotti aveva, nelle sue quattro sezioni dei dintorni dei Bagni di Lucca ⁽⁵⁾, distinto i terreni, sottostanti agli strati a *Posidomya Bronni*, in cinque piani litologici, ponendo il calcare cavernoso *in serie ascendente continua*, fra il 2° e il 4°, ma però, più dalle comunicazioni verbali, fattemi alcuni anni indietro, che dai suoi scritti, mi risultava che neppure Egli era troppo convinto di un tale ordinamento, come non lo sembrava lo Zaccagna, il quale nel maggio 1926 mi scriveva (a proposito di alcuni fossili indeterminabili a facies retica, che io gli avevo inviato), che tali fossili gli ricordavano altri analoghi trovati « nel Retico della sponda destra del Lago d'Iseo » soggiungendo: « e la

(1) Nella seduta del 2 febbraio 1930.

(2) La Valle della Lima è nell'Appennino Settentrionale, adiacente alle Alpi Apuane.

(3) LOTTI B., *Geologia della Toscana*, 1910, Roma.

(4) ZACCAGNA D., *Relazione preliminare sulla campagna geologica dell'anno 1911*. « Boll. Com. Geol. It. », fasc. I, 1912, Roma.

(5) LOTTI B., *Sezioni geologiche nei dintorni dei Bagni di Lucca*. « Boll. Com. Geol. It. », nn. 11 e 12, anno 1886, Roma.

roccia che ha carattere spiccatamente retico fa pensare a qualche complicazione stratigrafica finora non afferrata ».

Il rilevamento dettagliato della parte più profonda della cupola e quello sommario dell'altra (rilevamento che io stavo saltuariamente conducendo dall'anno 1928) mi ha portato di recente ad accertare la presenza dell'Infralias ed interpretare la movimentata tettonica di quest'isola secondaria, che rappresenta un vero museo di dettagli stratigrafici.

Riservandomi di pubblicare integralmente il risultato dei rilievi, la carta ed i profili, riassumo intanto l'esito di quella parte dei miei studi che non prevedo di modificare nell'avvenire.

Ecco dunque le conclusioni e i fatti fondamentali che conducono a formularle.

SERIE DEI TERRENI, QUALE RISULTA DA UNA SEZIONE NATURALE ESTESA DAI DINTORNI DI LUCCHIO A PONTE MAGGIO, PRATO FIORITO, M. NAMPORAIA.

I terreni, soprastanti agli strati a Posidonomya, conservano un ordinamento ed una facies analoga a quella presentata nelle Alpi Apuane.

La successione dei terreni, dall'alto al basso, sottostanti alla *Posidonomya* è la seguente:

a) Calcarei stratiformi grigi, generalmente selciferi, riferiti nelle Alpi Apuane al Lias medio.

b) Calcarei stratiformi compatti, giallicci, rosei o rossastri, recanti la consueta facies di quelli ad *Arietites* della Catena Metallifera.

c) Calcarei stratiformi grigi, ceroidi, a frattura concoide e facies analoga a quella presentata dal calcare ad *Aegoceras angulatum* (calcarei ad angulati) nelle Alpi Apuane.

d) Calcare a lumachella, di facies retica, stratiforme, con superficie a frattura ruvida, colore dal grigio cupo al nero, recante nidi di lamelli-branchi e gasteropodi indeterminabili, rinvenuti in grande abbondanza nel Monte Memoriente e nella Scesta, ma assai frequenti anche nei dintorni di Madonna della Cornice, in quelli di Limano e di Balzo Lezze, lungo una fascia continua che, quasi dalla vetta del Memoriente, passa nella Valle della Lima, in quella della Coccia e si estende sopra l'abitato di Limano, fino alla Scesta, dove rimane interrotta.

Questo calcare, specialmente nella zona di passaggio al cavernoso, può presentare facies diverse, ma molto localizzate, e cioè quelle di calcare cenerognolo, con aspetto dolomitico, oppure calcare grigio ruvido (sulla superficie e sulla frattura) con venature bianche e inoltre rari banchi (presso Balzo Lezze) di calcare scuro con venature gialle.

e) Calcare cavernoso più o meno cariato, alveolare, con celle ripiene di dolomia, talvolta brecciforme, a facies retica.

f) Calcare stratiformi rosso vinati, con spalmature scistose e calcari grigi un po' selciferi, ambedue ammonitiferi. (*Calcarei di Ponte Maggio*)⁽¹⁾.

g) Calcare cavernoso come alla lettera e.

h) Calcare stratiformi grigi, analoghi a quelli di Ponte Maggio, ma più selciferi, associati a calcari grigio-chiari semimarnosi (pietra da calce) o calcari rosso vinati laminatissimi con alternanze di straterelli scistosi tendenti al colore rosso cupo o verdastro. (*Calcarei zonati delle Strette di Cocciglia*).

i) Calcare cavernoso come alla lettera e, affiorante sul crine di Balzo Lezze.

l) Serie conforme a quella di cui alla lettera h, cadente nella Valle della Scesta.

Di qui, fino al Monte Namporaia, si ripete una pila di strati in tutto conformi a quelli che costituiscono il lato orientale della cupola e cioè calcare con selce del Lias medio, strati a *Posidonomya*, calcari grigi con selce e ftnanti in genere del Giura, maiolica e formazione eocenica.

Dall'esame della successione, dei terreni esaminati, si rileva subito come, mentre sul fianco orientale della cupola (lato S. Marcello) abbiamo, sopra i calcari a lumachella, i calcari grigi e rosei, caratteristici del Lias (termini c, b, a), sul lato occidentale (Bagni di Lucca) risulta invece quest'altra successione, sottostante al cavernoso: calcari fossiliferi di Ponte Maggio, caratteristici del Lias; calcare cavernoso del Giardinetto; nuovi calcari a facies di Lias delle Strette; calcare cavernoso di Balzo Lezze e quindi nuovo Lias grigio e rosso della Scesta, di dove si risale, in continuità e senza anomalie, fino all'Eocene.

Si vede dunque che i fianchi dell'elissoide sono simmetrici - da Ponte Maggio a Lucchio (nell'intervallo orientale) e dalla Valle della Scesta al Namporaia (su quello occidentale) mentre fra Ponte Maggio e la Scesta si trova una ripetizione di terreni a facies di Lias e a facies di Retico.

Il Lotti indicò, nella sua 2.^a sezione (loc. cit.) il cavernoso che s'immerge sul versante destro del torrente Scesta (sotto una copertura di detriti di falda e di brecce) ma in realtà il cavernoso qui non si trova e quello che proviene dalle alture di Casoli *finisce a cuneo sul fondo della valle, come quello che proviene dai dintorni del metato dei Carpini. Lungo la Scesta quindi c'è una lacuna, di circa un chilometro*, che parmi sia stata intraveduta dallo Zaccagna, poichè scrisse (loc. cit.): « il cavernoso ha il suo massimo spessore al M. Memoriant e va a terminare nel vallone della Scesta, in seno ai calcari del Lias medio a facies normale, dei quali è una forma laterale ».

Vedremo le conseguenze di questo fatto fondamentale, che pone in luce, insieme ad altri, il fenomeno di ricoprimento.

(1) Sono i calcari citati dal Lotti col nome di una località prossima: « presso il Giardinetto, sotto Limano ».

CLASSIFICAZIONE CRONOLOGICA DEI TERRENI
SULLA BASE DEI CARATTERI LITOLOGICI E PALEONTOLOGICI.

1) Il calcare rosa e grigio del Memoriente (*b, c*); il calcare grigio con selce e il calcare rosso vinato di Ponte Maggio, ambedue ammonitiferi (*f*) e i calcari zonati delle Strette di Cocciglia (*b*) e della Scesta (*l*) appartengono ad un unico piano (Lias inferiore), pur non potendosi precisare il limite esatto fra Lias medio e inferiore (analogamente a quanto si verifica nella Catena Metallifera) limite che si fa cadere fra il calcare grigio con selce e il calcare roseo e grigio inferiore, per necessità pratiche e quindi più per sistematica che per sincronismo con altre regioni.

A questa conclusione si perviene con una prova paleontologica e con un criterio litologico. Il calcare rosso di Ponte Maggio, che fornì al Lotti ammoniti mal conservate, nelle quali il Canavari riconobbe « un *Phylloceras* sp. ed un *Arietites* cfr. *tardeescrescens* Hauer » (loc. cit.) attribuite fin d'allora al Lias — fornì a me ammoniti (sempre deformate e mancanti di caratteri per una sicura classificazione) che potrebbero riferirsi, dubbiosamente, secondo il prof. Parona⁽¹⁾, al gruppo *Harpoceras algovianum* (Opp.). Il calcare grigio con selce mi fornì pure delle ammoniti (11 esemplari) per una delle quali il Parona opina non possa escludersi di un *Amaltheus spinatum* (Montf) riferibile al Domeriano. Se ne deduce perciò che il calcare con selce di Ponte Maggio (associato in modo inseparabile al rosso) è liassico e quindi anche il calcare con selce delle Strette di Cocciglia e della Scesta, di identica facies e legato a quello zonato (termine *b*) è pure liassico, con che si esclude il dubbio (ipotesi affacciata ma rigettata dai due sullodati geologi Lotti e Zaccagna) che possa trattarsi di Trias.

I calcari zonati delle Strette presentano un aspetto apparentemente diverso, ma ciò a causa di una facies acquisita da intenso metamorfismo di frizione, che più o meno laminò e arruffò tutto il Lias sottostante al cavernoso.

2) Il calcare a lumachella e il cavernoso, sono retici e della parte superiore del Retico e quindi più propriamente dell'Infralias. Questo calcare non ha fossili classificabili, ma la sua fauna però conferisce una facies così caratteristica, da permettere un parallelismo con terreni di una regione tanto prossima come l'Alpe Apuana.

Già il prof. Parona, esaminando i primi esemplari fossiliferi, aveva riconosciuto, nei caratteri litologici, un aspetto decisamente retico e l'ingegnere Zaccagna, che aveva veduto gli stessi campioni, vi ricordava, come scrissi più sopra, fossili analoghi raccolti nei dintorni del Lago d'Iseo.

(1) Sento il dovere di ringraziare fin d'ora, coi sensi della mia gratitudine, il prof. Parona, al quale sono ricorso tante volte per consulenza paleontologica, portando o inviando, esemplari fra i più problematici ed incompleti.

Estesi perciò le mie ricerche, di confronto, alla parte superiore del Retico apuano e, nell'estate del 1929, rinvenni al Monte Nona, sul versante della Turrìte di Palagnana, presso Matanna (a circa 300 o 400 metri a Nord del Callare) un calcare recante nidi di lamellibranchi e gasteropodi, con identici caratteri a quelli della Val di Lima e facies perfettamente uguale. Questo calcare del Nona riposa sul calcare dolomitico e sta alla base del calcare rosso e grigio liassico del Matanna, dove fu pure trovata l'*Arietites tardecrescens* Hauer ⁽¹⁾.

Più tardi, sotto Bergiola Foscilina, soprastante a Carrara, feci le stesse osservazioni e cioè sopra il calcare cavernoso trovai un calcare a lumachella di facies paleontologica e litologica uguale a quello della Val di Lima, accompagnato da calcari grigi ruvidi, con venature bianche, come si vedono, sporadicamente, nella lumachella dei dintorni di Limano. La serie, dalla Foce a Bergiola, risulta poi uguale a quella del Nona e di Val di Lima, fra Ponte Maggio e la Vallemagna. Si hanno cioè sempre tre piani identici: calcare cavernoso, calcare a lumachelle (con un po' di calcare dolomitico, associato qua e là al calcare grigio ruvido con venature bianche) e calcari ceroidi, grigi, rossi e rosei, ammonitiferi. L'unica eccezione a questo ordinamento litologico sembrerebbe quella presentata alle Strette e nella Scesta, dal calcare con selce, che si associa al rosso ammonitifero, mentre nelle Apuane il calcare con selce sta sopra al roseo o al grigio. Ma però anche in quest'ultima regione si trovano anomalie del genere e, per esempio, a Sassorosso di Pescaglia, il rosso ad Arietiti, come già rilevò lo Zaccagna (loc. cit.) si alterna col calcare selcioso.

Insieme a tutti questi fatti, già di per se stessi probatori, ne venivano intanto altri alla luce, di natura tettonica, che portavano a concludere come non fosse più possibile mantenere nel Lias il calcare a lumachella ed il cavernoso, che dovevano essere inseriti, definitivamente, nel Retico.

INTERPETRAZIONE TETTONICA.

Ho già accennato ad uno dei fatti fondamentali e cioè alla mancata continuazione del cavernoso, sul versante destro della Scesta (sotto le balze del Pian di Luco o Carpineta) dove quei 100 metri circa di potenza di calcare cavernoso, rappresentato nella 2.^a sezione del Lotti, in continuazione a quello di Balzo Lezze e compreso fra calcare con selce e calcare ammonitifero, non corrisponde ad un dato di fatto, ma ad una interpretazione, che il rilievo particolareggiato della regione è venuta ad escludere ⁽²⁾.

(1) ZACCAGNA D., *Note illustrative della carta geologica delle Alpi Apuane*. «R. Uff. Geol.», 1920.

(2) Questo accertamento non era facile, perchè la frana che investe il versante destro del torrente rende l'accesso disagiata e pericoloso.

Ho pure accennato come la serie ordinatissima, dal Lias inferiore in su, sul fianco occidentale della cupola, ponga in luce la complicazione stratigrafica che si verifica sul fianco opposto.

L'altro fatto, di non minore interesse, è il seguente:

Il calcare liassico di Ponte Maggio, quello delle Strette e quello della Scesta, che risulta sempre più o meno contorto, non comprende una serie di pieghe costipate, a sinclinali e anticlinali diritte (come potrebbero far credere queglii strati zonati sottostanti alla rupe di Casoli) ma bensì a una piega coricata, che s'immerge sotto Prato Fiorito. Infatti: mentre sul lato orientale l'elissoide si presenta in strati raddrizzati che, nella parte più alpestre - dalla Penna di Lucchio al vertice del M. Memoriente - si vedono verticali, sul fondo della valle invece si rileva come, a cominciare dal Lias superiore, i letti rocciosi si adagiano e più a valle si ribaltano, movimentandosi. A Ponte Maggio la piega risulta già coricata e così pure sotto il Giardinetto e nella Scesta.

Il ribaltamento si osserva inoltre, come dettaglio, sotto la cresta del Memoriente (sul versante che cade nel Rio del Monte - località Forra del Catino) dove si vedono i banchi penduti di circa 40° ad ovest che, a un certo punto, si drizzano e si rovesciano, lasciando come testimoni alcuni pizzi rocciosi.

La sovrapposizione del calcare retico al liassico è quindi dovuta ad un ricoprimento che, dai dintorni di Ponte Maggio, si estende e termina a Balzo Lezze, sopra un percorso di circa due chilometri.

La cerniera dell'anticlinale retica cioè, drizzatasi e ribaltatasi, andò a ricoprire il Lias. L'erosione, lacerando la falda, fece finestra a Ponte Maggio, nelle Strette di Cocciglia e forse anche nella Scesta, che potrà essere stata raggiunta dalla copertura, la quale oggi non si vede più, perchè il Retico termina sopra un pizzo di monte (Balzo Lezze) dove il Lias è incappucciato dal cavernoso.

A rendere ancor più complicato il fenomeno intervenne la *Faglia del Memoriente* (riconosciuta da oltre cinquant'anni) la quale ha tagliato, sul lato di mezzogiorno, a contatto con l'Antiappennino, tutta l'isola secondaria, addossando l'Eocene sulla Creta, sul Giura, sul Lias e sul Retico. È probabile perciò che l'onda principale di retico si sia rovesciata sul Colle di Casoli, dove il cavernoso si vede galleggiare sul Lias.

Uno sguardo d'insieme, a tutta la cupola, ne pone in luce l'architettura asimmetrica, perchè mentre il lato che guarda S. Marcello è a strati dritti, quello opposto che guarda i Bagni di Lucca è a strati adagiati e sovente quasi orizzontali, per una potenza di circa 1000 metri, la quale abbraccia tutti i terreni, dal Lias inferiore alla Creta.

Sul lato settentrionale, che urta nell'Appennino, la cupola è ordinatissima e ricoperta, in concordanza, dall'Eocene, come pure ordinatissima è sul perimetro interno - dal Memoriente alla confluenza fra il rio Segna e la Scesta - dove il cavernoso e la lumachella la cingono senza discontinuità.

*
* *

La sovrapposizione dell'Eocene al Lias medio, nei dintorni di Vico Pancellorum, non è dovuta, come si ritenne, ad una trasgressione di deposito, ma ad una faglia⁽¹⁾, che proviene da M. Alto, ultimo vertice della Cresta di Balzo Nero. Ed è perciò che il macigno va a contatto, sul ciglio esterno della terrazza orografica di Vico Pancellorum, col Retico e col Lias, mentre il Giura e la Creta, sepolti sotto l'Eocene, si rivedono sul lato interno del salto. Una trasgressione di deposito, infatti, in questo luogo, non sarebbe interpretabile, per diverse considerazioni, che mi riservo di documentare nella memoria finale.

Geologia. — *Possibili ricerche nel sottosuolo lombardo.* Nota di G. B. CACCIAMALI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. G. ROVERETO.

Negli studi geologici che da parecchi anni ero andato compiendo nella provincia di Brescia mi si erano presentati problemi tectonici insolubili coi soli dati offerti dalla provincia stessa, ma che in una seconda serie di anni — avendo estese le mie indagini al resto della Lombardia ed anche in plaghe ad oriente di questa, ed avendo accolta ed applicata la teoria degli scorrimenti orizzontali — ebbero a risolversi in modo, per me almeno, perfettamente chiaro: potei così comporre il lavoro « Morfogenesi delle prealpi lombarde », or ora pubblicato. Ma, come si sa, risolti alcuni problemi, altri se ne affacciano alla mente, sempre insoddisfatta; e si può ben comprendere come, data l'affannosa odierna ricerca di materie utili che il nostro sottosuolo potrebbe celare, tra i più importanti di tali nuovi problemi si presentino quelli che si riferiscono alla possibilità o meno della presenza da noi di carbone e di petrolio; per risolverli necessitano altri studi, specialmente di comparazione, studi che quanto più riusciranno difficili, tanto più dovranno essere estesi, profondi, completi. Non io certamente posso accingermi a tanto; posso però qui esporre alcune considerazioni e formulare alcune ipotesi, le une e le altre suggeritemi da fatti osservati o noti, e che varranno forse a dare qualche filo conduttore a chi si accingerà allo studio poderoso.

Le ricerche nel sottosuolo molto aspettano da tali studi; e siccome esse saranno tanto meno aleatorie quanto più il parere del geologo sarà basato

(1) Questa faglia fu illustrata nella 1.^a sezione del Lotti, il quale ritenne l'Eocene trasgressivo sul Lias medio. Io pure, in altri miei scritti, citai questo *hiatus*, che ho poi riconosciuto non di deposito, ma meccanico.

(2) Nella seduta del 5 gennaio 1930.

su concezioni tectoniche corrispondenti a realtà, così è certo che la teoria delle falde di copertura, sempre più dimostratasi corrispondente ai fatti, sarà per dare indirizzi più sicuri alle ricerche stesse, come già li ha dati ai trafori ferroviari.

Quanto dunque al carbone, allo stato attuale delle nostre conoscenze geologiche, come non possiamo affermare che questo prezioso materiale debba trovarsi nella nostra regione, così non possiamo nemmeno affermare essere impossibile che ci sia. In ogni modo due sono i casi da prendere in considerazione, quello cioè del *Sial* trasportato e quello del *Sial* autoctono. Nel primo caso abbiamo visto che le sedimentazioni del periodo carbonifero nelle nostre prealpi sono incomplete, interrotte cioè tra l'infrastruttura e la soprastruttura; ciò tuttavia non escluderebbe affatto che, malgrado tale costante transgressione constatata nel soprasuolo, in qualche punto del sottosuolo possano gli strati del periodo carbonifero essere al completo. Nel secondo caso ricordiamo che il *Sial* autoctono corrisponde per età geologica alla nostra infrastruttura, spesso anche col Carbonifero inferiore e medio, e che mentre esso largamente affiora, ricco di litantrace nell'Europa extralpina, ed affiora pure, con carbon fossile metamorfosato in antracite, nei già indicati massicci delle Alpi occidentali (Aar, M. Bianco, Belledonne, Pelvoux), nel nostro paese si deve trovare a considerevoli profondità sotto l'infrastruttura stessa; la plaga di Cedegolo, per quanto più sopra è stato esposto, è forse una di quelle nelle quali una perforazione potrebbe raggiungere detto autoctono a profondità minore. In ambi i casi è poi da considerare che il nostro carbone verrebbe a trovarsi allo stato di antracite, nel primo caso per il fatto del metamorfismo delle rocce della nostra infrastruttura, e nel secondo caso per il fatto d'aver il nostro *Sial* autoctono subito il pondo del *Sial* trasportato, che vi si abbattè sopra.

E quanto al petrolio, senza entrare in merito alla sempre dibattuta questione sulla sua origine, se cioè inorganica, vale a dire per diretta combinazione chimica al pari d'ogni altro minerale magmatico, oppure organica, vale a dire per distillazione delle sostanze vegetali od animali fornite dagli organismi fossili, e ricordata la facilità delle migrazioni degli idrocarburi liquidi nel sottosuolo, nonchè la certa derivazione dell'asfalto dal petrolio per perdita di elementi leggeri e per ossidazione, limitiamoci ad esporre quanto si può osservare nel territorio bresciano: ivi si trovano due orizzonti stratigrafici nei quali, pressochè con costanza, si presentano schisti bituminosi non offrenti indizio alcuno di estranea provenienza dei propri idrocarburi, che quindi si sono generati in posto per decomposizione di alghe, di pesci, ecc., fossilizzati negli schisti stessi: uno è quello degli schisti bituminosi che si intercalano a vari livelli nella massa della dolomia principale, e l'altro è quello degli schisti bituminosi che si presentano nelle marne basali della serie cretacea. In una località poi molto limitata (Gussago e S. Vigilio) si trova bitume impregnante gli schisti diasprini ad aptici del periodo giu-

rese; ma è affatto impossibile che questo bitume siasi generato in detti schisti selciferi, i quali altrove ne sono completamente esenti; vi si trova certo casualmente per apporto; anzi con tutta evidenza si dimostra salitovi, in veri filoni, da profondità; non può provenire però nè dall'uno nè dall'altro dei due su ricordati orizzonti che sottostassero alla località, essendo essi troppo scarsamente asfaltiferi; ed ecco prospettarsi la domanda se il bitume di Gussago e S. Vigilio provenga da distillazione di un molto profondo sottostante giacimento carbonioso.

Ripetiamolo: siamo davanti a problemi formidabili, i quali attendono la soluzione da studi che una sola persona non può compiere; onde l'importanza grande, e teorica e pratica, di un rilevamento geologico in gran scala del territorio lombardo da parte del R. Comitato, rilevamento che il compianto Taramelli insistentemente raccomandava e che ancora non è compiuto. Solo dopo eseguito questo si potrà avere modo di indirizzare con maggior probabilità di successo eventuali trivellazioni di ricerca.

Mineralogia. — *Sulla presenza della nesquehonite nella serpentina di Viù in Val di Lanzo*⁽¹⁾. Nota di M. FENOGLIO, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. E. REPOSSI.

In un mio recente lavoro⁽³⁾ segnalavo un nuovo giacimento di minerali di magnesio: brucite, brugnatellite, idromagnesite e artinite nella zona serpentinoso affiorante ad Est di Viù e precisamente al colle di Fubina⁽⁴⁾.

Nell'estate testè decorsa, di passaggio in quella valle, ebbi occasione di visitare nuovamente il giacimento in questione, e raccogliere altro materiale, il cui studio mi ha permesso di identificare un altro minerale di magnesio: la nesquehonite.

Come è noto, la nesquehonite è un minerale rarissimo, data la grande facilità colla quale in natura questo carbonato si altera spontaneamente all'aria secca e si decompone in presenza di considerevoli quantità di acqua, con formazione di un sale basico.

Infatti i giacimenti di nesquehonite conosciuti a tutt'oggi sono relativamente pochi.

La nesquehonite fu identificata per la prima volta da Genth e Penfield⁽⁵⁾,

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Torino.

(2) Nella seduta del 2 febbraio 1930.

(3) FENOGLIO M., *Sopra alcuni minerali di Viù in Val di Lanzo*. « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. XLXI, fasc. 1, 1927, p. 12.

(4) Carta Geologica d'Italia, foglio Susa 1 : 100.000, R. Ufficio Geologico, Roma, 1913.

(5) GENTH F. A. und PENFIELD S. L., *Ueber Lansfordit, Nesquehonit (ein neues Mineral) und Pseudomorphosen von Nesquehonit nach Lansfordit*. « Zeit f. Kryst. », XVII, 1890, p. 561.

una quarantina d'anni fa, su un campione proveniente dalla miniera di antracite di Nesquehoning (Pensilvania). Circa un anno dopo, il Friedel ⁽¹⁾ riscontrava lo stesso minerale in un campione proveniente dalla miniera di antracite di La Mure (Isère), classificato in un primo tempo come aragonite. Più recentemente è stata segnalata dal Leitmeier ⁽²⁾ nella serpentina di Kraubat in Stiria e dall'Artini ⁽³⁾ nelle cave di amianto di Franscia in Val Lanterna ⁽⁴⁾.

Il nuovo giacimento di nesquehonite che stiamo per descrivere è legato a rocce serpentinosi, come quelli or ora accennati di Kraubat e di Franscia.

Il rinvenimento poi della nesquehonite nella serpentina di Fubina presenta particolare interesse anche pel fatto che lo studio accurato delle condizioni di giacitura e di paragenesi di questo minerale, ci permetterà di fare delle considerazioni circa l'eventuale nesso genetico tra la nesquehonite e gli altri due carbonati di magnesio pur presenti in questo giacimento: l'idromagnesite e l'artinite.

La nesquehonite a Fubina è piuttosto rara e si presenta generalmente sotto forma di incrostazioni, di patine biancastre, che ricoprono qua e là la serpentina. Frequentemente tali incrostazioni hanno l'aspetto di una sostanza farinosa decomposta e tale da non invogliar punto ad uno studio che se ne prefigga la determinazione precisa. Fortunatamente il rinvenimento di alcune incrostazioni di un bel bianco candido e di aspetto freschissimo presso l'imbocco Est della galleria che attraversa il colle di Fubina, mi ha permesso di mettere insieme la quantità di materiale indispensabile per lo studio chimico-mineralogico del non comune minerale.

Le crostine bianche, concrezionate, con tendenza talvolta a forme mammellonari o botrioidali minute, hanno spessore per lo più esile, chè di rado supera un paio di millimetri; la struttura è evidentemente cristallina, bacillare-raggiata.

Ad un attento esame ad occhio nudo e anche meglio con l'aiuto di una lente si scorgono sovente i singoli individui, che sporgono dalla superficie delle crostine bianche, come prismetti isolati, nitidi e bellissimi, senza tuttavia raggiungere mai la perfezione di cristallini misurabili. Sono incolori e trasparenti, o traslucidi; la lucentezza è piuttosto vitrea che sericea. Sopra le croste cristalline si notano poi talvolta esilissimi ciuffetti o sferoliti a

(1) FRIEDEL C., *Sur la nesquehonite*. «Bull. de la Soc. Franc. de Minéralogie», XIX, 1891, p. 60.

(2) LEITMEIER H., *Zur Kenntnis der Carbonate*, II. «Neues Jahrbuch», B. B. XL. 1916, p. 670.

(3) ARTINI E., *Sulla presenza della nesquehonite nelle cave di amianto di Franscia in Val Lanterna*. «Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei», vol. XXX, serie 5^a, 1921, p. 153.

(4) È singolare che nel grosso *Handbuch der Mineralogie* di C. HINTZE (Ester Band: Elemente, Sulfide, Oxyde, Haloide, Carbonate ecc., 1929, p. 3480) non figurino tra i pochi giacimenti noti di nesquehonite quello della Val Lanterna, segnalato e descritto dal compianto e valente mineralista italiano sin dal 1921.

struttura fibroso-raggiata assai più fine, che risaltano per la loro bianchezza più nivea ed opaca; non mancano qua e là passaggi graduali dall'uno all'altro tipo di minerale. Nell'insieme l'aspetto e la struttura ricordano un po' quelle di certe aragoniti concrezionate.

L'analisi qualitativa, mi ha rivelato la presenza di MgO , CO_2 e H_2O , senza quantità apprezzabili di altre sostanze.

L'analisi quantitativa, condotta sopra materiale fresco, proveniente dal minerale a struttura bacillare, che all'esame microscopico risultò purissimo, mi ha dato i seguenti risultati:

MgO	29,20	0,724
CO_2	31.69	0.720
H_2O	39.30	2.181
Somma	100.19	

Riporto coi risultati della mia analisi (I) i valori teorici (II) calcolati per la nesquehonite $MgCO_3 \cdot 3H_2O$, non che i risultati delle analisi della nesquehonite di Val Lanterna (III), di La Mure (IV) e di Nesquehoning (V):

	I	II	III	IV	V
MgO	29.20	29.14	29.14	29.24	29.22
CO_2	31.69	31.80	31.90	31.85	30.22
H_2O	39.30	39.06	39.51	39.11	40.32
Somma	100.19	100.00	100.55	100.20	99.76

Il confronto tra i risultati dell'analisi del minerale di Fubina e gli altri riportati nella tabella, permette di stabilire senza alcun dubbio che le nostre croste cristalline sono costituite da nesquehonite. Il risultato del resto non mi meravigliò affatto, perchè tanto l'aspetto quanto la struttura del minerale mi avevano persuaso subito che non si trattava di idromagnesite, la quale ha struttura lamellare e lucentezza madreperlacea, e nemmeno di artinite, che possiede invece una struttura fibrosa molto più fine e lucentezza sericea.

Per quanto riguarda la facilità più o meno grande colla quale la nesquehonite si disidrata sia alla temperatura ordinaria⁽¹⁾, sia a temperature più

(1) Mentre GENTH e PENFIELD (loc. cit., p. 564) trovarono che il minerale di Nesquehoning-Mine, essicato per tre giorni su acido solforico perdette 0.1 %, e attribuiscono questa piccola perdita a tracce di lansfordite aderente, secondo FRIEDEL (loc. cit., p. 62) la perdita in peso sarebbe abbastanza rapida, e in due mesi all'aria secca avrebbe raggiunto 10.36 %. LACROIX (*Mineralogie de la France et de ses Colonies*. Tome III, p. 790, 1901-09) fa notare che, il minerale esposto all'aria, sbianca e diventa opaco perdendo acqua; ciò che confermerebbe l'osservazione di Friedel sul campione di La Mure, il quale dopo parecchi anni di giacenza nella collezione dell'École des Mines era diventato opaco e si presentava sfiorito alla superficie, mentre aveva conservato l'aspetto primitivo nelle parti interne.

elevate ⁽¹⁾, gli Autori che hanno avuto occasione di studiare la nesquehonite non sono molto precisi, e i risultati da essi ottenuti non sono eccessivamente concordanti. Per parte mia posso affermare che la nesquehonite di Fubina si comporta in modo identico a quella della Val Lanterna. Infatti essiccata per cinque ore su acido solforico non perdette affatto acqua; riscaldata a 135° la perdita di H₂O dopo cinque ore risultò = 24.54 %, valore che è in ottimo accordo con quello trovato dall'Artini (24.51 %) e che corrisponde a circa 2H₂O. L'ultima molecola di acqua sembra non eliminarsi che con molto maggior lentezza e difficoltà; infatti dopo 20 ore di ulteriore riscaldamento a 135°, la sostanza aveva subito una maggior perdita di peso di solo 2.35 %, con un modulo orario assai piccolo, ma abbastanza costante.

Il peso specifico, determinato su prismetti perfettamente isolati in liquido di Brauns ⁽²⁾ con la bilancia di Westphal, risultò eguale 1.824 (a 15° C.), e quindi assai vicino ai valori dati dai trattati ⁽³⁾ per il peso specifico della nesquehonite (1.83 — 1.85).

Lo studio ottico, dovette necessariamente essere limitato all'osservazione microscopica di laminette e prismetti bellissimi, assai limpidi, con contorni regolari e perfetti, che si prestano assai bene per determinazioni, i cui risultati danno garanzia di una certa attendibilità.

Meno adatti per l'esame ottico si rivelarono i piccolissimi individui in esilissime fibrille, quasi sempre riuniti in fascetti, costituenti gli sferoliti più grandi.

Nei prismetti più grandi si può constatare l'esistenza di una sfaldatura perfetta, parallela all'allungamento, e precisamente secondo {110}, meno perfetta ma relativamente facile anche secondo {001}.

Il minerale ha potere rifrangente basso e birifrazione piuttosto energica. L'estinzione avviene parallelamente all'allungamento, il cui carattere ottico è talora positivo e talora negativo.

L'osservazione a luce convergente mostra che gli individui cristallini sono biassici, e che la direzione dell'allungamento corrisponde alla normale ottica, poichè il piano degli assi ottici è normale a questa direzione.

Da alcune sezioni a birifrazione più debole e allungamento negativo esce normalmente la bisettrice acuta, negativa.

(1) CESARÉ G., *Sur la nesquehonite*. «Accad. R. de Belgique. Bull. de la Cl. des Sciences», 1910, p. 749.

(2) La determinazione in liquido di Thoulet, fatta da alcuni sperimentatori, non mi pare opportuna, poichè, è, noto, che la nesquehonite è parzialmente solubile in acqua. Ho quindi preferito fare la determinazione in ioduro di metilene successivamente diluito con toluene.

(3) LACROIX A., op. cit., p. 790; HINTZE C., op. cit., p. 3471; DANA E. S., *The System of Mineralogy*, p. 301, New York, 1914; DOELTER C. und LEITMEIER H., *Handbuch der Mineralchemie*, Band I, p. 263, Leipzig, 1912.

L'angolo degli A. O., misurato col metodo del Mallard, usando all'uopo un oculare micrometrico a filo mobile della Casa Leitz, ha dato come media di parecchie misure:

$$2E = 82^{\circ} 55' \quad (\text{Li})$$

$$2E = 84^{\circ} 14' \quad (\text{Na})$$

$$\rho < 0$$

valori che sono in buon accordo con quelli trovati da Genth e Penfield per il minerale tipo di Nesquehoning:

$$2E = 83^{\circ} 35' \quad (\text{Li})$$

$$2E = 84^{\circ} 15' \quad (\text{Na}).$$

Carattere ottico del minerale negativo.

Da prismetti ad allungamento positivo, emerge obliquamente un asse ottico; più raramente l'emergenza appare quasi normale.

Su lamine da cui emerge normalmente α , servendomi di liquidi (miscele di olio di vaselina, con α -monobromonaftalina) a indice di rifrazione noto, ho determinato i valori di β e γ . La media di parecchie misure, eseguite su varie lamine ha dato:

$$\gamma = 1.529 \pm 0.001 \quad (\text{Na})$$

$$\beta = 1.506 \pm 0.001 \quad (\text{Na})$$

valori che sono leggermente superiori a quelli dati da Genth e Penfield per la nesquehonite artificiale:

$$\gamma = 1.526 \quad (\text{Na})$$

$$\beta = 1.501 \quad (\text{Na}).$$

Del resto anche l'Artini che misurò γ per la nesquehonite della Val Lanterna trovò « il valore di γ compreso tra 1.530 e 1.534 ».

Per $\beta = 1.506$ (Na) e $2E = 84^{\circ} 14'$ (Na) si calcola:

$$2V = 52^{\circ} 52'$$

valore che è in ottimo accordo con quello trovato da Genth e Penfield: $2V = 53^{\circ} 5'$.

Da $2E = 84^{\circ} 14'$, $\beta = 1.506$ e $\gamma = 1.529$ si calcola:

$$\alpha = 1.423.$$

Per la birifrangenza poi si calcolano i seguenti valori:

$$\gamma - \alpha = -0.106$$

$$\gamma - \beta = 0.023$$

$$\beta - \alpha = 0.083$$

donde emerge appunto che il carattere ottico del minerale è negativo.

Il valore di $\gamma - \alpha = 0.106$, per quanto leggermente inferiore a quello che si calcola dai dati sperimentali ⁽¹⁾ di Genth e Penfield (0.114), sta sempre ad indicarci una birifrangenza assai energica, ed è anche in buon accordo con i valori di Cesàro ⁽²⁾, che studiò molto dettagliatamente la birifrangenza della nesquehonite di La Mure.

Le proprietà ottiche, corrispondono dunque bene a quelle note per la nesquehonite, salvo la leggera differenza nei valori di β e γ , e furono accuratamente controllate mediante il confronto con campioni di nesquehonite sintetica, da me preparati, benissimo cristallizzati, e anche con campioni di nesquehonite di Val Lanterna del nostro Museo, messi gentilmente a mia disposizione dal Direttore prof. Repossi, che vivamente ringrazio.

È non privo di interesse il far rilevare che la nesquehonite abbastanza simile nell'aspetto generale all'artinite, presenta con questa anche otticamente sensibili analogie. I due minerali hanno il medesimo allungamento e analoga orientazione ottica, si distinguono però nettamente per i valori degli indici di rifrazione.

Infatti per l'artinite di Fubina fu da me ⁽³⁾ trovato:

$$\gamma = 1.546 \pm 0.001 \quad (\text{Na})$$

$$\beta = 1.535 \pm 0.001 \quad (\text{Na})$$

valori che sono notevolmente più elevati di quelli testè determinati per la nesquehonite:

$$\gamma = 1.529 \pm 0.001 \quad (\text{Na})$$

$$\beta = 1.506 \pm 0.001 \quad (\text{Na}).$$

Circa ad un possibile nesso genetico tra la nesquehonite e gli altri due carbonati di magnesio idrati (artinite e idromagnesite), per quanto non lo

(1) È superfluo ricordare che il valore di $\alpha = 1.495$ calcolato da Genth e Penfield e riportato dai trattati è errato, come già fece rilevare CESÀRO (*Forme cristalline et composition du carbonate magnésique hydraté préparé par M. Moressée. Sa relation avec la Lansfordite*. « Accad. R. de Belgique, Bull. de la Cl. de Sciences », 1910, p. 264-265. Ibidem: *Sur la nesquehonite*, 1910, p. 751-752) poichè per $\gamma = 1.526$; $\beta = 1.501$; $2E = 84^\circ 15'$; si calcola $\alpha = 1.412$ e quindi il valore di $\alpha - \gamma = 0.114$ e non già 0.031.

(2) CESÀRO G., *Sur la nesquehonite*. « Accad. R. de Belgique. Bull. de la Cl. de Sciences », 1910, p. 749.

(3) Loc. cit., p. 22.

si possa escludere in modo assoluto, stando alle condizioni di giacitura osservate, mi sembra improbabile. Mi pare più razionale pensare che mentre la nesquehonite costituisce un prodotto attuale, formatosi alla temperatura ed alla pressione ordinaria, artinite ed idromagnesite, si siano molto probabilmente formate in condizioni diverse dalle attuali di superficie, a temperatura e pressione alquanto più elevate. Questo mio modo di vedere circa la genesi dei minerali in questione, è del resto in ottimo accordo colle osservazioni dell'Artini⁽¹⁾ e del compianto prof. Brugnatelli⁽²⁾, che studiarono giacimenti analoghi a quello di Fubina.

Biologia. — *Azione dei raggi ultravioletti sulla germinazione dei semi e sull'accrescimento delle piante.* Nota di G. MEZZADROLI e di E. VARETON, presentata⁽³⁾ dal Socio B. LONGO.

Abbiamo posto in evidenza in una Nota precedente⁽⁴⁾ l'azione che i raggi di Wood (raggi u. v. di $\lambda =$ circa 3600 \AA) esercitano sulla germinazione dei semi e sull'accrescimento delle piante, esponiamo ora nella presente Nota l'azione che i raggi u. v. totali emessi da una lampada di quarzo a vapori di mercurio, esercitano in questo senso.

I raggi u. v. a breve lunghezza d'onda ($\lambda = 2300\text{--}3000 \text{ \AA}$) esercitano in genere un'azione ritardante, sulla germinazione dei semi e sull'accrescimento delle piante, essi arrestano il loro sviluppo e lo danneggiano sino all'uccisione.

L'azione dannosa aumenta col diminuire della lunghezza d'onda. Si osserva che usando filtri trasmettenti progressivamente luce ultravioletta di lunghezza d'onda sempre minore, si arreca un danno progressivamente maggiore ai semi e alle piante esposti alla loro azione.

Noi abbiamo constatato come i raggi u. v. di lunghezza d'onda $\lambda = 3300\text{--}3900 \text{ \AA}$ ⁽⁵⁾ esercitino un effetto favorevole, soprattutto sulle piante durante i primi giorni di sviluppo.

Ci sembra interessante rilevare questa influenza parallelamente all'osservazione da noi fatta costantemente e che cioè semi, steli e radichette

(1) Loc. cit., p. 157.

(2) BRUGNATELLI L., *Idromagnesite ed artinite di Emarese*. « Rend. R. Ist. Lomb. di Sc. e Lett. », XXXVI, 1903, p. 824.

(3) Nella seduta del 2 febbraio 1930.

(4) G. MEZZADROLI e E. VARETON, *Azione dei raggi di Wood sulla germinazione dei semi e sull'accrescimento delle piante*. « Rend. R. Accad. dei Lincei », 1929, vol. X, Serie 6^a, fasc. 5-6.

(5) Loc. cit.

delle piante nei primi giorni della germogliazione, sottoposti alla luce di Wood assumono una fluorescenza vivissima, emettendo cioè delle radiazioni a frequenza minore di quelle incidenti, e si trovano così ad assorbire la differenza d'energia tra il quantum della radiazione incidente e quello della radiazione emessa.

I raggi ultravioletti totali emessi dalla lampada di quarzo a vapori di mercurio esercitano un'azione nociva sui semi e sulle piante se l'irradiazione ha luogo a breve distanza dalla sorgente fino a 50 cm. perpendicolarmente, e per esposizioni di tempo anche brevissime (1 minuto, 5 minuti).

Alla distanza di 10-15 cm. dalla lampada, l'azione è sempre nociva anche per esposizioni di un minuto, ed aumenta per esposizioni di durata maggiore.

Solo a distanze superiori ai 50 cm. e in linea obliqua l'azione esercitata dai raggi u. v. non riesce dannosa anzi è *leggermente eccitante* se usata in dosi debolissime (1 a 5 minuti). L'azione stimolante risalta soprattutto sui semi e sulle piante tenuti nell'oscurità o in ambiente chiuso, o comunque privati anche in parte della luce solare.

La debole azione attivante che si riscontra in questi casi, è secondo noi dovuta al fatto che nelle condizioni in cui questo avviene, predominano i raggi u. v. di lunghezza d'onda $\lambda = 3300-3900 \text{ \AA}$ (raggi di Wood che in parte compensano l'azione dannosa dei raggi u. v. a lunghezza d'onda più breve).

Le numerose esperienze eseguite su semi di piante diverse, in diverse condizioni di irradiazione, ci hanno portato a concludere come in genere l'azione dannosa esercitata dai raggi ultravioletti, sia molto superiore alla azione favorevole che essi esercitano nel caso citato, di dose diluita, e come non siano di facile applicazione pratica, sarebbe più indicato ricorrere senz'altro all'irradiazione in luce di Wood.

Riportiamo un esempio dell'azione sfavorevole esercitata dalla irradiazione a 15 cm. di distanza, sui semi di orzo.

TABELLA N. I

100 semi di orzo seminati al giorno o	Confronto		Esposizione ai raggi u. v. 15 cm. distanza (5 minuti)	
	Numero di semi germinati	Lunghezza totale delle piantine in cm.	Numero di semi germinati	Lunghezza totale delle piantine in cm.
1° giorno	—	—	—	—
2° »	4	—	—	—
3° »	16	13 cm.	7	3 cm.
4° »	32	35 »	21	12 »
5° »	34	67.5 »	27	29.5 »
6° »	69	104 »	32	53 »
7° »	—	180 »	—	70 »

Osservazione:

L'azione dannosa esercitata dai raggi ultravioletti sui semi e sulle piante tenuti a 15 cm. di distanza, per un tempo di 5 minuti, aumenta con l'aumentare della durata di esposizione.

Anche esposizioni di durata minima non hanno azione eccitante.

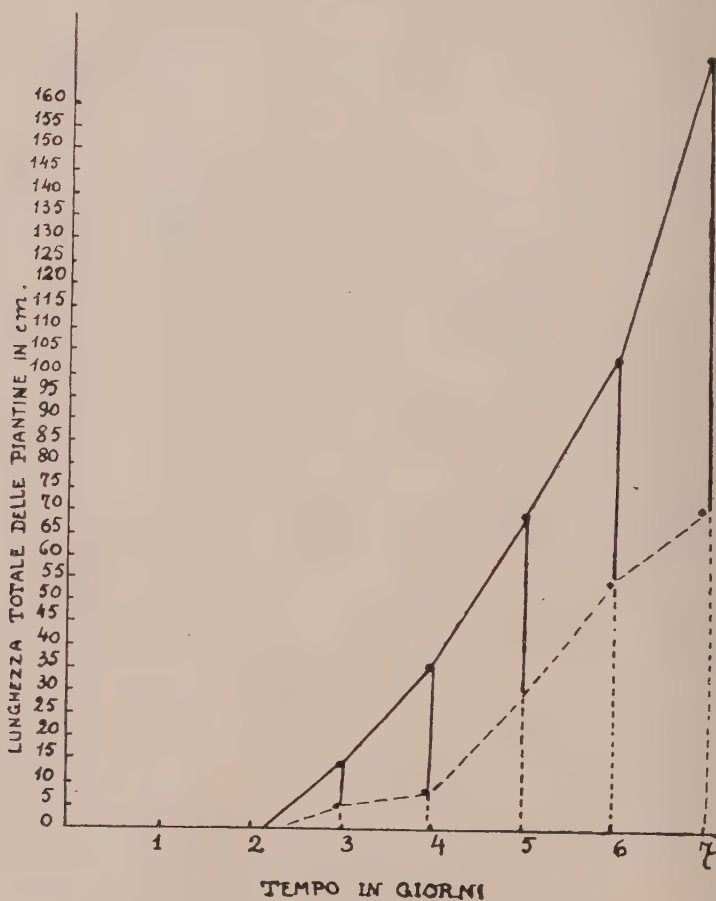


Fig. 1

— = prova di confronto.

- - - = prova sottoposta all'azione dei raggi u. v.

Riportiamo in tabella n. 2 i dati relativi all'azione stimolante esercitata da una esposizione di un minuto a 50 cm. di distanza eseguita in linea obliqua, tale azione diviene sfavorevole se si prolunga in tempo di esposizione a 15 minuti.

TABELLA N. 2

100 semi di orzo seminati al giorno o	Confronto		Esposizione a distanza 50 cm. (1 minuto)		Esposizione a distanza 50 cm. (15 minuti)	
	Num. di semi germi- nati	Lunghezza totale delle piantine in cm.	Num. di semi germi- nati	Lunghezza totale delle piantine in cm.	Num. di semi germi- nati	Lunghezza totale delle piantine in cm.
1° giorno	—	—	—	—	—	—
2° »	4	—	5	—	3	—
3° »	16	13 cm.	18	16 cm.	12	10 cm.
4° »	32	35 »	33	42 »	25	28 »
5° »	34	67.5 »	36	80 »	29	42 »
6° »	69	104 »	72	120 »	40	68 »
7° »	—	180 »	—	220 »	—	95 »

Osservazione:

L'esposizione dei semi e delle piante all'azione dei raggi ultravioletti alla distanza di 50 cm. in linea obliqua, per una durata di tempo di un minuto, esercita un'azione stimolante sulla crescita delle piante e sulla germinazione dei semi, ma questa è però inferiore a quella esercitata dai raggi di Wood⁽¹⁾. Aumentando la durata di esposizione, invece di esaltare l'azione favorevole si passa senz'altro ad una azione nociva.

Se si aumenta la distanza oltre i 50 cm. (1-2 metri) si osserva per esposizioni variabili da 5 a 10 minuti, una debolissima azione stimolante. Irradiazioni minori sono indifferenti, irradiazioni più lunghe sono nocive.

Conclusioni:

1. I raggi u. v. a breve lunghezza d'onda (minore di 3000 Å) esercitano un'azione dannosa sulla germinazione dei semi e sull'accrescimento delle piante.

2. I raggi u. v. totali emessi dalla lampada di quarzo a vapori di mercurio, esercitano un'azione sfavorevole sulla germinazione dei semi e sull'accrescimento delle piante, se esposte a piccole distanze (10-15 cm.) e questo anche per brevi durate di esposizione.

(1) Loc. cit. (vedi tabella n. 1).

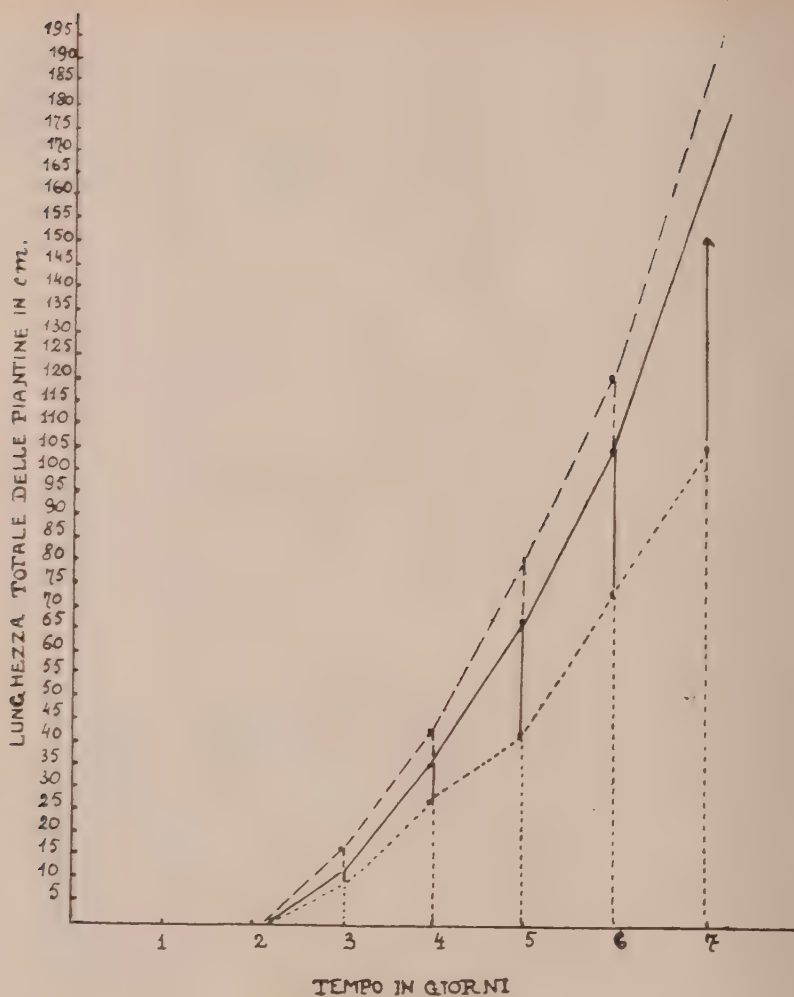


Fig. 2.

- = prova di confronto.
- - - = prova esposta all'azione dei raggi u. v. a 50 cm. per 1 minuto.
- = prova esposta all'azione dei raggi u. v. a 50 cm. per 15 minuti.

3. Esponendo i semi e le piante alla distanza di 50 cm. in linea obliqua dalla lampada, si nota un'azione stimolante se trattasi di brevi esposizioni (1-5 minuti), mentre esercitano un'azione sfavorevole, se la durata di esposizione supera i 5 minuti.

Biologia. — *Azione esercitata dalle onde elettromagnetiche ultracorte sul potere catalasico dei semi.* Nota di G. MEZZADROLI e E. VARETON, presentata dal Socio B. LONGO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Se lo stronzio possa fissarsi nei tessuti* ⁽¹⁾. Nota di M. COMEL, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. C. FOÀ.

In una Nota precedente mi sono occupato della sintomatologia dell'avvelenamento sperimentale da stronzio, il cui quadro era turbato, nelle ricerche di Laborde, Cagnetto, Protti ed altri, dai sintomi a carico del sistema digerente dovuto alla somministrazione orale del veleno. Ricorrendo alla somministrazione parenterale sono stato in grado di far risaltare che il quadro di tale intossicazione si manifesta essenzialmente a carico del sistema nervoso.

In ricerche successive ho studiato l'azione dello stronzio sul contenuto in calcio e fosforo del sangue: studio interessante in nesso con i reperti di Cagnetto e della sua scuola, che hanno osservato la comparsa di un quadro rachitico somministrando stronzio. Ho già comunicato i risultati da me ottenuti ⁽³⁾, che si riassumono nella constatazione di una ipocalcemia e di una iperfosfatemia da stronzio. Tra i quesiti sull'azione biologica dello stronzio, ha grande interesse prospettarsi se lo stronzio sia in grado di essere trattenuto dai tessuti animali, e di venire a far parte della loro compagine. Cagnetto e Protti hanno constatato quest'assimilazione di stronzio da parte dell'osso: ivi esso andrebbe a sostituire il calcio. La constatazione di una fissazione dello stronzio da parte dei tessuti ha un'indubbia importanza nella spiegazione della sua azione biologica. Ho pertanto proceduto alla ricerca dello stronzio nei tessuti di alcune serie di polli, che trattati con exosiossi-propionato di stronzio per periodi alquanto protratti, avevano presentato il quadro caratteristico dello stronzianismo. Gli animali vennero trattati mediante iniezioni endomuscolari quotidiane, a varia dose. Morti durante il trattamento, o sacrificati alla fine del periodo prestabilito, i polli venivano sottoposti ad autopsia, e ricavo da ogni organo alcuni grammi, per servirmene per la ricerca spettroscopica dello stronzio. In una prima serie di

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 2 febbraio 1930.

(3) Soc. It. di Biol. Sper. Sezione di Milano. Seduta del 15 luglio 1929.

ricerche, distruggevo la sostanza organica mediante aggiunta di altrettanti centimetri cubici di acido cloridrico, e mi mettevo in condizione di estrarre per tale modo lo stronzio eventualmente presente. Un'ansata di tale liquido veniva portata all'esame spettroscopico, che si basava sulle caratteristiche strie dello spettro di emissione dello stronzio. (Metodo già seguito da Cagnetto e Protti). Conviene in tale esame sceverare lo spettro dovuto allo stronzio da quello del calcio. Quest'ultimo è riconoscibile per le strie tra C e D, in immediata vicinanza di C ($650 \mu \mu$) e per la stria tra D ed E ($550 \mu \mu$). Invece lo stronzio possiede strie tra C e D che si estendono per tutto il tratto di lunghezza d'onda tra 650 e $600 \mu \mu$ ossia tutto il tratto tra C e D. Inoltre ciò che lo caratterizza senz'altro è la comparsa d'una stria tra F e G, tra 500 e $450 \mu \mu$, più vicino a quest'ultima lunghezza d'onda.

I controlli preliminari eseguiti mi hanno dimostrato che lo stronzio è ancora riconoscibile e differenziabile dal calcio, senza che si resti in dubbio al riguardo, alla concentrazione di un grammo di carbonato di stronzio su 10000 cmc di acido cloridrico, ossia di un grammo di stronzio su 16667 cmc d'acido cloridrico. Nelle condizioni di ricerche stabilite esso doveva venire riconosciuto dunque con tutta certezza nel liquido d'estrazione dai tessuti qualora lo stronzio vi fosse stato presente nella quantità di 6.7 mg per 100 grammi di tessuto. Tale quantità corrisponde all'incirca alla metà della proporzione del calcio nei tessuti stessi. In questa prima serie di ricerche l'esame spettroscopico fu condotto sui tessuti di due gruppi di polli del peso d'un chilogrammo circa, trattati per un mese con iniezioni cotidiane di 5 cmc di soluzione ($0,081$ g di stronzio) il primo gruppo, e di 10 cmc ($0,162$ g di stronzio metallico) il secondo gruppo. Ho esaminato anche polli morti circa $18-24$ ore dopo un'unica iniezione di 20 cmc di soluzione.

Alcuni polli del primo gruppo furono tenuti in osservazione due mesi dopo la sospensione del trattamento, dopo i quali furono sacrificati, e ne furono sottoposti i tessuti all'esame spettroscopico. Furono esaminati: cuore, fegato, polmoni, rene, milza, muscolo, cute, cresta, grasso sottocutaneo, epifisi ossee, stomaco, tenue, crasso, sangue, midollo spinale, cervello e cervelletto.

I risultati di questi esami furono negativi per tutti gli animali dei due gruppi. Mai potei constatare con certezza, nello spettro d'emissione, le strie dello stronzio. Erano invece evidenti quelle dovute allo spettro d'emissione del calcio, più durature di quelle del sodio e potassio. In una seconda serie di esami ho ricercato l'eventuale presenza dello stronzio nei tessuti di un gruppo di ratti, che tenevo ad una dieta ricca di calcio e di stronzio. Questo venne somministrato quale carbonato, per bocca.

Naturalmente la forma di somministrazione orale dello stronzio è inadeguata perchè avviene talvolta che il ratto ne inghiottisce tanto da far risultare alla radiografia l'immagine da pasto opaco, mentre altre volte non ne ingerisce quasi. Comunque, i ratti cominciarono a morire dopo alcuni

giorni, e a varii giorni di distanza l'una dall'altro, probabilmente perchè la morte sopravveniva a una scorpacciata di stronzio maggiore del solito. In tali ratti si osserva molto bene, negli stadi terminali d'avvelenamento, il disturbo nella coordinazione dei movimenti, con retrocessione.

In questi ratti la presenza dello stronzio era evidentissima nel contenuto rettale. Lo stronzio era inoltre presente, nella maggior parte dei casi, nel contenuto del tenue e del crasso. Talvolta ne constatai la presenza nell'estratto della parete del crasso. La sua presenza quivi si può spiegare o ricercandovi la via d'eliminazione del veleno, o ammettendo di non avere sufficientemente lavato il tubo intestinale dal suo contenuto, ricco di carbonato di stronzio.

Negli altri tessuti dei ratti (visceri, cervello, cervelletto ecc.) non fu possibile constatare la presenza di stronzio. Ho concluso dunque che lo stronzio non entra, in seguito a trattamento prolungato, a fare parte dei tessuti animali in maniera apprezzabile. A tale conclusione si poteva rivolgere l'obiezione che forse il metodo usato, d'estrazione con acido cloridrico, poteva venir meno allo scopo, di farvi entrare in soluzione tutto lo stronzio, togliendolo ai composti inorganici od organici eventualmente formatisi. Ho eseguito perciò una terza serie di esami, trattando alcuni polli con iniezioni giornaliere di 10 cmc di soluzione al 6% di exosiossipropionato di stronzio, per periodi varii da 2 a 4 settimane. Sacrificavo quindi l'animale, sminuzzavo 5 grammi, oppure 2.5 grammi di tessuti dei varii organi, e li calcinavo aggiungendovi la miscela di Eschka. Riprendevo le ceneri con due cmc di acido cloridrico. In tal modo venivo ad avere la possibilità di scoprire la presenza dello stronzio anche se presente in dosi molto minori che nelle serie precedenti. Anche nei tessuti degli animali di questa serie non fui in grado di constatare la presenza di stronzio.

Lo stronzio non viene dunque a far parte, in maniera apprezzabile e costante dei tessuti animali. Cagnetto e Protti ne avevano notato la presenza nelle epifisi ossee di animali giovanissimi trattati con diete ricche di stronzio. Nei polli e ratti da me studiati ciò non risultò mai. I miei animali erano tuttavia, pur essendo in periodo d'accrescimento, di età notevolmente più avanzata di quelli di Cagnetto e Protti. I polli avevano 3-4 mesi, i ratti 4 settimane.

I risultati da me ottenuti sono negativi e per quanto riguarda la cosiddetta rachitide da stronzio, e per quanto riguarda l'entrata dello stronzio, in maniera apprezzabile, nella compagine dei tessuti. Ho voluto pure vedere se, sospendendo il trattamento con lo stronzio, si avesse quel rifiorire della salute, e il considerevole aumento di statura notato dagli autori citati. I polli erano dopo due mesi ancora notevolmente inferiori per peso e statura ai controlli, provenienti dallo stesso lotto. I polli di questo lotto pesavano, all'inizio del trattamento, 737 grammi in media. Alla fine del trattamento (un mese) il peso era salito in media a 775 grammi, mentre quello dei controlli era

salito a 1080 grammi. Dopo due mesi dalla sospensione del trattamento il peso medio dei superstiti era di 999 grammi, quello dei controlli di 1460. Questi risultati sono dunque in disaccordo con quelli degli autori citati. Come dirò nella pubblicazione in extenso di queste ricerche, l'aumento di statura da essi osservato in confronto ai controlli corrisponde bene al quadro di rachitide, probabilmente genuina, che era preceduto.

Voglio accennare infine che una parte dei polli dei vari gruppi studiati fu trattata solo con sale di stronzio, mentre l'altra parte fu tenuta a un trattamento combinato, poichè alle iniezioni di stronzio veniva associata una iniezione quotidiana di 0.6 cmc di soluzione oleosa all'1% di ergosterolo irradiato. Questa sostanza non fu in grado di modificare, come ho detto nella Nota precedente, il quadro d'intossicazione acuta, mentre dimostrò una notevole azione nel mitigare il quadro di marasma e di disturbi nervosi cronici, a tipo polinevritico.

È interessante confrontare al riguardo i dati del peso degli animali a trattamento semplice con stronzio, e a trattamento combinato con ergosterolo irradiato:

	a) trattam. sempl.	b) tratt. combinato
1° Peso medio all'inizio del trattamento	gr. 726	692
2° Peso medio alla fine del trattamento	» 798	773
3° Peso medio dopo 2 mesi dalla sospensione del trattamento	» 810	1130

I polli trattati con ergosterolo irradiato si ripresero dunque meglio, pure rimanendo inferiori, per peso e statura, ai controlli. Non posso naturalmente azzardare, in base ai fatti osservati, alcun'ipotesi sull'azione dell'ergosterolo irradiato, quantunque essa appaia interessante tenendo conto dell'azione dello stronzio sul contenuto in calcio e fosforo in sangue.

Posso, invece, credo, affermare fin da ora che il quadro dell'azione biologica dello stronzio si deve probabilmente esplicare senza che intervenga un'apprezzabile sua fissazione nei tessuti, senza cioè che esso entri a far parte della loro compagine, andandovi a sostituire il calcio. Sebbene nel determinismo di tale azione biologica spetti alla sua azione sul calcio un'importanza innegabile, sulla quale ho in corso ulteriori ricerche.

Fisiologia. — *Curva idremica provocata nel riposo e negli esercizi fisici.*
Nota di U. CASSINIS e L. BRACALONI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente comunica all'Assemblea che il Socio LEVI GIUSEPPE commemorerà in una delle prossime sedute il compianto Socio ANGELO RUFFINI.

PRESENTAZIONI DI LIBRI

Il Socio SOMIGLIANA presenta e illustra, a nome dell'autore on. FRANCESCO SOMAINI, la pubblicazione: « Il tempio Voltiano in Como » con le seguenti parole:

« Ho l'onore di presentare alla R. Accademia, a nome dell'on. FRANCESCO SOMAINI la pubblicazione: " Il Tempio Voltiano in Como ", che è un'illustrazione storica ed architettonica, del Tempio da lui costruito e donato alla città di Como. Il Tempio ha avuto origine dal nobile proposito di ricostruire gli strumenti scientifici Voltiani, periti nell'incendio dell'Esposizione del 1899, e di collocarli in sede degna, che fosse anche un monumento alla gloria del grande Fisico.

« " Il Mondo Civile non ha dimenticato — scrive l'on. SOMAINI — la " grande jattura e bene spesso, non senza ragione, ricorda con rampogna " che quei Cimeli, in parte usciti dalle mani stesse del Volta, appartenevano non alla sola Como, bensì all'Umanità memore e studiosa.

« " L'amore della terra nativa, il desiderio di riscattare la mia città dalla " taccia di negligenza o di restituire alla meditazione degli studiosi gli strumenti che segnarono le tappe gloriose del pensiero scientifico del grande " Concittadino, mi suggerirono l'idea di tentarne la ricostruzione. Ardimentoso il pensiero, quanto mai arduo il compito ".

« I conoscitori delle cose Voltiane possono ora constatare che la ricostruzione è riuscita in modo perfetto, con una cura e fedeltà di particolari quali meglio non si potevano desiderare. La sede grandiosamente artistica destinata a ricevere insieme gli avanzi del disastro ed i nuovi apparecchi è di essi ben degna. L'on. SOMAINI ha trovato un geniale interprete del suo pensiero nell'architetto FEDERICO FRIGERIO, che così illustra i criteri architettonici che lo hanno guidato:

« " ... per onorare un Uomo che fu una delle più pure e fulgide glorie " dell'era Napoleonica, nessuno stile mi parve più adatto che il neo-classico, " che accompagnò colle sue manifestazioni il fiore della vita di Alessandro " Volta e che fu anche l'ultimo degli stili storici degni di tal nome. Nella " correttezza austera che nasce dai suoi schemi semplici e tranquilli, rigidamente euritmici, spesso solenni, vennero quindi cercati gli elementi

“costitutivi e decorativi di questo edificio vagheggiato ad essere Tempio
“votivo e Museo insieme, custodia decorosa e sicura di preziosi cimeli
“scientifici, di cari documenti, di vere reliquie”.

«Devo infine aggiungere che l'on. SOMAINI ha dotato l'Istituzione del
Tempio di un ingente capitale per un premio ai cultori della Fisica che
sarà assegnato, ad ogni scadenza, dal Reale Istituto Lombardo di Scienze
e Lettere.

«Le benemerenze di questo munifico rappresentante della grande in-
dustria italiana sono quindi insigni e molteplici».

Il Corrispondente GUIDI presenta in omaggio e illustra una sua Nota
dal titolo: «Sollecitazioni termiche nelle volte da ponte».

Il Socio PALAZZO presenta in omaggio il volume di Memorie, col quale
si celebra il cinquantesimo della fondazione del R. Ufficio centrale di Meteoro-
logia e Geofisica; un suo rapporto sulla «Proprietà e Condizioni delle
Rocce Magnetiche», fatto al Congresso Internazionale di Praga nel 1927;
e una Nota del prof. TENANI: «Sulla compensazione stabile della deviazione
quadrantile delle bussole magnetiche».

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Corrispondente DIONISI anche a nome del Socio FANO legge la rela-
zione con la quale si propone la stampa della Memoria di M. FAZZARI dal
titolo: «Le arterie del cervelletto».

L'Assemblea approva.

Il Socio CASTELNUOVO legge anche a nome del Socio ENRIQUES la
relazione con la quale si propone la stampa della Memoria della signora
PIAZZOLLA-BELECH dal titolo: «Le superficie iperellittiche di rango 3».

L'Assemblea approva.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per l'inserzione nei «Rendiconti» i Soci: ARMELLINI
CROCCO, SOMIGLIANA, VOLTERRA.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 2 febbraio 1930

- ARCANGELI A. — Isopodi terrestri raccolti nelle Isole Canarie dal Prof. Filippo Silvestri (con aggiunte). (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXIV, pp. 82-91). S. l., 1930. 8°.
- ARAGOU M. — L'agriculture pasteurienne. Lavour, 1930. 8°, pp. 1-31.
- BLAISDELL F. E. — A Revision of the Beethes of the Tenebrionid Tribe Usechini, with Descriptions of a new Genus and new Species. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Volume LXXV). Washington, 1929. 8°, pp. 1-14.
- BEIER M. — Sopra alcuni Pseudoscorpioni della Cirenaica. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXIV, pp. 78-81. S. l., 1929. 8°.
- BEIER M. — Zoologische Forschungsreise nach den Jonischen Inseln und dem Peloponnes (Aus den « Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften in Wien, Math.-naturw. Klasse ». Bd. 138, Heft IX-X, pp. 457-461). Wien, 1929. 8°.
- BOSELLI F. B. — Elenco delle specie d'insetti dannosi ricordate per la Libia fino al 1926. (Estr. dagli « Annali del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Volume III, pp. 281-307). Modena, 1930. 8°.
- CARNERA L. — Commemorazione del Prof. Antonio Abetti. (Sonderabdr. aus « Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft ». Jahrg. LXIV. Heft 1-2, 1929). S. l., 1929. 8°.
- CARTAN E. — Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces. (Extr. des « Annales de la Société Polonaise de Mathématiques ». T. VIII, pp. 181-225). Cracovie, 1929. 8°.
- DIAZ ROMERO V. — I fossili giuresi della Dancalia Centrale. (Estr. dalla « Rivista Italiana di Paleontologia ». Anno XXXV, pp. 56-68). Pavia, 1929. 8°.
- D'ARRIGO A. — Regime della Plaia di Catania e migrazioni della foce del Simeto. (Estr. dagli « Annali dei Lavori Pubblici, già Giornale del Genio Civile ». Anno 1929, fasc. IX, X). Roma, 1929. 8°, pp. 1-50.
- FANTOLI G. — L'inaugurazione dell'annata didattica 1929-30. (R. Politecnico di Milano). Milano, 1929. 8°, pp. 1-35.
- FAVARO G. — La mano « stanca » di Leonardo. (Estr. dall'« Annuario della R. Università di Modena ». Anno 1929-1930). Modena, 1930. 8°, pp. 1-28.
- FOSLIE M. — Contributions to a Monograph of the Lithothamnina, (Kong. Norsk. Vidensk. Selskab Museet). Trondhjem, 1929. 4°, pp. 1-60, plates I-LXXXV.
- GENNARO A. e PACELLA G. B. — Osservazioni del pianeta Nettuno fatte nel R. Osservatorio Astronomico di Trieste. (Estratto dalle « Memorie della Società Astronomica Italiana ». Vol. IV). Roma, 1928. 8°, pp. 1-7.
- GUIDI C. — Le sollecitazioni termiche nelle volte da ponte. (Estr. dagli « Annali dei Lavori Pubblici, già Giornale del Genio Civile ». Anno 1929, fasc. IX). Roma, 1929. 8°, pp. 1-7.
- MARCHIAFAVA E. — L'eredità nella patologia. Trattato di anatomia patologica. Parte generale. Vol. XIII. Torino, 1930. 8°, pp. 1-174.
- MARSHALL W. B. — Three New Land Shells of the Genus Oreohelix from Arizona

- (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXVI). Washington, s. d. 8°, pp. 1-3.
- MENOZZI C. — Una nuova specie, probabile mirmecofila, di *Anthicus* (Coleopt-Anthridae) della Rep. Dominicana. (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria del R. Istituto superiore agraria di Portici». Vol. XXIV, pp. 92-94). Portici, 1930. 8°.
- The Nencki Institute of Experimental Biology: Warsaw Scientific Society. 1920-1927. Warsaw, 1929. 8°, pp. 1-49.
- NICOLINI T. — Sulla forma della superficie lunare. (Estr. dalle «Memorie della Società Astronomica Italiana». Vol. IV). Milano, 1929. 8°, pp. 1-11.
- PALAZZO L. — Proprietà e condizioni delle rocce magnetiche studiate in sito ed in laboratorio. Paris, 1929. 8°, pp. 1-12.
- PACELLA G. B. — Sulla ricerca della forma delle onde luminose dall'esame delle «frangie d'ombra». (Estr. dai «Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei». Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali». Serie 6°, vol. V, pp. 752-758). Roma, 1927. 8°.
- PECKHAM W. H. — Alphabetical Iris Check list. (American Iris Society). Baltimore, 1929. 8°, pp. 1-X, 1-299.
- PROFILI U. — Sunto di biochimica fisiologica immunologia, guarigioni spontanee. Roma, 1929. 8°, pp. 1-14.
- SILVESTRI F. — On postembryonal Development of Japygidae. (Thysanura). (From the «Transactions of IV Intern. Congress of Entomology», pp. 905-908). S. l., s. d. 8°.
- SILVESTRI F. — Nuevos Parajapiginos de Africa (Thys Japigidae) (Separad da «Memorias de la Real Sociedad Española de Historia Natural». Tomo XV, pp. 221-235). Madrid, 1929. 8°.
- SILVESTRI F. — Preliminary Report on the Citrus Scale-Insects of China. (From the «Transactions of IV Intern. Congress. of Entomology», pp. 897-904). S. l., s. d. 8°.
- SILVESTRI F. — The Relation of Taxonomy to other branches of Entomology. (From the «Transactions of IV. Intern. Congress of Entomology», pp. 52-54). S. l., s. d. 8°.
- STEVENS B. A. — Callianassidae from the West Coast of North America. (From the «Pub. Puget Sound Biol. Sta.». Vol. VI, pp. 315-369). Seattle, 1928. 8°.
- TENANI M. — Ricerche magnetiche. Esperimenti sulla compensazione stabile della deviazione quadrantale delle bussole magnetiche, ottenuta mediante compensatori cilindrici. (Estr. dagli «Annali idrografici». Vol. XII). Genova, 1929. 4°, pp. 1-15.
- TENANI M. — Relazioni e calcoli. (Estr. dalla «Spedizione italiana de Filippi nell'Himalaia, Carocorum e Turchestan cinese (1913-1914). Serie I. Vol. II, pp. 157-215). Bologna, s. d. 4°.
- VILLAT H. — Leçons sur les Tourbillons. Paris, 1913. 8°, pp. 1-300.
- WILLIAMS E. T. R. — A Spectrophotometric Study of Class a Stars. (Reprint. from the «Proceedings of the National Academy of Sciences». Vol. XV, n. XI, pp. 832-834). S. l., 1929. 8°.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 16 febbraio 1930 (anno VIII)

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica (Geometria). — *Sulle sezioni spaziali della varietà grassmanniana delle rette dello spazio a cinque dimensioni.*
Nota⁽¹⁾ del Corrisp. GINO FANO.

1. Le rette dello spazio a 5 dimensioni, quando le loro 15 coordinate grassmanniane p_{ik} ($i, k = 1, 2, \dots, 6$; $i \neq k$; $p_{ki} = -p_{ik}$) si interpretino come coordinate proiettive omogenee di punto in uno spazio S_{14} , sono rappresentate biunivocamente, senza eccezioni, dai punti di una varietà $M_{8^{14}}$ di questo spazio. Le intersezioni di questa $M_{8^{14}}$ con spazi minori S_{14-i} sono immagini di varietà basi di sistemi lineari ∞^{i-1} di complessi lineari; in particolare, per $i = 1$, di un unico complesso lineare. Il prof. Severi, in una Memoria dedicata alle varietà grassmanniane di spazi qualsiasi S_k entro un S_r ⁽²⁾, ha dimostrato che, nel caso che ora ci interessa, le sezioni della grassmanniana $M_{8^{14}}$ con spazi $S_{13}, S_{12}, S_{11}, S_{10}$ generici entro S_{14} sono varietà razionali; che la sezione con un generico S_9 è ancora una M_3 regolare di generi nulli, ma di dubbia razionalità; e inoltre sulla $M_{8^{14}}$ e sulle sue sezioni con spazi generici S_{13}, S_{12}, S_{11} , cioè su queste $M_{8-i^{14}}$ di S_{14-i} per $i = 0, 1, 2, 3$, non esistono altre varietà algebriche di dimensione $7-i$ all'infuori delle loro intersezioni complete con forme del rispettivo spazio; in altri termini, su queste $M_{8-i^{14}}$ le sezioni iperpiane costituiscono sempre una base minima. Mi propongo ora di dimostrare che

(1) Presentata nella seduta del 2 febbraio 1930.

(2) Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati di data dimensione immersi in uno spazio lineare, « Ann. di Matem. », (3) 24, 1915, p. 89.

quest'ultima proprietà sussiste anche per $i = 4, 5, 6$, ossia per le sezioni con spazi S_{10}, S_9, S_8 generici; e che la sezione con un S_9 generico, di dubbia razionalità, è riferibile a una varietà (forma) cubica di S_4 , priva di punto doppio.

Comincerò appunto collo studio della varietà M_3^{14} intersezione della grassmanniana M_8^{14} di S_{14} con un S_9 generico del suo spazio, ossia della varietà ∞^3 di rette di S_9 base per un sistema lineare ∞^4 generico di complessi lineari.

2. Un sistema lineare ∞^4 generico Λ di complessi lineari di S_9 contiene ∞^3 complessi singolari di 1^a specie, le cui rette-centri a hanno per luogo una varietà M_4^4 di S_9 ⁽¹⁾. Esse la ricoprono semplicemente, ossia per un punto generico P della M_4^4 passa una sola retta a : se ne passassero due, ne passerebbero infinite, perchè P sarebbe punto singolare per due complessi del sistema e quindi per tutti quelli del loro fascio, il che può avvenire soltanto per punti particolari di M_4^4 . Ne segue che, fra gli S_4 polari di P rispetto ai complessi del sistema Λ , uno solo è indeterminato; perciò questi S_4 formano un sistema lineare ∞^3 , cioè hanno a comune una retta passante per P , che sarà retta base di Λ . E la stessa M_4^4 è ricoperta semplicemente anche dalle ∞^3 rette base b di Λ .

Nello stesso modo come, in S_9 , una rete di complessi lineari del tipo più generale conduce a una quadrica ricoperta semplicemente dai due regoli delle direttrici degli ∞^1 complessi speciali della rete e delle ∞^1 rette basi, così avviene qui per la detta M_4^4 , ricoperta semplicemente dalle ∞^3 rette a e dalle b . La relazione fra questi due sistemi, a differenza di quanto avviene sopra una quadrica di S_3 , non è però reciproca. P. es. ogni S_3 congiungente una retta a con una b è spazio totale per il complesso del sistema Λ avente a come retta-centro, e contiene perciò una seconda retta b , generalmente distinta dalla prima. (Infatti su questo spazio gli ∞^4 complessi di Λ segano un sistema di complessi solamente ∞^3 , perciò generalmente con due rette basi). E così pure (invertendo il ragionamento) lo spazio S_3 congiungente due b generiche contiene una retta a . Invece lo spazio S_3 di due rette a non contiene in generale nessuna b ; e se ne contiene una, contiene infinite b e anche infinite a , formanti, in generale, i due regoli di una quadrica. Invero, nelle ipotesi indicate, lo spazio S_3 delle due a è totale per due diversi complessi del sistema Λ , e perciò per tutti quelli di un fascio [generalmente del tipo 6), fra quelli indicati nella nota (1) a p. 227 di questi « Rendiconti »]; donde segue appunto la proprietà enunciata.

In un S_4 generico sono contenute ∞^2 rette a formanti una rigata R^{10} ⁽²⁾, e ∞^1 rette b formanti una rigata ellittica R^3 (base per il sistema ∞^4 di

(1) F. PALATINI, « Atti R. Ist. Veneto », 40 (parte 2^a) 1900-1901, p. 371 e sg. Cfr. in particolare n. 15.

(2) F. PALATINI, loc. cit.

complessi lineari segato da Λ su questo S_4). Questa R^5 ha una ∞^1 anche ellittica di direttrici cubiche, i cui piani formano una M_3^5 avente R^5 come doppia ⁽¹⁾; le intersezioni ulteriori di questi piani colla M_4^4 sono le generatrici a della precedente R^{10} (anch'essa perciò ellittica). Infatti, entro l' S_4 considerato, lo spazio S_3 di due b deve sempre contenere una a ; e poichè queste a sono soltanto ∞^1 , ciascuna di esse deve appartenere a infiniti di quegli S_3 , e quindi al piano asse di uno dei loro fasci. L'intersezione delle due varietà M_4^4 e M_3^5 (∞^1 di piani) si compone perciò di R^5 contata due volte e di R^{10} ; e le generatrici di R^{10} sono trisecanti di R^5 .

3. Designeremo d'ora in avanti semplicemente con M_4^4 la varietà (di Palatini) contenente i due sistemi ∞^3 di rette a e b ; con M_3^4 la sua sezione con un S_4 generico (Π); con R^{10} e R^5 le rigate di rette a e b contenute in questo S_4 .

I due sistemi di rette a e b contenuti in M_4^4 sono entrambi in corrispondenza birazionale colla detta M_3^4 , e quindi tra loro. D'altra parte il sistema delle a è in corrispondenza birazionale col sistema ∞^3 dei complessi singolari contenuti in Λ , dei quali esse sono rette-centri; e, considerando Λ come uno spazio Σ_4 , quei complessi singolari costituiscono una forma cubica (V_3^3) di questo spazio, priva di punti doppi ⁽²⁾. Perciò: *La varietà ∞^3 delle rette basi di un sistema lineare ∞^4 generico di complessi lineari di S_5 (ossia l'intersezione della grassmanniana M_8^{14} delle rette di S_5 con un S_9 generico del suo spazio S_{14}) è riferibile birazionalmente a una forma cubica di S_4 priva di punto doppio.*

Nella rappresentazione del sistema delle rette a e quindi di M_3^4 su V_3^3 , alle superficie (Φ^3) e alle curve sezioni spaziali e piane di V_3^3 corrispondono le rette-centri dei complessi singolari di Λ contenuti in un sistema lineare ∞^3 (rette formanti una M_3^7 ⁽³⁾) o rispettivamente in una rete (generatrici di una R^6 ellittica ⁽⁴⁾), e sopra M_3^4 superficie razionali F^7 e curve ellittiche C^6 . Alle generatrici di R^{10} , che sono rette fondamentali per il sistema lineare $|F^7|$ e tali che ogni F^7 contiene 5 di esse ⁽⁵⁾, corrispondono su V_3^3 i punti di una curva fondamentale ellittica γ_1^1 . Si riconosce facilmente che le F^7 hanno curve sezioni di genere 4, e sono segate su M_3^4

(1) Cfr. p. es. C. SEGRE, « Rendiconti Circolo Matematico di Palermo », 2 (1888), p. 45 e sg.

(2) Un punto doppio potrebbe essere costituito soltanto da un complesso singolare di 2^a specie, oppure da un complesso singolare di 1^a specie la cui retta-centro sia in pari tempo retta base per Λ ; nessuna di queste due eventualità può verificarsi se il sistema Λ è preso in modo generico.

(3) F. PALATINI, loc. cit. La varietà base di questo sistema lineare ∞^3 si compone delle rette di S_5 quadrisecanti la M_3^7 ; per un punto generico di S_5 ne passa una sola; per un punto di M_3^7 ne passa un fascio.

(4) F. PALATINI, loc. cit. Cfr. anche la mia Nota precedente, a p. 227 di questi « Rendiconti ».

(5) F. PALATINI, loc. cit.

dalle forme cubiche dello spazio Π passanti per la rigata R^5 ⁽¹⁾. Esse incontrano R^5 secondo curve C_{16}^{15} , quadrisecanti le sue generatrici, le quali formano su R^5 un sistema lineare di grado 15, e hanno a comune 25 punti fissi, comuni pertanto a R^5 e a tutte le F_7 ; questi ultimi sono punti doppi di M_3^4 (e di R^{10}), e quindi anche di M_4^4 ⁽²⁾. La M_4^4 di Palatini ha dunque una curva doppia di ordine 25, luogo dei punti da ciascuno dei quali esce tutto un fascio di rette b (basi per Λ), e che sono in pari tempo singolari per un fascio di complessi contenuti in Λ [fascio del tipo 7) indicato nella nota (1) a p. 227 di questi « Rendiconti »]; da ognuno di questi punti esce un cono quadrico di rette a (contenute in M_4^4).

Alle sezioni spaziali (F^4) e piane di M_3^4 corrispondono su V_3^3 superficie F^6 segate dalle quadriche passanti per la quintica fondamentale γ_1^5 , e curve $C_{3,7}$ incontranti γ_1^5 in 10 punti. Alla rigata R^5 contenuta in M_3^4 corrisponde una φ^{15} avente γ_1^5 come tripla, cioè la superficie intersezione di V_3^3 colla varietà di 5° ordine costituita dalle corde di γ_1^5 : in particolare alle generatrici di R^5 corrispondono le quartiche intersezioni ulteriori di V_3^3 colle rigate cubiche determinate dalle involuzioni g_2^4 su γ_1^5 ⁽³⁾, e ai 25 punti doppi di M_3^4 (che appartengono a R^5) le 25 corde di γ_1^5 contenute in V_3^3 e quindi in φ^{15} .

4. I complessi lineari di S_5 segano sulla varietà ∞^3 delle rette b (base di Λ) un sistema lineare di congruenze, di dimensione 9 e grado 14, al quale corrisponde sulla M_3^4 dello spazio Π il sistema lineare completo $|F^4 + R^5|$ (come si vede immediatamente riferendosi p. es. al complesso delle rette incidenti a uno spazio S_3 contenuto in Π). Ne segue che la detta M_3^4 è proiezione della M_3^{14} , sezione della grassmanniana M_8^{14} con un S_9 generico, da una sua quintica ellittica δ_1^5 della quale R^5 è l'immagine ⁽⁴⁾. E nella rappresentazione di questa M_3^{14} di S_9 ⁽⁵⁾ sopra una forma cubica di S_4 priva di punto doppio (cfr. n.° prec.), alle sezioni iperpiane

(1) Le generatrici di R^5 sono rette basi di Λ , perciò di ogni sistema contenuto in Λ ; sono dunque quadrisecanti di ogni $M_{3,7}$, e di ogni F_7 contenuta in Π . La forma cubica passante per una F_7 contiene perciò sempre R^5 .

(2) A titolo di conferma, ricordiamo che una forma di S_{2k} obbligata a passare per una V_k assegnata ha in conseguenza un numero finito di punti doppi in punti semplici di questa (SEVERI, *Sulle intersezioni delle varietà algebriche* ..., « Mem. R. Acc. di Torino », (2) 52, 1902; n. 7). Per una forma di 4° ordine di S_4 obbligata a contenere R^5 questo numero è appunto 25.

(3) Queste quartiche incontrano γ_1^5 in 7 punti; perciò le generatrici di R^5 sono 7-secanti di R^{10} .

(4) Entro M_3^4 , il sistema lineare $|F^4 + R^5| \equiv 4|F^4| - F_7$ sega su R^5 solamente gruppi di 5 generatrici; queste generatrici sono dunque rette fondamentali per il sistema $|F^4 + R^5|$.

(5) Varietà appartenente alla categoria delle $M_{3,2p-2}$ di S_{p+1} a curve sezioni canoniche di genere p , oggetto di una mia comunicazione al Congresso internazionale dei Matematici a Bologna (1928). Questa comunicazione è in corso di stampa negli Atti del detto Congresso.

di M_3^{14} corrispondono sulla forma cubica V_3^3 superficie φ^{21} (intersezioni complete con forme di 7° ordine) aventi la quintica γ_1^5 come linea quadrupla (e la φ^{15} anzidetta come unica aggiunta).

Le due varietà M_3^{14} di S_9 e V_3^3 di S_4 , prive entrambe di punti multipli, sono così rappresentate birazionalmente l'una sull'altra, in modo che su ciascuna di esse vi è un'unica linea fondamentale, cioè rispettivamente le due quintiche ellittiche normali δ_1^5 e γ_1^5 (e nessun punto fondamentale isolato). A δ_1^5 corrisponde su V_3^3 la superficie φ^{15} già accennata; a γ_1^5 corrisponde su M_3^{14} la rigata R^{10} , segata da una forma di 5° ordine con R^5 doppia, onde $R^{10} \equiv 5 |F^4| - 2R^5 \equiv 5 |F^4 + R^5| - 7R^5$; perciò su M_3^{14} le corrisponde una superficie intersezione completa con una forma di 5° ordine, e avente inoltre δ_1^5 come curva 7^{pla} . Alle superficie φ^3 , sezioni iperpiane di V_3^3 , corrispondono su M_3^{14} le $F^7 \equiv 3 |F^4| - R^5 \equiv 3 |F^4 + R^5| - 4R^5$; perciò su M_3^{14} superficie segate da forme cubiche, e aventi δ_1^5 come curva quadrupla. Poichè dunque alle φ^3 , che costituiscono su V_3^3 la base minima del sistema superficie, e alla curva γ_1^5 , che su V_3^3 è l'unico ente fondamentale della rappresentazione anzidetta, corrispondono su M_3^{14} superficie intersezioni complete con forme di S_9 , è ovvio che anche su M_3^{14} esisteranno soltanto superficie intersezioni complete con forme di S_9 ; vale a dire anche su M_3^{14} le sezioni iperpiane F^{14} costituiscono una base minima. Alle superficie intersezioni di V_3^3 con forme di ordine m , e aventi γ_1^5 come curva k^{pla} , corrispondono su M_3^{14} superficie intersezioni con forme di ordine $3m - 5k$, e aventi δ_1^5 come curva $(4m - 7k)^{pla}$.

La varietà M_3^{14} di S_9 sezione generica della grassmanniana delle rette di S_5 non contiene altre superficie algebriche all'infuori delle sue intersezioni complete con forme dello spazio S_9 . O in altri termini: Entro la varietà ∞^3 delle rette di S_5 base di un sistema lineare ∞^4 generico di complessi lineari non esistono altre varietà algebriche ∞^2 (congruenze) all'infuori delle sue intersezioni complete con un nuovo complesso (di grado qualsiasi).

La M_3^{14} di S_9 contiene una semplice infinità di rette, immagini dei fasci di rette b contenuti nella M_4^4 di Palatini; quelle rette costituiscono una rigata P , che sarà anch'essa intersezione completa di M_3^{14} con una forma di $S_9^{(1)}$. Nella proiezione di M_3^{14} da δ_1^5 su M_3^4 , le generatrici di P appoggiate a δ_1^5 danno come immagini i 25 punti doppi di M_3^4 ; se ne trae che la rigata P delle rette contenute in M_3^{14} è segata da una forma di 5° ordine, ed è essa stessa di ordine 70. Ogni generatrice di P ne incontra altre sei: infatti da una (g) di queste rette la M_3^{14} si proietta in una M_3^{10} di S_7 contenente una rigata cubica R^3 di S_4 , immagine di g ; gli iperpiani passanti per R^3 segano ulteriormente M_3^{10} secondo ∞^2 superficie di ordine 7, che incontrano a loro volta R^3 secondo una rete di quintiche ellittiche, di

(1) Alle generatrici di P corrispondono su V_3^3 cubiche sghembe incontranti γ_1^5 in 5 punti.

grado due, e perciò con 6 punti basi, doppi per M_3^{10} e immagini delle generatrici di P incidenti a $g^{(1)}$.

5. La proprietà ora dimostrata della M_3^{14} di S_9 , di avere cioè le proprie sezioni iperpiane come base minima, si estende senz'altro alle sezioni M_4^{14} della grassmanniana M_8^{14} di S_{14} con spazi generici S_{10} , riguardo alle M_3 loro sezioni iperpiane; ossia alle varietà basi di sistemi lineari ∞^3 generici di complessi lineari di S_5 , riguardo ai sistemi algebrici ∞^3 di rette ivi contenuti. Sulla detta M_4^{14} di S_{10} ogni M_3 algebrica avrà infatti ordine multiplo di 14; e, se quest'ordine è $14k$, dovrà appartenere al sistema lineare segnato dalle forme di ordine k .

La stessa proprietà di avere le sezioni iperpiane come base minima sussiste altresì per le superficie F^{14} sezioni iperpiane generiche di M_3^{14} , ossia sezioni della grassmanniana M_8^{14} con S_8 generici. Benchè la M_3^{14} non sia intersezione completa di 6 forme di S_9 , è egualmente applicabile ad essa una dimostrazione data da me per le M_3 di S_r ($r \geq 4$) complete intersezioni di $r - 3$ forme⁽²⁾, e fondata essenzialmente sulle considerazioni seguenti. Se sulla F^{14} generica esistesse una curva algebrica η che non ne fosse intersezione completa con una forma di S_8 , al variare di F^{14} entro un fascio sulla M_3^{14} anzidetta il sistema lineare completo $|\eta|$ dovrebbe assumere sopra ognuna di queste F^{14} due o più posizioni diverse $|\eta|, |\eta'|, |\eta''|, \dots$; e su qualche particolare F^{14} del fascio due almeno di questi sistemi dovrebbero coincidere. Questa coincidenza non può aver luogo che sopra F^{14} dotate di punto doppio, e la curva virtuale $\eta - \eta'$ deve precisamente ridursi al punto doppio. Ma per queste particolari F^{14} il numero ρ_0 degli integrali doppi di 2ª specie distinti diminuisce di un'unità; deve dunque aumentare di un'unità il numero base ρ (tenendo conto anche dell'intorno del punto doppio); ed è perciò inammissibile che sistemi $|\eta|, |\eta'|$ generalmente distinti vengano a coincidere su queste F^{14} a meno del punto doppio⁽³⁾.

(1) Perciò sulla M_4^4 di Palatini il piano di un qualsiasi fascio di rette b incontra la linea doppia in sette punti; il centro del fascio stesso, e altri sei.

(2) *Sulle varietà algebriche che sono intersezioni complete di più forme*, « Atti R. Accad. di Torino », 44 (1909).

(3) Questa superficie F^{14} , di genere 1, è immagine del sistema di rette base di un sistema lineare ∞^5 generico di complessi lineari di S_5 . Queste rette basi ricoprono una M_3^9 a curve sezioni di genere 8. (L'ordine è dato dal numero delle rette di S_5 incidenti in pari tempo a sei spazi S_3 e a un piano). Il detto sistema contiene ∞^4 complessi singolari di 1ª specie, e la M_3^9 delle rette basi è focale per il sistema (di 1º ordine) delle rette-centri; queste ultime sono quadrisecanti della M_3^9 , e in ogni S_3 ne sono contenute 13.

Un sistema lineare ∞^6 generico di complessi lineari ha per base una rigata R^{14} di genere 8, e contiene 14 complessi singolari di 2ª specie, i cui S_3 -centri incontrano R^{14} secondo curve di ordine 9, direttrici di R^{14} . Gli iperpiani passanti per questi S_3 segano su R^{14} le serie lineari minime g_5^5 , che sono appunto in numero di 14; le rette mutue intersezioni dei vari S_3 sono quadrisecanti di R^{14} .

Concludiamo perciò: La grassmanniana $M_{8^{14}}$ di S_{14} delle rette di S_5 è incontrata da ogni spazio generico S_{14-i} , ove $i \leq 6$, secondo una $M_{8-i^{14}}$, sulla quale le sezioni iperpiane costituiscono una base minima.

La varietà base di un sistema lineare ∞^k generico di complessi lineari di S_5 , finchè $k \leq 5$, non contiene altri sistemi algebrici ∞^{6-k} di rette all'infuori delle sue intersezioni complete con altri complessi di grado qualunque.

È possibile quindi che anche per altre grassmanniane l'analogo teorema di Severi abbia una portata più ampia di quanto finora accertato; per le grassmanniane di rette ad es. non è forse da escludere ch'esso abbia a valere per tutte le sezioni spaziali generiche di dimensione ≥ 3 , e anche per quelle di dimensione 2 purchè non razionali (ossia dallo spazio S_5 in su)⁽¹⁾.

Meccanica (Idromeccanica). — *Azioni dinamiche di correnti traslocircolatorie intorno a una lastra arcuata.* Nota⁽²⁾ del Corrispondente U. CISOTTI.

In una recente Nota⁽³⁾ ho mostrato l'influenza che la presenza di cuspidi salienti in un profilo rigido ha sul calcolo della risultante delle pressioni dinamiche subite dal profilo stesso da parte di una corrente fluida locale circolante intorno al profilo stesso, risultante che è sempre nulla quando il profilo è regolare. In una successiva Nota⁽⁴⁾ ho fatto il calcolo relativo quando il profilo è bilatero con due aste rettilinee eguali e quando si tratta di un profilo foggato ad arco di circonferenza: in entrambi i casi si ha una risultante non nulla.

Dopo ciò è ben naturale di attendersi che la presenza di cuspidi salienti in profili rigidi modifichi classici teoremi che furono stabiliti nell'ipotesi

(1) Per la grassmanniana delle rette di S_4 (M_{65} di S_9) la stessa proprietà, stabilita da Severi per le sezioni con spazi generici S_8 e S_7 , vale anche per la M_{35} sezione con un S_6 generico (varietà già considerata da ENRIQUES, SCORZA, e da me stesso, e per la quale questa proprietà mi pare non sia stata rilevata). Nella nota rappresentazione di questa M_{35} su S_3 , ottenuta per proiezione da una sua conica γ , si ha in S_3 una sola curva fondamentale, cioè una quartica razionale 8^4 , immagine della rigata R^{10} (con γ tripla) costituita dalle rette di M_{35} appoggiate a γ , e che è intersezione completa di M_{35} con un S_2 -cono quadrico. Perciò alle superficie di ordine n di S_3 aventi δ come curva k^{pla} ($k \geq 0, \leq \frac{n}{3}$) corrispondono su M_{35} superficie intersezioni complete con forme di ordine $n - 2k$, e aventi γ come multipla di ordine $n - 3k$.

(2) Presentata nella seduta del 16 febbraio 1930.

(3) Tipi di profili rigidi isolati che subiscono un'azione dinamica da parte di una corrente fluida locale circolante intorno ad essi. Questi «Rendiconti», vol. X (2° sem. 1929), p. 469.

(4) Azioni dinamiche di correnti circolatorie intorno a una lastra bilatera e intorno a una lastra arcuata. Questi «Rendiconti», vol. XI (1° sem. 1930), p. 122.

che i profili sieno regolari o poligonali a lati rettilinei con vertici non cuspidali. Intendo alludere al paradosso di d'Alembert, quando il profilo viene investito da una corrente traslatoria, e al teorema di Kutta-Joukowski quando il profilo è immerso in una corrente traslocircolatoria. Il Bickley, risolvendo il problema della corrente traslatoria che investe un profilo ad arco di circonferenza, fu il primo ad accorgersi che la risultante delle pressioni dinamiche della corrente sul profilo non è nulla⁽¹⁾, come vorrebbe il paradosso di d'Alembert; possiamo ora aggiungere che ciò è dovuto al fatto che i due estremi dell'arco sono cuspidi salienti e che, in generale, le influenze sul fenomeno dei singoli estremi non si elidono a vicenda⁽²⁾, come invece avviene per una lamina rettilinea investita da una corrente traslatoria. Che se la lamina rettilinea si trova immersa in una corrente traslocircolatoria l'influenza complessiva dei due estremi cuspidali della lamina si fa sentire e modifica, in tal caso, sensibilmente il teorema di Kutta-Joukowski, come esso venne stabilito in base all'ipotesi di profili regolari⁽³⁾. In questa Nota il concetto suesposto viene illustrato con esempi: riprendendo in esame il profilo considerato dal Bickley calcolo le azioni dinamiche esercitate da correnti traslatorie, normali alla corda che sottende l'arco circolare oppure da correnti traslocircolatorie. Tanto il paradosso di d'Alembert, nel caso della semplice corrente traslatoria, quanto il teorema di Kutta-Joukowski, per una corrente traslocircolatoria, risultano modificati: esiste sempre, in generale, una azione complessiva non nulla e diretta come l'asse di simmetria del profilo.

1. *Corrente traslatoria e profilo circolare oppure regolare.* — Si consideri nel piano complesso $\zeta = \xi + i\eta$ il profilo circolare γ , ove $|\zeta| = 1$. Una corrente piana traslatoria di velocità assintotica parallela all'asse reale e di valore V investe l'accennato profilo (fig. 1): il potenziale cinetico f e la velocità W sono definiti, in modo complesso, dalle relazioni:

$$(1) \quad f = V \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right), \quad W = \frac{df}{d\zeta} = V \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right),$$

come è ben noto. Come pure è noto che le pressioni dinamiche della corrente sul profilo γ ammettono una risultante e un momento nulli (para-

(1) *Some Two-Dimensional Potential Problems connected with the Circular Arc.* «Phil. Mag.», 1918, vol. XXXV, p. 396; vol. XXXVI, p. 273.

(2) Cfr. la prima delle Note citate, n. 4.

(3) Cfr. la mia Nota: *Una notevole eccezione del teorema di Kutta-Joukowski.* Questi «Rendiconti», vol. V (1° sem. 1927), p. 16; ristampata in, «Collectanea aeronautica», I (IV Congresso internazionale di navigazione aerea, 24-30 ottobre 1927, a cura del Ministero dell'Aeronautica), p. 325.

Per le ampie discussioni di cui questa Nota fu oggetto veggansi i volumi VII e VIII (1° e 2° sem. 1928) di questi «Rendiconti».

dosso di d'Alembert). Del resto questo si può constatare immediatamente applicando le formule di Blasius:

$$(2) \quad R_{\eta} + i R_{\xi} = -\frac{1}{2} \rho \int_{\gamma} W^2 d\zeta, \quad M = -\frac{1}{2} \rho \Re \int_{\gamma} W^2 \zeta d\zeta,$$

essendo: R_{ξ}, R_{η} le componenti della risultante, M il momento antiorario

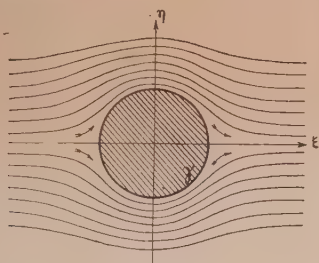


Fig. 1.

rispetto al centro $\zeta = 0$, ρ la densità del liquido e significando \Re « parte reale ». Infatti, per la seconda delle (1) si ha:

$$\int_{\gamma} W^2 d\zeta = V^2 \int_{\gamma} \left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right)^2 d\zeta = 0, \quad \int_{\gamma} W^2 \zeta d\zeta = V^2 \int_{\gamma} \left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right)^2 \zeta d\zeta = -4\pi i V^2,$$

per cui da (2) scendono $R_{\xi} = R_{\eta} = 0, M = 0$, come erasi annunciato.

Seguendo il contenuto del n. 2 della seconda Nota citata, si immagini di mettere in corrispondenza conforme e biunivoca il piano forato circolarmente, cioè per $|\zeta| \geq 1$ con un piano $z = x + iy$, pure forato, ma secondo un contorno qualsiasi c (fig. 2).

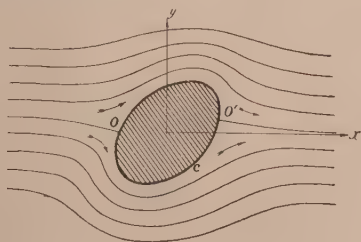


Fig. 2.

Se lungo c la tangente varia con continuità, le derivate $\frac{dz}{d\zeta}$ e $\frac{d\zeta}{dz}$ non si annullano, nè divengono infinite in nessun punto del piano ζ per $|\zeta| \geq 1$. Ne viene che, se nella prima delle (1) si considera f funzione di z per mezzo di ζ , si avrà il potenziale cinetico di una corrente traslatoria, nel

piano χ , che investe il profilo c ; tenendo presenti le (1), la velocità complessa sarà definita nel modo seguente:

$$(3) \quad w = \frac{df}{d\chi} = \frac{df}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{d\chi} = V \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) \frac{d\zeta}{d\chi};$$

tenendo conto di quanto si disse circa il comportamento di $\frac{d\zeta}{d\chi}$, si può asserire che, per $|\zeta| \geq 1$, w non diviene mai infinita e si annulla per $\zeta = -1$ (corrispondente al punto O di *prora*)⁽¹⁾ e per $\zeta = 1$ (corrispondente al punto O' di *poppa*). Applicando la prima delle formule di Blasius al caso attuale

$$(4) \quad R_y + iR_x = -\frac{1}{2} \rho \int_c w^2 d\chi,$$

si ottengono le componenti della risultante delle pressioni dinamiche della corrente sul profilo c . L'integrale del secondo membro, esteso a c , si può trasformare in un integrale relativo al corrispondente contorno γ tenendo presente che, per la (3), si può scrivere:

$$w^2 d\chi = w^2 \frac{d\chi}{d\zeta} d\zeta = V^2 \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right)^2 \frac{d\zeta}{d\chi} d\zeta;$$

infatti, si ottiene

$$(5) \quad R_y + iR_x = -\frac{1}{2} \rho V^2 \int_{\gamma} \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right)^2 \frac{d\zeta}{d\chi} d\zeta.$$

Se c è un contorno ove la tangente varia ovunque con continuità, è come si è detto, $\frac{d\chi}{d\zeta}$ regolare per $|\zeta| \geq 1$: essa è dunque sviluppabile in serie assolutamente convergente, contorno incluso, di potenze negative di ζ , per cui l'integrale è nullo: si ha dunque $R_x = R_y = 0$, come nel caso del profilo circolare.

Se il profilo c ha delle cuspidi, si possono estendere al caso della corrente traslatoria le considerazioni che feci al n. 4 della prima Nota citata e che permettono di concludere che *non sempre si può asserire che la suddetta risultante è nulla*. Ciò mi propongo di illustrare coll'esempio del n. 3.

2. *Corrente traslocircolatoria e profilo circolare oppure regolare*. — Il potenziale cinetico di una corrente traslocircolatoria che investe un profilo circolare $|\zeta| = 1$, è:

$$(6) \quad f = \frac{C}{2\pi i} \log \zeta + V \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right),$$

(1) Cfr. la mia *Idromeccanica piana*. (Milano, Tamburini, 1921), n. 68.

e la corrispondente velocità complessa

$$W = \frac{df}{d\zeta} = \frac{C}{2\pi i} \frac{1}{\zeta} + V \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right).$$

Avendosi:

$$\int_{\gamma} W^2 d\zeta = 2 C V \quad , \quad \int_{\gamma} W^2 \zeta d\zeta = -2\pi i \left(\frac{C^2}{4\pi^2} + 2 V^2 \right),$$

dalle (2) scendono

$$R_y + i R_x = -\rho C V \quad , \quad M = 0.$$

Queste stanno ad esprimere il teorema di Kutta-Joukowski.

Se si immagina, come già nel n. 1, di rappresentare conformemente il piano ζ sul piano $z = x + iy$, considerando nella f , definita da (6), la ζ funzione di z , si ottiene il potenziale cinetico di una corrente traslocircolatoria nel piano z , che investe il profilo c ; la velocità complessa risulta definita, per la (6) stessa, nel modo seguente:

$$(7) \quad w = \frac{df}{dz} = \frac{df}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = W \frac{d\zeta}{dz} = \left\{ \frac{C}{2\pi i} \frac{1}{\zeta} + V \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) \right\} \frac{d\zeta}{dz}.$$

Se il profilo c ammette in ogni punto la tangente variabile con continuità la $\frac{d\zeta}{dz}$ nè si annulla nè diviene infinita per $|\zeta| \geq 1$. Ancor qui, come già al n. 1, possiamo trasformare l'integrale del secondo membro della (4), che si riferisce al contorno c , in un altro integrale esteso al corrispondente contorno circolare γ del piano ζ . Basta notare che, per la (7) si ha:

$$w^2 dz = w^2 \frac{dz}{d\zeta} d\zeta = \left\{ \frac{C}{2\pi i} \frac{1}{\zeta} + V \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) \right\}^2 \frac{d\zeta}{dz} d\zeta,$$

con che la (4) si trasforma nella seguente:

$$(8) \quad R_y + i R_x = -\frac{1}{2} \rho \int_{\gamma} \left\{ \frac{C}{2\pi i} \frac{1}{\zeta} + V \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) \right\}^2 \frac{d\zeta}{dz} d\zeta.$$

Nell'ipotesi che c sia un contorno regolare, come si è ripetutamente rilevato la $\frac{d\zeta}{dz}$ è regolare per $|\zeta| \geq 1$: essa è dunque sviluppabile in serie assolutamente convergente, contorno incluso, di potenze negative di ζ , cioè del tipo

$$\frac{d\zeta}{dz} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\zeta^n}.$$

Allora da (8) si ricava

$$R_y + iR_x = -\rho a_0 CV,$$

ma, per la (7), $\lim_{\xi \rightarrow \infty} w = Va_0 = U$, dunque $R_y + iR_x = -\rho CU$, che esprime ancora il teorema di Kutta-Joukowski. Anche qui dobbiamo ripetere l'osservazione fatta alla fine del n. 1 e cioè che se il profilo ha delle cuspidi il teorema di Kutta-Joukowski viene modificato. Lo constateremo nuovamente nel n. 4 riprendendo per c il profilo ad arco di circonferenza.

3. *Corrente traslatoria e profilo ad arco circolare.* — Il profilo c sia ora l'arco di circonferenza di raggio a e di angolo al centro 2α , simmetrica-

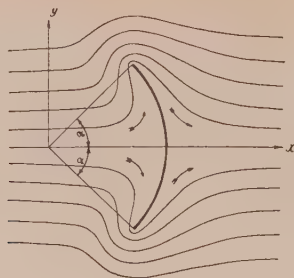


Fig. 3.

mente disposto rispetto all'asse reale, considerato al n. 6 della Nota già citata⁽¹⁾. Il profilo c sia investito da una corrente traslatoria assintoticamente diretta come l'asse reale. Per il calcolo delle azioni dinamiche su c basta riferirsi alla (4). Notando che dalla (3) quadrando si ottiene:

$$w^2 = V^2 \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right)^2 \left(\frac{d\zeta}{d\bar{\zeta}} \right)^2,$$

e che⁽²⁾

$$(9) \quad \left(\frac{d\zeta}{d\bar{\zeta}} \right)^2 = \frac{4}{\left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right)^2} \left(\frac{dZ}{d\bar{\zeta}} \right)^2, \quad Z = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right),$$

con che

$$(10) \quad w^2 = 4 V^2 \left(\frac{dZ}{d\bar{\zeta}} \right)^2,$$

la (4) può scriversi:

$$R_y + iR_x = -2\rho V^2 \int_c \left(\frac{dZ}{d\bar{\zeta}} \right)^2 d\bar{\zeta},$$

(1) Azioni dinamiche di correnti circolatorie intorno a una lastra bilatera e intorno a una lastra arcuata.

(2) Loco ultimo citato, n. 6.

dove è ⁽¹⁾

$$(11) \quad \frac{dZ}{d\tilde{\chi}} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{a} - \frac{a}{\tilde{\chi}^2} \mp \frac{a}{\tilde{\chi}^2} \sqrt{\left(\frac{\tilde{\chi}}{a} - e^{i\alpha}\right)\left(\frac{\tilde{\chi}}{a} - e^{-i\alpha}\right)} \pm \right. \\ \left. \pm \left(1 + \frac{a}{\tilde{\chi}}\right) \frac{\frac{\tilde{\chi}}{a} - \cos \alpha}{a \sqrt{\left(\frac{\tilde{\chi}}{a} - e^{i\alpha}\right)\left(\frac{\tilde{\chi}}{a} - e^{-i\alpha}\right)}} \right\}.$$

Del quadrato di questa espressione reca contributo non nullo all'integrale del secondo membro della precedente soltanto il seguente termine

$$16 \left(1 + \frac{a}{\tilde{\chi}}\right)^2 \frac{\left(\frac{\tilde{\chi}}{a} - \cos \alpha\right)^2}{a^2 \left(\frac{\tilde{\chi}}{a} - e^{i\alpha}\right)\left(\frac{\tilde{\chi}}{a} - e^{-i\alpha}\right)};$$

per cui si ha ⁽²⁾

$$R_y + iR_x = -\frac{\rho V^2}{8a} \int \left(1 + \frac{a}{\tilde{\chi}}\right)^2 \frac{\left(\frac{\tilde{\chi}}{a} - \cos \alpha\right)^2}{\left(\frac{\tilde{\chi}}{a} - e^{i\alpha}\right)\left(\frac{\tilde{\chi}}{a} - e^{-i\alpha}\right)} d\frac{\tilde{\chi}}{a} \\ = \frac{i\pi\rho V^2}{a} \sin^2 \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Da (10) e (11) risulta che

$$\lim_{\tilde{\chi} \rightarrow \infty} w = 2V \lim_{\tilde{\chi}} \frac{dZ}{d\tilde{\chi}} = \frac{V}{a} = U,$$

per cui

$$(12) \quad R_x = \pi\rho a U^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \quad R_y = 0,$$

che rientra nelle formule stabilite dal Bickley ⁽³⁾.

4. *Corrente traslociclatoria e profilo ad arco circolare.* — Supponiamo infine che il profilo ad arco circolare di cui si è parlato nel numero pre-

(1) Loco ultimo citato, n. 6.

(2) Cfr. loco ultimo citato, n. 6.

(3) Loco già citato *Some Two-Dimensional, ecc.*, oppure la mia *Idromeccanica piana*, p. 126, nelle due ultime formule della Nota a piè di pagina va cambiato il segno ai secondi membri. Allora facendo in esse $\omega = 0$ si ha la coincidenza col risultato ora dedotto, naturalmente tenuto conto che $\rho = 1$, $a = 1$ e $U = 1$.

cedente sia investito da una corrente traslocircolatoria. In tal caso la (7) quadrata diviene:

$$(13) \quad w^2 = \left\{ \frac{C}{2\pi i} \frac{1}{\zeta} + V \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) \right\}^2 \left(\frac{d\zeta}{d\tilde{\zeta}} \right)^2,$$

e, per la (9),

$$w^2 = \frac{4}{\left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right)^2} \left\{ \frac{C}{2\pi i} \frac{1}{\zeta} + V \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) \right\}^2 \left(\frac{dZ}{d\tilde{\zeta}} \right)^2;$$

sostituendo nella (4) si ha:

$$\begin{aligned} R_y + i R_x &= -2\rho \int_c \left\{ \frac{C}{2\pi i} \frac{1}{\zeta} + V \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) \right\}^2 \left(\frac{dZ}{d\tilde{\zeta}} \right)^2 \frac{d\tilde{\zeta}}{\left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right)^2} \\ &= \frac{\rho C^2}{2\pi^2} \int_c \left(\frac{dZ}{d\tilde{\zeta}} \right)^2 \frac{d\tilde{\zeta}}{\left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right)^2} - 2\rho V^2 \int_c \left(\frac{dZ}{d\tilde{\zeta}} \right)^2 d\tilde{\zeta} + \frac{2i\rho CV}{\pi} \int_c \left(\frac{dZ}{d\tilde{\zeta}} \right)^2 \frac{d\tilde{\zeta}}{\zeta - \frac{1}{\zeta}}; \end{aligned}$$

il primo termine esprime il contributo dovuto alla sola corrente circolatoria ed è (1)

$$\frac{i\rho C^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{16\pi a \left(1 + \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \right)};$$

il secondo termine si è valutato nel numero precedente, rappresentando il contributo dovuto alla sola corrente traslatoria, e vale

$$i\pi\rho a U^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2},$$

per cui si può scrivere

$$\begin{aligned} (14) \quad R_y + i R_x &= i\rho \left\{ \frac{C^2}{16\pi a \left(1 + \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \right)} + \pi a U^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right\} \operatorname{sen}^2 \alpha \\ &\quad + \frac{2i\rho CV}{\pi} \int_c \left(\frac{dZ}{d\tilde{\zeta}} \right)^2 \frac{d\tilde{\zeta}}{\zeta - \frac{1}{\zeta}}. \end{aligned}$$

Per il calcolo di quest'ultimo integrale si noti intanto che dalle (15) della seconda Nota citata si deduce

$$\zeta - \frac{1}{\zeta} = 2\sqrt{Z^2 - 1} = 2i\sqrt{1 - Z^2},$$

(1) Cfr. la formula (20) della seconda Nota citata.

perciò, supposto $\alpha < \pi$ e tenendo nota, nel fare il quadrato della (11), del solo termine già prima indicato,

$$\int_c \left(\frac{dZ}{d\tilde{\zeta}} \right)^2 \frac{d\tilde{\zeta}}{\tilde{\zeta} - \frac{1}{\zeta}} = \frac{1}{2} i \int_c \left(\frac{dZ}{d\tilde{\zeta}} \right)^2 \frac{d\tilde{\zeta}}{\sqrt{1 - Z^2}}$$

$$= \frac{1}{32 i a} \int_c \left(1 + \frac{a}{\tilde{\zeta}} \right)^2 \frac{\left(\frac{\tilde{\zeta}}{a} - \cos \alpha \right)^2}{\left(\frac{\tilde{\zeta}}{a} - e^{i\alpha} \right) \left(\frac{\tilde{\zeta}}{a} - e^{-i\alpha} \right)} \frac{d \frac{\tilde{\zeta}}{a}}{\sqrt{1 - Z^2}}.$$

Risulta dalle (14) e (15) della seconda Nota citata che, tanto per $\frac{\tilde{\zeta}}{a} = e^{i\alpha}$, quanto per $\frac{\tilde{\zeta}}{a} = e^{-i\alpha}$, è $Z^2 = \text{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$ e quindi

$$\sqrt{1 - Z^2} = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{1 + \text{sen}^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \cos \frac{\alpha}{2},$$

perciò il precedente integrale avrà per valore (v. numero precedente)

$$- \frac{\pi \text{sen}^2 \alpha \cos \frac{\alpha}{2}}{4 a \sqrt{1 + \text{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}}.$$

Pertanto, sostituendo nella (14), si ottiene

$$(15) \quad R_y + i R_x = i \rho \left\{ \frac{C^2}{16 \pi a \left(1 + \text{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \right)} + \pi a U^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{C U \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sqrt{1 + \text{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}} \right\} \text{sen}^2 \alpha.$$

Per $\alpha = \pi$ si ha il profilo circolare completo, e dalla (13) della seconda Nota citata scende $\frac{\tilde{\zeta}}{a} = \zeta$ e quindi $\frac{d\zeta}{d\tilde{\zeta}} = \frac{1}{a}$; la (13) mostra che si ritorna al caso già trattato al n. 2.

Zoologia. — *Dualismo nucleare e sessualità in « Chryptochilum echini » Maupas.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. A. Russo.

Dalla ricca letteratura, relativa alle ricerche finora fatte sulla sessualità dei Ciliati omogametici, non risulta siano state osservate differenze, che possano riferirsi alla quantità della sostanza nucleare di ciascun Gamete ed alla diversa destinazione dei loro nuclei durante il ciclo. È ammesso, per altro, che il micronucleo ed il macronucleo, componenti l'apparato nucleare, abbiano, in entrambi i gameti, funzione diversa, germinativa l'uno, trofica l'altro, e che la sessualità in essi si manifesti durante la copula, con la divisione dei micronuclei e conseguente formazione di un *nucleo stazionario* o femminile e di un *nucleo migrante* o maschile. Però, poco o nulla si sa dei fenomeni di differenziamento, che precedono la Coniugazione, per dedurre, in base a dati di fatto, se gli omogametici siano ermafroditi, come risulta dalla divisione differenziale dei micronuclei, sopraccennata, ovvero, nel caso siano di sesso diverso, quale Gamete sia il maschile e quale il femminile.

Tale problema mi ha spinto a trattare brevemente in questa Nota ⁽²⁾ uno dei punti più controversi della biologia dei Ciliati, riferendomi alle osservazioni fatte in *Chryptochilum echini*.

Nella maggioranza degli individui, che compongono il ciclo di questo Ciliato, i due nuclei esplicano anche funzione diversa, come era noto; però, in determinati momenti del ciclo, alcuni fenomeni nucleari, che si avverano in determinate forme, che precedono o seguono lo sviluppo dei gameti, attestano che la funzione germinativa è un *carattere esclusivo* del micronucleo di uno dei gameti, mentre il micronucleo dell'altro gamete, pur essendo questo gamete, per la grandezza totale e per la forma esterna, uguale al primo, non ha tale potere.

Seguendo, infatti, gli stadi successivi della *Coniugazione principale*, che si compie fra *Gameti puri*, si osserva che il micronucleo del Gamete *A* fornisce i micronuclei agli exconiuganti delle Categorie *A* e *B*, mentre il micronucleo virgoliforme del Gamete *B* è destinato a fornire agli exconiuganti stessi due nuclei, che si evolvono in macronuclei. Pertanto, in una Nota precedente ⁽³⁾, ho fatto rilevare che il Gamete *A* ha un predominio sul Ga-

(1) Presentata nella seduta del 16 febbraio 1930.

(2) Per l'illustrazione dei fatti, esposti in questa Nota, vedasi la Memoria, corredata da diverse tavole di figure e da molte microfotografie, in corso di stampa negli « Atti ».

(3) « Rendiconti R. Acc. Nazionale dei Lincei », vol. XXXIII, ser. 5^a, Roma, 1924.

mete *B* e ne deducevo che solo nel micronucleo globuliforme del primo ha sede la sostanza germinativa ereditaria, la quale, per quanto nulla si sappia sulla sua intima natura, si trasmette dall'uno all'altro individuo delle due Categorie, che compongono il ciclo.

Riassumendo quanto già esposi in altre Note, pubblicate in questi Rendiconti, ripeto che, durante la *Coniugazione principale*, il micronucleo globuliforme del Gamete *A* compie due successive mitosi, con cui si formano 4 nuclei, tre dei quali permangono nel Gamete stesso, mentre il quarto di essi emigra nel Gamete *B*. Seguendo appunto l'ulteriore evoluzione di tali nuclei, si ha una prima dimostrazione documentata che non tutti hanno funzione germinativa, perchè, dei tre, che permangono nel Gamete *A*, uno è riassorbito, un altro aumenta di volume e si trasforma in macronucleo con funzione trofica, mentre il terzo soltanto costituisce un micronucleo con funzione germinativa.

Il nucleo migrato nel Gamete *B*, compie in questo la 3^a mitosi, dopo la quale avviene anche un differenziamento, in quanto che, uno dei nuclei derivati forma un micronucleo, l'altro invece si differenzia in macronucleo. Per effetto delle divisioni del solo micronucleo globuliforme del Gamete *A*, si ha quindi che, nei due Coniuganti *A* e *B*, i micronuclei hanno la stessa origine, ma che, mentre in quello *A* esso è $1/4$, perchè si è costituito dopo la 2^a mitosi, in quello *B* è $1/8$, essendosi costituito dopo la 3^a.

Il micronucleo del Gamete *B*, con forma allungata, durante la Coniugazione, in cui furono seguite le trasformazioni di quello *A*, manifesta un carattere particolare, che esclude in esso qualsiasi funzione germinativa. Difatti, esso compie una sola *divisione atipica*, in ritardo rispetto alle mitosi del micronucleo del Gamete *A*, e dei due nuclei, che da essa derivano, uno emigra nel Gamete *A*, l'altro permane nello stesso Gamete *B*. Entrambi, con divisione anche atipica, formano due macronuclei, che si aggiungono a quelli precedentemente originatesi dal micronucleo del Gamete *A*. L'insieme di tali nuclei, che derivano, in parte, dal Gamete *A*, in parte, dal Gamete *B*, formano l'apparato nucleare degli *Individui misti A e B*, che si costituiscono dagli *exconiuganti* e che, come i Gameti originarii, si distinguono fra loro anche per la diversa quantità di sostanza nucleare, in quello *A*, riferibile ad 1, in quello *B*, ad $\frac{n}{1}$.

Dai fatti esposti, variamente controllati ed obbiettivamente osservati, si può dedurre:

1° che, nel micronucleo globuliforme del Gamete *A*, non tutta la sostanza nucleare ha funzione germinativa e che quindi anche in esso esiste un dualismo, che si manifesta nel corso delle sue divisioni;

2° che tale micronucleo, formando i micronuclei di tutti gl'individui delle due Categorie, e quindi anche quello del Gamete *B*, contiene esso solo la sostanza germinativa ereditaria;

3° che il micronucleo del Gamete *B*, con forma allungata o di virgola, pur avendo origine dal micronucleo globuliforme del Gamete *A*, fornisce *esclusivamente* ai due *Individui misti* due macronuclei con funzione trofica, di modo che può desumersi che tale micronucleo, nel corso della sua evoluzione, abbia perduta ogni funzione germinativa;

4° che, a differenza della maggioranza dei Ciliati, i micronuclei dei due Gameti hanno funzione diversa e che sono sostanzialmente anche diversi per la quantità di sostanza nucleare.

Da quanto sopra fu esposto, appare evidente che, anche prima dell'atto della copula, come nell'ovo e nello spermio dei Metazoi, esiste una netta distinzione⁽¹⁾ fra i due Gameti; ma, se si mettono tali fatti in relazione a quanto ci è noto sulla sessualità degli altri viventi, è incerto a quale dei Gameti di *Cryptochilum* debba assegnarsi la sessualità femminile ed a quale quella maschile.

Tenendo presente però che il Gamete *A* contiene, nel suo apparato nucleare, il doppio della sostanza, contenuta in quello del Gamete *B*, e che, in alcuni Metazoi, la maggiore quantità della stessa sostanza, determinata dal *cromosoma accessorio*, sarebbe propria al sesso femminile, potrebbe ritenersi che il primo di essi rappresenti il Gamete femminile e che, conseguentemente lo stesso sesso avrebbe l'*Individuo misto*, che ne deriva⁽²⁾.

Il Gamete *B*, per la minore quantità di sostanza nucleare, dovrebbe rappresentare l'elemento maschile, se non che, per altri caratteri, esso non potrebbe omologarsi allo spermio dei Metazoi. In *Cryptochilum* tale Gamete fornisce, come si è detto, agl'*Individui misti* delle due Categorie soltanto alcuni macronuclei, che, nel corso del ciclo, sono riassorbiti, mentre lo spermio contribuisce alla formazione della 1^a *cellula embrionale*, non solo con il suo nucleo, ma apportandovi il *centrosoma*.

Se si considera il problema da un altro punto di vista, appare però che anche nei Metazoi lo spermio ha, in molti casi, una funzione secondaria, nell'atto fecondativo, come lo dimostrerebbe la riproduzione di nuovi esseri per *partenogenesi*, in cui il solo nucleo dell'uovo ha il potere di costituire i nuclei cellulari di un altro individuo.

Tenendo presente tale fenomeno, potrebbe ritenersi, a più forte ragione, che il Gamete *A* rappresenti quello di sesso femminile, perchè, come si è detto, con le divisioni del solo suo micronucleo e con la migrazione di una parte di esso nel Gamete *B*, si costituiscono tutti i nuclei degl'individui di entrambe le categorie *A* e *B*, non altrimenti che, come nella partenogenesi, il solo nucleo dell'ovo forma i nuclei dei nuovi individui cellulari dell'embrione.

Qualunque possa essere l'interpretazione dei fatti, da me messi in luce in *Cryptochilum*, è evidente che in questo Ciliato esiste una sessualità di-

(1) Nessuno finora aveva data la prova documentata della differenza fra i due omogameti nei Ciliati.

(2) « Rendiconti R. Acc. Nazionale dei Lincei », vol. VIII, ser. 6^a, Roma, 1928.

stinta negl'individui delle due categorie, la quale è determinata dalla diversa quantità di sostanza nucleare, dal diverso processo divisorio dei nuclei, dai loro diversi poteri fisiologici e dalla loro diversa destinazione.

La sessualità maschile, attribuita al Gamete B , potrebbe essere una forma elementare e primitiva, nel vasto quadro del differenziamento game-tico degli esseri viventi, per il fatto, avanti accennato, che il suo micronucleo, avendo perduto ogni potere germinativo, non partecipa alla formazione dei micronuclei degl'individui delle due Categorie, che si costituiscono dopo la Coniugazione.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica (Fisica-matematica). — *Forma intrinseca delle equazioni dell'equilibrio dei mezzi elastici*. Nota II di A. TONOLO, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

2. Per un noto teorema di Calcolo Assoluto, si può sempre determinare nello spazio S almeno una terna ortogonale di congruenze di linee, i cui momenti indicherò con $\lambda_{ij\nu}$ ($i = 1, 2, 3$), per cui le funzioni $\xi_{\mu\nu}$ assumono la forma canonica

$$(18) \quad \xi_{\mu\nu} = \sum_i \varepsilon_i \lambda_{i/\mu} \lambda_{i/\nu},$$

nella quale le ε_i sono le radici dell'equazione secolare

$$\| \xi_{\mu\nu} - \rho a_{\mu\nu} \| = 0.$$

Diciamo λ_i^ν i parametri delle tre congruenze suddette, e ricordiamo che, per l'ortogonalità delle loro linee, valgono le relazioni:

$$(19) \quad \begin{cases} a^{\mu\nu} \lambda_{i/\mu} \lambda_{j/\nu} = \lambda_i^\nu \lambda_{j/\nu} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} \\ \sum_i \lambda_{i/\mu} \lambda_i^\nu = \begin{cases} 0 & \text{se } \mu \neq \nu \\ 1 & \text{se } \mu = \nu. \end{cases} \end{cases}$$

Moltiplichiamo ora le (18) per $\lambda_i^\mu \lambda_j^\nu$, e sommiamo rispetto a μ, ν . Si trae, per le (19),

$$(20) \quad \begin{cases} \varepsilon_i = \xi_{\mu\nu} \lambda_i^\mu \lambda_i^\nu \\ \xi_{\mu\nu} \lambda_i^\mu \lambda_j^\nu = 0 \end{cases} \quad (i \neq j).$$

(1) Nella seduta del 2 febbraio 1930.

Confrontando questi risultati con le (16) e (17), concludiamo che le ϵ_i sono gli allungamenti unitari nelle direzioni delle linee delle congruenze $\lambda_{i/v}$, e inoltre che due qualunque di queste linee, passanti per un medesimo punto, hanno nullo il loro scorrimento. Adunque, in ogni punto del corpo S, le sue *direzioni principali*, e i suoi *allungamenti principali* sono individuati dalle linee delle congruenze $\lambda_{i/v}$ e dalle quantità ϵ_i . Chiameremo *terna principale elastica di congruenze* la terna i cui momenti sono le funzioni $\lambda_{i/v}$.

Indichiamo con θ la dilatazione cubica del corpo S; avendosi, nelle coordinate x^v ,

$$\theta = a^{\mu\nu} \xi_{\mu\nu},$$

si trae, in forza delle (18) e (19):

$$(21) \quad \theta = \sum_i^3 \epsilon_i.$$

3. Siano $c^{\mu\nu, \rho\sigma}$, nelle variabili x^v , le componenti contravarianti di un tensore quadruplo con le simmetrie definite dalle (4), (5), le quali, nelle variabili y^v , coincidano con i coefficienti $c^{\mu\nu, \rho\sigma}$ del n. 2 del § I. A mezzo delle funzioni $\xi_{\mu\nu}$ e delle $c^{\mu\nu, \rho\sigma}$ formiamo l'invariante

$$c^{\mu\nu, \rho\sigma} \xi_{\mu\nu} \xi_{\rho\sigma}.$$

Questo, nelle variabili y^v , si riduce al secondo membro della (6), e poichè il primo membro della medesima, per il suo significato fisico, non dipende dalla scelta delle variabili di riferimento, possiamo affermare che nelle variabili x^v l'espressione del potenziale elastico 2Π è:

$$(22) \quad 2\Pi = c^{\mu\nu, \rho\sigma} \xi_{\mu\nu} \xi_{\rho\sigma}.$$

Se il mezzo S è isotropo, si ha:

$$(23) \quad 2\Pi = (2B - A)\theta^2 - 2BJ,$$

avendo posto:

$$(24) \quad \theta = a^{\mu\nu} \xi_{\mu\nu}, \quad J = \xi_{\mu\nu} \xi^{\mu\nu}.$$

4. Introduciamo le funzioni:

$$(25) \quad \varphi^{\mu\nu} = \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_{\mu\nu}},$$

cioè, per la (22),

$$(26) \quad \varphi^{\mu\nu} = c^{\mu\nu, \rho\sigma} \xi_{\rho\sigma}.$$

Le funzioni $\varphi^{\mu\nu}$ così definite, sono le componenti contravarianti di un tensore doppio simmetrico, le quali si riducono alle funzioni $\varphi^{\mu\nu}$ del n. 2 del § I, quando le variabili di riferimento sono le y^ν .

Diciamo infine X^α le componenti contravarianti di un tensore semplice riducibili alle Y^α nelle coordinate y^ν . Le equazioni indefinite dell'equilibrio del corpo S nelle variabili x^ν sono le seguenti⁽¹⁾:

$$(27) \quad a_{\mu\nu} \varphi^{\alpha\mu\nu} = X^\alpha,$$

nelle quali le $\varphi^{\alpha\mu\nu}$ rappresentano le derivate prime contravarianti delle componenti $\varphi^{\alpha\mu}$. Infatti, i primi e secondi membri delle equazioni (27) sono le componenti contravarianti di due tensori semplici, le quali si riducono rispettivamente ai primi e secondi membri delle equazioni (10), quando le x^ν diventano le y^ν .

Lo scopo dei calcoli che faremo nei numeri che seguono, è quello di trasformare le equazioni (27) in modo da far figurare nelle formule finali gli allungamenti ϵ_i , ed elementi geometrici che siano intrinseci alla terna delle congruenze principali.

§ III. Equazioni intrinseche dell'equilibrio dei corpi elastici anisotropi.

1. Cominciamo a surrogare le $\xi_{\rho\sigma}$ che figurano nelle (26) con le (18): abbiamo:

$$\varphi^{\mu\nu} = \sum_i^3 c^{\mu\nu, \rho\sigma} \epsilon_i \lambda_{i/\rho} \lambda_{i/\sigma}.$$

Poi introduciamo gli invarianti

$$(28) \quad \theta_{hk} = \varphi^{\mu\nu} \lambda_{h/\mu} \lambda_{k/\nu}.$$

Da queste si ricava:

$$(29) \quad \varphi^{\mu\nu} = \sum_{hk}^3 \theta_{hk} \lambda_b^\mu \lambda_k^\nu.$$

Eseguiamo la derivazione contravariante: si ottiene:

$$(30) \quad \varphi^{\mu\nu\tau} = \sum_{hk}^3 \theta_{hk} \lambda_b^\mu \lambda_k^\nu \lambda_k^\tau + \sum_{hk}^3 \theta_{hk} \lambda_k^\nu \lambda_b^\mu \lambda_b^\tau + \sum_{hk}^3 \lambda_b^\mu \lambda_k^\nu \theta_{hk}^\tau.$$

Sostituendo nelle (27), con ovvie modificazioni di apici, si trae:

$$(31) \quad A^\alpha + B^\alpha + C^\alpha = X^\alpha,$$

(1) Il procedimento che abbiamo seguito per arrivare a queste formule (27), si trova nella Memoria di RICCI e LEVI-CIVITA: *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, « Math. Ann. », Band 54 (1901). Chap. VI, § 3.

avendo posto:

$$(32) \quad A^\alpha = \sum_{hk}^3 \theta_{hk} a_{\mu\nu} \lambda_b^\alpha \lambda_k^{\mu\nu}$$

$$(33) \quad B^\alpha = \sum_{hk}^3 \theta_{hk} a_{\mu\nu} \lambda_k^\mu \lambda_b^{\alpha\nu},$$

$$(34) \quad C^\alpha = \sum_{hk}^3 \theta_{hk}^\nu a_{\mu\nu} \lambda_b^\alpha \lambda_k^\mu.$$

Trasformiamo successivamente $A^\alpha, B^\alpha, C^\alpha$. Allo scopo, ricorriamo ai coefficienti di rotazione di Ricci γ_{hik} , definiti dalle posizioni

$$(35) \quad \gamma_{hik} = \lambda_{b|\mu\nu} \lambda_i^\mu \lambda_k^\nu = \lambda_b^{\mu\nu} \lambda_{i|\mu} \lambda_{k/\nu}.$$

Da queste si traggono le equivalenti

$$(36) \quad \lambda_b^{\mu\nu} = \sum_{ij}^3 \gamma_{hij} \lambda_i^\mu \lambda_j^\nu.$$

Ricordiamo poi che

$$(37) \quad a_{\mu\nu} = \sum_i^3 \lambda_{i|\mu} \lambda_{i/\nu}.$$

Ponendo le (37) nelle (32), in forza delle (35), abbiamo subito:

$$(38) \quad A^\alpha = \sum_{hki}^3 \theta_{hk} \lambda_b^\alpha \gamma_{hii}.$$

Trasformiamo B^α . Si ha intanto:

$$(39) \quad \lambda_{k/\nu} = a_{\mu\nu} \lambda_k^\mu.$$

Quindi:

$$B^\alpha = \sum_{hk}^3 \theta_{hk} \lambda_{k/\nu} \lambda_b^{\alpha\nu}.$$

Sostituiamo in queste le (36) e teniamo presente le (19). Si ricava:

$$(40) \quad B^\alpha = \sum_{hki}^3 \theta_{hk} \lambda_i^\alpha \gamma_{hik}.$$

Relativamente alle C^α , osserviamo dapprima, che in forza delle (39), possiamo scrivere:

$$C^\alpha = \sum_{hk}^3 \lambda_b^\alpha \lambda_{k/\nu} \theta_{hk}^\nu.$$

Ora introduciamo le derivate rapporti agli archi σ_k delle linee delle congruenze principali. Si trae, in definitiva,

$$(41) \quad C^\alpha = \sum_{hk} \lambda_b^\alpha \frac{d\theta_{hk}}{d\sigma_h},$$

perchè, per formula nota, si ha

$$\frac{df}{d\sigma_k} = \lambda_k^\nu f_\nu = \lambda_{k|\nu} f^\nu,$$

dove f è una funzione qualsivoglia delle variabili x^ν .

Ponendo nelle (31), le (38), (40), (41), si perviene alle equazioni:

$$(42) \quad \sum_{i} \theta_{hk} \{ \gamma_{kii} \lambda_b^\alpha + \gamma_{hik} \lambda_i^\alpha \} + \sum_{i} \lambda_b^\alpha \frac{d\theta_{hk}}{d\sigma_h} = X^\alpha.$$

E dalle (42), moltiplicandole per $\lambda_{j|\alpha}$, e sommando rispetto a α , in virtù delle (19), si ricava:

$$(I) \quad \left[\sum_i \frac{d\theta_{jh}}{d\sigma_h} + \sum_{hk} \{ \theta_{jk} \gamma_{khh} + \theta_{hk} \gamma_{hjk} \} = X_j \right],$$

essendo X_j la componente della forza di massa, ridotta all'unità di volume, secondo la linea della congruenza $\lambda_{j|\nu}$.

Sono queste le equazioni intrinseche dell'equilibrio dei corpi elastici anisotropi.

Matematica. — *Ancora sulla rappresentazione lineare delle funzioni continue.* Nota di GUIDO ASCOLI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. FUBINI.

In una Nota precedente ⁽²⁾ ho dato una nuova dimostrazione di un teorema di F. Riesz ⁽³⁾ il quale esprime la condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione $f_0(x)$ continua in un intervallo $a \leq x \leq b$ si possa approssimare uniformemente mediante combinazioni lineari di date funzioni $u_i(x)$ pure continue in $a \leq x \leq b$. Per richiamare tale condizione, introdurrò per brevità la seguente locuzione: un funzionale lineare $A(f)$ continuo

(1) Nella seduta del 16 febbraio 1930.

(2) *Sulla rappresentazione approssimata di una funzione mediante combinazioni lineari di funzioni date.* (Questi « Rendiconti », 2° sem. 1929, pp. 539-544). Sarà in seguito richiamata con (N).

(3) V. in (N) le indicazioni relative. In seguito ci riferiremo alla Memoria nel t. 28 degli « Ann. de l'Ec. Norm. Sup. » (1911).

(nel senso specificato in (N) e del resto usuale) nel campo delle funzioni continue in $a \dashv b$ e non identicamente nullo sarà detto *funzionale caratteristico* (f. c.) per il sistema delle $u_i(x)$ se per ciascuna delle $u_i(x)$ sia $A(u_i) = 0$. Ciò posto, una funzione $f_0(x)$ continua in $a \dashv b$ è approssimabile nel modo indicato se per ogni f. c. $A(f)$ del sistema $u_i(x)$ sia $A(f_0) = 0$.

Ho già accennato in (N) all'interesse che può presentare la nuova trattazione per il suo carattere di generalità che la rende atta a larghe estensioni: se ne può trarre infatti una serie di proprietà degli *spazi* (astratti) *vettoriali separabili* ⁽¹⁾, che non sembrano note. Per il momento non mi occuperò di questo studio generale, ma proseguirò nell'ordine di idee di (N), ritrovando altri risultati sostanzialmente dovuti al Riesz, in una forma che mi sembra però assai più espressiva. Seguiranno alcune immediate applicazioni.

1. Se $A(f)$ è un funzionale lineare continuo nello spazio (C) delle funzioni definite e continue in $a \dashv b$, esistono certo valori positivi di k tali che per ogni elemento f di (C) si abbia:

$$|A(f)| \leq k \max f.$$

Esiste per k un limite inferiore $\mu(A)$ positivo o nullo; quest'ultimo caso avviene solo se $A(f)$ è identicamente nullo ⁽²⁾. Se $\mu(A)$ è nullo il funzionale sarà detto *normato*; il funzionale $A(f)$ non nullo viene normato moltiplicandolo per il fattore costante $1/\mu(A)$.

2. Abbiamo introdotto in (N), per un dato sistema $u_i(x)$ di funzioni di (C), un certo funzionale $\Omega(f)$, non lineare, a cui abbiamo dato il nome di *approssimazione limite* della funzione $f(x)$ rispetto al sistema dato, e che ci ha servito a determinare, quando esiste, un f. c. del sistema. Mostriamo ora come, viceversa, la conoscenza dei f. c. del sistema permetta il calcolo dell'approssimazione limite.

a) Se $O(f)$ è un f. c. n. ⁽³⁾ del sistema delle $u_i(x)$, per ogni funzione $f(x)$ di (C) si ha $|O(f)| \leq \Omega(f)$.

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste infatti una combinazione lineare delle $u_i(x)$, e sia $P(x)$, tale che

$$\max |f(x) - P(x)| < \Omega(f) + \varepsilon.$$

(1) Cf. FRÉCHET (M), *Les espaces abstraits* (Paris, Gauthier-Villars, 1928), pp. 123-157 e in particolare pp. 140 e 146.

(2) Posto il funzionale nella nota forma:

$$A(f) = \int_a^b f(x) d\Theta(x)$$

dove $\Theta(x)$ è a variazione limitata in $a \dashv b$, e supposto, come è lecito, che nei punti interni all'intervallo i salti di $\Theta(x)$ a destra e a sinistra non siano mai di segno contrario (p. es. ogni punto sia *regolare*, cioè $\Theta(x+0) + \Theta(x-0) = 2\Theta(x)$), il Riesz dimostra (loc. cit., p. 39) che $\mu(A)$ vale la *variazione totale* di $\Theta(x)$ in $a \dashv b$.

(3) Sta per *funzionale caratteristico normato*.

Ne segue:

$$|O(f - P)| \leq \mu(O) [\Omega(f) + \varepsilon].$$

Ma $O(P) = 0$, $\mu(O) = 1$, quindi

$$|O(f)| \leq \Omega(f) + \varepsilon,$$

e per l'arbitrarietà di ε , $|O(f)| \leq \Omega(f)$.

b) Se $O(f)$ è un f. c. del sistema delle $u_i(x)$, tale che per ogni funzione $f(x)$ di (C) è $|O(f)| \leq \Omega(f)$, e se esiste una funzione $f_0(x)$ di (C) per la quale è $O(f_0) = \Omega(f_0) > 0$, $O(f)$ è normato.

Si ha infatti $|O(f)| \leq \Omega(f) \leq \max |f| [(N), n, 1]$, onde $\mu(O) \leq 1$. D'altra parte, essendo $O(f)/\mu(O)$ normato, si ha dal teorema precedente:

$$|O(f)| \leq \mu(O) \cdot \Omega(f),$$

donde, per $f = f_0$, per l'ipotesi, $\mu(O) \geq 1$. Segue $\mu(O) = 1$ e $O(f)$ è normato.

Per il calcolo di $\Omega(f)$ si ha ora il teorema:

c) L'approssimazione limite di una funzione $f_0(x)$ di (C) rispetto al sistema $u_i(x)$ di funzioni di (C) è nulla se il sistema $u_i(x)$ non possiede f. c.; ed è altrimenti uguale al massimo — sempre raggiunto — dei valori che i moduli dei f. c. n. del sistema assumono per $f = f_0^{(1)}$.

La prima parte dell'enunciato non differisce dall'ultimo teorema dimostrato in (N); e nei teoremi di (N) rientra anche la seconda parte quando per ogni f. c. n. del sistema si abbia $O(f_0) = 0$, perchè è allora $\Omega(f_0) = 0$. Nel caso opposto, che solo resta a considerare, sarà $\Omega(f_0) > 0$, e per ogni f. c. n. $O(f)$ del sistema, per il teorema a), $|O(f_0)| \leq \Omega(f_0)$. Esiste d'altra parte [(N), n. 4] un f. c. $O_1(f)$ tale che per ogni elemento $f(x)$ di (C) è $|O_1(f)| \leq \Omega(f)$ ed è poi $O_1(f_0) = \Omega(f_0)$; ed esso, per il teorema b), è normato. Onde $\Omega(f_0)$ è precisamente il massimo degli $|O(f_0)|$.

3. Proponiamoci ora di determinare un funzionale lineare continuo nel campo (C), $O(f)$, tale da soddisfare alle equazioni

$$O(u_i) = c_i, \quad (i = 1, 2, 3 \dots)$$

essendo le c_i costanti assegnate⁽²⁾. Si assegna immediatamente una condizione necessaria, osservando che, qualunque siano le costanti λ_i deve aversi

$$\left| \sum_1^n \lambda_i c_i \right| = \left| O \left(\sum_1^n \lambda_i u_i \right) \right| \leq \mu(O) \max \left| \sum_1^n \lambda_i u_i \right|$$

(1) Si potrà confrontare questo enunciato con quello equivalente di RIESZ (loc. cit., pp. 53-54).

(2) RIESZ, loc. cit., pp. 43-51.

ossia che il rapporto

$$\frac{\left| \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i \right|}{\max_i \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \right|}$$

deve, al variare delle λ_i , avere un limite superiore finito.

La condizione è sufficiente. Detto infatti M questo limite superiore, si può intanto definire nell'insieme (U) delle funzioni approssimabili mediante combinazioni lineari delle $u_i(x)$, un funzionale lineare continuo $A(f)$ tale che sia $A(u_i) = c_i$, e per ogni $f(x)$ di (U) , $|A(f)| \leq M \max |f|$. La dimostrazione, sulla base dell'ipotesi posta, si svolge in modo identico a quello usato in (N) , n. 4. Se l'insieme (U) coincide con lo spazio (C) il teorema è dimostrato; ed è dimostrato pure se, ciò non avvenendo, le c_i fossero tutte nulle; in questo caso soddisfa al problema, oltre il funzionale nullo, anche ogni f. c. del sistema $u_i(x)$; e ve ne è almeno uno.

Sia invece (U) diverso da (C) , e $c_r \neq 0$. Considerando le funzioni:

$$v_i(x) = c_r u_i(x) - c_i u_r(x)$$

si ha sempre $A(v_i) = 0$, mentre è $A(u_r) = c_r \neq 0$; dunque u_r non è approssimabile mediante combinazioni lineari delle v_i . Esiste dunque un f. c. $O_1(f)$ del sistema delle v_i che non si annulla per $f = u_r$; tale cioè che:

$$c_r O_1(u_i) - c_i O_1(u_r) = 0$$

mentre $O_1(u_r) \neq 0$. Ed allora il funzionale

$$O(f) = \frac{c_r}{O_1(u_r)} O_1(f)$$

risolve il problema proposto. E la soluzione più generale si otterrà aggiungendo ad esso un f. c. del sistema delle $u_i(x)$.

Si può precisare ulteriormente il risultato, provando che esiste una soluzione per la quale è $\mu(O) = M$ (e cioè $\mu(O)$ assume il suo valore minimo). Ed infatti, per i risultati precedenti (teorema c)), detta $\omega(f)$ l'approssimazione limite di $f(x)$ rispetto al sistema $v_i(x)$, esiste un f. c. n. del sistema, e sia ancora $O_1(f)$, per il quale è $O_1(u_r) = \omega(u_r)$. Con questa scelta sarà allora:

$$\mu(O) = \frac{|c_r|}{\omega(u_r)}.$$

Ma applicando all'insieme (U) il ragionamento svolto in *a*), nei riguardi del sistema v_i e del funzionale $A(f)/M$, si ottiene, in (U), $|A(f)| \leq M \omega(f)$, e, per $f = u_r$, $|c_r| \leq M \omega(u_r)$. Ne segue $\mu(O) \leq M$, e poichè evidentemente non può essere $\mu(O) > M$, risulta la tesi.

4. I risultati precedenti sono, suscettibili di alcune immediate estensioni:

a) Anzichè di funzioni $u_i(x)$ di una variabile, definite in un intervallo $a \leq x \leq b$, potrà trattarsi di funzioni $u_i(P)$ del punto generico P di un dominio limitato D o più generalmente di un insieme chiuso e limitato I di uno spazio a n dimensioni. L'estensione non richiede alcuno sviluppo particolare ⁽¹⁾.

b) La numerabilità del sistema $u_i(x)$ non ha nella trattazione nessuna funzione essenziale. Potrà ugualmente trattarsi di un qualunque sistema di funzioni continue nel campo considerato ⁽²⁾. Ed è allora da osservare che le considerazioni del n. 3 dimostrano nel modo più generale il teorema:

Un funzionale lineare continuo, definito in un insieme lineare chiuso (U) di funzioni continue definite nell'insieme chiuso e limitato I di S_n è prolungabile, in un funzionale ancora lineare e continuo, in tutto lo spazio (C) delle funzioni continue in I ⁽³⁾.

5. L'applicazione diretta dei teoremi di Riesz a determinati problemi di rappresentazione di funzioni continue mediante un dato sistema $u_i(x)$ non si presenta in generale agevole, richiedendo essa la determinazione dei f. c. del sistema. È tuttavia da notare un caso in cui la ricerca si semplifica; e cioè quando le $u_i(x)$ siano funzioni integrali di funzioni $v_i(x)$ integrabili insieme ai loro quadrati. Le condizioni

$$\int_a^b u_i(x) d\Theta(x) = 0$$

(1) Si confronti quanto dice il RIESZ (loc. cit., pp. 61-62) sulla difficoltà di questa estensione, con il metodo da lui seguito. I recenti studi sull'integrale di Stieltjes in più variabili potrebbero forse essere di qualche aiuto per superarla.

(2) Il RIESZ (loc. cit., p. 51) non considera i due casi sostanzialmente distinti, facendo appello a un teorema che, come il teorema generale di Fréchet di cui è caso particolare, non credo possa dimostrarsi senza ricorrere al postulato di Zermelo; con il nostro metodo tale ricorso viene evitato.

(3) Il chiar.^{mo} prof. M. Picone mi ha fatto osservare che questo risultato equivale perfettamente al teorema di Riesz dimostrato in (N), sicchè una dimostrazione diretta di esso darebbe alla teoria un assetto estremamente semplice. Ed infatti se le funzioni $u_i(x)$ definiscono un insieme lineare chiuso (U), a cui non appartiene una data funzione $f_0(x)$, nell'insieme lineare chiuso (U') definito da (U) e da $f_0(x)$ è facile costruire un funzionale lineare continuo che abbia in f_0 il valore 1, e si annulli in (U); valgono per questo le considerazioni iniziali del n. 3. Se è possibile estendere tale funzionale al campo totale (C), il teorema di Riesz è dimostrato.

a cui deve soddisfare la funzione a variazione limitata mediante cui si esprime un f. c. si trasformano con un'integrazione per parte nelle altre:

$$\int_a^b v_i(x) \Theta(x) dx = u_i(b) \Theta(b) - u_i(a) \Theta(a)$$

dove è anche lecito porre $\Theta(a) = 0$, o $\Theta(b) = 0$. Ed è allora applicabile la teoria della convergenza in media e dei sistemi ortogonali. E così:

a) Posto $u_i(x) = x^i$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) si trova che non esistono f. c. e si ha così una dimostrazione del teorema di Weierstrass. Occorre far ricorso ad una dimostrazione della completezza del sistema x, x^2, \dots , per es. a quella assai semplice di Severini⁽¹⁾.

b) Posto $a = 0, b = 2\pi, u_{2i} = \cos ix, u_{2i+1} = \sin ix, (i = 0, 1, 2, \dots)$ mediante una dimostrazione diretta di completezza (per es. quella di Lebesgue) si trova che vi è un solo f. c. n., ed è $\frac{1}{2} [f(2\pi) + f(0)]$. Si trova quindi il noto teorema sulla rappresentazione approssimata di una funzione continua $f_0(x)$ mediante polinomi trigonometrici, quando sia $f_0(0) = f_0(2\pi)$; nel caso opposto risulta $\frac{1}{2} [f_0(2\pi) - f_0(0)]$ come valore dell'approssimazione limite⁽²⁾.

c) Posto $a = 0, b = \pi, u_i(x) = \cos ix$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) non esistono f. c. n.; ogni funzione continua è approssimabile con polinomi di coseni in $0 \leq x \leq \pi$, risultato ben noto.

d) Posto $a = 0, b = \pi, u_i(x) = \sin ix$ ($i = 1, 2, \dots$) si trovano infiniti f. c. n. di espressione

$$O(f) = \frac{af(0) + bf(\pi)}{|a| + |b|};$$

onde le condizioni di approssimabilità sono $f_0(0) = f_0(\pi) = 0$. L'approssimazione limite, cioè il massimo di $|O(f_0)|$, è il più grande dei numeri $|f_0(0)|, |f_0(\pi)|$.

e) Si ha infine il seguente teorema generale: *se le $u_i(x)$ sono funzioni integrali di altre funzioni $v_i(x)$ sommabili con i loro quadrati, costituenti un sistema ortogonale normale completo, e se per un determinato valore x_0 di x in $a \leq x \leq b$ la serie $\sum [u_i(x_0)]^2$ diverge, ogni funzione di (C) è approssimabile mediante combinazioni lineari delle $u_i(x)$.*

(1) Ben inteso, dovrà anche evitarsi di ricorrere al teorema di Weierstrass nella dimostrazione del n. 3 di (N); ciò è facile, assumendo come base per il campo (C) un'opportuna successione di funzioni lineari a tratti.

(2) Nel recentissimo *Trattato sulle serie trigonometriche* di L. TONELLI (Zanichelli, 1929), a p. 208 (nota) quest'ultimo risultato viene enunciato per le funzioni a variazione limitata; come si vede, la sua validità è generale.

Matematica (Analisi). — *Sulle serie di Laplace.* Nota di R. CACCIOPOLI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. SCORZA.

Espongo qui un gruppo di teoremi sulla convergenza degli sviluppi in serie di funzioni Y_n di Laplace: in ispecie, due estensioni alle funzioni sferiche del classico teorema di Jordan sulle serie di Fourier.

È noto un criterio esposto nel *Cours d'Analyse* di Jordan ⁽²⁾, per la sviluppabilità in un punto di una funzione definita sopra una sfera in serie di Laplace: *le variazioni totali della funzione lungo i cerchi massimi passanti per il punto dato non debbono superare una quantità fissa.* Questa condizione può agevolmente sostituirsi, come dimostro, con altra assai più generale, che vincola però ancora simultaneamente tutte le determinazioni della funzione data; sicchè va risoluto il problema se il verificarsi di essa in più punti della sfera implichi la sviluppabilità non in questi soltanto.

Si può chiedere poi ancora qualche condizione semplice e generale, analoga a quella della variazione limitata data da Jordan per gli sviluppi in serie di Fourier, che assicuri la sviluppabilità su tutta la sfera. Al teorema di Jordan può darsi tanto questa forma: *una funzione $f(\theta)$ dei punti di un cerchio è sviluppabile in serie di Fourier se ha variazione limitata ⁽³⁾*, che l'altra equivalente: *se la curva $\rho = f(\theta)$ è rettificabile, $f(\theta)$ è sviluppabile.* Nell'estensione alle funzioni sferiche, questi due enunciati diventano distinti; e la quadrabilità della superficie $\rho = f(\theta, \varphi)$ assicura la sviluppabilità di $f(\theta, \varphi)$ soltanto in quasi tutti i punti della sfera.

All'occasione di quest'ultimo teorema studio brevemente le condizioni di quadrabilità per i diagrammi polari.

1. — Sulla sfera unitaria sia assegnata una funzione continua $f(\theta, \varphi)$ (θ colatitudine, φ longitudine). Formiamo la serie di Laplace

$$Y_0 + Y_1 + Y_2 + \dots$$

ponendo

$$Y_n(\theta, \varphi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi f(\theta', \varphi') X_n(\cos \omega) \sin \theta' d\theta',$$

(1) Nella seduta del 2 febbraio 1930.

(2) 2^e éd., t. II, n. 244. Cfr. anche CAMP, « Bull. Am. Math. Soc. », (2) t. 18, pp. 236-243.

(3) Supposta f continua.

dove X_n è l' $(n+1)^{mo}$ polinomio di Legendre:

$$X_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n,$$

e inoltre

$$\cos \omega = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\varphi - \varphi').$$

Valutiamo la somma $S_n = Y_0 + Y_1 + \dots + Y_n$ nel punto (λ, μ) . Assumeremo all'uopo un nuovo sistema di coordinate sferiche, avente il polo in (λ, μ) ; e, dette u e v le coordinate del punto (θ, φ) in questo sistema, porremo $f(\theta, \varphi) = F(u, v)$. Avremo allora, notoriamente,

$$S_n(\lambda, \mu) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} dv \int_0^\pi F(u, v) [X'_n(\cos u) + X'_{n+1}(\cos u)] \sin u \, du,$$

dove gli apici ai simboli X indicano derivazione rispetto all'argomento $\cos u$.

Supposto $F(u, v)$ avere variazione limitata in u per quasi ogni valore di v , potremo scrivere, effettuando un'integrazione per parti,

$$\begin{aligned} S_n(\lambda, \mu) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ -[F(u, v) (X_n(\cos u) + X_{n+1}(\cos u))]_0^\pi + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\pi (X_n(\cos u) + X_{n+1}(\cos u)) \, du \, F(u, v) \right\} dv = f(\lambda, \mu) + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} dv \int_0^\pi (X_n(\cos u) + X_{n+1}(\cos u)) \, du \, F(u, v). \end{aligned}$$

L'integrale di Stieltjes, funzione di v ,

$$\int_0^\pi (X_n(\cos u) + X_{n+1}(\cos u)) \, du \, F(u, v) = \Psi_n(v)$$

è maggiorato in valore assoluto, poichè la somma in parentesi non supera 2, dalla funzione

$$\Phi(v) = 2 \int_0^\pi |du \, F(u, v)|,$$

rappresentando manifestamente questo simbolo integrale la variazione totale di F rispetto ad u . Se dunque supponiamo questa variazione sommabile rispetto a v , avremo

$$4\pi |S_n(\lambda, \mu) - f(\lambda, \mu)| \leq \int_0^{2\pi} |\Psi_n(v)| \, dv,$$

essendo inoltre costantemente $|\Psi_n(v)| \leq \Phi(v)$; ed osservando che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n(v) = 0,$$

per essere $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\cos u) = 0$ quando $0 < u < \pi$, e applicando per il passaggio al limite il teorema di Lebesgue,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [S_n(\lambda, \mu) - f(\lambda, \mu)] = 0.$$

Giungiamo così a questo risultato:

Se, preso un punto della sfera come polo, la variazione totale di $f(\theta, \varphi)$ risulta finita lungo quasi ogni meridiano e sommabile rispetto alla longitudine, la serie di Laplace converge in questo punto verso il valore di f .

Alla condizione di sviluppabilità può anche darsi questa forma:

La superficie piana di equazioni parametriche $x = F(u, v)$, $y = v$, e di dominio base $[0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi]$ è quadrabile, cioè la coppia di funzioni $[F(u, v), v]$ è a variazione limitata⁽¹⁾.

2. — *Se le variazioni totali di $f(\theta, \varphi)$ lungo tutti i cerchi massimi della sfera non superano una quantità fissa, f è sviluppabile su tutta la sfera.*

Questa condizione è certamente verificata se $f(\theta, \varphi)$ è a variazione limitata rispetto a θ e φ nel dominio rettangolare $[0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]$, e se di più è anche a variazione limitata come funzione di sola θ ⁽²⁾; diremo allora brevemente che f è a variazione limitata. Pertanto:

Una funzione continua a variazione limitata sulla sfera è sviluppabile in serie di Laplace (convergente uniformemente)⁽³⁾.

Questo teorema costituisce una prima estensione del teorema di Jordan sulle serie di Fourier.

3. — Dobbiamo ora premettere all'esposizione dei risultati ulteriori un esame delle condizioni di quadrabilità per la superficie S di equazione polare $\rho = f(\theta, \varphi)$.

Le equazioni parametriche cartesiane di S sono

$$x = f(\theta, \varphi) \sin \theta \cos \varphi, \quad y = f(\theta, \varphi) \sin \theta \sin \varphi, \quad z = f(\theta, \varphi) \cos \theta,$$

sicché S risulta quadrabile quando hanno variazione limitata, nell'insieme aperto $[0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi]$, le tre coppie di funzioni

(1) V. per questa nozione la mia Memoria: *Trasformazioni piane, superficie quadrabili, integrali di superficie*. (« Rend. Circ. Mat. di Palermo », 1930).

(2) La verifica va fatta per un sol valore di φ ; e così pure f , avendo variazione limitata rispetto a θ e φ complessivamente, ha certamente variazione limitata rispetto alla sola φ , perchè è costante per $\theta = 0$.

(3) L'uniformità della convergenza dipende dal fatto che le variazioni totali di f sui cerchi massimi sono uniformemente continue, cioè che la variazione totale di f su un arco di cerchio massimo è infinitesima con quest'arco.

$$[f(\theta, \varphi) \sin \theta \cos \varphi, f(\theta, \varphi) \sin \theta \sin \varphi], [f(\theta, \varphi) \sin \theta \sin \varphi, f(\theta, \varphi) \cos \theta], \\ [f(\theta, \varphi) \cos \theta, f(\theta, \varphi) \sin \theta \cos \varphi]^{(1)},$$

Queste condizioni si traducono nelle due seguenti:

a) L'integrale $\int_0^\pi |d_\theta f^2(\theta, \varphi)| \sin \theta^{(2)}$ è finito per quasi ogni valore di φ ed è sommabile rispetto a φ ;

b) La variazione totale di f^2 rispetto a φ , cioè $\int_0^{2\pi} |d_\varphi f^2(\theta, \varphi)|$, è finita per quasi ogni valore di θ ed è sommabile rispetto a θ .

A queste condizioni si può pervenire direttamente con la considerazione di una superficie regolare variabile \bar{S} , di equazione $\rho = \bar{f}(\theta, \varphi)$, che tenda ad S e la cui area tenda a quella di $S^{(3)}$. Invero per una siffatta superficie, che ha le equazioni parametriche cartesiane

$$x = \bar{f}(\theta, \varphi) \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \bar{f}(\theta, \varphi) \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \bar{f}(\theta, \varphi) \cos \theta,$$

sussistono le disuguaglianze

$$3 \frac{d}{d\tau} \text{area } \bar{S} > \left| \sin \theta \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \varphi)} - \cos \theta \cos \varphi \frac{\partial(y, z)}{\partial(\theta, \varphi)} - \right. \\ \left. - \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial(z, x)}{\partial(\theta, \varphi)} \right| = |\bar{f} \bar{f}_\theta| \sin \theta, \\ 2 \frac{d}{d\tau} \text{area } \bar{S} > \left| \sin \varphi \frac{\partial(y, z)}{\partial(\theta, \varphi)} - \cos \varphi \frac{\partial(z, x)}{\partial(\theta, \varphi)} \right| = |\bar{f} \bar{f}_\varphi|,$$

$d\tau$ dinotando l'elemento d'area del piano $\theta\varphi$.

Passando al limite, si trova che debbono essere finiti i limiti dei due integrali $\iint \left| \frac{\partial \bar{f}^2}{\partial \theta} \right| \sin \theta d\tau$, $\iint \left| \frac{\partial \bar{f}^2}{\partial \varphi} \right| d\tau$, che sono rispettivamente

$$(1) \quad \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi |d_\theta f^2| \sin \theta, \quad \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} |d_\varphi f^2|.$$

(1) V. su tutto ciò la mia memoria precitata.

(2) Quest'integrale è manifestamente il limite delle somme

$$\sum \sin \theta_i |f^2(\theta_i + 1, \varphi) - f^2(\theta_i, \varphi)|.$$

(3) La costruzione della superficie di approssimazione S presenta grandi difficoltà quando S è una superficie qualunque. Ma nel caso particolare che consideriamo qui la si effettua agevolmente adoperando per f le note approssimazioni polinomiali espresse per integrali definiti.

Indicando con $\bar{f}_1(\theta, \varphi)$ e $\bar{f}_2(\theta, \varphi)$ le derivate di $\bar{f}(\theta, \varphi)$ rispetto all'arco di meridiano ed all'arco di parallelo, e con $d\sigma$ l'elemento d'area della sfera unitaria, si ha evidentemente

$$\iint \left| \frac{\partial \bar{f}^2}{\partial \theta} \right| \sin \theta \, d\tau = 2 \iint |\bar{f}\bar{f}_1| \, d\sigma, \quad \iint \left| \frac{\partial \bar{f}^2}{\partial \varphi} \right| d\tau = 2 \iint |\bar{f}\bar{f}_2| \, d\sigma.$$

Sia P il polo sulla sfera, e siano P' e P'' due altri punti *non situati sopra un medesimo meridiano*; indichiamo con $\bar{f}'_1(\theta, \varphi)$ e $\bar{f}''_1(\theta, \varphi)$ le derivate di $\bar{f}(\theta, \varphi)$ rispetto agli archi dei cerchi massimi passanti per P' e P''. Sarà

$$|\bar{f}_2| < k [|\bar{f}_1| + |\bar{f}'_1| + |\bar{f}''_1|],$$

k dinotando un fattore positivo costante opportunamente scelto, e quindi

$$\iint |\bar{f}\bar{f}_2| \, d\sigma < k \left[\iint |\bar{f}\bar{f}_1| \, d\sigma + \iint |\bar{f}\bar{f}'_1| \, d\sigma + \iint |\bar{f}\bar{f}''_1| \, d\sigma \right].$$

Segue di qui che se la condizione a) è soddisfatta, oltre che per il polo P, anche per due altri punti P' e P'', non situati con P sopra un medesimo cerchio massimo, successivamente assunti come poli, la condizione b) è necessariamente anch'essa soddisfatta.

Analogamente si riconosce che se la condizione b) è soddisfatta relativamente a tre poli diversi non situati sullo stesso cerchio massimo, la condizione a) è verificata di conseguenza.

Osserviamo ancora che se f non è mai nulla, agli integrali (1) si possono sostituire gli altri

$$(2) \quad \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi |d_\theta f| \sin \theta, \quad \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} |d_\varphi f|.$$

4. Supponiamo ora f sempre non nulla, e la superficie $\rho = f(\theta, \varphi)$ quadrabile. Consideriamo una delle funzioni di approssimazione \bar{f} precedentemente introdotte: avremo, conservando le notazioni del n. 1,

$$|\bar{F}_u(u, v)| \leq |\bar{f}_\theta(\theta, \varphi)| + \frac{1}{\sin \theta} |\bar{f}_\varphi(\theta, \varphi)|,$$

dove, integrando sulla sfera, dopo aver diviso per $\sin u$,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} dv \int_0^\pi |\bar{F}_u(u, v)| \, du &\leq \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi |\bar{f}_\theta(\theta, \varphi)| \frac{\sin \theta}{\sin u} \, d\theta + \\ &+ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi |\bar{f}_\varphi(\theta, \varphi)| \frac{d\theta}{\sin u}. \end{aligned}$$

I termini di questa disegualianza dipendono dalle coordinate del punto variabile (λ, μ) ; integrando ancora sulla sfera rispetto a questo punto, otterremo (effettuando le integrazioni quaduple a secondo membro prima rispetto a λ e μ , e poi a θ e φ)

$$\int_0^{2\pi} d\mu \int_0^\pi \left\{ \int_0^{2\pi} dv \int_0^\pi |\bar{F}_u(u, v)| du \right\} \sin \lambda d\lambda \leq 2\pi^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi |\bar{f}_\theta(\theta, \varphi)| \sin \theta d\theta + \\ + 2\pi^2 \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} |\bar{f}_\varphi(\theta, \varphi)| d\varphi;$$

e più generalmente per la funzione data f , passando al limite per $\bar{f} \rightarrow f$,

$$\int_0^{2\pi} d\mu \int_0^\pi \left\{ \int_0^{2\pi} dv \int_0^\pi |d_u F(u, v)| \right\} \sin \lambda d\lambda \leq 2\pi^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi |d_\theta f(\theta, \varphi)| \sin \theta d\theta + \\ + 2\pi^2 \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} |d_\varphi f(\theta, \varphi)| d\varphi.$$

Il secondo membro è finito essendo finiti, per le ipotesi fatte, gli integrali (2); dovrà pertanto essere finito, per quasi tutte le posizioni del punto (λ, μ) , l'integrale

$$\int_0^{2\pi} dv \int_0^\pi |d_u F(u, v)| = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \Phi(v) dv,$$

sicchè la condizione di sviluppabilità risulta soddisfatta da f su quasi tutta la sfera.

Dunque se la superficie $\rho = f(\theta, \varphi)$ è quadrabile e non passa per l'origine, f è la somma della sua serie di Laplace in quasi ogni punto della sfera.

Questo teorema fornisce un criterio di sviluppabilità anche per una funzione suscettibile di annullarsi, poichè se la superficie $\rho = f(\theta, \varphi) + c$, dove $c > -\min f$, risulta quadrabile, f è sviluppabile per esserlo $f + c$.

5. — Abbiamo stabilito che $f(\theta, \varphi)$ è sviluppabile quasi ovunque in serie di Laplace se sono finiti gli integrali (2); ora, per questi come per gli integrali (1), si prova che se il primo, calcolato per tre poli diversi non situati sopra un medesimo cerchio massimo, è finito, lo è anche sempre il secondo. Ma se per il punto (λ, μ) è soddisfatta la condizione del n. 1, è necessariamente finito il primo integrale, calcolato relativamente al polo

(λ, μ) , poichè dalla sommabilità rispetto a v di $\int_0^\pi |d_u F(u, v)|$ segue a

maggior ragione quella di $\int_0^\pi |d_u F(u, v)| \sin u$. Possiamo allora conchiu-

dere che:

Se la condizione di sviluppabilità è verificata da $f(\theta, \varphi)$ in tre punti non situati sopra uno stesso cerchio massimo, essa lo è anche su quasi tutta la sfera.

6. — Ci siamo limitati sin qui a supporre la funzione f sempre continua. Ma la condizione generale di sviluppabilità data nel n. 1 è compatibile con certe discontinuità di f nel punto (λ, μ) ; propriamente, questa condizione implica soltanto che per quasi ogni valore di v esista il limite $\lim_{u \rightarrow 0} F(u, v)$, e che esso sia sommabile rispetto a v . E la somma della serie di Laplace è data in generale da

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{u \rightarrow 0} F(u, v) dv.$$

Se poi $f(\theta, \varphi)$, non necessariamente continua, ha lungo i cerchi massimi variazioni totali inferiori ad un limite fisso, $\lim_{u \rightarrow 0} F(u, v)$ esiste per tutti i valori di v e per ogni punto (λ, μ) ed è sempre sommabile essendo limitato l'insieme dei suoi valori. Possiamo quindi enunciare il teorema seguente:

La serie di Laplace di una funzione $f(\theta, \varphi)$ avente lungo i cerchi massimi variazioni totali uniformemente limitate è ovunque convergente, e la sua somma nel punto P dà la media dei limiti di f lungo i cerchi massimi passanti per P .

Le discontinuità che può presentare una simile funzione corrispondono manifestamente a quelle di prima specie per le funzioni di una variabile.

Matematica. — *Sull'operazione infinitesimale nel gruppo delle derivazioni.* Nota di F. SBRANA, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. GIORGI.

1. Nella teoria delle operazioni funzionali lineari, occupa un posto notevole il gruppo (ad un parametro) delle derivazioni ad indice qualunque ⁽²⁾. L'operazione infinitesimale di questo gruppo corrisponde al simbolo $\log \Delta$ (in cui $\Delta = \frac{\partial}{\partial t}$, t essendo una variabile reale) ⁽³⁾; e di questa operazione appunto intendiamo occuparci in ciò che segue.

2. Ricordiamo che se $V(t)$ è l'operando, funzione reale della variabile t , integrabile in ogni intervallo finito, e coincidente, per ogni t , con la derivata del proprio integrale, ed $f(\Delta)$ un operatore generico, lineare e normale, si ha, in generale:

$$(1) \quad f(\Delta) V(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(\tau) G(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} V(t-\tau) G(\tau) d\tau,$$

dove la funzione coefficiente $G(t)$ è rappresentata dal seguente integrale, supposto convergente:

$$(2) \quad G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(s)} f(\omega) e^{\omega t} d\omega; \quad (i = \sqrt{-1});$$

qui con s si indica una linea del piano della variabile complessa ω , che vada da $-i\infty$ a $+i\infty$. Si richiede naturalmente che $f(\omega)$ si annulli per $\omega \rightarrow \pm i\infty$. L'indeterminazione nella scelta della linea s , porta ad una corrispondente indeterminazione nella (1); questa vien tolta, qualora ci si

(1) Nella seduta del 2 febbraio 1930.

(2) Cfr., p. es., G. GIORGI, *Sul calcolo delle soluzioni funzionali, originate dai problemi di elettrodinamica*, « Atti dell'Associaz. Elettrotecnica Italiana », vol. IX, pp. 651-699, § 9; F. SBRANA, *Sopra un gruppo di operatori funzionali che interessano la Fisica*, « Annali di Matematica », serie IV, to. VII, pp. 33-45, § 6.

(3) Cfr. S. PINCHERLE, *Sulle operazioni funzionali lineari*, « Atti del Congresso Internazionale dei Matematici a Toronto » (1924), pp. 129-137, n. 15. L'operazione di cui si tratta fu introdotta dallo stesso Autore, col nome di *logaritmo funzionale*, in una Nota pubblicata in questi « Rendiconti » il 19 febbraio 1899, e da Lui stesso applicata alle funzioni analitiche; cfr. S. PINCHERLE, *Di una nuova operazione funzionale, e di qualche sua applicazione*, « Rendiconto delle Sessioni della R. Accademia delle Scienze di Bologna », Nuova Serie, vol. VII (1902-1903), fascicolo 3°, pp. 83-98.

limiti a considerare la cosiddetta *valutazione fondamentale* di $f(\Delta)$, il che è sufficiente in molti casi per le applicazioni. Tale valutazione resta definita, scegliendo s , quando sia possibile, in modo che restino alla sinistra di essa linea, percorsa nel senso indicato, tutti i punti singolari al finito di $f(\omega)^{(1)}$.

Ciò premesso, mi propongo di ricercare la valutazione fondamentale dell'operatore $\log \Delta$. È da osservare subito che l'applicazione diretta delle (1), (2) non è possibile, perchè per l'integrale (2) non è verificata la *condizione di convergenza*, in quanto che $\log \omega$ tende a ∞ , per $\omega \rightarrow \pm i\infty$.

La condizione stessa è verificata invece per $\frac{\log \Delta}{\Delta}$, di cui la *funzione generatrice* è data da

$$(3) \quad H(i) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(s)} e^{\omega i} \log \omega \frac{d\omega}{\omega},$$

intendendosi che la linea s lasci a sinistra l'origine. Per facilitare il calcolo di questo integrale, riterremo che s lasci a sinistra tutto l'asse immaginario. Se quindi si pone

$$\omega = \lambda + i\mu = \rho e^{i\theta},$$

risulterà, lungo tutto il cammino di integrazione,

$$\lambda > 0, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Si ha poi

$$\log \omega = l(\omega) + 2n\pi i,$$

con

$$l(\omega) = \log \rho + i\theta,$$

ed n intero arbitrario; per conseguenza

$$(4) \quad H(i) = K(i) + 2n\pi i \, \mathbf{1}(i),$$

essendo

$$(5) \quad K(i) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(s)} e^{\omega i} l(\omega) \frac{d\omega}{\omega},$$

e rappresentando con $\mathbf{1}(i)$ la nota funzione, che si riduce a zero per $t < 0$, a uno per $t > 0$.

Risulta dunque che per l'operatore $\frac{\log \Delta}{\Delta}$ (e quindi anche per $\log \Delta$) la valutazione fondamentale resta indeterminata, a causa dell'arbitrarietà di n .

(1) Cfr. G. GIORGI, loc. cit., § 7.

Ma si troverà che questa indeterminazione vien tolta, quando si richieda che il risultato della detta operazione sia reale.

3. Perverremo agevolmente al calcolo della funzione $H(t)$, valendoci della formula

$$(6) \quad l(\omega) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} - e^{-\omega x}}{x} dx,$$

che sussiste per ω reale o complesso, con parte reale positiva⁽¹⁾. Per dimostrarla, notiamo intanto che si ha

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+s} - \frac{1}{\omega+s} \right) ds = l(\omega) \quad (2),$$

(1) Per ω reale (positivo) la (6) è dimostrata in: RIEMANN-WEBER, *Die partiellen Differential-Gleichungen der Mathematischen Physik*, Bd. I (1919), § 25 (4).

(2) Quest'ultima relazione si può stabilire nel modo che segue. Innanzi tutto, posto

$$\omega = \lambda + i\mu = \rho e^{i\theta} \quad , \quad \left(\lambda, \rho > 0 \quad , \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right),$$

per $a > 0$, si ha

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{ds}{\omega+s} &= \int_0^a \frac{\lambda+s-i\mu}{(\lambda+s)^2+\mu^2} ds = \log \sqrt{(\lambda+a)^2+\mu^2} - \log \sqrt{\lambda^2+\mu^2} - \\ &\quad - i \frac{\mu}{|\mu|} \left[\operatorname{arctg} \frac{\lambda+a}{|\mu|} - \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{|\mu|} \right], \end{aligned}$$

in cui $|\mu|$ indica il valore assoluto di μ . Importa osservare che per $\operatorname{arctg} \frac{\lambda+a}{|\mu|}$ e per $\operatorname{arctg} \frac{\lambda}{|\mu|}$ si deve assumere la determinazione compresa tra zero e $\frac{\pi}{2}$. Risulta dunque

$$\int_0^a \left(\frac{1}{1+s} - \frac{1}{\omega+s} \right) ds = \log \frac{1+a}{\sqrt{(\lambda+a)^2+\mu^2}} + \log \rho + i \frac{\mu}{|\mu|} \left[\operatorname{arctg} \frac{\lambda+a}{|\mu|} - \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{|\mu|} \right].$$

Per $a \rightarrow \infty$, il 1° termine del 2° membro tende a zero. Si ha poi

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left[\operatorname{arctg} \frac{\lambda+a}{|\mu|} - \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{|\mu|} \right] = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{|\mu|} = \operatorname{arctg} \frac{|\mu|}{\lambda};$$

e d'altra parte

$$\operatorname{arctg} \frac{|\mu|}{\lambda} = \pm \theta,$$

secondo che μ è positivo o negativo. Si trova infine

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+s} - \frac{1}{\omega+s} \right) ds = \log \rho + i\theta = l(\omega),$$

come ci eravamo proposti di dimostrare.

e quindi, per mezzo della nota identità

$$(7) \quad \frac{1}{\alpha} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx,$$

in cui α è un numero reale o complesso, con parte reale positiva,

$$\int_0^{\infty} ds \int_0^{\infty} [e^{-sx(1+s)} - e^{-s(\omega+s)}] dx = l(\omega).$$

Con uno scambio nell'ordine delle integrazioni, ed applicando di nuovo la (7), scritta nella forma che segue:

$$\int_0^{\infty} e^{-xs} ds = \frac{1}{x},$$

si ottiene appunto la (6).

4. Dalle (5), (6), discende:

$$K(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(1)} e^{\omega t} \frac{d\omega}{\omega} \int_0^{\infty} \frac{e^{-sx} - e^{-s\omega}}{x} dx,$$

ovvero

$$(8) \quad K(t) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \left\{ e^{-sx} \frac{1}{2\pi i} \int_{(1)} e^{\omega t} \frac{d\omega}{\omega} - \frac{1}{2\pi i} \int_{(1)} e^{\omega(t-x)} \frac{d\omega}{\omega} \right\}.$$

Ora è noto che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(1)} e^{\omega t} \frac{d\omega}{\omega} = \begin{cases} 0, & \text{per } t < 0, \\ 1, & \text{per } t > 0, \end{cases}$$

e similmente

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(1)} e^{\omega(t-x)} \frac{d\omega}{\omega} = \begin{cases} 0, & \text{per } t < x, \\ 1, & \text{per } t > x. \end{cases}$$

Da ciò segue intanto che $K(t)$, e quindi anche [per la (4)] $H(t)$, si annulla per $t < 0$, come si poteva del resto prevedere. Supposto quindi $t > 0$ ⁽¹⁾, spezziamo l'intervallo $(0, \infty)$ d'integrazione del 2° membro

(1) Resterebbe da esaminare anche il comportamento di $H(t)$ per $t = 0$. Ma questo interessa soltanto per le funzioni generatrici che contengono elementi impulsivi. Ora è chiaro che $H(t)$ non può contenere di tali elementi, poichè $\frac{\log \omega}{\omega}$ tende a zero, per $\omega \rightarrow \pm i\infty$.

della (8), nei due intervalli parziali, $(0, t)$, e (t, ∞) . Troviamo così

$$(9) \quad K(t) = \int_0^t \frac{dx}{x} \{e^{-x} - 1\} + \int_t^\infty e^{-x} \frac{dx}{x}.$$

Mediante integrazioni per parti, si ha subito:

$$\begin{aligned} \int_0^t (e^{-x} - 1) \frac{dx}{x} &= (e^{-t} - 1) \log t + \int_0^t e^{-x} \log x \, dx, \\ \int_t^\infty e^{-x} \frac{dx}{x} &= -e^{-t} \log t + \int_t^\infty e^{-x} \log x \, dx \quad (1); \end{aligned}$$

e la (9) diviene

$$(10) \quad K(t) = \log \frac{1}{t} + E,$$

essendo E la costante di Eulero, data da

$$E = \int_0^\infty e^{-x} \log x \, dx = -0.577215664 \dots$$

Per mezzo delle (1), (4), (10), otteniamo infine:

$$\frac{\log \Delta}{\Delta} V(t) = \int_{-\infty}^t V(t) \left\{ \log \frac{1}{t-\tau} + E + 2n\pi i \right\} d\tau.$$

Volendo dunque una valutazione reale, si dovrà supporre $n = 0$. Con ciò risulta:

$$\log \Delta V(t) = EV(t) + \Delta \int_{-\infty}^t V(\tau) \log \frac{1}{t-\tau} d\tau,$$

dove s'intende che non è lecita la derivazione sotto il segno d'integrale.

(1) Si tenga presente che

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{-x} - 1) \log x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \log x = 0.$$

Matematica. — Sulla determinazione delle varietà riemanniane che ammettono gruppi semplicemente transitivi di movimenti. Nota di G. D. MATTIOLI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una Nota recente ⁽²⁾ ho indicato come le equazioni che definiscono il gruppo reciproco Γ_n di un gruppo G_n semplicemente transitivo, possano sostituire le equazioni di Killing nella costruzione delle V_n che ammettono appunto G_n come gruppo di movimenti. Orbene, si può prescindere dall'integrazione di dette equazioni, quando, come si fa in questo ordine di questioni, si considerino equivalenti gruppi simili; con che, in altre parole, si lascia indeterminato il ds^2 della V_n fra tutti quelli che ad essa appartengono.

1. — Sia G_n un gruppo semplicemente transitivo, del quale denotiamo con

$$(1) \quad X_h f = \xi_h^i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

le sue trasformazioni infinitesime. (Adotto la convenzione per la quale un indice ripetuto due volte in un'espressione monomia, è indice di somma da 1 fino ad n).

Sia altresì Γ_n il gruppo reciproco

$$Z_h f = \zeta_h^i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

I coefficienti delle trasformazioni infinitesime dei due gruppi sono, notoriamente, legati dalle relazioni

$$(2) \quad \xi_b^j \frac{\partial \zeta_k^i}{\partial x_j} = \zeta_k^j \frac{\partial \xi_b^i}{\partial x_j}.$$

Interpretiamo le ζ_k^i come parametri di un'ennupla di congruenze ortogonali; allora con le posizioni

$$(3) \quad a_{ij} = \zeta_{b,i} \zeta_{b,j},$$

nelle quali $\zeta_{b,i}$ è l'elemento reciproco di ζ_b^i nel determinante $||\zeta_b^i|| \neq 0$, si definisce l'elemento lineare

$$ds^2 = a_{ij} dx_i dx_j$$

(1) Nella seduta del 16 febbraio 1930.

(2) Su le ennuple di congruenze ortogonali a relazioni costanti. « Atti del R. Istituto Veneto »; t. LXXXIX II; 1929.

di una V_n . Si dimostra, ciò che è sostanzialmente contenuto nella Nota citata, che tale V_n ammette il gruppo G_n come gruppo di movimenti.

A tale scopo moltiplichiamo le (2) per $\zeta_{k,l}$ e sommiamo su k da 1 ad n : badando alle identità

$$(4) \quad \zeta_k^i \zeta_{k,l} = \varepsilon_l^i$$

dove, al solito, ε_l^i rappresenta l'unità o lo zero secondo che $l = j$ oppure $l \neq j$, si ottengono le equazioni

$$\zeta_l^j \zeta_{k,l} \frac{\partial \zeta_k^i}{\partial x_i} = \frac{\partial \zeta_l^i}{\partial x_l},$$

ed anche, poichè dalle (4) derivando si hanno le

$$\zeta_{k,l} \frac{\partial \zeta_k^i}{\partial x_j} = - \zeta_k^i \frac{\partial \zeta_{k,l}}{\partial x_j},$$

le equivalenti

$$\zeta_h^i \zeta_k^i \frac{\partial \zeta_{k,l}}{\partial x_j} = - \frac{\partial \zeta_h^i}{\partial x_l}.$$

Moltiplicando infine per $\zeta_{k,i}$ e sommando su i , si arriva al sistema

$$(2') \quad \zeta_h^i \frac{\partial \zeta_{k,l}}{\partial x_i} + \zeta_{k,i} \frac{\partial \zeta_h^i}{\partial x_j} = 0$$

che equivale all'iniziale (2).

Dalle (2') scendono immediatamente le equazioni di Killing per la V_n definita con la posizione (3).

Infatti moltiplichiamo le (2') per $\zeta_{k,r}$ sommando poi rispetto a k , e aggiungiamo ognuna delle equazioni così ottenute con quella che da essa si ricava scambiando r con j : badando alle (3) ed a quelle che da esse scendono per derivazione, risultano le equazioni di Killing

$$\zeta_h^i \frac{\partial a_{jr}}{\partial x_i} + a_{ir} \frac{\partial \zeta_h^i}{\partial x_j} + a_{ij} \frac{\partial \zeta_h^i}{\partial x_r} = 0,$$

che sono dunque soddisfatte dalla V_n il cui ds^2 è definito con le (3), e per il gruppo G_n . Tale V_n ammette dunque G_n come gruppo di movimenti.

Senonchè, assegnato G_n , la costruzione della nostra V_n esigerebbe, finora, l'integrazione del sistema, illimitatamente integrabile,

$$\zeta_h^i \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_j} = \zeta_j^i \frac{\partial \zeta_h^i}{\partial x_j}$$

che definisce il gruppo reciproco Γ_n : questa integrazione non occorre affatto.

Ed inverso, i due gruppi reciproci G_n e Γ_n sono anche fra loro *simili*, cosicchè è indifferente determinare la *stessa* V_n , a partire da Γ_n piuttosto che da G_n : essa risulterà solamente determinata da un ds^2 espresso in altre variabili. Ma allora, per la relazione involutoria che passa fra i due gruppi reciproci espressa dalle equazioni (2), quando Γ_n venga assunto a gruppo di movimenti, le funzioni ξ_h^i prendono il posto delle ζ_h^i inizialmente considerate, e perciò ponendo

$$(5) \quad ds^2 = b_{ij} dx_i dx_j, \quad \text{con: } b_{ij} = \xi_{b,i} \xi_{b,j},$$

si costruisce ancora un elemento lineare appartenente alla V_n da determinarsi.

Ciò è quanto volevasi provare.

Si può osservare, infine, che la determinazione della V_n esige solamente operazioni algebriche; perchè, assegnata la composizione di G_n , le relative trasformazioni infinitesime (cioè i coefficienti ξ_h^i) si calcolano appunto algebricamente, e da esse, pure algebricamente si arriva alla forma (5) del ds^2 .

Matematica. — *Sopra l'equazione* (1) $\Delta u = c(x, y)u(x, y)c \equiv 0$.
Nota di M. BRELOT, presentata ⁽¹⁾ dal Socio V. VOLTERRA.

1. Nella sua Opera *Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles*, che riunisce parecchi dei suoi lavori sulla equazione del tipo (1), si può vedere come il prof. Picard ha esteso il problema di *Dirichlet interiore*, all'equazione $\Delta u = cu$ in cui c continua e dotata di derivate parziali prime continue, è *essenzialmente* positiva. Il caso è ugualmente trattato in cui vi sono per l'integrale singolarità logaritmiche dei valori dati. Almeno con un dominio limitato da curve di Jordan senza punti comuni e dei valori su esse in successione continua, sono gli stessi enunciati di esistenza e unicità che per l'equazione di Laplace.

Ho trattato i problemi analoghi per l'*esteriore* e il caso del *piano intero*⁽²⁾; poi ho studiato i tre problemi con *punti singolari isolati* per $c(x, y)$ in cui non si suppone niente, nè per c , nè per gl'integrali, e dei quali si considera come facendone parte il punto all' ∞ ⁽³⁾. Per gl'integrali limitati (in modulo) nelle vicinanze di questi punti (diversi dalle singolarità logaritmiche), sono ancora gli stessi teoremi di esistenza e unicità — come, tranne nel caso del piano intero, per le funzioni armoniche —. Ho studiato anche, nelle vicinanze di un punto singolare di c , gl'integrali dell'equazione⁽⁴⁾; gli

(1) Nella seduta del 2 febbraio 1930.

(2) «C.-R., Ac. Sc.», 30 dicembre 1929, 13 gennaio 1930 e 17 febbraio 1930.

(3) «C.-R., Ac. Sc.», 3 febbraio 1930.

(4) «C.-R., Ac. Sc.», 3 febbraio 1930; «R. Acc. dei Lincei», 1930, fasc. n. 3, p. 268.

enunciati ottenuti sono generalizzazioni di proprietà semplici delle funzioni armoniche.

Apparisce una separazione fra i due casi $\Delta u = 0$, $\Delta u = cu$ $c > 0$. Studierò qui, il caso insieme più generale e intermedio di $c \geq 0$. La restrizione $c > 0$ veniva dalla dimostrazione di Paraf del lemma fondamentale dell'impossibilità di un massimo > 0 per un integrale di $\Delta u = cu$ $c > 0$ o di $\Delta u = cu + f$ $c > 0$ $f \geq 0$. Questa dimostrazione per assurdo⁽¹⁾ suppone assolutamente $c > 0$. Ne darò un'altra valida per $c \geq 0$ e generalizzerò anche i lemma fondamentali del metodo alternato di Picard, di modo che si possa riprendere con $c \geq 0$ i ragionamenti fatti con $c > 0$. Quando i risultati per $\Delta u = cu$ $c > 0$ non sono veri per $\Delta u = 0$, l'estensione al caso di $\Delta u = cu$ $c \geq 0$ sarà valida supponendo c non dappertutto nullo.

2. D'altronde, la formula di Poisson sul potenziale logarimmico essendo essenziale, e richiedendo per la densità superficiale più che la continuità, si è dovuto fare su c d'altre ipotesi che la continuità. I lavori di Petrini sul potenziale logarimmico⁽²⁾ permettono di fare ipotesi supplementari più generali che l'esistenza di derivate prime continue. Ma è più comodo e generale di prendere solamente l'ipotesi di continuità, allargando la definizione del Laplaciano e degli integrali di modo che le ipotesi di Petrini, quando sono introdotte, riducono alle proprietà ordinarie, quelle degli integrali.

3. Dunque, supponiamo solamente $c \geq 0$ e continua, tranne forse in punti singolari, per menzione speciale.

Prendiamo come definizione del Laplaciano Δu d'una funzione continua, una definizione distributiva⁽³⁾ che equivalga a quella ordinaria quando u ammette derivate seconde continue e sia di più sottomessa solamente alla condizione che, se $\rho(M)$ è continua, $\iint_{\delta} \rho(P) \log \frac{1}{MP} d\sigma$, abbia, nella regione δ , un tale laplaciano generalizzato uguale a $-2\pi\rho(M)$. Da Zaremba⁽⁴⁾ ciò porta con sè che, se una funzione continua ammette un tale laplaciano nullo, sia armonica.

Un esempio di tale laplaciano è quello di Wilkosz colle derivate seconde dirette⁽⁵⁾.

Chiamiamo allora integrale di (1) $\Delta u = cu$, una funzione continua di laplaciano generalizzato uguale a cu . In una regione δ , l'espressione:

$u + \frac{1}{2\pi} \iint_{\delta} \log \frac{1}{MP} c(P) u(P) d\sigma_P$ avrà un laplaciano generalizzato nullo,

(1) PICARD, *Traité d'analyse*, to. II, p. 33.

(2) « Acta math. », 1908. « Journal de Liouville », 1909.

(3) Voglio dire che $\Delta(hu + kv) = h\Delta u + k\Delta v$ dove $h, k = \text{cost.}$

(4) « Mémorial des Sciences math. », fasc. XI, p. 13.

(5) « Mémorial des Sciences math. », fasc. XI, p. 3 (cioè definite direttamente senza passare attraverso le derivate prime).

quindi sarà armonica. Conseguentemente, u avrà, nonchè \iint_{δ} , derivate

prime continue. Inoltre, se c soddisfa a condizioni di Petrinì, sarà lo stesso per cu , e u avrà derivate seconde continue e un laplaciano ordinario uguale a cu ; sarà un integrale al senso ordinario.

4. In primo luogo, mostriamo, colla definizione d'integrale estesa per mezzo del laplaciano generalizzato precedente, che *un integrale* (funzione continua) *in un dominio di*

$$(2) \quad \Delta u = cu + f \quad c, f \text{ continue} \geq 0$$

non può ammettere massimo > 0 (al senso largo) in un punto nelle vicinanze del quale non è costante.

Si riduce per assurdo al caso di $c = 0$.

Allora se, in M_0 , vi fosse un massimo > 0 , in ogni cerchio γ di centro M_0 e di raggio abbastanza piccolo, sarebbe $0 < u(M) \leq u(M_0)$; e poichè u non è costante nelle vicinanze di M_0 , si può scegliere γ di modo che il suo contorno passi in un punto dove $u(M) < u(M_0)$. Allora, se u_0 è la funzione armonica prendendo su γ gli stessi valori di u : $u_0(M_0) < u(M_0)$.

$$\text{Ma } \frac{1}{2\pi} \iint_{\gamma} g(M, P) f(P) d\sigma_P \text{ [} g(M, P) \text{ funzione di Green del cerchio]}$$

ha un laplaciano generalizzato uguale a $-f(M)$ e si annulla sul contorno γ . Quindi

$$u + \frac{1}{2\pi} \iint_{\gamma} g(M, P) f(P) d\sigma_P = u_0$$

da cui segue

$$u(M_0) = u_0(M_0) - \frac{1}{2\pi} \iint_{\gamma} g(M_0, P) f(P) d\sigma_P$$

$$u(M_0) \leq u_0(M_0)$$

è la contraddizione cercata.

Ne risulta che se una funzione $u \geq 0$ integrale di (2) in un dominio D limitato, prende valori finiti determinati sulla frontiera (continuità nel dominio chiuso), è dovunque al più uguale al massimo μ sulla frontiera; di più, se non è costante dappertutto, è, in ogni punto interiore a D , inferiore a μ , necessariamente > 0 .

Supponiamo, infatti, la funzione non costante; è positiva in alcuni punti; non può raggiungere il suo limite superiore (> 0) in punti interiori a D ; altrimenti, si potrebbe trovarne uno nelle vicinanze del quale la funzione non sarebbe costante e questo sarebbe un massimo > 0 ; dunque, il limite superiore è raggiunto solo sulla frontiera, quindi $\mu > 0$.

Senza l'ipotesi $u \geq 0$, un ragionamento simile mostra che, se la funzione prende valori ≤ 0 sulla frontiera, deve essere ≤ 0 ovunque.

Consideriamo specialmente l'equazione (1) $\Delta u = cu$. Se nelle vicinanze d'un punto, un integrale non è costante, non si può ammettere in questo punto massimo > 0 o minimo < 0 . Quindi, se un integrale u di (1) in un dominio limitato D prende sulla frontiera valori determinati finiti di modulo $\leq \mu$, dappertutto è $|u| \leq \mu$; di più se u non è cost., $0 \leq |u| < \mu$ in ogni punto interiore.

Applicazioni. - 1° Non possono esistere due integrali di (2) diversi in un dominio limitato, e prendendo valori determinati finiti dati sulla frontiera.

2° Consideriamo in un dominio limitato D due integrali u_1, u_2 di:

$$\Delta u = c_1 u \quad , \quad \Delta u = c_2 u$$

dove

$$0 \leq c_1 \leq c_2 \quad \text{(funzioni continue)}$$

e tale che sulla frontiera

$$u_1 \geq u_2 \geq 0.$$

Necessariamente, in D

$$u_1 \geq u_2 \geq 0.$$

Infatti: prima u_1, u_2 devono essere ≥ 0 . Poi:

$$\Delta(u_2 - u_1) = c_2(u_2 - u_1) + (c_2 - c_1)u_1.$$

Siccome $(c_2 - c_1)u_2 \leq 0$, $u_2 - u_1$ che è ≤ 0 sulla frontiera lo sarà in D .

5. Osserviamo che il metodo di Picard per mezzo di approssimazioni successive permette ancora risolvere il nuovo problema esteso di Dirichlet relativo a (1) per un contorno abbastanza piccolo⁽¹⁾ e riprendiamo i lemma fondamentali del metodo alternato di Picard:

1° Se, in una regione finita δ , un integrale u_n di (1) converge uniformemente verso un limite u , u è integrale di (1).

Infatti

$$u_n + \frac{1}{2\pi} \iint_{\delta} \log \frac{1}{MP} c(P) u_n(P) d\sigma_P$$

che è armonica tenderà uniformemente verso

$$u + \frac{1}{2\pi} \iint_{\delta} \log \frac{1}{MP} c(P) u(P) d\sigma_P$$

che sarà armonica (Harnack).

(1) PICARD, loc. cit., p. 133.

Si conclude subito.

2° Consideriamo un dominio limitato D da un numero qualunque ≥ 2 di curve di Jordan senza punti comuni. Se u_0 è la funzione armonica nulla sull'una Γ di queste curve, uguale a 1 sulle altre, se avrà, all'interno di D , per ogni integrale u di (1) prendendo valori determinati sul contorno, nulli su Γ , di modulo limitato da $g > 0$ sulle altre

$$|u| < gu_0.$$

Si dimostra come nella referenza, grazie al n. 4.

Se L è una linea continua tracciata sull'interno, u_0 vi avrà un limite superiore < 1 , dunque, lungo L , $|u| < gq$, dove $q < 1$ non dipende dall'integrale u .

6. Allora, è possibile riprendere, con $c \geq 0$ continua e la definizione generalizzata dell'integrale, i ragionamenti di Picard e risolvere ugualmente il problema di Dirichlet interiore. Poi si farà parimenti l'introduzione delle singolarità logarimmiche⁽¹⁾ per mezzo del metodo alternato fondata sui lemma precedenti. Si avrà ancora unicità: poichè la differenza V di due integrali avendo la stessa singolarità logarimmica in un punto O , è continua in questo punto e, siccome

$$V(M) + \frac{1}{2\pi} \iint_{\gamma} \log \frac{1}{MP} c(P) V(P) d\sigma_P \quad (\gamma \text{ circondante } O)$$

armonica nelle vicinanze di O , sarà continua in O , dunque anche armonica in O , si conclude che V ammetterà in O un laplaciano uguale a cV .

Si può riprendere, ora, esattamente i processi che ho indicati per risolvere il problema di Dirichlet (interiore o esteriore) senza singolarità logarimmiche, con punti singolari per $c(x, y)$; e anche il ragionamento dimostrando l'unicità d'una soluzione di modulo limitato. Il metodo di passare al limite dà proprietà della soluzione. Per esempio, se i valori sul contorno sono ≥ 0 , è dovunque ≥ 0 e al più uguale al valore massimo sul contorno; e d'altronde, se si cambia $t(x, y)$ con un altro al più uguale, la soluzione è cambiata con un'altra almeno uguale; aggiungo che, se la soluzione non è costante, il suo massimo sulla frontiera è $\mu > 0$ e in ogni punto interiore non singolare, è minore di μ .

Ne risulta un lemma essenziale per l'introduzione delle singolarità logarimmiche e i problemi relativi al primo intero, lemma che generalizza il 2° del numero 5 e il lemma simile per un solo contorno (dimostrata nell'Opera di Picard, p. 145, per $c > 0$ e non valida per $c = 0$).

(1) In cui l'integrale deve essere della forma $A \log \frac{1}{OM} + \varphi(M)$; A cost. data; $\varphi(M)$ dotata di derivate prime continue anche in O .

Consideriamo un dominio D (interiore o esteriore) limitato da uno o parecchie curve di Jordan senza punti comuni, con, forse, punti singolari isolati per $c(x, y)$ (per esempio il punto all' ∞). Dico che se c non è nulla dappertutto in D , la soluzione U uguale a 1 sul contorno è < 1 in ogni punto interiore non singolare. Infatti non può essere costante.

Consequentemente, se l'integrale u prende sul contorno valori di modulo $\leq g$, lungo una curva continua L tracciata su D (non incontrando nè il contorno nè i punti singolari di c) $|u| \leq gq$ dove $q < 1$ è il massimo di U su L , quindi, indipendente dall'integrale u . Per provarlo basta passare al limite sull'ineguaglianza simile relativa alle funzioni, nulle sulle circonferenze isolanti i punti singolari e che tendono a U e u quando queste circonferenze si riducono a zero.

Questo lemma permette l'introduzione di singolarità logarimmiche (altrove che in punti singolari di c) e la risoluzione dei problemi per il piano intero, quando c non è nulla nel dominio intero. Basta vedere che la singolarità logarimmica essendo isolata con una piccola curva γ , almeno uno dei due domini nei quali γ divide il dominio dato (che può essere il piano intero) si presta al lemma precedente.

Si può ora riprendere tutto ciò che ho indicato ⁽¹⁾ per $\Delta u = cu$ $c > 0$; sarà anche più semplice, poichè, quando nelle dimostrazioni, si ha da modificare $c(x, y)$ nelle vicinanze di un punto singolare, per renderla più piccola e continua, è adesso più facile, visto che c deve soddisfare a meno condizioni ⁽²⁾ (solamente c continua ≥ 0).

7. Termino precisando la generalizzazione della mia Nota precedente sulla nozione di sorgente puntuale. Basterà adesso mostrare che la formula di Green

$$\iint_D (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) d\sigma + \int_{\Gamma^{\text{int.}}} \left(\varphi \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d\varphi}{dn} \right) ds = 0$$

è valida per funzioni continue di Laplaciano generalizzato continuo e ciò in un dominio D_1 chiuso, nel quale D è completamente interiore. Tali funzioni hanno derivate prime continue, poichè per una tale u

$$-\frac{1}{2\pi} \iint_{D_1} \Delta u \log \frac{1}{MP} d\sigma_P$$

avrà derivate prime continue e differirà da u solo per una funzione di Laplaciano generalizzato nullo, cioè armonica.

(1) « C.-R., Ac. Sc. », 3 febbraio 1930.

(2) Indico qui un altro metodo dando la soluzione dei problemi di Dirichlet quando vi sono punti singolari O_i di c : basta passare al limite sulla soluzione corrispondente a un c ottenuto diminuendo l'altro nelle vicinanze dei O_i e per il quale non c'è difficoltà.

La proprietà enunciata risulta subito dalla possibilità di trovare funzioni dotate in D chiuso di derivate seconde continue tali che, esse stesse, le loro derivate prime e i loro laplaciani differiscono da $\varphi, \psi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \dots, \Delta \varphi, \Delta \psi$ di meno di $\varepsilon > 0$ arbitrario. E questo ultimo punto risulta da

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} \iint_{D_1} \Delta \varphi \log \frac{1}{MP} d\sigma_p + f \cdot \text{armonica } h$$

in cui φ continua ha un laplaciano continuo.

Infatti, cambiando $\Delta \varphi$ con $\rho(P)$ dotata di derivate prime continue e differente in D_1 da $\Delta \varphi$ di meno di $\varepsilon > 0$ arbitrario, φ sarà cambiata in D chiuso con una funzione di cui il valore e quelli delle sue derivate e del suo laplaciano differiranno dai valori corrispondenti per φ di quantità $\rightarrow 0$ con ε .

Matematica. — *Sur le développement des fonctions entières d'ordre fini en série d'interpolation de Newton.* Nota di A. GELFOND, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. L. TONELLI.

Dans cette Note sont examinés les conditions de la développabilité des fonctions entières en série de Newton, quand les points d'interpolations ont une densité ρ . Admettons que les points d'interpolations $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_n, \dots$ sont rangés en ordre de croissance de leurs modules, c'est-à-dire $|\chi_n| \leq |\chi_{n-1}|$ et ces points n'ont qu'un seul point d'accumulation $\chi = \infty$. Dans ce cas nous allons nommer densité le nombre

$$(I) \quad \rho = \lim_{r=\infty} \frac{\ln A(r)}{\ln r}$$

si $A(r)$ est le nombre des nombres χ_i dans le cercle $|\chi| \leq r$. Si cette limite n'existe pas, mais s'il existe la limite inférieure ou supérieure

$$(II) \quad \rho' = \lim_{r=\infty} \frac{\ln A(r)}{\ln r} \quad \text{et} \quad \rho'' = \lim_{r=\infty} \frac{\ln A(r)}{\ln r}$$

nous allons nommer le nombre ρ'' densité supérieure et le nombre ρ' densité inférieure.

Formons la série des polynômes $P_n(\chi)$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$)

$$(III) \quad P_0(\chi) = 1; \quad P_1(\chi) = (\chi - \chi_0); \quad P_2(\chi) = (\chi - \chi_0)(\chi - \chi_1); \dots; \\ P_n(\chi) = (\chi - \chi_0) \dots (\chi - \chi_{n-1}); \dots$$

(1) Nella seduta del 2 febbraio 1930.

Nous savons qu'on peut développer la fonction entière $g(z)$ en série⁽¹⁾

$$g(z) = A_0 + A_1 P_1(z) + A_2 P_2(z) + \dots + A_n P_n(z) + R_n(z)$$

où

$$(IV) \quad A_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{g(x) dx}{P_{k+1}(x)} \quad \text{et} \quad R_n(z) = \frac{P_{n+1}(z)}{2\pi i} \int_{c_n} \frac{g(x) dx}{P_{n+1}(x)(x-z)}$$

c_k est le contour qui contient les points z_0, z_1, \dots, z_k .

Il est évident que les fonctions, pour lesquelles $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(z) = 0$ (z arbitraire), sont développables en série infinie

$$(V) \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(z).$$

I THÉORÈME. — Soit la densité de la série z_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) égale à ρ . Dans ce cas toutes les fonctions entières d'ordre fini inférieur à ρ , c'est-à-dire les fonctions satisfaisantes à la condition

$$|g(z)| \leq A e^{|z|^{\rho_1}} \quad A \text{ const. et } \rho_1 < \rho,$$

sont développables en série infinie (V)

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(z)$$

qui converge dans tout le plan z .

Démonstration.

Nous pouvons déduire de l'existence de la limite (I) que le nombre des nombres z_i sur la circonférence $|z| = r$ est égal à

$$(VI) \quad B(r) = A(r) [1 - e^{-\epsilon_n \ln A(r)}] \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0.$$

En effet, dans le cas contraire, il existe une série des rayons $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \infty$ et des quantités $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$, $0 < \delta_n < 1$, telles que

$$(a) \quad B(r_n) = A(r_n) [1 - e^{-\eta_n \ln A(r_n)}] \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = \eta > 0$$

$$(b) \quad A(r_n - \delta_n) + B(r_n) = A(r_n)$$

car les points z_i n'ont pas des points d'accumulations dans la partie finie du plan z .

(1) NORLUND, *Leçons sur séries d'interpolations*, p. 10.

Mais cette supposition nous conduit à une contradiction, puisque par la définition (I)

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln A(r_n - \delta_n)}{\ln(r_n - \delta_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln[A(r_n) - B(r_n)]}{\ln r_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(r_n)}{\ln(r_n - \delta_n)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln A(r_n)}{\ln r_n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\eta_n \ln A(r_n)}{\ln r_n} = \rho - \eta\rho. \end{aligned}$$

Évaluons maintenant le module de ζ_n . D'après la définition du nombre $B(r)$ nous avons

$$A(|\zeta_n|) = n + \theta \cdot B(|\zeta_n|) \quad \theta \leq 1$$

et aussi, d'après la formule (VI) nous obtenons

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln |\zeta_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln[A(|\zeta_n|) - \theta \cdot B(|\zeta_n|)]}{\ln |\zeta_n|} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln A(|\zeta_n|)}{\ln |\zeta_n|} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln[1 - \theta + e^{-\varepsilon_n \ln A(|\zeta_n|)}]}{\ln |\zeta_n|} = \rho. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$(VII) \quad n^{\frac{1}{\rho} - \varepsilon_n} \leq |\zeta_n| \leq n^{\frac{1}{\rho} + \varepsilon_n} \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

Nous avons de la formule (IV)

$$R_n(\zeta) = \frac{P_{n+1}(\zeta)}{2\pi i} \int_{c_n} \frac{g(x) dx}{P_{n+1}(x)(x - \zeta)}.$$

Prenons comme contour d'intégration c_n la circonférence $|x| = n^{\frac{1}{\rho_1}}$. Alors, d'après la formule (VII) nous obtenons

$$|P_{n+1}(\zeta)| \leq \prod_{k=0}^{k=n} \left(|\zeta| + k^{\frac{1}{\rho} + \varepsilon_k} \right) \leq e^{\frac{1}{\rho} n \ln n + o(n)}$$

et

$$|P_{n+1}(x)| \geq \prod_{k=1}^{k=n} \left(n^{\frac{1}{\rho_1}} - |\zeta_n| \right) \geq e^{\frac{1}{\rho_1} n \ln n + o(n)}.$$

Par conséquent

$$|R_n(\zeta)| = \frac{|P_{n+1}(\zeta)|}{2\pi} \left| \int_{|x|=n^{1/\rho_1}} \frac{g(x) dx}{P_{n+1}(x)(x - \zeta)} \right| < e^{\frac{1}{\rho} n \ln n - \frac{1}{\rho_1} n \ln n + o(n)} = o(1)$$

puisque $\frac{1}{\rho_1} > \frac{1}{\rho}$.

Dans le cas où il n'existe pas la densité ρ , la fonction entière $g(z)$ est développable si son ordre ρ_1 est inférieur à la densité inférieure ρ' .

Nous pouvons nommer la densité ρ *densité du type minimale, maximale ou normale* si le nombre $\sigma = 0$, $\sigma = \infty$, et $0 < \sigma < \infty$. où

$$(VIII) \quad \sigma = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{A(r)}{r^\rho}.$$

II THÉORÈME. — Soit la densité ρ des points z_i du type normale σ et soit la fonction entière $g(z)$ du type normale σ' d'ordre fini ρ , c'est-à-dire cette fonction satisfait à l'inégalité

$$\max |g(z)| \leq A e^{(\sigma' + \delta) |z|^\rho} ; \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} \delta = 0$$

où

$$\sigma' < \frac{2^{1-\rho} \sigma}{\rho} \int_0^1 \frac{dt}{2 - t^{1-\rho}},$$

alors $g(z)$ est développable en série

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(z)$$

qui converge dans tout le plan z .

La démonstration de ce théorème est analogue à la démonstration du théorème I.

Nous trouvons de nouveau de la condition (VIII) que

$$\left(\frac{n}{\sigma + \varepsilon_n} \right)^{\frac{1}{\rho}} < |z_n| < \left(\frac{n}{\sigma - \varepsilon_n} \right)^{\frac{1}{\rho}} ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

Dans la formule

$$(IX) \quad R_n(z) = \frac{P_{n+1}(z)}{2\pi i} \int_{c_n} \frac{g(x) dx}{P_{n+1}(x)(x-z)}$$

nous prenons comme contour c_n la circonférence $|x| = 2 \left(\frac{n}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\rho}}$.

Nous avons des évaluations

$$(a) \quad |P_{n+1}(z)| < \prod_{k=0}^n \left[\left(\frac{k}{\sigma - \varepsilon_k} \right)^{\frac{1}{\rho}} + |z| \right] = e^{\frac{1}{\rho} n \ln n - \frac{1}{\rho} \ln \sigma \cdot n + o(n)}$$

$$(b) \quad |g(x)| \leq A e^{\sigma' 2^\rho \sigma^{-1} n}$$

$$\begin{aligned}
 (c) \quad |P_{n+1}(x)| &\equiv \prod_{k=1}^n \left[2 \left(\frac{n}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\rho}} - \left(\frac{k}{\sigma - \varepsilon_n} \right)^{\frac{1}{\rho}} \right] = \prod_{k=1}^n \left[2 \left(\frac{n}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\rho}} - \left(\frac{k}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\rho}} \right] \cdot e^{o(n)} = \\
 &= \sigma^{-\frac{n}{\rho}} \cdot n^{\frac{n}{\rho}} \prod_{k=1}^n \left[2 - \left(\frac{k}{n} \right)^{\frac{1}{\rho}} \right] e^{o(n)} = e^{\frac{1}{\rho} n \ln n - \frac{1}{\rho} n \ln \sigma + \sum_{k=1}^n \ln \left[2 - \left(\frac{k}{n} \right)^{\frac{1}{\rho}} \right] + o(n)} = \\
 &= e^{\frac{1}{\rho} n \ln n - \frac{1}{\rho} n \ln \sigma + n \int_0^1 \ln \left(2 - t^{1/\rho} \right) dt + o(n)} = e^{\frac{1}{\rho} n \ln n - \frac{1}{\rho} n \ln \sigma + \frac{2n}{\rho} \int_0^1 \frac{dt}{2 - t^{1/\rho}} + o(n)}.
 \end{aligned}$$

En appliquant ces évaluations (a), (b) et (c) à la formule (IX), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 R_n(\tilde{\lambda}) &= \frac{|P_{n+1}(\tilde{\lambda})|}{2\pi} \left| \int_{|x|=2\left(\frac{n}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\rho}}} \frac{g(x) dx}{P_{n+1}(x)(x-\tilde{\lambda})} \right| \leq c \frac{|P_{n+1}(\tilde{\lambda})| \left| g \left(2 \left(\frac{n}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\rho}} e^{i\varphi} \right) \right|}{\left| P_{n+1} \left(2 \left(\frac{n}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\rho}} e^{i\varphi} \right) \right|} = \\
 &= e^{\frac{1}{\rho} n \ln n - \frac{n}{\rho} \ln \sigma + o(n) + \sigma' 2^{\frac{1}{\rho}} \sigma^{-1} n + \frac{n}{\rho} \ln \sigma - \frac{1}{\rho} n \ln n - \frac{2n}{\rho} \int_0^1 \frac{dt}{2 - t^{1/\rho}} + o(n)} = \\
 &= e^{\left[\sigma' - \frac{2^{1-\rho} \sigma}{\rho} \int_0^1 \frac{dt}{2 - t^{1/\rho}} \right] 2^{\frac{1}{\rho}} \sigma^{-1} n + o(n)} = o(1)
 \end{aligned}$$

puisque, d'après la condition du théorème

$$\sigma' < \frac{2^{1-\rho} \sigma}{\rho} \int_0^1 \frac{dt}{2 - t^{1/\rho}}.$$

Nous avons démontré de plus que pour la série arbitraire $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ dans laquelle

$$n^{\frac{1}{\rho} - \varepsilon_n} < |\tilde{\lambda}_n| < n^{\frac{1}{\rho} + \varepsilon_n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$$

a lieu le théorème I, et pour la série $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$

$$\left(\frac{n}{\sigma + \varepsilon_n} \right)^{\frac{1}{\rho}} < |\tilde{\lambda}_n| < \left(\frac{n}{\sigma - \varepsilon_n} \right)^{\frac{1}{\rho}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$$

a lieu le théorème II.

Matematica. — *Qualques pas dans une théorie des fonctions de variable complexe au sens général.* Nota II di N. THÉODORESCO, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. P. BURGATTI.

§ 4. La forme du développement d'un polynôme aréolaire laisse à soupçonner la possibilité de représentation d'une fonction plus générale, à l'aide des intégrales de contour.

En effet: soit une fonction continue ainsi que ses dérivées aréolaires d'ordres $1, 2, \dots, n+1$.

Si l'on donne sur le contour les valeurs de la fonction et des dérivées jusqu'à l'ordre n , et à l'intérieur la dérivée d'ordre $n+1$, on a la formule:

$$(9) \quad f(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\tilde{\zeta}, \bar{\tilde{\zeta}})}{\tilde{\zeta} - \zeta} d\tilde{\zeta} + \dots + \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{(\zeta - \bar{\zeta})^n}{n!} \cdot \frac{\rho^n(\tilde{\zeta}, \bar{\tilde{\zeta}})}{\tilde{\zeta} - \zeta} d\tilde{\zeta} - \frac{1}{\pi} \int_D \frac{(\bar{\zeta} - \bar{v})^n}{n!} \cdot \frac{\rho^{n+1}(v, \bar{v})}{v - \zeta} d\omega$$

Elle généralise, à la fois, la formule d'un polynôme aréolaire, qu'on retrouve pour $\rho^{n+1} \equiv 0$ et la formule (1) de M. D. Pompeiu, y comprise pour $n = 0$.

Son rôle est celui de la formule de Taylor. Elle donne une sorte d'approximation d'une fonction par un polynôme aréolaire.

Si la formule de M. D. Pompeiu généralise l'intégrale définie, elle généralise l'intégrale de l'équation différentielle $y^{(n+1)} = f(x)$.

Il existe des cas, où l'on peut pousser le développement jusqu'à l'infini. Il faut que le reste donné par l'intégrale double tende vers zéro, si n tend vers l'infini.

Pour un point ζ_1 extérieur, on a de même:

$$(10) \quad 0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\tilde{\zeta}, \bar{\tilde{\zeta}})}{\tilde{\zeta} - \zeta_1} d\tilde{\zeta} + \dots + \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{(\bar{\zeta}_1 - \bar{\zeta})^n}{n!} \cdot \frac{\rho^n(\tilde{\zeta}, \bar{\tilde{\zeta}})}{\tilde{\zeta} - \zeta_1} d\tilde{\zeta} - \frac{1}{\pi} \int_D \frac{(\bar{\zeta}_1 - \bar{v})^n}{n!} \cdot \frac{\rho^{n+1}(v, \bar{v})}{v - \zeta_1} d\omega$$

§ 5. On a vu dans tout ce qui précède, que chaque formule est accompagnée d'un développement, qui doit être identiquement nul à l'extérieur du domaine. C'est comme dans le cas des fonctions holomorphes où l'on doit avoir

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\tilde{\zeta})}{\tilde{\zeta} - \zeta_1} d\tilde{\zeta} = 0.$$

Cette intégrale joue un rôle important dans tous les problèmes aux limites relatifs aux fonctions analytiques; c'est justement la même chose avec les généralisations données.

Pour mettre encore une fois en évidence cette affirmation, on peut chercher un procédé de prolongement analytique pour les fonctions monogènes (α) .

Soient $f_1(\zeta, \bar{\zeta})$ et $f_2(\zeta, \bar{\zeta})$ deux fonctions monogènes (α) , définies dans deux domaines D_1 et D_2 ayant un arc AB commun et n'ayant aucun autre point commun en dehors de cette frontière.

Supposons que les deux fonctions ont la même dérivée aréolaire $\varphi(v, \bar{v})$ définie et continue dans les deux domaines.

Si ces deux fonctions prennent la même suite continue de valeurs le long de l'arc AB, f_2 est le prolongement analytique de f_1 , quand on passe de D_1 au domaine D_2 , en traversant l'arc AB.

C'est le théorème de M. Painlevé, convenablement étendu au cas qui nous intéresse.

La démonstration est d'ailleurs immédiate. On prend un arc APB arbitraire limitant avec AB un domaine simplement connexe Δ_1 , entièrement compris dans D_1 ; on détermine aussi par l'arc AQB un domaine simplement connexe Δ_2 , dans D_2 .

On a :

$$f_1(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{1}{2i\pi} \left[\int_{AB} \frac{f_1(\chi, \bar{\chi})}{\chi - \zeta} d\chi + \int_{BPA} \frac{f_1(\chi, \bar{\chi})}{\chi - \zeta} d\chi \right] - \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta_1} \frac{\varphi(v, \bar{v})}{v - \zeta} d\omega.$$

En même temps, le point ζ étant extérieur au domaine Δ_2 , on peut écrire pour $f_2(\chi, \bar{\chi})$ l'identité (1')

$$0 = \frac{1}{2i\pi} \left[\int_{BA} \frac{f_2(\chi, \bar{\chi})}{\chi - \zeta} d\chi + \int_{AQB} \frac{f_2(\chi, \bar{\chi})}{\chi - \zeta} d\chi \right] - \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta_2} \frac{\varphi(v, \bar{v})}{v - \zeta} d\omega.$$

En ajoutant et en remarquant qu'on a $f_1 = f_2$ sur AB, on obtient :

$$f_1(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{1}{2i\pi} \int_{AQBPA} \frac{g(\chi, \bar{\chi})}{\chi - \zeta} d\chi - \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta_1 + \Delta_2} \frac{\varphi(v, \bar{v})}{v - \zeta} d\omega$$

$g(\chi, \bar{\chi})$ étant une fonction continue sur le contour AQBPA, égale à $f_1(\chi, \bar{\chi})$ sur APB et à $f_2(\chi, \bar{\chi})$ sur BQA.

Si l'on calcule de la même manière la valeur de $f_2(\zeta, \bar{\zeta})$ dans Δ_2 , on trouve la même expression. Donc il existe une fonction $f(\zeta, \bar{\zeta})$ égale à f_1 dans Δ_1 et à f_2 dans Δ_2 . Elle est monogène (α) et sa dérivée aréolaire est aussi $\varphi(v, \bar{v})$. Le prolongement analytique est ainsi assuré d'une manière unique.

On peut voir, que nous avons ainsi obtenu le prolongement analytique pour les intégrales du système :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} = A(x, y) \\ \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} = B(x, y) \end{cases}$$

$A + iB$ étant la dérivée aréolaire de $P + iQ$. Elle est donnée par l'ensemble des deux fonctions continues A et B .

Ce procédé est général pour toutes les fonctions dont il est question dans la présente Note, et même pour des fonctions plus compliquées.

C'est dans la possibilité de représentation par des intégrales, qu'on doit chercher l'explication de plusieurs propriétés.

Ainsi, on peut donner encore un théorème, concernant les séries de fonctions monogènes (α).

Supposons une série de fonctions monogènes (α) dans un domaine D , convergente uniformément dans tout domaine intérieur à D .

La série des dérivées aréolaires est aussi uniformément convergente et la somme de la série est une fonction monogène (α), ayant pour dérivée aréolaire la somme de la série des dérivées aréolaires.

C'est le théorème de Weierstrass, étendu à ce cas, plus général que celui des fonctions holomorphes.

§ 6. En conclusion, on peut essayer une théorie des fonctions d'une variable complexe au sens général, en partant des fonctions analytiques, considérées comme des éléments.

Les polynômes aréolaires forment une échelle naturelle, analogue à celle des nombres entiers.

Un premier passage à un corps un peu plus compliqué, est donné par la formule (9). Mais les espaces compris entre deux polynômes d'ordres consécutifs peuvent être remplis d'une manière continue, par des fonctions plus générales, satisfaisant à certaines équations aux dérivées aréolaires et dont l'étude n'est essentiellement distincte de celle déjà exposée ci-dessus.

Matematica. — *Sulle condizioni di rigidità di una V_m in un S_n .*
Nota di G. VRANCEANU, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

È ben noto come una curva dello spazio ordinario è rigidamente determinata dalla sua curvatura e della sua torsione, e inversamente, date ad arbitrio due funzioni di una variabile s , la prima essendo anche positiva, esse si possono considerare come curvatura e torsione di una curva dello spazio ordinario, il cui arco è precisamente s ⁽²⁾.

Se si passa poi ad una superficie dello spazio ordinario, essa pure è rigidamente determinata dalla sua metrica, chiamata anche prima forma fondamentale, e dalla sua seconda forma fondamentale; ma date due forme quadratiche in due variabili, la prima essendo definita positiva, esse non possono essere considerate come prima e seconda forma di una superficie, che nel caso in cui i loro coefficienti soddisfano alle condizioni di Gauss e di Codazzi ⁽³⁾, chiamate anche condizioni di rigidità della superficie.

Ora il Ricci si è occupato dalle condizioni in cui una data V_m si può considerare immersa in uno spazio euclideo S_n , chiamando classe della V_m il minimo numero $n - m$, e trovando delle condizioni che sono una generalizzazione delle condizioni di rigidità di Gauss e di Codazzi ⁽⁴⁾.

Lo scopo di questa Nota è di precisare il significato geometrico delle condizioni di rigidità di una V_m , situata nello spazio euclideo S_n , con l'aiuto delle sue $n - m$ secondo forme fondamentali ⁽⁵⁾ e delle sue torsioni, facendo vedere come, date la prima, le seconde forme e le torsioni della V_m , si può costruire senz'altro, in coordinate curvilinee, la metrica dello spazio euclideo ambiente S_n .

(1) Nella seduta del 2 febbraio 1930.

(2) Vedi L. BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, Bologna, Zanichelli, vol. 1, ed. 3, pp. 16-22.

(3) Id., p. 174. Per una ipersuperficie vedasi, T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di Calcolo differenziale assoluto*, raccolte dal dott. Persico, Roma, Stock, 1925, pp. 257.

(4) Vedi G. RICCI, *Sulla classificazione delle forme differenziali quadratiche*, «Rend. dei Lincei», vol. IV, 1° sem., serie 4^a, 1888, p. 203. Per altre indicazioni bibliografiche vedasi J. A. SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkül*, Springer, Berlin, p. 200.

(5) Vedi E. CARTAN, *La Géométrie des espaces de Riemann*, «Memorial des Sc. Math.», fasc. 9, p. 45, dove le seconde forme sono introdotte per definire le curvatures euleriane della V_m in S_n .

Vedi anche la mia Nota: *Seconda forma quadratica fondamentale*, «Rend. dei Lincei», vol. VIII, serie 6^a, 2° sem., p. 671, formule (7), dove le seconde forme s'introducono per esprimere la variazione della prima forma.

1. Sia dato uno spazio euclideo S_n , riferito ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali y_1, y_2, \dots, y_n , ed in esso sia data una varietà V_m definita dalle equazioni parametriche

$$(1) \quad y^a = y^a(x^1, x^2, \dots, x^m) \quad (a = 1, 2, \dots, n).$$

Tra le direzioni di S_n ortogonali a questa varietà V_m , possiamo sempre scegliere (ed anche in una infinità di modi), $n - m$ direzioni ortogonali tra di loro in qualunque punto della V_m . Indicando con Y_α^a ($\alpha = m + 1, \dots, n$) i coseni di queste direzioni, essi soddisferanno alle equazioni

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_1^n \frac{\partial y^a}{\partial x^k} Y_\alpha^a = 0 \\ \sum_1^n Y_\alpha^a Y_\beta^a = \delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases} \end{array} \right. \quad (k = 1, 2, \dots, m, \alpha, \beta > m).$$

Consideriamo adesso le seguenti formule:

$$(3) \quad y^a = y^a(x^1, x^2, \dots, x^m) + \sum_{m+1}^n x^\alpha Y_\alpha^a,$$

dove le nuove variabili x^α ($\alpha > m$) non sono altro che le distanze nelle rispettive direzioni, contate dai punti di V_m . Queste formule definiscono in S_n una trasformazione di variabili, che fa passare dalle coordinate cartesiane y alle coordinate curvilinee $x^1, \dots, x^m, x^{m+1}, \dots, x^n$, la nostra V_m essendo rappresentata in queste nuove coordinate x dai valori nulli delle $n - m$ x^α . Questa trasformazione è evidentemente valutabile solamente nella vicinanza di V_m , dove il determinante funzionale della trasformazione è diversa da zero.

La metrica dello spazio euclideo S_n , espressa nelle coordinate curvilinee x e che si ottiene differenziando le (3), quadrando, sommando, e tenendo conto dalle relazioni (2), assume la forma

$$(4) \quad ds^2 = \varphi - 2 \sum_{m+1}^n x^\alpha \varphi_\alpha + 2 \sum_{m+1}^n x^\alpha x^\beta dx^\beta \psi_{\alpha\beta} + \sum_{m+1}^n x^\alpha x^\beta \varphi_{\alpha\beta} + \sum_{m+1}^n (dx^\alpha)^2,$$

dove φ è la metrica di V_m , od anche la prima forma fondamentale, le $n - m$ φ_α sono le seconde forme fondamentali della V_m ⁽¹⁾, e sono date dalle espressioni

$$(5) \quad \varphi_\alpha = - \sum_1^n dy^a dY_\alpha^a = \sum_1^n Y_\alpha^a d^2 y^a = \sum_{ij} b_{\alpha|ij} dx^i dx^j$$

(1) Cfr. col mio lavoro: *Familles de variétés riemaniennes*, « Buletinul Soc. de Ştiinţe-Cluj (Roumanie) », to. IV, 1^a parte, pp. 434-443.

e le $\psi_{\alpha\beta}$ sono le torsioni della V_m e sono fornite dalle formule

$$(6) \quad \psi_{\alpha\beta} = -\psi_{\beta\alpha} = \sum_1^n dY_{\alpha..}^a \cdot Y_{\beta}^a = \sum_1^m a_{\alpha\beta|i} dx^i.$$

Il nome di torsioni dato alle $\psi_{\alpha\beta}$ è giustificato dal fatto che nel caso di una curva dello spazio ordinario, per la quale si scelgano come direzioni normali (2) e (3) la normale principale e la binormale, abbiamo le formule

$$\varphi = ds^2, \quad \varphi_2 = \frac{1}{R} ds^2, \quad \varphi_3 = 0, \quad \psi_{32} = -\psi_{23} = \frac{1}{T} ds,$$

dove R e T sono i raggi di curvatura e di torsione della curva, e perciò il coefficiente della ψ_{32} definisce la torsione della curva. Ci resta ancora da considerare nella metrica (4) le quantità $\varphi_{\alpha\beta}$ che sono delle forme quadratiche nelle dx^i che per semplicità tralasciamo di scrivere.

2. Proponiamoci adesso il problema inverso, e cioè di vedere in che condizioni il ds^2 dato dalla formula (4), nella quale le $\varphi, \varphi_{\alpha}, \varphi_{\alpha\beta}$, sono delle forme quadratiche e le $\psi_{\alpha\beta} = -\psi_{\beta\alpha}$ sono delle forme lineari nel m variabili x^i , la φ essendo anche definita positiva, è un ds^2 euclideo nella vicinanza della varietà V_m , avente come metrica la φ . Per questo è evidentemente necessario e sufficiente che tutti i simboli di Riemann della forma (4) nelle n variabili $x^1, \dots, x^m, x^{m+1}, \dots, x^n$ siano nulli, ed avviene questa circostanza notevole che per la forma (4) è sufficiente che essi siano nulli per $x^{\alpha} = 0$ ($\alpha > m$), ossia lungo V_m . Perciò prendiamo in esame tutti i simboli di Riemann di prima specie e consideriamo i seguenti casi:

Primo caso.— Simboli aventi tutti gli indici al più uguali a m . Ugualgiando a zero questi simboli, si trova per $x^{\alpha} = 0$ le formule

$$(I) \quad (ij, hk) = \sum_{m+1}^n {}^{\alpha} (b_{\alpha|ih} b_{\alpha|jk} - b_{\alpha|ik} b_{\alpha|jh}) \quad (i, j, h, k \leq m)$$

dove (ij, hk) sono i simboli di Riemann di prima specie della forma φ , ossia della metrica di V_m .

Secondo caso.— Simboli con un solo indice maggiore di m . Si trova, nelle stesse condizioni, le formule

$$(II) \quad b_{\alpha|ij,b} - b_{\alpha|ib,j} = \sum_{m+1}^n {}^{\beta} (b_{\beta|ij} a_{\alpha\beta|b} - b_{\beta|ib} a_{\alpha\beta|j})$$

le $b_{\alpha|ij,b}$ essendo le derivate covarianti dei coefficienti delle seconde forme φ_{α} rispetto alla forma φ .

Terzo caso. — I due primi indici maggiori di m . Si arriva alle formule

$$(III) \quad \frac{da_{\alpha\beta}{}^r}{dx^k} - \frac{da_{\alpha\beta}{}^k}{dx^r} + \sum_{m+1}^n \delta (a_{\alpha\delta}{}^k a_{\beta\delta}{}^r - a_{\alpha\delta}{}^r a_{\beta\delta}{}^k) = \sum_i^m a^{ip} (b_{\alpha|ri} b_{\beta}{}^k{}_p - b_{\alpha}{}^k{}_p b_{\beta}{}^r{}_i)$$

dove a^{ip} sono le componenti controvarianti del tensore metrico della φ .

Quarto caso. — Simboli col primo e terzo indice superiori a m . Si trovano delle formule risolte rispetto ai coefficienti delle forme $\varphi_{\alpha\beta}$, le quali permettono perciò di determinare univocamente le forme quadratiche $\varphi_{\alpha\beta}$, quando sono note le forme φ , φ_α e $\psi_{\alpha\beta}$. Quanto agli ultimi due casi che si possono considerare, simboli con tre e quattro indici maggiori di m , essi sono identicamente zero, in virtù della emmisimmetria dei coefficienti $a_{\alpha\beta}{}^i$ delle torsioni. Possiamo perciò concludere il seguente teorema:

Una varietà V_m è rigidamente determinata nello spazio euclideo S_n , dalla sua prima forma φ , dalle sue seconde forme φ_α e dalle sue torsioni $\psi_{\alpha\beta}$, per il fatto che esse bastano per costruire senza ambiguità la metrica dello spazio euclideo ambiente S_n , nella vicinanza delle varietà V_m . Queste forme non si possono prendere arbitrariamente, i loro coefficienti dovendo soddisfare alle condizioni di rigidità (I), (II) e (III). Se si vuole poi trovare un sistema di coordinate cartesiane dello spazio S_n , si devono integrare le equazioni di rigidità, che formano un sistema a differenziali totali nelle coordinate cartesiane y^1, y^2, \dots, y^n , nelle loro derivate prime e nei coseni Y_α^a , le condizioni di integrabilità di questo sistema essendo precisamente le condizioni di rigidità.

Siccome le condizioni di rigidità non variano se si aggiunge alla forma (4), una forma qualunque i cui coefficienti sono almeno del terzo ordine nelle variabili x^α ($\alpha > m$), ne risulta che purchè una varietà V_n , sia euclidea (abbia i suoi simboli di Riemann nulli) lungo una V_m , in essa contenuta e definita dai valori nulli delle x^α ($\alpha > m$), la metrica di V_n , astrazione fatta dai termini superiori al secondo nelle x^α , si deve poter mettere sotto la forma (4) e in più le condizioni di rigidità siano soddisfatte.

3. Le seconde forme φ_α (forme quadratiche) e le torsioni $\psi_{\alpha\beta}$ (forme lineari), possono evidentemente non essere indipendenti. Relativamente all'indipendenza delle seconde forme si ha il seguente teorema:

Se le seconde forme sono in numero di r indipendenti, la V_m è totalmente geodetica in una varietà V_{n-r} , pure situata in S_n (1). Se si scelgono le direzioni ortogonali (Y_α), in modo che r tra di loro siano sempre ortogonali a questa varietà V_{n-r} , le seconde forme relative alle rimanenti direzioni

(1) Vedi la mia Nota, *Sur l'indépendances des secondes formes fondamentales d'une V_m* , « Buletinul Facultății de Științe diu Cernăuți », vol. IV, 1929, p. 316.

sono identicamente nulle. Ora, una superficie non può avere più di tre seconde forme indipendenti, e perciò essa è sempre totalmente geodetica in una varietà V_{n-3} , e per avere delle rete coniugate⁽¹⁾, essa deve essere totalmente geodetica in una varietà V_{n-2} , e inversamente.

Supponiamo adesso che tutte le torsioni della V_m siano identicamente nulle⁽²⁾. In questo caso le formule (II) ci dicono che le derivate covarianti dei coefficienti delle seconde forme sono *simmetriche* e le condizioni (III) si riducono alle seguenti condizioni in termini finiti, per i coefficienti della prima e delle seconde forme

$$(III') \quad \sum_{\beta} a^{\beta p} (b_{\alpha|rs} b_{\beta|kp} - b_{\alpha|ks} b_{\beta|rp}) = 0 \quad (k, r \leq m; \alpha, \beta > m).$$

Inversamente, se i coefficienti della prima e delle seconde forme soddisfano a queste relazioni, e le torsioni non sono identicamente zero, si può scegliere un nuovo sistema di direzioni ortogonali alla V_m , in modo che esse siano identicamente zero, e perciò le (III') rappresentano la condizione necessaria e sufficiente perchè la V_m sia senza torsione.

Meccanica. — *Un metodo rapido per il calcolo dell'effetto dinamico di una corrente traslatoria sopra un cilindro in vicinanza di una parete piana indefinita.* Nota di E. PISTOLESI, presentata⁽³⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

La trattazione che di questo problema ha fatto il Raimondi in una Nota pubblicata nei « Rendiconti » di questa Accademia⁽⁴⁾, mi suggerisce un metodo rapido per giungere allo stesso risultato.

Faremo uso anche noi del metodo della riflessione; supporremo cioè tolta la parete indefinita x e sostituito il suo effetto dalla presenza di un cilindro C' riflesso del cilindro dato C sul piano x .

La corrente attorno ad un cilindro isolato di raggio a si ottiene notoriamente sovrapponendo alla corrente traslatoria quella di una coppia

(1) Per la teoria delle rete coniugate vedi G. TZITZEICA, *Géométrie différentielle projective des réseaux*, Gauthier-Villars et Cultura Națională, Bucarest, 1924, e in particolare pp. 49-56.

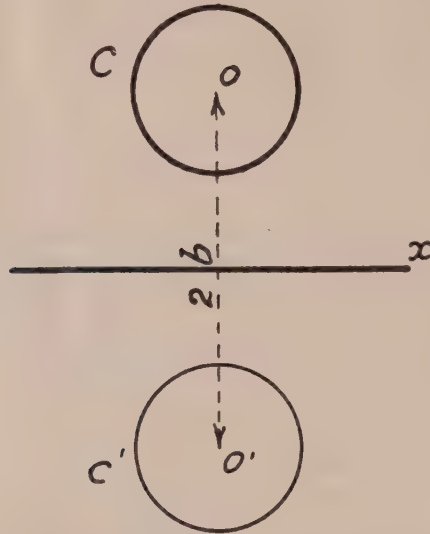
(2) Cfr. E. CARTAN, già citato, p. 51.

(3) Nella seduta del 16 febbraio 1930.

(4) E. RAIMONDI, *Effetto dinamico di una corrente traslatoria che investe un cilindro sottile in vicinanza di una parete piana indefinita*. Questi « Rendiconti », vol. X, serie 6^a, 2° sem., fasc. 7-8, ottobre 1929.

vorticosa (o vortice doppio), orientata⁽¹⁾ in opposizione alla direzione della corrente, di momento (o intensità) $2\pi a^2 v$ e collocata sull'asse del cilindro.

Se sono in presenza due cilindri, come nel caso che consideriamo, la corrente si otterrà sovrapponendo alla corrente traslatoria, non soltanto le due coppie vorticosi collocate nei due centri O e O' , ma le infinite altre



che si ottengono per successive riflessioni rispettivamente sull'una o sull'altra circonferenza.

Uno studio di M. Dupont⁽²⁾ prova che le posizioni delle infinite coppie che si hanno nell'una e nell'altra circonferenza lungo la congiungente $O O'$ tendono, per ognuna di esse, ad un punto limite distante dal centro di una distanza r che soddisfa all'equazione:

$$(1) \quad r^2 - 2br + a^2 = 0$$

e che quando a, b è piccolo, tutte le coppie si possono ridurre ad una sola, concentrata nel punto limite, di momento

$$\pi v \frac{a^4}{2b^2}$$

e di senso uguale a quello della coppia di momento $2\pi a^2 v$ collocata, come si è detto, nel centro.

(1) S'intende per orientazione della coppia vorticosa quella dell'asse di simmetria della coppia stessa, il senso essendo definito dalla velocità indotta dalla coppia su detto asse.

(2) *Introduction à l'étude du biplan. - Interaction de deux corps non contigus.* IV Congresso Internazionale di Navigazione Aerea, Roma, 24-30 ottobre 1927.

Ora è noto⁽¹⁾ che l'azione dinamica che si esercita su di un cilindro in presenza di vortici (con o senza sovrapposizione di una corrente traslatoria) si ottiene come somma delle azioni esercitate dai vortici esterni (ed eventualmente dalla corrente traslatoria) sui vortici interni al cilindro, ottenuti dai primi (compresavi la corrente traslatoria, che può considerarsi come un vortice doppio a distanza infinita) col metodo della riflessione. Poichè l'azione della corrente traslatoria sopra i vortici doppi è nulla, l'azione dinamica che si esercita sul cilindro C sarà data dall'azione che le due coppie vorticosi del cilindro C' esercitano sulle due coppie vorticosi interne a C. Ciò premesso, è noto che due coppie vorticosi di momento μ e μ' si attraggono con una forza diretta secondo la loro congiungente, di intensità

$$\rho \frac{\mu \mu'}{\pi d^3}$$

essendo d la loro distanza.

L'azione che le due coppie vorticosi del cilindro C' esercitano su C sarà dunque:

$$F = \rho \left[\frac{2\pi a^2 v \cdot 2\pi a^2 v}{\pi (2b)^3} + 2 \frac{2\pi a^2 v \cdot \pi a^4 v}{2b^2 \cdot \pi (2b - r)^3} + \frac{\pi a^4 v \cdot \pi a^4 v}{2b^2 \cdot 2b^2 \cdot \pi (2b - 2r)^3} \right].$$

Dalla (1) si ricava facilmente che $r = \sim a \cdot \frac{a}{2b}$ e quindi

$$(2) \quad F = \rho \pi a v^2 \left(\frac{1}{2} \frac{a^3}{b^3} + \dots \right)$$

dove i puntini stanno a indicare termini di ordine superiore al 3° (anzi al 4°) in a/b . Trascurando tali termini, com'è nello spirito del procedimento, otteniamo

$$(3) \quad F = \frac{1}{2} \rho \pi a v^2 \cdot \frac{a^3}{b^3} = \frac{1}{2} \rho \pi v^2 \frac{a^4}{b^3}.$$

S'intende che se si ritengono trascurabili già le potenze di $\frac{a}{b}$ superiori alla 1ª, si avrà $F \approx 0$, come ha concluso appunto il Raimondi.

La F è una forza normale al piano, diretta, com'è naturale, verso di esso e passante, per quanto sopra si è detto sulle azioni mutue delle coppie vorticosi, per il centro del cerchio.

(1) G. GRASSI, *Azioni aerodinamiche su profili alari in presenza di sorgenti o di vortici*, «L'Aerotecnica», fasc. 7, 1929.

Meccanica (Elasticità). — *Ancora sulla scelta tra soluzioni elastiche a risultanti eguali.* Nota di G. SUPINO, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. P. BURGATTI.

1. In una Nota recente ⁽²⁾ ho fissato il concetto di *soluzione fondamentale*; dato un solido elastico limitato dal contorno σ , dividiamo σ in due zone, σ_1 e σ_2 , e supponiamo dati su σ_2 la distribuzione delle forze (o degli spostamenti), su σ_1 la risultante e il momento risultante delle forze. Poichè con questi dati, la soluzione elastica non è univocamente determinata potremo imporre una condizione supplementare; ho quindi definito come soluzione fondamentale quella che, soddisfacendo ai dati, rende minimo il lavoro di deformazione.

In questa Nota, partendo dalla definizione ora ricordata, riprendo lo studio delle proprietà delle soluzioni fondamentali, precisando ancora il concetto posto e completandolo con alcune osservazioni e con qualche esempio.

2. Per le deduzioni che seguono interessa richiamare, dal lavoro già ricordato, un procedimento di verifica cui ivi si accenna; ho osservato infatti che, assunta come soluzione fondamentale una soluzione nota, si può aggiungere ad essa una seconda soluzione che dia luogo a forze (o spostamenti) nulli in σ_2 , a risultanti nulle in σ_1 ; allora la verifica indicata consiste nell'osservare se il potenziale elastico totale Φ dovuto alla somma delle due soluzioni sia maggiore del potenziale elastico Φ' dovuto alla sola soluzione data.

Ora, indicando con un accento le quantità appartenenti alla soluzione data, con due accenti quelle appartenenti alla soluzione aggiunta, è

$$\begin{aligned} \Phi = \Phi' + \Phi'' + \frac{1}{2} \int_{\sigma} (u' P_x'' + v' P_y'' + w' P_z'') d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\sigma} (u'' P_x' + v'' P_y' + w'' P_z') d\sigma + \\ + \frac{1}{2} \int_{\sigma} (F_x u'' + F_y v'' + F_z w'') d\tau \end{aligned}$$

relazione che, quando su σ_2 siano date le forze, conviene scrivere (tenendo conto della reciprocità) nella forma

$$(1) \quad \Phi = \Phi' + \Phi'' + \int_{\sigma_1} (u' P_x'' + v' P_y'' + w' P_z'') d\sigma_1;$$

(1) Nella seduta del 16 febbraio 1930.

(2) *Un criterio di scelta tra soluzioni elastiche a risultanti eguali.* « Rendiconti della R. Accademia Naz. dei Lincei », 2° sem., 1929, p. 502.

poichè l'intensità del sistema di forze \mathbf{P}'' (P''_x, P''_y, P''_z) è arbitraria e Φ'' dipende in modo quadratico dalla intensità delle forze stesse, così perchè, qualunque sia l'intensità del sistema \mathbf{P}'' , sempre sia $\Phi \cong \Phi'$ occorre e basta verificare la relazione

$$(2) \quad \int_{\sigma_1} (u' P''_x + v' P''_y + w' P''_z) d\sigma_1 = 0 \quad (1).$$

Si osserverà che la relazione (2) deve essere verificata quando varii in modo arbitrario non solo l'intensità di \mathbf{P}'' ma anche la distribuzione delle forze stesse su σ_1 (pur di soddisfare alle condizioni di equilibrio); altre volte invece si potrà chiedere che la (2) sia soddisfatta per certi sistemi di forze soltanto; la soluzione per cui si presenti quest'ultimo caso costituirà dunque una *soluzione fondamentale condizionata* a certe limitazioni delle forze date su σ_1 . Come esempio di questo fatto si osservi che il procedimento di simmetrizzazione indicato al n.º 3 della mia Nota ricordata, è valido se l'arco è soggetto alle basi soltanto a forze normali; la soluzione del Prandtl risulta dunque minimante rispetto alle altre soluzioni che non diano luogo a tensioni tangenziali sulle basi. Con modificazioni di dettaglio allo stesso ragionamento si trova che la proprietà indicata vale ancora se le forze tangenziali agenti sulle due basi dell'arco sono antisimmetriche rispetto alla mezzaria (e le forze normali restano invece simmetriche); e questa condizione si deve porre anche nel caso del problema del Saint-Venant⁽²⁾. Si osservi che anche per le soluzioni minimanti condizionate resta vero il teorema che la somma di due soluzioni fondamentali è ancora una soluzione fondamentale quando le limitazioni per le forze esterne siano le stesse per le due soluzioni.

3. Ma l'uso della formula (2) permette di precisare facilmente le condizioni cui deve soddisfare lo spostamento \mathbf{S}' (u', v', w') su σ_1 perchè si possa affermare che la soluzione da esso rappresentata è una soluzione fondamentale. Si vede infatti immediatamente che la (2) non può valere per \mathbf{P}'' qualunque altro che se \mathbf{S}' rappresenta in σ_1 uno spostamento di corpo rigido; nel qual caso si può porre senza restrizione $\mathbf{S}' = 0$. Ne segue che

(1) Se su σ_2 sono dati gli spostamenti, aggiungendo il sistema \mathbf{P}'' a spostamenti nulli su σ_2 conviene considerare in luogo della (2) la relazione

$$(2') \quad \int_{\sigma_1} (u'' P'_x + v'' P'_y + w'' P'_z) d\sigma_1 + \int_{\tau} (u'' F'_x + v'' F'_y + w'' F'_z) d\tau = 0.$$

(2) Queste condizioni sono *sufficienti*, ma non è detto siano necessarie. Riferendosi p. es. al caso della tensione o compressione semplice si trova per mezzo della (2) che questa sollecitazione è minimante rispetto a tutte le sollecitazioni che agendo soltanto sulle basi diano luogo ad una *dilatazione cubica totale nulla*.

nella soluzione completamente fondamentale σ_1 , non si deforma ma si sposta rigidamente; prendendo uno dei piani coordinati tangente a σ_1 , stessa, la ricerca della soluzione fondamentale si può dunque sostituire con la ricerca di una soluzione che dia luogo a forze *date* su σ_2 e a spostamenti nulli in σ_1 . Per le condizioni di equilibrio saremo allora certi che su σ_1 si hanno le risultanti volute. Si osservi che quando su σ_2 sono dati gli spostamenti (invece delle forze) non è detto che esista la soluzione fondamentale (in senso completo) per un dato sistema di risultanti; per esempio se non si hanno forze di massa e si pone la condizione che su σ_2 sia $\mathbf{S}' = 0$ allora la soluzione minimante si potrà ricavare dalla (2); ma da questa segue $\mathbf{S}' = 0$ anche in σ_1 e quindi l'unica soluzione possibile è lo stato naturale. Se si fissano alcune limitazioni per \mathbf{P}'' allora \mathbf{S}' può essere diverso da zero ⁽¹⁾.

4. Indicherò ora alcuni esempi. Consideriamo perciò un cilindro isotropo a sezione retta circolare; allora la sollecitazione a *torsione* costituisce una soluzione fondamentale (in senso completo): infatti le basi restano piane e ruotano rigidamente intorno all'asse del cilindro. Invece lo stesso cilindro sollecitato a *compressione semplice* dà luogo a spostamenti, che, come si è già osservato, non soddisfano alla (2) per ogni sistema \mathbf{P}'' . In questo caso la soluzione fondamentale (in senso completo) non si ottiene in modo analiticamente semplice; sperimentalmente si realizza invece assai spesso perchè comprimendo con una macchina un provino si impediscono anche (se l'attrito è un po' forte) le dilatazioni delle basi. Orbene in un lavoro, poco noto, pubblicato dal Filon si cerca una soluzione approssimata per questo caso di sollecitazione ⁽²⁾ e si giunge tra l'altro alla conclusione notevole che per il solo fatto dell'invariabilità delle basi (di cui non si tiene conto nel calcolo) le macchine di prova misurano un modulo di elasticità E apparente che è circa del 5% superiore al modulo di elasticità effettivo del materiale.

Concludendo, mi sembra che le osservazioni e gli esempi qui svolti mostrino l'interesse dei concetti posti sia per le soluzioni fondamentali (in senso completo) che per quelle condizionate a certe limitazioni nelle forze esterne; infatti con la prima ricerca si pongono in evidenza speciali solu-

(1) Non deve fare meraviglia che per certi tipi di sollecitazione non sia possibile assegnare una soluzione fondamentale. In fondo questo concetto è analogo a quello di stabilità dell'equilibrio (riferito alle forze invece che agli spostamenti); e si possono pensare alcune condizioni in cui non sia possibile ottenere in un solido l'equilibrio stabile.

(2) Cfr. L. N. G. FILON, *On the Elastic Equilibrium of Circular Cylinders under Certain Practical Systems of Loads*, « Phil. Trans. of the Royal Society of London », serie A, vol. 198, 1902, pp. 147-234. La ricerca richiede l'uso di funzioni di Bessel, serie trigonometriche e polinomi algebrici in r e z . L'approssimazione consiste nel supporre gli spostamenti u e v nulli non su tutta la base, ma solo sul contorno della base stessa.

zioni e si spiegano le differenze riscontrate tra soluzioni apparentemente assai prossime, mentre la ricerca di soluzioni minimanti condizionate permette di sfruttare opportunamente certe relazioni di simmetria e limitare quindi il numero delle variabili, facilitando in qualche caso la integrazione delle equazioni dell'equilibrio ⁽¹⁾.

Meccanica (Idromeccanica). — *Potenza relativa ad una corrente traslo-circolatoria in cui è immersa una lamina arcuata.*
Nota di B. FINZI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

Bickley calcolò la risultante delle azioni dinamiche che una corrente traslatoria piana irrotazionale esercita su di un profilo foggato ad arco di circonferenza ⁽³⁾, ed io valutai la potenza necessaria a mantenere la corrente stessa ⁽⁴⁾. In una Nota pubblicata in questo stesso fascicolo ⁽⁵⁾ Cisotti calcola la risultante delle azioni dinamiche che una corrente traslo-circolatoria esercita sul profilo precedente. In questa Nota mi propongo di valutare la potenza necessaria a mantenere la corrente nel caso studiato da Cisotti.

Troverò che tale potenza non è, in generale, nulla, e che se la circolazione $C = 0$ essa coincide con la potenza già da me valutata nel caso di Bickley, mentre se la velocità asintotica $U = 0$ essa dà la potenza necessaria a mantenere una corrente soltanto circolatoria attorno alla lamina arcuata.

Il non annullarsi della potenza della corrente proviene dalle singolarità cuspidali poste agli estremi della lamina: tali singolarità si traducono infatti in singolarità analitiche delle funzioni che schematizzano matematicamente il problema fisico, ed è ben noto come la presenza di singolarità possa alterare teoremi stabiliti nell'ipotesi di perfetta regolarità ⁽⁶⁾.

(1) Colgo l'occasione della pubblicazione di questa Nota per dichiarare che, avendo dovuto riflettere nuovamente su certi casi di deformazione a dilatazione cubica totale nulla mi sono accorto che le deduzioni contenute in una mia Nota precedente: *Alcune proprietà integrali valide per la dilatazione cubica*, inserita in questi « Rendiconti », non sono esatte. Su ciò tornerò in altro momento.

(2) Nella seduta del 16 febbraio 1930.

(3) *Some Two-Dimensional Potential Problems connected with the Circular Arc.* « Philosophical Magazine », 1918, vol. XXXV, p. 396; vol. XXXVI, p. 273.

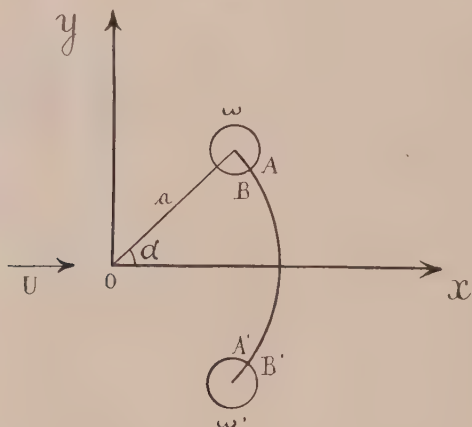
(4) *Potenza della corrente che investe un arco di circonferenza.* « Bollettino dell'Un. Mat. It. », anno VI, n. 4, 1927.

(5) *Azioni dinamiche di correnti traslocircolatorie intorno ad una lastra arcuata.*

(6) Cfr. B. FINZI, *Sulle singolarità analitiche nella meccanica dei fluidi*. Comunicazione nella Sezione V del Congresso Int. dei Matematici. In riassunto nel « Boll. dell'Un. Mat. It. », anno VII, n. 5, 1928.

Mi sembra interessante confrontare il risultato a cui porta il problema in esame con il risultato corrispondente nel caso in cui una corrente investe una lamina rettilinea, che, come è noto, presenta anch'essa singolarità cuspidali agli estremi:

Mentre nel caso della lamina rettilinea una corrente puramente traslatoria e una corrente puramente circolatoria non esigono potenza di sorta per il loro mantenimento ⁽¹⁾, e soltanto una corrente traslo-circolatoria esige d'esser mantenuta con potenza non nulla, nel caso della lamina arcuata sia una corrente puramente traslatoria, sia una corrente puramente circolatoria, sia una corrente traslo-circolatoria esigono potenza in generale non nulla per essere mantenute.



Consideriamo un arco di circonferenza di centro O , di raggio a , e d'angolo al centro 2α . Gli assi cartesiani x y siano disposti come è indicato in figura, e supponiamo che la velocità asintotica della corrente sia diretta come l'asse delle x .

Siano ω e ω' due circonferenze di raggio infinitesimo ϵ con centro negli estremi della lamina. Se p è la pressione, $f = \varphi + i\psi$ il potenziale complesso di velocità, la potenza \dot{T} della corrente si esprimerà così ⁽²⁾:

$$(1) \quad \dot{T} = \int_{\omega} p d\psi + \int_{\omega'} p d\psi.$$

(1) Sia nel caso $C = 0$ (corrente traslatoria) che nel caso $U = 0$ (corrente circolatoria) la potenza da me valutata nel caso della lamina rettilinea immersa in una corrente traslo-circolatoria si annulla. *Interpretazione energetica di una notevole eccezione del teorema di Kutta-Joukowski*. Questi «Rendiconti», vol. V, 1° sem. 1927, p. 666, form. 12.

(2) B. FINZI, loc. ult. cit., form. (5)

Valutiamo il primo integrale che compare nella (1):

Se $z = x + iy$, nei punti di ω

$$(2) \quad z = ae^{i\alpha} + \varepsilon e^{i(\alpha + \lambda)}$$

e, lungo il cammino AB, λ varia tra $-\frac{\pi}{2}$ e $3\frac{\pi}{2}$.

Sia $\zeta = \zeta(z)$ la relazione che pone in corrispondenza conforme il piano z tagliato secondo l'arco di circonferenza con il piano ζ forato secondo una circonferenza di raggio uno. Posto

$$(3) \quad Z = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right),$$

è (1)

$$(4) \quad Z = \frac{1}{4} \left(\frac{z}{a} + \frac{a}{z} - 2 \right) \pm \frac{1}{4} \left(1 + \frac{a}{z} \right) \sqrt{\left(\frac{z}{a} - e^{i\alpha} \right) \left(\frac{z}{a} - e^{-i\alpha} \right)}.$$

Allora, se w è la velocità complessa,

$$(5) \quad w = \chi \frac{dZ}{d\zeta},$$

nella quale

$$(6) \quad \chi = \frac{df}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dZ},$$

e, notoriamente,

$$(7) \quad f = \frac{C}{2\pi i} \log \zeta + V \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right).$$

Nella (7) V è il valore della velocità asintotica della corrente nel piano ζ , ed è $V = aU$ (2).

Osserviamo che, mentre $\frac{dZ}{d\zeta}$ (dipendente soltanto dalla trasformazione conforme tra il piano z ed il piano ζ) diviene infinita agli estremi dell'arco, χ si mantiene finita.

Ciò premesso, soprassegnando il coniugato di un numero complesso, ed indicando con \Im il coefficiente della sua parte immaginaria, sarà (per la (5) e la (2))

$$(8) \quad \int_{\omega} p d\psi = -\frac{\rho}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \chi \bar{\chi} \frac{dZ}{d\zeta} \frac{d\bar{Z}}{d\bar{\zeta}} \Im \left(\chi \frac{dZ}{d\zeta} e^{i(\alpha + \lambda)} \right) \varepsilon d\lambda.$$

(1) U. CISOTTI, *Azioni dinamiche di correnti circolatorie intorno a una lastra bilatera e intorno a una lastra arcuata*. Questi «Rendiconti», vol. XI, 1930, form. (13).

(2) U. CISOTTI, loc. primo cit., formula precedente alla (12).

Ma, per le (6), (7), (3),

$$\chi = \frac{C}{2\pi i \sqrt{Z^2 - 1}} + 2V:$$

nei punti di ω (in virtù della (4)) sarà allora, a meno di termini infinitesimi,

$$(9) \quad \chi = \frac{-C}{2\pi \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} + 2V.$$

Il valore di χ definito dalla (9) è dunque reale e indipendente da λ , così che la (8) può scriversi:

$$(10) \quad \int_{\omega} p d\psi = -\frac{\rho}{2} \chi^3 \Im \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{dZ}{d\chi}\right)^2 \frac{d\bar{Z}}{d\chi} i e^{i(\alpha + \lambda)} \varepsilon d\lambda.$$

Si supponga ora di voler calcolare il primo membro della (10) nel caso in cui una corrente soltanto traslatoria investe l'arco: si avrà:

$$(11) \quad \int_{\omega} p^* d\psi^* = -\frac{\rho}{2} 8V^3 \Im \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{dZ}{d\chi}\right)^2 \frac{d\bar{Z}}{d\chi} i e^{i(\alpha + \lambda)} \varepsilon d\lambda.$$

Ma in tal caso il calcolo diretto da me effettuato dà⁽¹⁾:

$$\int_{\omega} p^* d\psi^* = \frac{\rho}{2} \pi U^3 a \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \alpha.$$

Da questa e dalla (11) si trae allora, ricordando che $V = aU$,

$$(12) \quad \Im \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{dZ}{d\chi}\right)^2 \frac{d\bar{Z}}{d\chi} i e^{i(\alpha + \lambda)} \varepsilon d\lambda = -\frac{\pi}{8a^2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \alpha.$$

In virtù della (12) e della (9) la (10) diverrà

$$\int_{\omega} p d\psi = \frac{\rho\pi}{16a^2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \alpha \left(2V - \frac{C}{2\pi \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} \right)^3.$$

Calcolando analogamente $\int_{\omega'} p d\psi$ si trova per questo lo stesso valore

(1) Potenza della corrente che investe un arco di circonferenza. Loc. cit., form. (9).

trovato per l' $\int_{\omega} p d\psi$, così che, ricordando che $V = aU$, la (1) può scriversi così:

$$(13) \quad \dot{T} = \frac{\rho\pi a}{8} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen}^2 \alpha \left(2U - \frac{C}{2\pi a \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}} \right)^3.$$

Questa può scriversi diversamente ricordando l'espressione ottenuta da Cisotti nel calcolo della risultante delle azioni dinamiche che si esercitano sull'arco:

Detto R il valore di tale risultante, che è diretta come l'asse x , R può porsi sotto la seguente forma⁽¹⁾:

$$R = \frac{\rho\pi a}{4} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen}^2 \alpha \left(2U - \frac{C}{2\pi a \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}} \right)^2.$$

La (13) può dunque scriversi così:

$$(13') \quad \dot{T} = \frac{1}{2} R \left(2U - \frac{C}{2\pi a \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}} \right).$$

Questa dice che la potenza è la somma della potenza RU che sarebbe necessaria a far avanzare l'arco in seno al liquido e di una potenza complementare

$$\frac{-RC}{4\pi a \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}}.$$

La potenza complessiva, in generale, è dunque diversa da zero: essa s'annulla soltanto per i particolari valori di C, U, α che annullano il secondo membro della (13).

Se la corrente è soltanto traslatoria ($C = 0$) la potenza complementare si annulla, e la potenza si riduce a quella necessaria, nel caso particolare, a far avanzare l'arco in seno al fluido. Essa concorda con quella da me valutata altra volta. Se la corrente è soltanto circolatoria ($U = 0$), la potenza si riduce alla sola potenza complementare, che, nel caso in esame, si ottiene dalla (13) ponendo in essa $U = 0$.

(1) U. CISOTTI, loc. primo cit., cfr. form. (15).

Meccanica (Idromeccanica). — *Moti piani irrotazionali di liquidi perfetti in presenza di ostacoli mobili.* Nota di B. CALDONAZZO, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

La teoria delle funzioni di variabile complessa, che tanto ha contribuito allo sviluppo dell'idromeccanica piana nel caso di moti permanenti, è potente strumento di indagine altresì per i moti piani variabili. Una classe notevole di tali moti è costituita da quelli che avvengono in presenza di ostacoli rigidi mobili, siano essi totalmente immersi (ostacoli propriamente detti) oppure parzialmente bagnati (pareti mobili limitanti il campo del moto).

Anche questi moti sono definiti da una funzione della variabile complessa locale nella quale compare esplicitamente anche il tempo. Essa deve soddisfare sul contorno degli ostacoli mobili, che non appartiene in generale a linee di flusso, alla condizione di impenetrabilità. In questa Nota mi occupo appunto di questa condizione, dopo aver richiamato l'equazione fondamentale dei moti piani irrotazionali di un liquido perfetto. In sostanza anche per questi moti si è condotti alla determinazione della funzione ricordata sopra soddisfacente ad assegnate condizioni, funzioni oltre che del posto anche del tempo. Notevole è il caso di un ostacolo mobile sotto l'azione di date forze di massa, ad es. il peso, e sotto le azioni dinamiche esercitate sull'ostacolo stesso dal liquido in moto, moto che dipende a sua volta da quello dell'ostacolo. Di una questione di questo tipo mi occupo in una Nota successiva. L'ostacolo è un disco rotondo che si muove in un liquido indefinito di moto rototraslatorio. Ho potuto così tra l'altro determinare il moto del disco pesante in un liquido pesante giungendo a risultati notevoli, per arrivare ai quali ho creduto opportuno premettere questa Nota preparatoria.

1. *Richiamo dell'equazione fondamentale* ⁽²⁾. — Riferiamo i punti del piano del moto ad un sistema fisso di assi cartesiani ortogonali O, x, y . Siano al solito u e v le componenti cartesiane della velocità del moto liquido, funzioni del posto e del tempo.

Poichè per ipotesi il moto è irrotazionale, esso ammette un potenziale cinetico funzione armonica di x ed y e funzione di t : $\varphi(x, y, t)$. La sua

(1) Nella seduta del 16 febbraio 1930.

(2) Cfr. U. CISOTTI, *Idromeccanica piana*, parte prima, pp. 61-62 (Milano, 1921).

armonica associata $\psi(x, y, t)$ è la funzione di corrente ed il potenziale complesso

$$f(\zeta, t) = \varphi(x, y, t) + i\psi(x, y, t) \quad , \quad \zeta = x + iy,$$

è legato alla velocità, sotto forma complessa, $w(\zeta, t) = u - iv$ dalla relazione fondamentale

$$(1) \quad w = \frac{\partial f}{\partial \zeta}.$$

Le forze di massa agenti sul liquido ammettano il potenziale specifico U , sia ρ la densità costante del liquido, p la pressione, V il modulo della velocità. Il trinomio di Bernoulli

$$(2) \quad \Phi = U + \frac{p}{\rho} - \frac{V^2}{2},$$

è legato notoriamente al potenziale cinetico dalla relazione⁽¹⁾

$$(3) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \Phi + \text{funzione di } t.$$

Da questa segue che come φ anche Φ è funzione armonica del posto, legata alla velocità dalla relazione

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \Phi,$$

che è la forma complessa dell'equazione vettoriale di moto. Indicando con Ψ l'armonica coniugata di Φ e posto

$$F(\zeta, t) = \Phi + i\Psi,$$

la precedente si può scrivere

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \zeta},$$

dalla quale per la (1) si deduce

$$(4) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = F + h(t),$$

(1) Cfr. U. CISOTTI, loc. cit.

indicando h una funzione, in generale complessa ed *a priori* arbitraria, di t . Questa relazione manifestamente compendia la (3) e la corrispondente relazione che lega alla funzione di corrente la Ψ coniugata del trinomio di Bernoulli.

2. *La condizione di impenetrabilità.* — Sia c il contorno di un ostacolo che si muove di moto rigido in seno al liquido in moto. Le particelle liquide che bagnano c devono muoversi in modo che il componente normale a c della loro velocità deve coincidere con quello della velocità che il punto di c , in cui sono a contatto col contorno, possiede per il moto rigido. Vettorialmente parlando indichiamo con \mathbf{v}_2 la velocità del moto rigido in un punto P , con \mathbf{v} quella del moto liquido nello stesso punto, con $\omega \mathbf{k}$ la velocità di rotazione del moto rigido, \mathbf{k} essendo il versore del terzo asse costituente coi due x ed y del piano una terna ortogonale positiva. Indichiamo ancora con \mathbf{t} e \mathbf{n} una coppia di vettori unitari ortogonali congruenti alla coppia degli assi x, y , con \mathbf{n} normale a c rivolta verso l'ostacolo, cosicchè \mathbf{t} risulta tangente a c . Ciò premesso la velocità \mathbf{v} del moto liquido differirà da quella \mathbf{v}_2 del moto rigido di una velocità

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} - \mathbf{v}_2,$$

che per la condizione di impenetrabilità dovrà soddisfare all'equazione

$$(5) \quad \mathbf{v}_1 \times \mathbf{n} = 0, \quad \text{su } c.$$

Inoltre dovendo essere per ipotesi $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ ed essendo notoriamente $\text{rot } \mathbf{v}_2 = 2\omega \mathbf{k}$ dovrà essere in tutti i punti del campo del moto liquido

$$\text{rot } \mathbf{v}_1 = -2\omega \mathbf{k}.$$

A questa si soddisfa assumendo ⁽¹⁾

$$(6) \quad \mathbf{v}_1 = \text{grad } \varphi_1(x, y, t) - \omega \mathbf{k} \wedge (P - P_0),$$

essendo P un punto qualsiasi che partecipa del moto liquido, P_0 un punto che partecipa del solo moto rigido e φ_1 una funzione *a priori* arbitraria. Si noti che una volta scelto il punto P_0 , esso e la sua velocità \mathbf{v}_0 ed ω sono funzioni di t soltanto. Per l'incomprimibilità del liquido in moto deve essere $\text{div } \mathbf{v} = \text{div } \mathbf{v}_1 + \text{div } \mathbf{v}_2 = 0$; poichè come è noto è $\text{div } \mathbf{v}_2 = 0$, ne segue che anche $\text{div } \mathbf{v}_1 = 0$, ossia, per la precedente,

$$\text{div grad } \varphi_1 = 0.$$

(1) C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Analisi vettoriale generale*, vol. I, *Trasformazioni lineari*, 2ª ediz. (Zanichelli, 1929), p. 261.

Pertanto φ_1 deve essere funzione armonica del posto e risulterà in ultima analisi, essendo $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_0 + \omega \mathbf{k} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{P}_0)$,

$$(7) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \text{grad } \varphi_1.$$

Quindi il moto liquido si compone in ogni istante di una traslazione con la velocità del punto \mathbf{P}_0 e di uno speciale moto liquido irrotazionale di potenziale cinetico φ_1 , legato al moto dell'ostacolo dalla condizione di impenetrabilità (5). Questa per la (6), introducendo le derivate di direzione secondo la normale \mathbf{n} e secondo la tangente \mathbf{t} , si può scrivere

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \mathbf{n} \times \omega \mathbf{k} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{P}_0) = \omega \mathbf{t} \times (\mathbf{P} - \mathbf{P}_0) = \omega \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial s} \times (\mathbf{P} - \mathbf{P}_0),$$

od anche, tenuto presente che \mathbf{P}_0 non dipende dal posto,

$$(8) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\omega}{2} \frac{\partial}{\partial s} (\mathbf{P} - \mathbf{P}_0)^2.$$

Sia ora $\psi_1(x, y, t)$ la funzione di corrente del moto di velocità \mathbf{v}_1 , armonica coniugata di φ_1 e quindi $f_1(\zeta, t) = \varphi_1 + i\psi_1$ il suo potenziale complesso. Indichiamo con w_0 sotto forma complessa la velocità \mathbf{v}_0 , come con w abbiamo indicata già la velocità \mathbf{v} , ricordando che w_0 dipende al più da t mentre che w è funzione di ζ e di t . La (7) si può scrivere ora

$$(9) \quad w(\zeta, t) = w_0(t) + \frac{\partial f_1}{\partial \zeta},$$

cosicchè il potenziale complesso del moto liquido risultante, a meno di una funzione del tempo, si può scrivere

$$(10) \quad f(\zeta, t) = w_0 \zeta + f_1(\zeta, t).$$

Introduciamo infine nella (8) la ψ_1 al posto di φ_1 :

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial s} = - \frac{\omega}{2} \frac{\partial}{\partial s} (\mathbf{P} - \mathbf{P}_0)^2;$$

integrando si ottiene in definitiva la condizione di impenetrabilità sotto la forma

$$(11) \quad \psi_1 = - \frac{\omega}{2} (\mathbf{P} - \mathbf{P}_0)^2, \quad \text{su } c,$$

a meno di una funzione di t .

Questa condizione e le analoghe che devono essere verificate per la ψ_1 sul resto del contorno limitante il campo del moto, più eventualmente le condizioni di regolarità del moto all'infinito, definiscono a meno di una inessenziale funzione del tempo la f_1 e quindi la f e perciò anche il moto risulta individuato.

Convieni rilevare che se il moto rigido dell'ostacolo è prefissato P_0 (e quindi w_0) ed ω sono funzioni assegnate del tempo. In tal caso la f , a cui si arriva nel modo detto sopra, risulta esplicitamente individuata in funzione di ζ e di t . Se invece il moto dell'ostacolo è legato a quello liquido, in quanto su di esso agiscono le azioni dinamiche esercitate dal liquido in moto, la risoluzione del problema è subordinata a quella della determinazione del moto dell'ostacolo, cosicchè *a priori* P_0 ed ω sono incognite e per la loro determinazione bisognerà tener conto delle equazioni dinamiche dei moti rigidi piani. Le azioni dinamiche, che si potranno valutare tenendo conto della (3) e che compariranno in dette equazioni, contengono appunto le incognite caratteristiche del moto rigido.

Si noti che la condizione di impenetrabilità (II) nel caso di una traslazione dell'ostacolo ($\omega = 0$) si riduce, per il moto di velocità v_1 , alla solita condizione di impenetrabilità dei moti permanenti. Lo stesso vale in particolare se l'ostacolo è un disco circolare, perchè in tal caso la rotazione del disco si può sempre incorporare con una arbitraria corrente circolatoria attorno al disco.

Geodesia. — *Stazione astronomico-geodetica compiuta nel vertice di 1° ordine Eremo di Cherasco, nel luglio 1928.* Nota II di U. BARBIERI, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. E. SOLER.

Facendo seguito ad una Nota precedente, nella quale riferimmo sulle determinazioni di latitudine e azimut compiute nel luglio 1928 nel vertice Eremo di Cherasco, esporremo qui quanto fu fatto nel vertice stesso a riguardo della determinazione radiotelegrafica della longitudine.

Come già nella stazione fatta nel 1927 sul M. Colma di Mombarone, il metodo adoperato si basò sulla ricezione radiotelegrafica dei segnali orali trasmessi dalle stazioni europee, confrontata con l'indicazione contemporanea fornita da un cronometro a tempo siderale, del quale erasi determinato astronomicamente l'andamento.

L'apparato radiotelegrafico ricevente adoperato, fu quello dell'Istituto di Geodesia dell'Università di Genova, già impiegato al Mombarone: me-

(1) Nella seduta del 2 febbraio 1930.

dian­te op­po­si­ti *relais* la rice­zio­ne ve­ni­va tra­smes­sa ad un cro­no­gra­fo a pun­ta Ca­vi­gna­to, co­legato ad un cro­no­metro si­de­ra­le Kull­berg: il con­fronto an­zi­detto era co­si re­so im­me­dia­ta­men­te pos­si­bile per let­tu­ra di­retta.

Nel pro­gram­ma in prece­den­za com­pi­lato e­ra­si com­pre­se le sta­zio­ni di Pa­rigi, Bor­deaux e Nau­en: in ef­fet­to fu so­lo pos­si­bile ri­ce­ve­re Pa­rigi e Bor­deaux; per que­sta se­con­da sta­zio­ne il ma­te­ria­le rac­colto ri­uscì an­zi as­say li­mi­ta­to.

Il cro­no­metro Kull­berg fu sem­pre las­cia­to presso l'ap­pa­ra­to R. T.; un ci­rui­to lo co­legava al­tre­si ad un se­con­do cro­no­gra­fo dis­po­sto nel ca­so­tto della sta­zio­ne as­tro­no­mica, onde per­met­te­re le de­ter­mi­na­zio­ni di tem­po di­ret­ta­men­te sul Kull­berg. Que­ste de­ter­mi­na­zio­ni fu­ro­no con­dotte col me­to­do di Döl­len; si fe­ce­ro nelle tre se­re del 3, 4, 5 lu­glio: le rice­zio­ni ra­dio­te­le­gra­fi­che fu­ro­no con­ti­nua­te an­co­ra per i gi­orni 6 e 7, a com­ple­to cor­redo delle os­ser­va­zio­ni gra­vi­me­tri­che.

I due spe­cchi che se­guo­no si ri­fe­ri­sko­no il pri­mo alle de­ter­mi­na­zio­ni as­tro­no­mi­che di tem­po; il se­con­do alle ope­ra­zio­ni ra­dio­te­le­gra­fi­che: per il tem­po le po­zio­ni ap­pa­ren­ti delle stel­le fu­ro­no tol­te dal « B. A. J. » e ri­dotte al si­ste­ma dell' Eichel­ber­ger.

Data luglio 1928	Oraria	Correzione Kullberg	Tempo siderico corrispondente	Andamento orario
3	ε Cor. Bor.	+ 6 ^s .607	16 ^h 12 ^m 57 ^s	+ 0.0247
	γ Herculis			
	χ Ophiuci			
4	χ Serpentis	+ 7 ^s .200	16 ^h 10 ^m 32 ^s	+ 0.0211
	γ Herculis			
	χ Ophiuci			
5	η Herculis	+ 7 ^s .720	16 ^h 49 ^m 36 ^s	
	α Herculis			

Data luglio 1928	Ora cronometro Kullberg ridotta al 1° segnale dedotta			Media ora ri- dotta 1° segnale	Correzione cronometro su Greenwich	Anda- mento orario
	dai segnali ritmici	dalle linee	dal 306° battito	Tempo siderale di Greenwich al 1° segnale		

Parigi F. L.

3 M	4 ^h 46 ^m 47 ^s 278	4 ^h 46 ^m 47 ^s 276	4 ^h 46 ^m 47 ^s 278	4 ^h 46 ^m 47 ^s 277 4 15 38 .268	— 0 ^h 31 ^m 09 ^s 009	0 ^s .0171
4 M	50 43 .446	50 43 .426	50 43 .428	4 50 43 .433 4 19 34 .835	— 0 31 08 .598	0 .0230
5 M	54 39 .425	54 39 .440		4 54 39 .433 4 23 31 .388	— 0 31 08 .045	0 .0222
5 S	17 56 47 .260	17 56 47 .294		17 56 47 .277 17 25 39 .521	— 0 31 07 .756	0 .0016
6 M	4 58 35 .671	4 58 35 .665		4 58 35 .668 4 27 27 .929	— 0 31 07 .739	0 .0162
6 S	18 00 43 640	18 00 43 .627	18 00 43 .628	18 00 43 .631 17 29 36 .103	— 0 31 07 .528	0 .0011
7 M	5 02 32 .023	5 02 32 .039	5 02 32 .048	5 02 32 .036 4 31 24 .496	— 0 31 07 .540	0 .0012
7 S	18 04 40 .042	18 04 40 .048		18 04 40 .045 17 33 32 .657	— 0 31 07 .388	

Bordeaux L. Y.

4 M	3 ^h 20 ^m 28 ^s 662	3 ^h 20 ^m 28 ^s 662	3 ^h 20 ^m 28 ^s 648	3 ^h 20 ^m 28 ^s 663 2 49 20 .055	— 0 ^h 31 ^m 08 ^s 608	0 ^s .0207
6 M	3 28 20 .767	3 28 20 .778		3 28 20 .773 2 57 13 .157	— 0 31 07 .616	0 .0050
6 S	15 30 18 .946	15 30 18 .873	15 30 18 .978	15 30 18 .932 14 59 11 .437	— 0 31 07 .495	

Dalle due tabelle ora esposte sono facilmente deducibili i risultati finali che si riassumono nello specchio seguente.

Luglio 1928	Ora siderale	Correzione astronomica locale osservata	Correzione locale dedotta dall'anda- mento astronomico	Ora cronometrica locale corretta di ricezione del 1° segnale	Ora di Greenwich al 1° segnale	Differenza di longitudine Eremo-Greenwich	Osservazioni
3 M	4 ^h 46 ^m 47 ^s .277		+ 6 ^s .323	4 ^h 46 ^m 53 ^s .600	4 ^h 15 ^m 38 ^s .268	— 0 ^h 31 ^m 15 ^s .332	correzione extrapolata
3 S	16 12 57	+ 6 ^s .607					
4 M	4 50 43.433		+ 6.921	4 50 50.354	4 19 34.835	15.519	correzione interpolata
4 S	16 10 32	+ 7.200					
5 M	4 54 39.433		+ 7.466	4 54 46.899	4 23 31.388	15.511	correzione interpolata
5 S	16 49 36	+ 7.720					

Per quanto l'accordo del risultato relativo alla mattina del 3 luglio, si manifesti tollerabile in confronto delle altre due determinazioni, non essendo l'osservazione del 3 compresa fra due di tempo, terremo soltanto conto dei risultati avuti nelle mattine del 4 e 5, che si rivelano fra loro in tanto buon accordo.

La loro media dà, quale differenza di longitudine astronomica fra Eremo di Cherasco e Greenwich

$$\omega' = - 0^h 31^m 15^s.515 \equiv - 7^\circ 48' 52''.725,$$

e abbiamo creduto prescindere dalle ricezioni radiotelegrafiche di Bordeaux, pensando che la loro esiguità non avrebbe portato gran contributo: considereremo pertanto, solo il valore di ω' proveniente da Parigi.

Dai dati forniti dall'Istituto Geografico M^{re} si trae che la longitudine geodetica dell'Eremo, rispetto a Genova, è $- 1^\circ 07' 06''.403$; tenuto conto della costante $+ 8^\circ 55' 21''.080$, necessaria per ridursi a Greenwich, ne risulta che rispetto a Greenwich la longitudine geodetica dell'Eremo è

$$\omega = - 7^\circ 48' 14''.677,$$

onde ne consegue, a parte il segno di ω, ω' , che sta per indicarci che l'Eremo è ad oriente di Greenwich,

$$\omega' - \omega = 38''.048.$$

Ricordando che fu già trovato (v. Nota I)

$$\alpha' - \alpha = 22''.9,$$

si deduce dall'equazione di Laplace

$$\alpha' - \alpha = (\omega' - \omega) \sin \varphi$$

il risultato

$$22''.9 = 26''.7.$$

che per la tenue differenza di $3''.8$ fra i due membri ci induce a ritenere soddisfatta sufficientemente la stessa equazione di Laplace, ancor tenuto conto dell'errore da cui possono essere affetti l'azimut astronomico osservato, e l'azimut geodetico dedotto da osservazioni angolari compiute con istrumento certo non della maggior precisione, essendo S. Vittoria vertice di 3° ordine. Concludendo, avremo pertanto che nel vertice di 1° ordine Eremo di Cherasco le coordinate astronomiche, e l'azimut della direzione a S. Vittoria d'Alba, possono ritenersi fissate nei valori

$$\varphi' = 44^\circ 36' 27''.0$$

$$\omega' = - 7^\circ 48' 52''.725 \quad (\text{da Greenwich})$$

$$\alpha' = 44^\circ 20' 24''.0.$$

Chimica. — *Un nuovo modo di formazione di neri di pirrolo* ⁽¹⁾. Nota II di A. QUILICO e M. FRERI, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. BRUNI.

Nella prima Nota sull'argomento ⁽³⁾, fu accennato alla formazione, da pirrolo e sali di diazonio in soluzione acetica, di sostanze analoghe ai neri di pirrolo tipici ottenuti per ossidazione, ed in questa seconda parte descriviamo le esperienze eseguite.

Abbiamo sempre impiegato i solfati di diazonio solidi, preparati in soluzione acetica glaciale con nitrito di amile, secondo il metodo di Hantzsch ⁽⁴⁾, accuratamente purificati per successive dissoluzioni in acido acetico e riprecipitazioni con etere, allo scopo di eliminare le ultime tracce di acido nitroso, che è capace di per se di alterare il pirrolo dando prodotti analoghi a quelli che stiamo studiando. Le esperienze qui descritte furono eseguite in soluzione acetica, ma da prove di confronto, eseguite con diazo di p. nitroanilina, ci risulta che la reazione procede egualmente bene in soluzione alcoolica.

In attesa di essere in possesso di nuovi dati sperimentali, esponiamo con la massima riserva i primi risultati ottenuti.

1. *Pirrolo e solfato di o. p. dinitrobenzendiazonio.* — Si diazotano col metodo di Hantzsch gr. 1.83 (1/100 di gr. mol.) di o. p. dinitroanilina con nitrito di amile in soluzione acetica glaciale, e si esegue la purificazione del diazo con due successive dissoluzioni in acido acetico e riprecipitazioni con etere. Il solfato di diazonio, che si ottiene in forma oleosa, si discioglie in 60 cm³ di acido acetico, ed alla soluzione raffreddata con ghiaccio, e mantenuta in continua agitazione, si aggiungono a piccole porzioni gr. 0.67 (1/100 di gr. mol.) di pirrolo disciolti in 20 cm³ di acido acetico. Si ha subito colorazione nero violacea intensa, si nota sviluppo gassoso (azoto), e dopo qualche minuto comincia a separarsi una polvere nera. Dopo una notte di permanenza al freddo, si diluisce con eguale volume d'acqua e si filtra alla pompa. Rimane sul filtro una polvere nerissima, che dopo copioso lavaggio con acqua tiepida ed essiccamento a 100°, pesa gr. 1.2. Riscaldata con acido acetico, cede a questo delle sostanze che lo colorano in violaceo, e lo stesso avviene, sebbene in grado minore, con l'alcool.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale del R. Politecnico di Milano.

(2) Nella seduta del 16 febbraio 1930.

(3) Questi « Rendiconti », 1° semestre 1930.

(4) HANTSCH e JOCHEM, « Ber. »: 34, 3337 (1901).

Per eliminare i prodotti secondari che la inquinano, l'abbiamo sottoposta ad estrazione in Soxhlet con acido acetico glaciale fino a che questo passava incolore: nel pallone si ha una soluzione violacea che contiene in sospensione un po' di nero, evidentemente trascinato. Si sostituisce l'acido acetico con alcool e si ripete l'estrazione; l'alcool si colora solo leggermente in giallo.

Dopo essiccamento a 110° il prodotto così purificato pesa g. 0.9. Si presenta come una polvere nerissima, di aspetto molto simile al nero animale, insolubile in tutti i solventi. Trattata con soluzione di KOH al 5% non accenna a disciogliersi, e anche dopo qualche giorno di contatto si ha per filtrazione un liquido perfettamente incolore. Riscaldato in tubo da saggio non fonde, ma dà dei vapori che arrossano il fuscello d'abete umettato di HCl, e si condensano sulle pareti in goccioline oleose ed in una piccola quantità di un sublimato bianco. L'analisi, eseguita sul prodotto purificato e seccato a 110° – 120° fino a peso costante, ha fornito i seguenti valori ⁽¹⁾:

C	56.57.	56.62* ⁽²⁾	56.90*	—	—
H	4.37	4.80*	5.05*	—	—
N	—	—	—	15.45	15.75

Le acque madri acetiche del nero, diluite con acqua e lasciate in riposo per qualche giorno, depositano una nuova quantità di nero; per filtrazione ne abbiamo ancora ricavati gr. 0.2. Il filtrato, colorato in rosso violaceo, svaporato a bagnomaria, si rapprende in una massa cristallina, colorata da sostanze peciose e da un poco di nero separatosi durante la concentrazione, contenente notevoli quantità di acido solforico libero. Si discioglie in alcool bollente, si decolora con nero animale e si filtra; per raffreddamento si separano aghi appiattiti giallo-chiaro che dopo ripetute cristallizzazioni fondono a 90° – 91° anche in miscela con m. dinitrobenzolo. Non si riesce tuttavia ad averli perfettamente incolori. L'analisi diede:

trovato	N %	16.81
calcolato per $C_6H_4N_2O_4$		16.67

Piccole quantità di m. dinitrobenzolo abbiamo ancora ricavato dall'acido acetico dell'estrazione in Soxhlet insieme a prodotti violacei incristallizzabili; l'alcool di lavaggio non lascia all'evaporazione che un minimo residuo giallastro che non fu ulteriormente esaminato.

(1) Queste sostanze, come i neri di pirrolo del prof. Angeli, bruciano con notevole difficoltà, ed anche l'aggiunta di CuO in polvere non si è mostrata molto vantaggiosa; abbiamo quindi preferito, per le macrocombustioni, prolungare un poco la durata normale dell'operazione.

(2) I dati analitici del C e H cotrassegnati da un asterisco furono ottenuti col metodo microanalitico di Pregl, con il quale furono determinati tutti gli azoti.

Allo scopo di stabilire se il nero ottenuto dovesse considerarsi una sostanza unica, o una miscela di due o più sostanze, abbiamo ripetuto l'esperienza variando le proporzioni dei reagenti, essendo probabile che in tal caso le quantità relative dei componenti verrebbero ad essere cambiate.

Il solfato di diazonio ottenuto da gr. 3,6 (2/100 di gr. mol.) di o. p. diniroanilina, fu disciolto in 90 cm₃ di acido acetico ed addizionato nel modo già descritto, di gr. 0.67 (1/100 di gr. mol.) di pirrolo sciolti in 20 cm₃ di acido acetico. Si ebbe subito colorazione violacea, sviluppo di azoto e separazione di nero. Dopo 18 ore si diluì con egual volume d'acqua e si filtrò alla pompa; la resa fu di gr. 1.65 di prodotto grezzo, e cioè sensibilmente superiore a quella della precedente esperienza. L'analisi del prodotto purificato nel modo consueto, e seccato a 110°-120°, non mostrò tuttavia un sensibile cambiamento:

C	56.35	—	—
H	4.58	—	—
N	—	15.76	15.81

Anche questo nero è completamente insolubile negli alcali. Dalle acque madri acetiche lasciate in riposo, furono recuperati ancora gr. 0.25 di nero accanto a notevoli quantità di m. dinitrobenzolo. Anche in questo caso non si avvertì in esse la presenza di pirrolo inalterato.

2. *Pirrolo e solfato di benzendiazonio.* — Si diazotano in soluzione acetica gr. 1.86 (2/100 di gr. mol.) di anilina, ed il solfato di diazonio che si ottiene ben cristallizzato sin dalla prima precipitazione con etere, dopo la solita purificazione, viene disciolto in 80 cm₃ di acido acetico glaciale. Alla soluzione raffreddata si aggiungono gr. 1.34 (2/100 di gr. mol.) di pirrolo, in 20 cm₃ di acido acetico. Si ha intensa colorazione rosso-bruna e quasi subito si inizia la separazione del nero. Dopo 20 ore si diluisce con egual volume d'acqua e si filtra alla pompa; il prodotto lavato e seccato a 100° pesava gr. 1.92. Dopo la consueta estrazione in Soxhlet con acido acetico e con alcool, il peso si ridusse a gr. 1.46. Polvere nerissima, insolubile in tutti i solventi ed anche in alcali; agitato con KOH al 5%, colora solo leggermente in giallo-bruno il liquido, anche dopo lunga permanenza. L'analisi del prodotto seccato a 110°-120° diede:

C	56.32	56.33	—	—	—
H	4.02	4.03	—	—	—
N	—	—	15.58	15.76	15.77

Le acque madri acetiche, per diluzione e riposo depositarono altro nero (gr. 0.57). Dopo filtrazione ed evaporazione a bagno maria, rimase un residuo cristallino, a forte reazione acida, colorato in giallo-bruno, che venne estratto con alcool per eliminare le piccole quantità di nero ancora sepa-

ratesi. Per evaporazione dell'alcool si ottenne un abbondante residuo cristallino che venne ricristallizzato dall'acqua e nero animale; seccato all'aria su piastra porosa pesava gr. 1.25. Il prodotto non è altro che solfato di anilina, come abbiamo potuto dimostrare attraverso la formazione di un derivato benzoilico bianco che ricristallizzato dall'alcool fondeva a 160° anche in miscela con benzanilide.

È molto probabile che anche in questo caso la riduzione del diazo abbia condotto in parte alla formazione dell'idrocarburo (benzolo) che per la sua volatilità non ci è stato naturalmente possibile d'identificare; è degna di nota la quantità notevole di analina che si è originata.

3. *Pirrolo e solfato di o. nitrobenzendiazonio.* — Si diazotano nel modo descritto, gr. 1.38 (1/100 di gr. mol.) di o. nitroanilina, e il solfato di diazonio che si ottiene ben cristallizzato, viene disciolto in 80 cm₃ di acido acetico glaciale, ed addizionato a freddo di gr. 0.67 (1/100 di gr. mol.) di pirrolo sciolti in 20 cm₃, 20 di acido acetico. Si ha subito colorazione rosso-violacea intensa; dopo 18 ore si diluisce con acqua e si filtra alla pompa. Ottenuti gr. 1.39 di prodotto lavato con acqua e seccato a 100°, che dopo la consueta estrazione con acido acetico ed alcool si ridussero a gr. 0.96. All'aspetto ed alle proprietà non si distingue dagli altri neri, e come quelli è completamente insolubile negli alcali. L'analisi del prodotto purificato e seccato a 110°–120° diede i seguenti valori:

C	51.43	51.66	—	—
H	3.69	3.92	—	—
N	—	—	18.47	18.50

Le acque madri acetiche, per evaporazione, lasciarono uno sciroppo bruno che per raffreddamento si rapprese in una massa cristallina raggiata, colorata in bruno da sostanze peciose, e che odorava fortemente di nitrobenzolo. Questo residuo fu stemperato in acqua, il liquido alcalinizzato con Na₂CO₃ e sottoposto ad estrazione in vapore. Si ottenne un distillato giallo, che per raffreddamento separò begli aghi giallo oro p. f. 71°, che furono identificati per o. nitroanilina.

4. *Pirrolo e solfato di m. nitrobenzendiazonio.* — Abbiamo impiegato gr. 1.38 (1/100 di gr. mol.) di m. nitroanilina; diazo ben cristallizzato sin dalla prima precipitazione con etere. Alla soluzione acetica del diazo, raffreddata, furono aggiunti gr. 0.67 di pirrolo (1/100 di gr. mol.) sciolti in 20 cm₃ di acido acetico. Si notò subito colorazione rosso-violacea intensa; il giorno dopo si diluì con acqua e si filtrò il nero, che seccato a 100° pesava gr. 2.65, resa eccezionalmente abbondante. Il prodotto grezzo presentava inoltre dei riflessi bronzii non osservati negli altri neri, e l'estrazione in Soxhlet con acido acetico si dovette protrarre per circa 24 ore prima di ottenere un estratto incolore. Abbiamo così ottenuti gr. 1.69 di

prodotto lavato, che non differiva nell'aspetto dagli altri neri, e, come questi, era completamente insolubile negli alcali. L'analisi del prodotto seccato a 120° diede:

C	51.06	—	—	—
H	5.52	—	—	—
N	—	18.62	18.53	18.85

1. Dalle acque madri acetiche si separò al solito altro nero, dopo di che queste vennero svaporate a bagno maria. Il liquido acido venne neutralizzato con Na_2CO_3 , con che si ebbe un precipitato giallo sporco e si avvertì nettamente odore pirrolico; svaporato sino a secchezza ed estratto con alcool bollente e nero animale, forni cristallini gialli aghiformi che fondevano a 114° anche in miscela con m. nitroanilina.

5. *Pirrolo e solfato di p. nitrobenzendiazonio.* — Il solfato di diazonio cristallizzato, ottenuto da gr. 1.38 (1/100 di gr. mol.) di p. nitroanilina, venne disciolto in 80 cm₃ di acido acetico glaciale ed addizionato di gr. 0.67 di pirrolo (1/100 di gr. mol.). Si ebbe subito colorazione rosso-violacea e separazione di nero. Resa in prodotto grezzo seccato a 100° gr. 1.7; dopo la consueta purificazione, pesava gr. 1.2. Insolubile negli alcali. L'analisi diede:

C	52.90	53.01	—	—
H	3.66	3.68	—	—
N	—	—	18.53	18.67

Come era da prevedersi, la sua composizione è molto simile a quella dei neri ottenuti dalla o. e m. nitroanilina.

Dalle acque madri acetiche, dopo evaporazione, neutralizzazione con Na_2CO_3 ed estrazione con alcool, vennero separati gr. 0.2 di p. nitroanilina.

6. *Pirrolo e diazo solfoanilico.* — Si diazotarono in soluzione acquosa con NaNO_2 e HCl , gr. 3.5 (2/100 di gr. mol.) di acido solfanilico, e si filtrò alla pompa il prodotto di anidificazione del diazo. Dopo averlo lavato sul filtro con poca acqua ghiacciata, e lasciato asciugare per qualche tempo, venne spappolato in 100 cm₃ di acido acetico glaciale ed addizionato di gr. 1.34 (2/100 di gr. mol.) di pirrolo. Si ebbe subito colorazione bruno scura e separazione di nero. Dopo 20 ore di agitazione e permanenza al freddo, si diluì con acqua, ed il nero venne filtrato alla pompa e copiosamente lavato con acqua bollente. Il prodotto grezzo, seccato a 100°, pesava gr. 2.6, e venne sottoposto ad estrazione con acido acetico e poi con alcool. Questi, dopo poche ore passano completamente incolori, ma venne tuttavia protratta l'estrazione per molte ore, per eliminare completamente le ultime tracce di acido solfanilico eventualmente occluse dal precipitato. Si ottennero così gr. 2.4 di nero. Il prodotto contiene zolfo anche dopo la purificazione, e,

a differenza degli altri neri, si scioglie completamente a freddo negli alcali diluiti dando soluzioni nerissime, facilmente filtrabili. Acidificando la soluzione alcalina del nero, questo si separa sotto forma di fiocchi che vanno a depositarsi al fondo lasciando un liquido debolmente colorato in giallo, perfettamente limpido. Si può separare il nero per filtrazione, ma se si tenta di lavarlo con acqua pura, appena eliminate le ultime tracce di elettroliti, esso ripassa in soluzione, ciò che evidentemente dimostra la natura colloidale della sostanza. Meno facilmente si discioglie nei carbonati alcalini. L'analisi del prodotto purificato e seccato a 120° diede i seguenti valori:

C	51.17*	51.70*	—	—	—
H	4.10*	4.21*	—	—	—
N	—	—	16.38	16.74	16.87
S	—	—	8.51	8.69	8.68 (1)

che sono in discreto accordo con quelli richiesti dalla formula $C_{32}H_{29}N_9O_9S_2$ o $C_{32}H_{27}N_9O_9S_2$:

calcolato per:	$C_{32}H_{29}N_9O_9S_2$	$C_{32}H_{27}N_9O_9S_2$
C	51.38	51.53
H	3.91	3.65
N	16.86	16.91
S	8.58	8.60

secondo la quale il nero si formerebbe senza eliminazione di azoto, da 5 molecole di pirrolo e 2 di diazo solfoanilico. Queste formule diamo con la massima riserva e a puro titolo informativo, essendo tutt'altro che improbabile che il nero non sia una miscela di due o più sostanze.

Le acque madri acetiche, svaporate e secchezza a bagno maria, diedero un residuo copioso, cristallino, colorato in nero, che venne bollito con soluzione di carbonato sodico, decolorato con nero animale. Per acidificazione del filtrato, si separò un abbondante precipitato cristallino bianco grigio, che alle proprietà, ed alla formazione di Arancio II con acido nitroso e β -naftolo in soluzione alcalina, venne identificato per acido solfoanilico; seccato all'aria pesava gr. 0.3, ed altro se ne ebbe dai liquidi dell'estrazione in Soxhlet per evaporazione.

7. *Pirrolo e solfato di p. bromobenzendiazonio.* — Impiegammo gr. 1.72 (1/100 di gr. mol.) di p. bromoanilina. Il solfato di diazonio ben cristallizzato venne sciolto in 70 cm³ di acido acetico ed addizionato di gr. 0.67 di pirrolo. Si ebbe subito colorazione rosso bruna e separazione di un pre-

(1) Determinato per ossidazione per via secca della sostanza con nitro e carbonato sodico.

cipitato scurissimo. Per diluizione e filtrazione ebbimo gr. 1.42 di prodotto grezzo seccato a 100°, che presentava una caratteristica tonalità verdastria, ricordante quella del nero d'anilina. Dopo estrazione in Soxhlet si ridusse a gr. 0.9. Analisi:

C	48.11	48.10*	49.06*	—	—
H	4.10	4.22*	4.85*	—	—
N	—	—	—	16.68	16.50
Br	—	—	—	13.24	13.64 ⁽¹⁾

Le acque madri acetiche, liberate dal nuovo nero separatosi, furono concentrate a bagno maria, ed il residuo cristallino, ripreso con alcool e bollito con carbone animale. Dal filtrato si separarono grosse lamine scintillanti, solubili in acqua bollente, costituite dal solfato della p. bromoanilina, come potemmo dimostrare sospendendole in soluzione di Na_2CO_3 ed estraendo con etere l'ammina liberata.

8. *Pirrolo e solfato di o. p. diclorobenzendiazonio*. — Il solfato di diazonio ottenuto da gr. 3.24 (2/100 di gr. mol.) di o. p. dicloroanilina, venne sciolto in 80 cm₃ di acido acetico ed addizionato di gr. 1.4 di pirrolo in 25 cm₃ di acido acetico. Reazione immediata e separazione di nero sin dalle prime gocce. Il giorno dopo si diluì con acqua e si filtrò alla pompa il nero; resa gr. 3.20, dopo estrazione, gr. 2.5. Insolubile negli alcali.

Analisi:	C	48.50	48.69	—	—
	H	3.17	3.73	—	—
	N	—	—	15.70	15.72
	Br	—	—	16.77	16.67 ⁽²⁾

Anche in questo caso, dalle acque madri acetiche potemmo separare una notevole quantità di solfato di dicloroanilina.

Continueremo queste ricerche.

(1) La prima di queste determinazioni venne eseguita col metodo alla calce, la seconda, col metodo di Carius.

(2) Metodo alla calce.

Geologia (Geologia Vulcanologica). — *Sull'età delle eruzioni andesitiche dell'Isola di Capraia* ⁽¹⁾. Nota di M. AIROLDI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. G. ROVERETO.

Trovasi nelle collezioni dell'Istituto di Geologia della Università di Genova, un frammento di pomice raccolto nelle marne del pliocene inferiore di Piazza De Ferrari, alcuni anni or sono, durante i lavori per la sistemazione di detta piazza.

Si tratta di una pomice a tessitura fibrosa, e di colore grigio, mostrante, anche a occhio nudo, una grande abbondanza di lamelle di mica nera, con tutta verosimiglianza giunta sulla costa ligure galleggiante, ma la cui vera provenienza era rimasta senza spiegazione, poichè i suoi caratteri, anche macroscopici, la differenziavano da tutte le altre pomici conosciute delle coste mediterranee.

Recentemente il prof. Rovereto ed io durante studi eseguiti nell'Isola di Capraia, abbiamo raccolto campioni di pomici che, soprattutto per l'abbondanza di lamelle di mica nera, subito ci hanno ricordato quella di Genova, e ci hanno fatto formulare l'ipotesi che quest'ultima provenisse dalle eruzioni della Capraia.

Avendo proseguito nelle ricerche, ho potuto studiare accumulazioni di pomici in diverse parti dell'isola; sempre esse sono accompagnate da tufi e cineriti contenenti lapilli che ricordano le diverse qualità di andesiti costituenti la maggior parte della Capraia. Normalmente sovrapposti a questi ammassi pomiceo-tufacei, stanno delle brecce andesitiche, che alla loro volta sopportano colate di andesite grigia a fessurazione colonnare.

Il più bell'esempio delle citate condizioni si ha a mezzogiorno del paese di Capraia, nella falesia sottostante al Castello di S. Giorgio, dove l'ammasso di ceneri, pomici e tufi si innalza dal mare ad una cinquantina di metri di altezza, ed è sormontato da una imponente colata di andesite grigia. Quivi furono raccolti i campioni oggetto del presente studio; altri, affatto identici, raccolti sulla costa occidentale dell'isola, al promontorio detto Il Trattoio, ed altrove, come risulterà in un mio prossimo lavoro.

Tali pomici sono di colore bianco giallastro, e a occhio nudo rivelano una struttura fibrosa, con abbondanti interclusi di mica nera. L'attenta osservazione macroscopica mostra pure alcuni cristalli incolori a lucentezza vitrea, ed altri colorati in verde cupo, di natura anfibolica.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Geologico della R. Università di Genova.

(2) Nella seduta del 16 febbraio 1930.

Al microscopio si riconosce una pasta incolore, formata da fibre vetrose, esilissime, delimitanti vacuoli di piccole dimensioni, di forma ora ellittica, ora tondeggiante. Si possono poi determinare i seguenti minerali.

1. Una mica nera intensamente pleocroica, ng = bruno, np = giallo pallido, a forte rilievo, a birifrazione elevata e negativa, a estinzione retta e ad allungamento positivo. L'immagine conoscopica indica un comportamento nettamente uniaassico. I cristalli sono ben formati, e spesso presentano quella forma di alterazione detta *baueritizzazione*; sono infatti frequenti le laminette color giallo oro (*Katzengold* degli autori tedeschi), ed anche quelle completamente incolore disseminate di granuli di magnetite.

2. In ordine di abbondanza seguono i fenocristalli di plagioclasio, la cui natura è subito rivelata dallo scarso rilievo, dalla birifrazione bassa nelle tonalità del grigio di primo ordine, e dalla geminazione polisintetica dell'albite, frequentissima. Si osservano pure la geminazione doppia albite-Carlsbad, e quella del periclino. L'indice di rifrazione è sempre maggiore di quello del balsamo; il segno della birifrazione è positivo; l'allungamento è negativo. In una sezione presentante la doppia geminazione albite-Carlsbad in zona di simmetria, si hanno i seguenti valori di estinzione:

$$1^{\circ} = 11^{\circ} ; 2^{\circ} = 26^{\circ}.$$

In sezioni in zona di simmetria dell'albite le estinzioni massime osservate sono = 22° , 23° .

Questi caratteri indicano trattarsi di miscele comprese tra l'andesina con il 40% e la labradorite con il 47% di anortite (Ab 5 An 4; Ab 1 An 1).

Numerose sono le sezioni presentanti il fenomeno della zonatura; un individuo in sezione (oro) mi dà le seguenti estinzioni per le varie zone rispetto alle traccia della base (001): per il nucleo = 12° ; per le zone periferiche si alternano — 12° , — 15° . Il nucleo quindi si può ritenere come un oligoclasio con circa il 15% di anortite (Ab 4 An 1), mentre le zone esterne si possono riferire alla labradorite con 45, 50% di anortite (Ab 1 An 1). Nei plagioclasii, che sono spesso torbidi per alterazione in una sostanza pulverulenta amorfa, sono frequentemente incluse lamelle di biotite.

3. Più scarso assai dei precedenti è un minerale pleocroico ng = bruno, nm = verde, np = giallo bruno, che in sezioni (001) presenta il reticolo di sfaldatura caratteristico degli anfiboli. La birifrazione piuttosto elevata (giallo arancione di primo ordine) è negativa, e l'allungamento è positivo; il valore dell'estinzione Z: ng = 14° – 15° . Per questi caratteri determino il minerale come un'orneblenda di tipo basaltico.

4. Osservo ancora granuli di un minerale incolore d'abito pirossenico, a birifrazione positiva, con colori fino al giallo di primo ordine; l'estinzione Z: ng = 44° – 45° . La determino per un augite comune.

Nella parte amorfa si osservano delle chiazze brune, che a forte ingrandimento si risolvono in aggregati di granelli minutissimi di magnetite, quarzo e calcite; ciò considero come prodotto di alterazione dei minerali femici sopra descritti.

Noto ancora piccoli granuli di un minerale di colore bruno azzurro, a fortissimo rilievo, e a colori di birifrazione altissimi (terzo ordine). Una precisa determinazione non è possibile, data la piccolezza e la scarsezza dei granuli, ma tendo a considerarlo come rutilo, proveniente dall'alterazione della mica, o dell'augite titanifera.

Qualche microlite di andesina si può osservare immersa nella sostanza vetrosa.

Tale pomice è da ritenersi di tipo andesitico, e presenta gli stessi interclusi delle andesiti della Capraia.

Dopo questo sono passato all'esame microscopico della pomice di Piazza De Ferrari; ho cominciato col rilevare che la comparazione di questa colla precedente era resa difficile dallo stato di alterazione, per modo da prevedere che sarebbe stato senza seria conclusione l'analisi chimica.

Il microscopio rivela una massa fibrosa amorfa, con abbondanti interclusi di una biotite, facilmente determinabile per il suo pleocroismo, ng = bruno cupo, nm = bruno chiaro, np = giallo, per la tipica sfaldatura basale, per il rilievo, per l'estinzione retta, e per la birifrazione elevata e negativa: come quella della pomice della Capraia il suo comportamento ottico è da minerale nettamente uniassico. È frequentemente alterata in una sostanza ferruginosa giallo-rossastra; si osservano pure alcune lamelle baueitizzate, con segregazione di granuli di magnetite.

Osservo poi un altro minerale colorato, pleocroico: ng = bruno, nm = verde, np = giallo verdastro: il quale ha un rilievo medio, una birifrazione elevata (verde di primo ordine) e negativa; un allungamento positivo e un'estinzione Z: ng = 5°-6°: frammenti di sezioni (001) mostrano la sfaldatura caratteristica degli anfiboli. Questi caratteri mi fanno determinare il minerale per una orneblenda di tipo basaltico.

Determino poi per augite comune alcuni granuli quasi incolori, ad abito pirossenico, a forte rilievo, a birifrazione elevata e positiva, e ad estinzione Z: ng = 44°-45°.

Questi minerali, che corrispondono a quelli osservati nella pomice di Capraia, sono assai alterati, e l'alterazione più frequente è di tipo opacitico.

Gli interclusi non colorati sono costituiti da un minerale a scarso rilievo (n - appena maggiore di quello del balsamo) contenente lamelle di mica (come è pure dei plagioclasti della pomice precedente). La prima osservazione lo farebbe confondere con i plagioclasti, ma l'esame a nicols incrociati mostra colori di rifrazione assai elevati (fino al rosa di second'ordine). Il minerale è biassico, il segno della birifrazione è positivo, l'angolo degli assi ottici non è molto grande e l'allungamento è negativo. Si osserva una

geminazione polisintetica del tipo di quella dell'albite, ed anche geminazioni doppie tipo albite-Carlsbad. Le estinzioni dei primi geminati in zona di simmetria sono $= 22^{\circ}-23^{\circ}$. Il mio avviso è che si tratti della trasformazione di un plagioclasio di tipo andesina, con il 40 % di anortite, in idrargillite, trasformazione che ha rispettato l'abito del minerale originario.

Una sostanza di alterazione giallo rossastra non determinabile è diffusa non uniformemente nella pasta amorfa.

Dalla descrizione dei caratteri microscopici ora eseguita risulta quindi chiaramente confermata la grande affinità, per non dire identità, di questa pomice con quella sopradescritta dell'Isola di Capraia.

La provenienza della prima rimane perciò spiegata: essa sarebbe giunta sulle spiagge plioceniche liguri dalla Capraia in eruzione, galleggiando sulle onde, spinta dai venti del sud. Si può spiegare la particolare alterazione dei plagioclasti, per il lungo soggiorno di essa su di una spiaggia fangosa, esposta all'azione di un clima, che la stessa produzione di idrargillite indica tropicale, cosa che del resto concorda con i caratteri della fauna fossile contenuta nelle marne di Piazza De Ferrari.

Stabilita la corrispondenza delle due pomici, e le loro condizioni di giacimento, si viene all'ovvia, quanto interessante, conclusione, che le eruzioni andesitiche della Capraia sono avvenute nel pliocene inferiore.

È questa una deduzione che si potrà forse estendere a molte altre delle isole vulcaniche tirreniche, accompagnanti a distanza la linea costiera della penisola, e far servire a nuove considerazioni sul tempo, e sul modo di accumulazione di esse: è possibile, ad esempio, sin d'ora comprendere come le Lipari presentino terrazzamenti, a cominciare dal più antico quaternario, come il prof. Rovereto ha messo in evidenza ⁽¹⁾.

(1) G. ROVERETO, *Di alcune vicende tettoniche delle nostre aree vulcaniche*. « Rendiconti R. Acc. dei Lincei », vol. XXVII, 1918.

Mineralogia. — *Sull'Artinite di Monte Ramazzo (Liguria)*⁽¹⁾.
Nota di G. LINCIO, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. E. REPOSSI,

Ai minerali provenienti dalla miniera di Monte Ramazzo presso Borzoli rappresentati, oltre che dall'*Aragonite* descritta da G. B. Negri⁽³⁾, da quelli raccolti e studiati da A. Pelloux⁽⁴⁾ e cioè: *Malachite*, *Crisocolle*, *Idromagnesite*, *Brucite*, *Crisotilo*, *Brugnatellite*, *Epsomite*, *Melanterite* e *Calcantite*, è ora da aggiungere la *Artinite* che forma oggetto di questa mia Nota⁽⁵⁾.

Il materiale da me studiato si presenta in due tipi generalmente associati: o sotto forma di sottili incrostazioni d'uno spessore di qualche millimetro, di colore bianco niveo, costituite da aggregati di finissime fibre disposte normalmente alla superficie di estensione delle incrostazioni, oppure in minutissimi cristalli aghiformi, lunghi pochi millimetri, impiantati sulle pareti di alcune piccole cavità della roccia.

Dal primo ricavai un materiale molto puro sufficiente per le ricerche chimiche; dal secondo, anch'esso purissimo, ottenni appena le quantità necessarie per stabilirne l'identità col primo e per le determinazioni degli indici di rifrazione e del peso specifico. Per la estrema esiguità dei cristalli nessuna misura goniometrica fu possibile.

L'analisi quantitativa mi diede i risultati contenuti nella qui sotto riportata tabella in cui sono rispettivamente segnati nella prima colonna le quantità centesimali teoriche richieste per la formola greggia $2\text{MgO} \cdot \text{CO}_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$, nella seconda le quantità centesimali da me trovate e nella terza e nella quarta i corrispondenti rapporti molecolari:

MgO =	41.00	40.93	1.015	2
CO ₂ =	22.37	22.34	0.508	1
H ₂ O =	36.63	36.61	2.032	4
	<hr/> 100.00	<hr/> 99.88		

L'eliminazione dell'acqua non avvenne tutta ad un'unica temperatura; infatti constatai che una parte di essa uguale al 27.43 % della sostanza

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Genova.

(2) Nella seduta del 16 febbraio 1930.

(3) G. B. NEGRI, «Atti della Soc. Lig. di Scienze e Lettere», 1895.

(4) A. PELLOUX, «Annali del Museo Civico di Storia Naturale di Genova, Res Liguisticae», serie 3, vol. VI, 1913.

(5) Ringrazio il prof. Pelloux che tanto gentilmente mise a mia disposizione il materiale della sua collezione che mi servì per queste ricerche.

adoperata, corrispondente cioè a tre molecole, si eliminò a temperatura di circa 700°; poi intorno a questa temperatura si ebbe un arresto manifestandosi in seguito, per ulteriore riscaldamento fino al calor rosso, la eliminazione dell'ultima molecola di acqua corrispondente al 9.18 %. L'eliminazione dell'acqua risultò accompagnata da una parziale decomposizione del minerale per perdita di anidride carbonica.

Da questi risultati si può dedurre che la Artinite di Monte Ramazzo non differisce sensibilmente nella sua composizione chimica da quelle di Val L'anterna, di Fobè e di Viù studiate da Brugnatelli ⁽¹⁾, da Grill ⁽²⁾ e da Fenoglio ⁽³⁾, per cui si può assumere per essa la formola di struttura $MgCO_3 \cdot Mg(OH)_2 + 3H_2O$ ammessa dai precedenti autori.

Per quanto riguarda i caratteri ottici ho notato che si ha estinzione retta parallelamente alla direzione di allungamento dei prismetti e che il piano assiale è normale a detta direzione. Per la determinazione degli indici di rifrazione, date le condizioni del materiale a mia disposizione, applicai il metodo di Becke impiegando liquidi di indice determinato con precisione fino a $\frac{1}{10000}$; fra questi ho notato che dà buoni risultati una miscela di essenza di garofano e di trementina e migliori ancora una miscela molto intima di bromoformio e di olio di ricino.

Usando quest'ultimo liquido ottenni, con un errore di ± 0.001 , per i tre indici principali di rifrazione per la linea D ad una temperatura di 12° i valori contenuti nella prima colonna della seguente tabella che risultano quasi uguali a quelli ottenuti da Larsen ⁽⁴⁾ ed a quelli per α e γ solo approssimati di Brugnatelli rispettivamente riportati nella seconda e terza colonna e completamente uguali per β a quello ricavato da Fenoglio:

	Lincio	Larsen	Brugnatelli	Fenoglio
$\alpha =$	1.490	1.489	1.49	—
$\beta =$	1.535	1.534	—	1.535
$\gamma =$	1.556	1.557	1.55	—

L'Artinite di Monte Ramazzo è quindi anch'essa negativa. Da questi miei lavori poi, partendo dalla formola approssimata $\cos V = \sqrt{\frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha}}$, si giunge per l'angolo assiale a $2V = 68^\circ.40'$.

Anche per il peso specifico la Artinite di Monte Ramazzo non si scosta da quelle di altre località avendo io trovato per esso il valore di 2,02 in cui la seconda cifra decimale è ancora da considerarsi come esatta.

(1) L. BRUGNATELLI, «Centralblatt für Miner., ecc.», 1903.

(2) E. GRILL, «Atti della Soc. Ital. di Scienze Naturali», 1921, vol. LX.

(3) M. FENOGLIO, «Boll. della Soc. Geol. Ital.», 1927, vol. XLVI.

(4) LARSEN, «U. S. Geol. Surv.», 1921, Bull. 679.

Passando ora ad alcune considerazioni di indole generale sulla Artinite per ciò che riguarda il suo contenuto in acqua ed il modo in cui questa si elimina, credo opportuno di indicare in quale posizione essa si trovi nel quadro dei carbonati idrati, basici e neutri, di magnesio. A questo scopo per rendere più evidente il confronto ho nella tabella seguente riportato tutte le specie appartenenti a questo gruppo mediante formole dualistiche trasformate in modo che tutte si riferiscano a quattro molecole di ossido di magnesio:

Idromagnesite	$4\text{MgO} \cdot 3\text{CO}_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$	$4\text{MgO} \cdot 3\text{CO}_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$
Artinite	$2\text{MgO} \cdot \text{CO}_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$	$4\text{MgO} \cdot 2\text{CO}_2 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$
Nesquehonite	$\text{MgO} \cdot \text{CO}_2 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$	$4\text{MgO} \cdot 4\text{CO}_2 \cdot 12\text{H}_2\text{O}$
Carb. neutro di Mg tetraidrato	$\text{MgO} \cdot \text{CO}_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$	$4\text{MgO} \cdot 4\text{CO}_2 \cdot 16\text{H}_2\text{O}$
Lansfordite	$\text{MgO} \cdot \text{CO}_2 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$	$4\text{MgO} \cdot 4\text{CO}_2 \cdot 20\text{H}_2\text{O}$

Da questa tabella risulta che di fronte ad una quantità costante di ossido di magnesio i cinque carbonati hanno tenori in acqua che stanno nei rapporti $1:2:3:4:5$, e che i carbonati neutri ne contengono una maggiore quantità; per cui si è tratti a supporre che essi si trovino in condizione di non saturazione più spiccata di quelli basici e che quindi possano fissare quantità maggiori di acqua anche quando in essi rimane costante la quantità di MgCO_3 .

È poi da notare come secondo Leitmeier ⁽¹⁾ esista ancora un altro carbonato basico idrato di magnesio della formola $4\text{MgO} \cdot 3\text{CO}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ che starebbe fra la Idromagnesite e la Artinite; esso si formerebbe a pressione ordinaria raffreddando una soluzione bollente di bicarbonato di magnesio fino ad una temperatura non inferiore a 65° ; invece per un ulteriore raffreddamento fra 65° e 55° si separerebbe una miscela di detto carbonato e di Nesquehonite, la quale si depositerebbe poi da sola ad una temperatura inferiore a 55° . Ciò lascierebbe supporre che coll'abbassarsi della temperatura aumenti la tendenza in dette condizioni alla formazione di carbonati neutri. Si tratta però di un composto di incerta composizione chimica e di cui non sono note le costanti fisiche.

Il modo di comportarsi dell'Artinite rispetto alla perdita dell'acqua si spiega facilmente se si tien conto del fatto che tre delle sue quattro molecole di acqua sono solo di soluzione e quindi come tali debbono eliminarsi più facilmente della quarta che entra direttamente nella sua costituzione chimica.

A questo proposito però è da notare come anche la Nesquehonite, sebbene sia un carbonato idrato neutro di magnesio della formola $\text{MgCO}_3 + 3\text{H}_2\text{O}$, presenti secondo Leitmeier un comportamento analogo, avendosi in essa che due delle sue tre molecole di acqua si eliminano ad una tem-

(1) LEITMEIER, « Neues Jahrb. für Miner. ecc. », Beil. Band XL, 1916.

peratura inferiore a 162° , mostrando da questa temperatura fino a 175° un arresto ed avendosi poi, per ulteriore riscaldamento, la completa disidratazione accompagnata da un principio di dissociazione per perdita di anidride carbonica.

Ora questo fatto, per cui un corpo che possiede solo acqua di soluzione la può perdere a temperature differenti con intercalazioni di pause, si può spiegare supponendo che la Nesquehonite si comporti analogamente ai solfati neutri idrati di ferro, rame e zinco, nei quali la eliminazione dell'acqua di soluzione avviene in varie riprese con intervalli di arresto in conseguenza del fatto che, durante il progressivo riscaldamento, si hanno in essi variazioni nello stato di equilibrio chimico-fisico che portano alla comparsa di differenti fasi, aventi ognuna un proprio campo di stabilità, rappresentate non solo da solfati idrati neutri meno ricchi in acqua ma anche, con tutta probabilità, da solfati basici derivanti dalla parziale eliminazione del radicale acido che avviene durante la disidratazione.

Ne consegue che, pur ammettendo che lo stato di equilibrio del sistema varii gradatamente col progredire del riscaldamento, si avrà quando si è in presenza di una fase unica e dentro ai suoi limiti di stabilità, un arresto nello sviluppo dell'acqua la quale riprenderà a svilupparsi quando si esca dai predetti limiti; e ciò fino a completa disidratazione. In tal modo si spiega anche perchè essi non siano più capaci di riassorbire l'acqua perduta se non avviene una nuova cristallizzazione del mezzo, a differenza di quanto si osserva nelle zeoliti in cui lo scheletro silicatico più stabile rimane intatto durante il periodo della disidratazione, d'onde la loro capacità di riassorbire l'acqua perduta quando vengano a trovarsi in condizioni favorevoli alla loro riidratazione.

Quanto avviene nei predetti solfati deve avvenire più facilmente nei carbonati, data la loro maggiore facilità di dissociazione, e tanto più nel caso di carbonati magnesiaci i quali, come è noto, si dissociano più facilmente di quelli di calcio.

Accenno in ultimo al modo che, secondo il mio parere, si presta meglio a spiegare come si formi la Artinite, date le sue condizioni di giacitura e di paragenesi. Osservo a questo proposito come essa comparisca in generale nelle zone di alterazione superficiale di rocce peridotiche e serpentinosi associata ad altri minerali magnesiaci come Idromagnesite, Brucite, Brugnateite, ecc.

Questa sua paragenesi non è certamente favorevole a quanto suppose Brugnateite⁽¹⁾ cioè che essa si formi per azione diretta di soluzioni di bicarbonato di magnesio sulla Calcite; ipotesi da lui emessa perchè in alcuni esemplari provenienti da Emarese la Artinite era a contatto di cristalli corrosi

(1) L. BRUGNATELLI, « Rend. R. Ist. Lomb. di Scienze e Lettere », 1903, serie II, vol. XXXVI.

di Calcite di formazione più antica dell'Artinite: fatto questo che non si avvera nelle altre località in cui fu trovata.

Neppure si può ammettere un deposito diretto da soluzioni di bicarbonato di magnesio perchè, mentre per un lato la sua giacitura esclude la possibilità di una formazione in condizioni elevate di temperatura e pressione, per altro lato è noto come in condizioni ordinarie di temperatura e pressione, si formino la Lansfordite e la Nesquehonite rispettivamente fra 0° e 4° e fra 14° e 20°, cioè al disotto e al disopra della loro temperatura di trasformazione a 13°.5.

Invece se si considera il complesso delle sopracitate condizioni di giacitura e di paragenesi, io credo che si possa giungere facilmente a spiegarne la formazione ammettendo che essa derivi da fenomeni di alterazione superficiale di rocce serpentinosi a temperatura ordinaria, dovuti all'azione di acque ricche di anidride carbonica per una reazione analoga a quella ammessa da Leitmeier per la genesi della Nesquehonite, e da lui espressa, partendo dal serpentino, mediante il seguente schema:



Infatti sarebbe sufficiente di supporre che le condizioni della reazione variino col variare della concentrazione perchè si possa giungere all'Artinite mediante un analogo schema:



Questo modo di formazione concorderebbe anche col fatto che la Artinite costituisce sempre non soltanto un minerale recente ma addirittura il più recente, comparando spesso sopra alla Idromagnesite. Nè sarebbe da invocarsi contro a questa ipotesi la differenza di costituzione chimica dei due minerali rispettivamente rappresentati da un carbonato basico e da uno neutro, perchè, come già ho fatto prima notare, dalle ricerche di Leitmeier risulta che da una soluzione bollente di bicarbonato di magnesio può, a seconda della temperatura, separarsi un carbonato basico o la Nesquehonite.

Biologia (Embriologia sperimentale). — *Costituzione zoologica e trapianti. Esperienze tra Anuri e Urodeli* ⁽¹⁾. Nota II di GIULIO COTRONEI e ALDO SPIRITO, presentata ⁽²⁾ dal Socio F. SILVESTRI.

Nella Nota precedente ⁽³⁾ pubblicata in questo stesso periodico si è veduto, come risultato delle nostre esperienze, che trapiantando l'abbozzo olfattivo, non isolato, ma con un complesso di parti circonvicine in cui sia compreso un frammento di encefalo, si ottiene uno sviluppo morfologico molto rilevante. A questo riguardo va ricordato che un risultato della stessa natura, per quanto concerne i trapianti omoplastici, fu ottenuto dal Luna nel 1915. Quest'autore trapiantando l'abbozzo olfattivo di *Disco-glossus pictus* in altri esemplari della stessa specie, otteneva risultati differenti a seconda della presenza o meno di pezzi di telencefalo e di mesenchima coinvolti nelle operazioni: nei trapianti di placode olfattivo senza il pezzo di telencefalo corrispondente, ottenne risultati meno cospicui. Inoltre il Luna ha veduto che il grado di differenziazione morfologica è in rapporto con la quantità di mesenchima trapiantato. Nei casi, poi, di solo trapianto di ectoderma ha notato che il placode va incontro a regressione oppure dà origine ad un organo olfattivo molto atrofico.

Vogliamo porre in rilievo che risultati, non dissimili essenzialmente, abbiamo ottenuto nelle nostre esperienze di trapianti di abbozzi olfattori di *Rana esculenta* in *Triton cristatus*, in quanto serve a darci una prova che, durante il periodo dell'autodifferenziamento, i processi embrionali, o per lo meno molti di essi, fino a un dato momento dello sviluppo si svolgono identicamente a quanto avviene nei trapianti omoplastici di abbozzi embrionali di Anfibi.

I risultati ora esposti riguardanti il placode olfattivo, crediamo, per ora almeno non poter essere generalizzati a tutti gli abbozzi trapiantati. Per l'occhio, di *Rana* trapiantato in *Triton*, purchè siano presenti il terri-

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

(2) Presentata nella seduta del 16 febbraio 1930.

(3) La pubblicazione di questa seconda Nota è stata ritardata a causa del trasferimento del nostro Istituto; avevamo, però, nel frattempo fatta una comunicazione il 9 ottobre 1929 al I Congresso degli Anatomici a Bologna. In questa occasione abbiamo comunicato altri fatti e abbiamo avuto anche modo di citare tutti i lavori italiani di innesti e trapianti omoplastici riguardanti gli abbozzi embrionali da noi trapiantati. Non avevamo nessuna ragione di citarli prima per il motivo molto evidente che le esperienze più notevoli da noi fatte e i risultati a cui siamo giunti non hanno precedenti in letteratura. Non le hanno poi di certo nei lavori sopramenzionati.

torio lentogeno e il mesenchima circostante, abbiamo ottenuto il differenziamento completo, o per essere più esatti, abbiamo notato la sola mancanza del nervo ottico. Casi di questo genere si sono ottenuti anche quando la vescicola ottica era stata trapiantata con pezzi di encefalo della stessa forma, e quindi non possiamo ascrivere a questa condizione lo sviluppo maggiore o minore dei trapianti oculari.

Il Luna è propenso a ritenere che, per quanto riguarda lo sviluppo del placode olfattivo, l'isolamento di esso dalle parti circonvicine si farebbe risentire per l'azione del trauma operativo; questa condizione bisogna certamente considerarla: se i pezzi trapiantati soffrono nell'operazione certamente ne risentirà l'esito definitivo dell'esperienza, ma crediamo che bisogna considerare anche le altre condizioni che rappresentano l'ambiente di sviluppo dell'ospite rispetto alle parti trapiantate. Se un determinato abbozzo è meno isolato può trovar modo migliore di evolversi verso la sua struttura morfologica definitiva.

Nelle osservazioni riportate nella Nota precedente⁽¹⁾ abbiamo posto in risalto che le vescicole ottiche di *Rana* trapiantate accanto a quelle di *Triton* possono dar luogo a processi di fusione. Abbiamo visto anche nelle nostre esperienze che organi a struttura istologica diversa non mostrano una reale fusione. Così si è visto che l'occhio di *Rana* trapiantato nell'addome di esemplari di *Triton*, pur trovandosi strettamente involto dall'epitelio intestinale ne è separato da un esile strato di tessuto connettivo. Mentre organi simili o della stessa natura (occhi e tessuto nervoso) si continuano direttamente con processi di fusione; organi dissimili si mostrano separati da connettivo. Questi risultati da noi ottenuti nelle esperienze di trapianto tra forme zoologiche lontane (Anuri e Urodeli) ricordano quanto si è ottenuto negli innesti e trapianti omoplastici, ma teniamo a far presente che le nostre esperienze rappresentano una nuova avanzata nelle conoscenze sull'argomento.

Nuove esperienze di fusioni tra organi simili sono in corso nel nostro Istituto⁽²⁾; esse saranno una estensione delle ricerche da noi compiute.

Il problema delle fusioni di parti simili è vecchio. Il Born se ne occupò a lungo nelle sue classiche esperienze di innesti di Anfibi che rimontano a più di trent'anni or sono. Nel 1913 l'Anastasi ottenne per il primo, mediante innesti di embrioni con vescicole ottiche lese, in *Discoglossus pictus*, la fusione (non apparente ma reale) di tutti gli strati retinici, del « tapetum » e delle vescicole cristalline, tanto da dire: « Se un piccolo solco non indicasse la divisione delle due retine e un sottile cumulo di pigmento non rivelasse l'assorbimento della coroide insinuata tra gli elementi appartenenti

(1) In questi « Rendiconti », vol. X, 1929.

(2) Tra queste nuove esperienze possiamo già annunziare i risultati di Aldo Spirito sulla fusione del placode olfattivo di *Bufo vulgaris* trapiantato accanto a quello di *Axolotl*.

all'una e all'altra retina, si direbbe che questo sia un occhio unico di un unico individuo, tanto gli elementi retinici dell'una vescicola ottica si continuano strato a strato senza alcun limite di demarcazione con quelli dell'altro ».

In un lavoro di uno di noi (Cotronei, 1922) condotto sugli innesti di Anfibi anuri si rileva l'importanza che bisognava dare a queste esperienze per la verifica dei problemi riguardanti le attrazioni di parti simili che occupavano la propria attività di studioso ⁽¹⁾.

Nel 1918 Harrison iniziò una nuova serie di ricerche sulle fusioni mediante trapianti, ottenendo la fusione di due abbozzi precoci di arti culminanti nella formazione di un arto unico, come anche lo sviluppo, dalla metà di un abbozzo, di un arto normale. Con ciò dimostrava che l'arto costituisce un sistema armonico equipotenziale. L'Harrison fece poi estendere nel suo Istituto queste ricerche per altri abbozzi embrionali: a questi lavori appartengono quelli del Burr (1924), (fusione di placodi olfattori di *Amblystoma*) e del Pasquini (1927) (fusioni di abbozzi oculari di *Pleurodeles*). Le nostre esperienze, che sono le prime nella letteratura, hanno dimostrato che tali fusioni sono anche possibili tra Anuri e Urodeli, almeno fino al punto da mettere in evidenza quella « proprietà di affinità e di attrazione dei singoli abbozzi oculari della stessa specie ». Questo già dicevamo nella prima Nota: evidentemente nel confronto ci riferivamo a lavori noti di altri autori che non nominavamo perchè lo avremmo fatto, come facemmo e facciamo, in Note successive ⁽²⁾. Ma a parte tutto questo, quello che ci preme mettere in risalto è che, operando tra forme zoologiche lontane, non soltanto abbiamo potuto veder procedere i singoli abbozzi di organi verso il loro differenziamento, e in questo non abbiamo fatto che confermare ricerche già note, almeno per alcuni abbozzi (Lewis, Ogawa, ecc.); ma per i primi abbiamo potuto verificare le proprietà di attrazione e di fusione di abbozzi di organi simili tra Anuri e Urodeli.

Un altro punto originale delle nostre ricerche è lo studio del momento biologico riguardante i processi istolitici cui vanno incontro gli abbozzi di *Rana* trapiantati in *Triton*.

Abbiamo però messo in risalto nella I Nota che le nostre considerazioni hanno valore per gli organi finora sperimentati. Ci siamo limitati ad esporre i fatti accertati: fatti cioè realmente osservati. In una comunicazione fatta al Congresso anatomico di Bologna il 9 ottobre scorso, a tal proposito abbiamo fatto risaltare che tutto ci lascia pensare che le condizioni biochimiche inducenti la repulsione tra l'ospite e il trapianto, sono i nuovi fattori umo-

(1) Per una rivista storica sull'argomento vedi una Nota di GIULIO COTRONEI in « *Monitore Zoologico Italiano* », 1930 anno XLI, n. 1.

(2) « *Atti del I Congresso della Società Italiana di Anatomia* », ottobre 1929 (in « *Monitore Zoologico Italiano* »).

rali (endocrini) e nervosi che si palesano a un determinato momento dello sviluppo, che uno di noi (Cotronei) ha indicato corrispondere al termine dell'assorbimento vitellino, quando la larva comincia a mangiare. Le osservazioni obiettive da noi condotte con questo nuovo genere di esperienze hanno mostrato una corrispondenza tra i processi istolitici di pezzi trapiantati e le nuove condizioni biochimiche dell'ospite, e quindi rappresentano nello stesso tempo una nuova verifica biologica del momento in cui, nell'evoluzione della forma, vengono a verificarsi nuovi fattori biochimici. Tale risultato va ben messo in risalto perchè è indipendente da qualsiasi valutazione restrittiva e si sovrappone anche a qualsiasi considerazione critica che noi stessi potremmo essere indotti a fare. Va ricordato che il Lewis fin dal 1907 aveva rilevato un processo disgregativo dell'occhio di *Rana* trapiantato in *Amblystoma*: in un esemplare fissato 27 giorni dopo l'operazione egli notò disgregazione completa dell'occhio. Di quest'ultimo rimanevano solo poche cellule sparse. L'embriologo americano non mise in rapporto il fatto con le condizioni biochimiche di un determinato stadio di sviluppo, ma per giungere a questo era necessario partire da osservazioni che permettessero di colpire tali fatti in qualche organo che si mostrasse più suscettibile ai processi istolitici, e che si avesse una serie graduale dei vari processi e che, infine si conoscessero, forse, determinate esperienze precedenti.

Le nostre osservazioni ci hanno mostrato inoltre una differente resistenza dei vari abbozzi nei riguardi al tempo di disgregazione: l'organo olfattorio infatti, nelle nostre esperienze, si è mostrato più suscettibile ai processi istolitici sopra descritti.

Uno degli scopi a cui abbiamo mirato fin da principio delle nostre esperienze è stato quello di studiare le connessioni nervose dei pezzi trapiantati. Abbiamo già rilevato che tanto l'abbozzo olfattivo quanto quello oculare di *Rana esculenta* trapiantati in *Triton* hanno formato fibre nervose, ma queste si sono messe in rapporto soltanto con pezzi di encefalo della stessa specie e non con l'asse neurale dell'ospite. Queste sono le osservazioni finora assurte al valore di fatti, ma la possibilità di ottenere i nervi, olfattivo e ottico (così dobbiamo interpretare in alcuni casi le fibre nervose originate dai pezzi trapiantati) anche nelle condizioni sperimentali da noi realizzate, c'induce a persistere nelle nostre esperienze⁽¹⁾; è possibile che quanto abbiamo già otte-

(1) Era stata appena spedita questa Nota per la presentazione, quando abbiamo potuto ottenere un nuovo risultato tra quelli che ci proponevamo di ristudiare nelle nostre esperienze. In nuove operazioni di trapianto compiute il 30 gennaio 1930, tra *Bufo vulgaris* (donatore) e *Axolotl* (ospite) — operazioni appartenenti alla nuova stagione, iniziatesi quest'anno precocemente — abbiamo ottenuto, per ora in un esemplare fissato il 10 febbraio, la connessione del nervo ottico dell'occhio trapiantato di Anuro con l'encefalo dell'Urodelo ospite, in posizione normale. La vescicola otica primaria era stata trapiantata in sede di quella secondaria dell'*Axolotl*, asportata.

nuto sia in dipendenza di condizioni di vicinanza o di più agevole accesso delle fibre nervose in formazione verso i centri encefalici con i quali riescono di più facile connessione. È già noto del resto che le fibre nervose tendono a seguire quelle vie che sono più agevoli al loro percorso. Se si otterranno le connessioni con i centri encefalici dell'*Urodelo* ospite cosa avverrà? Avranno gli organi trapiantati in queste condizioni lo stesso destino di quelli già da noi descritti? E se si trapiantano abbozzi precocissimi (abbozzi presuntivi di organi o, in condizioni più precoci) si comporteranno questi in maniera differente da quelli trapiantati in stadi posteriori, quando cioè sono già avanzati i processi di sviluppo?

Tutti questi elementi di studio, come il lettore può ben capire, non distruggono quanto abbiamo già messo in rilievo nei nostri trapianti nei riguardi dei momenti biologici indagati nelle esperienze già riferite.

Prima di terminare questa breve esposizione vogliamo ricordare che nelle nostre esperienze, eseguite già l'anno scorso, di trapianti di occhi di *Triton cristatus* in embrioni di *Rana esculenta*, abbiamo avuto, dopo cicatrizzazione della ferita, rapidissima necrosi del pezzo trapiantato. Non possiamo dire per ora se i risultati ottenuti erano puramente occasionali o se mostrano una reale incompatibilità biochimica che non si verifica nelle condizioni sperimentali inverse. Da un punto di vista teorico il risultato ci ha sorpreso poichè Ogawa ottenne, per la vescicola otica, risultati ugualmente positivi tra *Rana* e *Amblystoma* e nell'inverso. Speriamo, con nuove esperienze, di poter dire, anche su questo punto, una parola definitiva.

Biologia. — *Azione esercitata dalle onde elettromagnetiche ultracorte sul potere catalasico dei semi.* Nota di G. MEZZADROLI e di E. VARETON, presentata ⁽¹⁾ dal Socio B. LONGO.

Abbiamo posto in evidenza in Note precedenti l'azione che le onde elettromagnetiche ultracorte ($\lambda = 2-3$ m.) emesse da un Radio-oscillatore esercitano sulla germinazione dei semi e sull'accrescimento delle piante.

Onde seguire meglio l'influenza stimolante delle onde elettromagnetiche sui semi sottoposti alla loro azione, influenza che si manifesta con un costante aumento del potere germinativo, abbiamo voluto esaminare la variazione di una caratteristica enzimatica dei semi: la *catalasi*, questa variazione è strettamente legata alla germinazione dei semi, e si manifesta con un aumento costante durante i primi giorni di germinazione.

La *catalasi* è un fermento che ha la proprietà di scindere l'acqua ossigenata in acqua e ossigeno molecolare, senza che a questa caratteristica

(1) Nella seduta del 2 febbraio 1930.

siano legati direttamente altri processi di ossidazione. Essa è largamente diffusa nei tessuti animali e vegetali ed esercita una azione biologica protettiva sulle cellule, scindendo i perossidi e riportando l'ossigeno in forma molecolare ⁽¹⁾.

Tutti i semi sono ricchi di *catalasi*, essa è presente principalmente nell'embrione. È ormai accertato che durante i primi giorni di germinazione dei semi il potere catalasico aumenta: Bach e Oparin ⁽²⁾ hanno trovato infatti come la formazione della *catalasi* viene stimolata durante la germinazione aeroba, il massimo del potere catalasico si ha secondo questi AA. fra il 3° e 6° giorno. Nel primo giorno di germinazione si osserva spesso una depressione leggera della *catalasi*.

Il Gracandin ha trovato la curva della *catalasi* parallela a quella della respirazione col massimo al 4°-5° giorno: raggiunto il massimo di potere catalasico, essa torna a diminuire.

Noi abbiamo seguito la variazione del potere catalasico durante i primi giorni di germinazione, nei semi posti a germinare nell'oscurità in substrato di cotone idrofilo inumidito, e sottoposti all'azione delle onde elettromagnetiche ultracorte.

Le esperienze furono eseguite su semi di piante diverse: semi di fagiolo (*Phaseolus vulgaris*), semi di orzo, semi di frumento, semi di mais, di piselli e di ceci. Come già riferito abbiamo potuto constatare ogni volta un aumento di germinazione nei semi sottoposti all'azione delle onde e un aumento del loro potere catalasico.

Tecnica.

Abbiamo seguito la variazione del potere catalasico dei semi durante i primi cinque giorni di germinazione. I semi sottoposti a germinazione su substrato di cotone inumidito, e all'oscurità. Le esposizioni all'azione delle onde ultracorte venivano fatte per una durata di 1/2 ora giornaliera, i semi venivano posti entro un circuito in risonanza col Radio-oscillatore ⁽³⁾.

Per la misura del potere catalasico ci siamo serviti del metodo di determinazione volumetrica dell'ossigeno svolto. Metodo che quando si procura di evitare una sovrasaturazione a mezzo di scuotimento è analogo come esattezza di misura a quello di titolazione a mezzo di permanganato di potassio (Oppenheimer) ⁽⁴⁾.

(1) C. OPPENHEIMER, *Die Fermente und ihre Wirkung*, 1926, Ediz. Georg Thieme. Leipzig.

(2) A. BACH e A. OPARIN, « Biochem. Zeitschrift », fasc. 134, p. 183.

(3) G. MEZZADROLI ed E. VARETON, *Ulteriori ricerche sull'azione esercitata dalle onde elettromagnetiche ultracorte ($\lambda = 2-3$ m.) sulla germinazione dei semi e sull'accrescimento delle piante*. « Rend. R. Accad. dei Lincei », vol.

(4) Loc. cit.

Riportiamo in tabella i risultati ottenuti, relativi all'orzo, ai fagioli ed al mais.

Esperienza n. 1.

ORZO.

3 gr. di orzo ridotto in poltiglia + 15 cc. di H_2O_2 + 10 cc. di acqua distillata.

Il potere catalasico veniva seguito a mezzo della determinazione volumetrica dell'ossigeno, sviluppato (volume a $t = 15^\circ C$, pressione = 760 mm.) durante i primi 30 minuti; le letture venivano fatte di 5 in 5 minuti.

Tempo in minuti o	cc. di ossigeno svolto $t = 15^\circ C$. $p = 760$ mm.									
	1° giorno		2° giorno		3° giorno		4° giorno		5° giorno	
	n. 1	n. 2	n. 1	n. 2	n. 1	n. 2	n. 1	n. 2	n. 1	n. 2
5 minuti	6.4	9.9	7.2	11.5	8.6	16.8	13.8	24.6	23	29
10 »	9.6	16	11.3	17.8	14	21	19	35	32.4	43.2
15 »	13.2	19.8	14.4	20.4	19	26.2	24	38.8	38	45.4
20 »	15.8	24	16.2	26.5	20	28.2	26.2	42.8	42.8	50
25 »	18	29.2	18.8	31.8	22.8	33	28.4	45	44	54
30 »	20	33	21.5	35.2	25	38.2	31	48.2	46	58.8

n. 1 = prova di confronto.

n. 2 = prova sottoposta all'azione delle onde corte.

Esperienza n. 2.

FAGIOLI.

Tempo in minuti o	cc. di ossigeno svolto $t = 15^\circ C$. $p = 760$ mm.									
	1° giorno		2° giorno		3° giorno		4° giorno		5° giorno	
	n. 1	n. 2	n. 1	n. 2	n. 1	n. 2	n. 1	n. 2	n. 1	n. 2
5 minuti	26	32.2	29.8	33.8	50	60	74	88	81	90.2
10 »	31.4	40.2	34.6	41.3	52.8	62.8	79	97.2	83.2	99
15 »	33.4	42.4	38.2	44.8	57.5	66.2	81	99.6	86	104.8
20 »	34.8	46	42	48	60	68.8	85	102	90	109
25 »	35.4	47.8	43.8	50.9	64	71.4	89.3	106.4	94	112
30 »	36.6	49.2	45.3	55	66.2	76	93.2	108.3	97	115

n. 1 = prova di confronto.

n. 2 = prova sottoposta all'azione delle onde corte.

Esperienza n. 3.

MAIS.

Tempo in minuti o	cc. di ossigeno svolto $t = 15^{\circ} \text{C.}$ $p = 760 \text{ mm.}$									
	1° giorno		2° giorno		3° giorno		4° giorno		5° giorno	
	n. 1	n. 2	n. 1	n. 2	n. 1	n. 2	n. 1	n. 2	n. 1	n. 2
5 minuti	40	46.2	56	62.6	70	78.8	84	93.5	88	98.2
10 »	46.8	52.4	62.6	68.3	76.4	83.6	87.2	95.8	90.8	103.8
15 »	52	57.8	65.8	72	80	87	93	97.8	92	107
20 »	55	60	70	75.8	83	90.8	92	100	95	116.4
25 »	60	65	76	81.9	86.8	94.4	94.8	102.8	109	121.2
30 »	68.3	73.4	79.8	85.2	90	98.2	97.2	108	119	132

n. 1 = prova di confronto.

n. 2 = prova sottoposta all'azione delle onde corte.

Conclusione:

Le onde elettromagnetiche ultracorte ($\lambda = 2-3 \text{ m.}$) emesse da un Radio oscillatore esercitano un'azione favorevole sulla germinazione dei semi stessi.

Così, i semi sottoposti all'azione delle onde elettromagnetiche ultracorte ($\lambda = 2-3 \text{ m.}$), mostrano un aumento del potere catalasico durante i primi giorni di germinazione.

Si può osservare come il potere catalasico dei semi sottoposti all'azione delle onde corte, corrisponda al potere catalasico delle prove di confronto, che hanno circa da 1 a 2 giorni di più di germinazione.

Zoologia. — *Struttura e funzione dell'intestino medio di « Peroderma cylindricum »*. Nota riassuntiva ⁽¹⁾ di B. MONTEROSSO, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. A. Russo.

Scopo del lavoro. — L'intestino di questo Copepode, nel tratto, che occupa il corpo propriamente detto, cioè prescindendo da quella regione, che segue immediatamente all'esofago e si trova nel peduncolo cefalo-ampollare, ha funzione e struttura degne di essere prese in considerazione, non solo allo scopo di recare un contributo alla conoscenza del tubo digerente dei Copepodi parassiti — argomento, che può dirsi del tutto trascurato finora dagli osservatori — ma anche per le interessanti peculiarità della sua conformazione cito-istologica, nonchè per alcuni problemi di carattere generale, che sorgono dal suo studio.

Materiale e metodi. — Le presenti ricerche sono state fatte su parecchi individui, fissati in svariate miscele (Flemming, Bouin, Telleyesniczky, Schaudinn, Orth, ecc.), nelle quali vennero immersi allo stato vivente e tagliati, subito dopo, in due o più parti, per assicurare la perfetta e rapida penetrazione del liquido. Le fette, ottenute dopo imparaffinamento, vennero trattate con differenti metodi di colorazione.

Movimento dell'intestino. — Risulta dalle mie ricerche, che la parte suddetta del tubo digerente esegue continuamente e ritmicamente delle ondate di espansione (diastole), che lo percorrono nel senso postero-anteriore. Ne consegue anzitutto un movimento del succo, che riempie il tubo digerente medesimo, dall'innanzi all'indietro, e, in secondo luogo, uno spostamento, in senso postero-anteriore, del liquido celomico, in cui, può dirsi, fluttua il tubo digerente medesimo e che riempie il corpo del Copepode. Il liquido celomico, appunto, dopo ogni ondata, assume una tinta più rossa, evidentemente per l'esistenza di un pigmento a carattere respiratorio. Diversi fatti hanno confermato al riguardo, che l'assunzione dell'ossigeno si realizza per mezzo delle appendici cefaliche del parassita, studiate in un lavoro precedente ⁽³⁾ e che sono affondate nel parenchima renale dell'oste, a contatto col sangue di esso.

In conclusione, l'intestino di Peroderma compie anche la funzione di organo cinetico del liquido interno del corpo (circolazione) ed è quindi in relazione con l'attività respiratoria. Qualche tempo dopo la morte dell'oste

(1) Il lavoro definitivo è in corso di stampa nell' « Archivio Zoologico Italiano ».

(2) Nella seduta del 16 febbraio 1930.

(3) « Archives de Biologie », t. XXXVI, pp. 167-223.

(*Clupea pilchardus*) il parassita sospende le contrazioni intestinali e il succo celomico diventa bianco-pallido-gialliccio. Ma appena le appendici cefaliche vengano irrorate col sangue del pesce, fuoruscito dai vasi, il tubo riprende la sua normale attività e il succo ridiventa rosso.

L'intestino, per adempiere alla detta funzione, possiede uno strato di sottilissime fibrille muscolari, che riveste esternamente la membrana propria (basale) dell'organo e che era già stato da me stesso visto precedentemente⁽¹⁾, ma la cui natura era rimasta sconosciuta. Al di fuori di tale strato si trova una seconda membrana anista (membrana intestinale esterna).

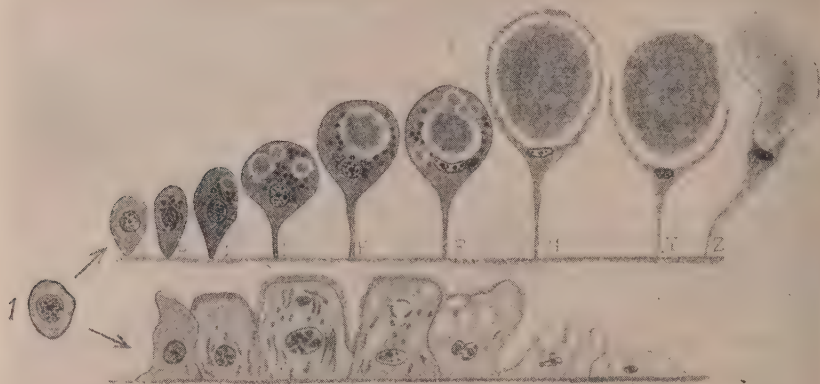


Fig. 1. — Schema dei due cicli evolutivi, percorsi dalla cellula intestinale, in *P. cylindricum*, derivando da un elemento indifferente 1 (cellula «iniziale») e pervenendo ad una forma degenerativa finale (Y, Z; y, z).

Struttura della mucosa intestinale. — L'intestino del parassita compie anche la funzione digerente. All'uopo è fornito di una mucosa, che poggia sulla basale e presenta due tipi cellulari ben netti, sempre sicuramente e facilmente differenziabili (fig. I). Entrambi i tipi derivano da una forma cellulare unica, che diremo «cellula iniziale», e percorrono due distinti cicli morfo-fisiologici le cui tappe si son potute seriare compiutamente e chiaramente, perchè a ciascuna corrisponde un aspetto particolare.

Diciamo una volta per tutte che, ad eccezione della cellula iniziale, nessun'altra forma citologica è capace di moltiplicarsi.

Cellula da fermenti. — Le cellule iniziali (fig. I, 1), provenienti da un ripetuto processo cariocinetico, sono quasi sferiche e si vedono aggruppate qua e là in varî punti dell'epitelio. Di esse, alcune, subito dopo la loro

(1) « Archivio Zoologico Italiano », vol. 11, pp. 105-141.

apparizione, si ingrossano, modificando la propria forma gradatamente, fino ad assumere l'aspetto, ciascuna, di una pera (fig. I, *A*), il cui peduncolo, molto corto in principio, va man mano allungandosi e assottigliandosi (*B*... *G*), ma rimane con un estremo attaccato alla membrana propria dell'intestino. Frattanto la regione (distale), sostenuta dal peduncolo, aumenta rapidamente di volume e si arrotonda fino a costituire una sfera (*D*), che sarebbe rigorosamente geometrica, se nella parte inferiore, invece di una calotta, non presentasse quel sottile e lungo cono, che è appunto il peduncolo suddetto. Il citoplasma, durante questa trasformazione, il cui intimo determinismo non sarebbe possibile discutere qui, è — nelle fette di pezzi fissati e colorati — scuro, compatto, ed apparisce come se fosse formato da minutissimi ma ben risolvibili granuli sferoidali (citomicrosomi), collegati da sostanza anista e jalina. Il nucleo tende a porsi in quella porzione di citoplasma, che, appartenendo alla regione sferica, confina col peduncolo cellulare. In stretta prossimità del nucleo, di preferenza verso la regione distale della cellula, appariscono, già precocemente (*B*), dei corpuscoli in generale rotondeggianti e ben colorabili con le tinte basiche, probabilmente fuorusciti dal nucleo o almeno formatisi nel citoplasma sotto l'influenza di questo organite. Nella sfera stessa, ma di solito distalmente, e, quasi in ogni caso, perifericamente, si manifestano da uno (*C*) a quattro (raramente più) vacuoli (*D*), riempiti da una sostanza, che i reagenti coagulano sotto forma di massa amorfa, non elettivamente colorabile. Tali vacuoli, se sono multipli, finiscono per fondersi insieme, costituendone uno solo, centrale (*E*). I corpuscoli (inclusi citoplasmici) si trovano ormai ridotti per numero e dimensione; essi sono disposti generalmente in guisa che, nelle sezioni longitudinali della cellula, danno l'immagine di una corrente di granuli, la quale, iniziandosi presso il nucleo, si scinda lateralmente in due rami, che costeggiano il vacuolo centrale. Di solito, inoltre, vicino al nucleo, che in questa tappa del ciclo è d'un ovale più o meno regolare — si osservano due masse amorphe (*E*, *F*) di una sostanza quasi omogenea, coagulata e ben tingibile con i colori basici: per i suoi caratteri, sembra di natura identica a quella, che costituisce i corpuscoli inclusi, accennati in precedenza.

Ulteriormente il vacuolo centrale aumenta di volume, anche perchè nella zona periferica di citoplasma insorgono nuovi vacuoli, il cui contenuto si versa in quello, mentre il citoplasma stesso viene ad assottigliarsi (*F*-*G*). Il nucleo frattanto, che non ha mutato la sua posizione, si conforma a coppa, con la concavità diretta verso il grande vacuolo e quasi sporgente in esso. In questo stadio, la cellula ha raggiunto la sua piena maturità. Allora il nucleo degenera del tutto (*G*, *Y*), la calotta superiore del citoplasma perivacuolare si disfa (*Y*), sicchè la massa (globulo di secreto), che riempiva la grossa vescicola, viene messa in libertà e cade nel lume intestinale, ove si discioglie immediatamente. Bisogna avvertire che talune cellule, pur avendo gli stessi caratteri morfologici ed evolutionali di quelle

ora descritte, contengono nel vacuolo una massa di liquido, che, nelle sezioni, apparisce come una nubecola granulosa (*Z*) e rada, con volume di solito inferiore a quello della vescicola in cui è contenuta. L'espulsione allora avviene per una speciale « filtrazione », dopodichè si trova la vescicola vuota, grinzosa, contratta, con forma irregolare.

Varie considerazioni e confronti, basati su dati materiali di osservazione e sull'analogia con elementi simili, descritti in altri Crostacei, ci fanno interpretare il significato funzionale di questa interessante individualità citologica nel modo seguente: L'alimento (sangue di *Clupea*), dopo aver subito una certa modificazione nel lume intestinale, per opera di fermenti⁽¹⁾, probabilmente derivanti dalla cellula stessa, che descriviamo, viene assorbito da questo elemento. Nell'interno del citoplasma, per azione di sostanze, certo di natura enzimatica, prodotte da esso stesso, l'alimento assunto viene trasformato in un liquido, che non essendo miscibile col citoplasma, si isola, dando luogo, o contribuendo, alla formazione del vacuolo vescicolare. Quando la cellula diventa zeppa di tale liquido, perde ogni capacità vitale (come indica la degenerazione del nucleo) e allora disfacciandosi mette in libertà i prodotti (globulo di secreto) cui ha dato origine con la sua specifica attività. Si tratta dunque, almeno in parte, di una digestione intracellulare, che richiama alla memoria in modo suggestivo il processo di alimentazione per fagocitosi, che in certi animali inferiori si realizza a spese di particelle nutritizie. Aggiungiamo che la cellula da fermenti è sempre priva di orletto striato; essa non presenta mai nel suo corpo la minima traccia di sostanza grassa o lipoide e, nell'ultimo tratto dell'intestino medio, confinante con l'intestino anale, manca del tutto⁽²⁾.

Cellula assorbente. — L'elemento della mucosa intestinale, che siamo venuti descrivendo, sta nel rapporto di 1 : 10 fino ad 1 : 30 in media, rispetto ad un altro elemento, che deriva anch'esso da una cellula « iniziale » ma percorre un ben distinto ciclo morfo-funzionale (fig. I, *a* ... *z*). Dalla forma quasi sferica, che è quella della cellula « iniziale », passa a forma triangolare (*a*), quadrangolare o, comunque, irregolare (in sezione). Subito appena iniziata la sua evoluzione, tale cellula acquista un orletto striato (*b*, *c*, *d*) e, nel suo citoplasma distale, fra il nucleo e l'orletto, apparisce, ma non è costantemente visibile, un parasoma ellissoidale (*c*). L'elemento citologico in discorso accresce, mai però di molto, il suo volume, ed ha citoplasma omogeneo, rado, trasparente, più o meno refrattario ai colori. Non tarda a presentare nel citoplasma, entro la regione basale, ma spesso anche attorno al nucleo, dei corpuscoli irregolari, dei filamenti (*b* ... *d*), delle laminette basofile (ergastoplasma). Queste formazioni paraplastiche ben presto scom-

(1) « Archivio Zoologico Italiano », vol. 11, pp. 105-141.

(2) In taluni individui di *P. cylindricum*, si è potuto dimostrare obiettivamente che un certo numero di cellule da fermento, possedendo due nuclei, danno luogo ad altrettanti cicli morfo-fisiologici successivi ed identici, dopodichè soccombono anch'esse.

paiono (*e . . .*), mentre il nucleo comincia a degenerare, l'orletto, si disfa (*d . . .*), il parasoma si dissolve, lasciando sovente (*d*) per qualche tempo dei frammenti arcuati o bastonciniiformi. Frattanto il citoplasma si dissemina di vacuoli otticamente vuoti, ad aspetto irregolare, vere lacune, che confluendo fanno alfine dissolvere la cellula (*y, z*). Anche qui manca qualsiasi traccia di sostanze grasse o lipoidee. Il significato funzionale di cosiffatto elemento, sia per i caratteri morfologici di esso, sia per ragioni di analogia con elementi simili, descritti e sperimentalmente investigati da altri autori in materiali diversi, si può agevolmente interpretare: trattasi di cellule assorbenti (*Resorptionzellen* degli autori tedeschi). Esse assumono dal lume intestinale gli alimenti espulsi dalle cellule del tipo sopra descritto e li inviano fuori del tubo digerente. Purtroppo il cammino di tali corpi non si può seguire, perchè essi non assumono caratteri morfologici nè tintoriali.

Attorno all'intestino, che, come è stato detto, fluttua in seno al liquido celomico del parassita, si trovano cellule (mononucleari) migranti, che in gran numero si accostano alla parete del tubo digerente e spesso penetrano, per diapedesi, attraverso la membrana esterna e anche — oltrapassando il manicotto muscolare — attraverso la membrana basale, fino a raggiungere in certo numero la mucosa digerente. Il significato e il destino di tali cellule, in rapporto alla funzione alimentare, ci rimane per ora sconosciuto.

Considerazioni conclusive. — La questione della duplicità morfologica (*e*, possiamo dire, funzionale) dibattuta da anni — e ancora per vero non completamente chiusa — fra molti Autori, su svariato materiale, viene nel nostro Copepode inequivocabilmente decisa, grazie soprattutto ai caratteri differenziali nettissimi, che distinguono le forme di un tipo dalle forme dell'altro tipo cellulare e grazie alla chiarezza con cui si presenta la cellula « iniziale », fonte comune dell'uno e dell'altro ciclo. La vita delle due forme cellulari, limitata ad un solo periodo funzionale — due, al massimo, nelle cellule da fermenti — fu supposta da taluni Autori in casi somiglianti; è però qui d'una evidenza insolita. Anche le peculiarità con cui la cellula da fermento espleta il suo compito sono abbastanza notevoli, sebbene in altri Crostacei dal Guieysse ⁽¹⁾ fosse stato pensato qualcosa di simile. Infine, non può non sorprenderci la duplicità cellulare in un organo di *P. cylindricum*, che, come io per il primo ho scoperto ⁽²⁾ e continuerò ancora a dimostrare più largamente in prossimi lavori, costituisce unica eccezione, fra i Metazoi, per l'acellularità della sua struttura, che sarebbe assoluta, se prescindessimo dall'intestino e dall'ovario.

(1) « Archives d'Anat. microsc. », vol. IX, pp. 343-492.

(2) « Rendiconti R. Acc. Lincei », (6), vol. III, f. 5, pp. 278-281.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 2 marzo 1930 (Anno VIII)

Presidenza del sen. prof. A. GARBASSO

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Chimica. — *Sopra i neri di pirrolo*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ del Socio
A. ANGELI.

Negli scorsi anni ho posto in rilievo⁽³⁾ che il pirrolo, con la maggior parte degli ossidanti, fornisce prodotti intensamente colorati in nero, che chiamerò *neri di ossipirrolo*, i quali presentano una sorprendente rassomiglianza con le *melanine* naturali, ricavate dalla seppia, dai tumori melanotici, dai capelli⁽⁴⁾, ecc. D'altra parte è notevole il fatto che E. Salkowski, riscaldando con potassa una melanina da tumore melanotico, ha ottenuto pirrolo⁽⁵⁾. Era prevedibile che il colore nero fosse costituito da una catena di anelli pirrolici, ad un di presso come il nero di anilina: inoltre ho notato che ossidando cautamente il pirrolo si ottiene un prodotto costituito da due anelli pirrolici, saldati fra di loro, che per ulteriore ossidazione fornisce a sua volta nero di pirrolo.

Però le numerose analisi non hanno condotto a risultati concordanti fra di loro, giacchè è molto difficile limitare un processo di ossidazione, che in fondo non si sa come si compia, e che perciò con tutta probabilità conduce a miscugli.

Solamente facendo passare una corrente d'aria in una soluzione eterea di magnesilpirrolo si ha un prodotto la cui composizione sembra stia in un

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Organica della R. Università di Firenze.

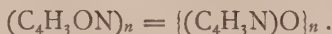
(2) Nella seduta del 2 marzo 1930.

(3) ANGELI, « Rend. Lincei », 24 (1915), II, p. 3 e sg.

(4) RONDONI, *Biochimica*, 2ª ed. (1928), p. 268; « Biochem. Ztschr. », 169 (1926), p. 149.

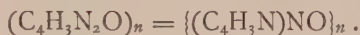
(5) « Virchow Archiv », 227 (1920), II, p. 121.

rapporto molto semplice col pirrolo di partenza. Ma data la insolubilità del nero in tutti i solventi, e malgrado tutti i lavaggi eseguiti, non sono riuscito ad avere un prodotto assolutamente privo di ceneri. I numeri ottenuti ad ogni modo non si scostano molto da quelli richiesti dalla formula più semplice:



Ho potuto stabilire inoltre che il pirrolo forma prodotti neri anche quando venga ossidato con chinone⁽¹⁾ e nei nuovi neri che chiamerò *neri di chinonpirrolo* entrano a far parte integrante della molecola anche anelli aromatici; il loro comportamento, come risulta dalle misure spettrofotometriche eseguite dal prof. G. Gallerani⁽²⁾ è analogo a quello delle melanine naturali. Ammesso che nella reazione i due atomi di ossigeno chinonici rimangano al loro posto, dalla composizione centesimale e dal rapporto fra numero di atomi di azoto (pirrolici) e numero di atomi di ossigeno (aromatici) io ho tentato di determinare il numero degli anelli pirrolici e chinonici che costituiscono il nuovo nero, ma pur troppo il problema rimane sempre indeterminato.

Un nero analogo, che ha l'identico aspetto, si ottiene anche per azione dell'acido nitroso sopra il pirrolo⁽³⁾ e che perciò chiamerò *nero di nitroso-pirrolo*. Il prodotto ha una composizione che si accosta a quella voluta dalla formula più semplice:



Anche in questo caso è impossibile procedere ad una determinazione di peso molecolare. Nemmeno a risultati conclusivi ci hanno condotti i numerosi tentativi da me eseguiti per effettuare una graduale demolizione della molecola di queste sostanze.

Per me dunque è stata del massimo interesse la lettura di un lavoro recentemente comparso di Quilico e Freri⁽⁴⁾ nel quale descrivono la preparazione di un prodotto che presenta una grande rassomiglianza con gli altri neri di pirrolo; in tal modo essi hanno altresì portato una notevole conferma sperimentale al fatto da me per la prima volta posto in rilievo⁽⁵⁾ che i diazoidrati normali:



possono esplicare una notevole azione ossidante. In questa occasione gli autori hanno avuto altresì la fortuna di avere trovato un metodo il quale, come

(1) ANGELI e LUTRI, «Rend. Lincei», 29 (1920), I, p. 14.

(2) *Pirrolo e melanine*. Camerino, 1922.

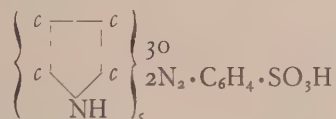
(3) ANGELI e CUSMANO, questi «Rendiconti», 26 (1917), I, p. 273.

(4) «Giornale Chimica industriale ed applicata», 12 (1930), p. 38.

(5) ANGELI e JOLLES, questi «Rendiconti», 10 (1929), II, p. 321.

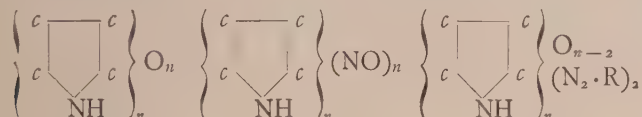
essi accennano, molto probabilmente permetterà di fissare il numero degli anelli pirrolici presenti nei prodotti da loro ottenuti.

Per azione del diazocomposto, preparato da acido solfanilico, essi hanno ottenuto un composto nel quale con tutta probabilità sono contenuti cinque anelli pirrolici assieme a due residui diazoici, entrati questi ultimi in seguito ad un processo di copolazione, che potremo scrivere in questo modo:



in cui il numero di molecole di pirrolo è eguale al numero di atomi di ossigeno più quello dei due azogruppi.

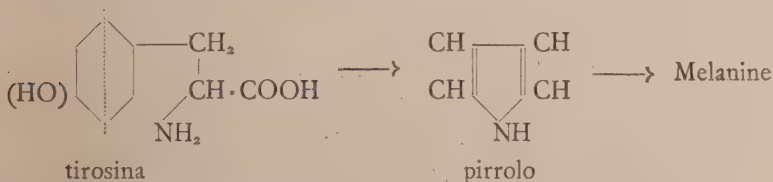
Comparando dunque le composizioni fondamentali del nero di ossipirrolo, del nero di nitrosopirrolo e quello che, per brevità, chiamerò *nero di azopirrolo*, si vede che tutti si possono riferire ad uno stesso nucleo fondamentale, probabilmente costituiti in modo analogo:



Ancora resta naturalmente da stabilirsi se una parte degli atomi di ossigeno, nei primi, sieno chetonici ovvero ossidrilici; se nei secondi sieno in parte isonitrosogruppi, se negli ultimi sieno azogruppi.

Ad ogni modo tali schemi forniscono egualmente una idea dei rapporti che intercedono fra queste interessanti sostanze.

A proposito dei neri di pirrolo, ottenuti per ossidazione con peridrolo, ho accennato al fatto che neri analoghi (melanine), oltre che dal pirrolo, si ottengono anche per ossidazione della tirosina per mezzo delle *ossidasi*, provenienti dagli organismi viventi: perciò, se era vera la mia prima ipotesi circa la genesi delle melanine naturali, era altrettanto logico ammettere che, durante il processo di ossidazione, la tirosina doveva necessariamente trasformarsi in un derivato contenente un anello pirrolico (1):



da cui successivamente potevano prendere origine le melanine.

(1) ANGELI, «Rend. Lincei», 27 (1918), I, p. 1.

A dire la verità, la mia ipotesi era quanto mai azzardata e senza precedenti, tanto che O. von Fürth nella seconda edizione del suo trattato ⁽¹⁾ ha avuto la imprudenza di fare il seguente apprezzamento, assai poco benevole, a mio riguardo:

« la formazione di un anello pirrolico dal triptofano, in cui è già contenuto un anello indolico, come anche dalla tirosina, non è inconcepibile: *se però tali rotture e trasformazioni di anelli possano in realtà compiersi negli organismi viventi, non è ancora dimostrato; non basta che si possano scrivere sulla carta* ».

Certamente il v. Fürth non poteva mai pensare che proprio mentre egli stava scrivendo queste righe, doveva toccare la più solenne smentita alle sue vedute da parte di un valoroso chimico dell'Università di Manchester, H. S. Raper ⁽²⁾, il quale ha stabilito che, proprio per mezzo della tirosinasi, ricavata dagli organismi viventi, era possibile effettuare quelle rotture e trasformazioni di anelli, che egli, v. Fürth, era così lontano dall'immaginare, e che, passando attraverso i derivati pirrolici così formati, per sintesi biologica, si arrivava alle melanine.

La mia azzardata previsione non poteva dunque avere una conferma più sollecita e brillante.

Chimica. — *Ricerche e considerazioni sopra la struttura dei diazocomposti.* Memoria del Socio A. ANGELI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo delle *Memorie*.

Chimica. — *Sopra alcune relazioni fra costituzione ed odore.* Nota del Socio A. ANGELI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Il potere ossidante dei diazoidrati e le loro analogie con l'acido nitroso.* Nota del Socio A. ANGELI e di A. POLVERINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) *Lehrbuch der physiol. pathol. Chemie*, vol. I, fasc. 2, p. 357.

(2) « *Biochem. Ztschr.* », 21 (1927), p. 89; « *British Chem. Abstracts* » (1927), p. 278.

Chimica. — *Su gli arilnitroso-ferro-pentacianuri: formazione dalle arilidrossilammine e nitroprussiato*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ del Corrisp. L. CAMBI e di T. RICCI.

1. È nota da antica data la sensibilità del nitroprussiato all'azione di diversi riducenti che, con eliminazione del gruppo NO, possono ridurlo a ferro-acquo-pentacianuro. Fra queste sostanze è da annoverarsi la idrossilammina. Per contro, dalle ricerche di L. Cambi è pure noto che il nitroprussiato si condensa, in presenza di alcali o di alcoolati, con molte sostanze aventi idrogeno mobile per dar luogo a ferro-pentacianuri, contenenti nel complesso nitrosoderivati od isonitrosoderivati⁽³⁾.

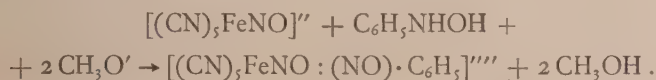
La reazione fra nitroprussiato ed arilidrossilammine si presentava particolarmente interessante, poichè con queste sostanze poteva attendersi tanto l'azione riducente, quanto la condensazione a isonitrosoarilidrossilammine.

2. Abbiamo fatto reagire la fenilidrossilammina pura sul nitroprussiato in soluzione metil-alcoolica, col metodo introdotto da uno di noi appunto per lo studio dei prodotti di condensazione del nitroprussiato⁽⁴⁾.

Alla soluzione metil-alcoolica assoluta di nitroprussiato sodico o potassico e di fenilidrossilammina in rapporto equimolecolare vennero aggiunte due mol. di metil-alcoolato alcalino per ogni mol. di nitroprussiato. Si è separato un prodotto salino, in granuli bruno-verdastri, che con acqua si demolisce dando luogo a ferro-acquo-pentacianuro e ad un sale che con tutta probabilità contiene il residuo della nitrosoidrossilammina. Infatti, trattandolo con acido solforico diluito ed eccesso di cloruro ferrico, dalla massa precipitata di bleu ferroso-ferrico, si estraggono con etere quantità sensibili del caratteristico sale ferrico della nitrosofenilidrossilammina.

Inoltre, il sale verdastro originale con eccesso di soluzione satura di solfato d'argento si decompone all'ebollizione distillando insieme a vapor d'acqua nitrosobenzolo.

Risulta quindi molto probabile che la reazione in ambiente metil-alcoolico proceda in parte secondo lo schema:



(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale della R. Università di Milano.

(2) Presentata nella seduta del 2 marzo 1930.

(3) Questi « Rendiconti », vol. XXII (1913) 376. Questi « Rendiconti », vol. XXIII (1914), 812.

(4) L. CAMBI, loc. cit.

Il prodotto ottenuto non ha una composizione costante, e tanto meno corrispondente alla formula $[(CN)_5FeN_2O_2 \cdot C_6H_5]M_4^1$, poichè appunto contiene dei prodotti di demolizione che hanno perduto l'aggruppamento NO, e che con acqua generano ferro-acquo-pentacianuro.

Questo fatto indicava che la fenilidrossilammina aveva agito in parte da riducente ed infatti nella soluzione metilica, da cui si erano separati i sali predetti, si è riscontrato la presenza di azossibenzolo.

3. Tale processo di ossidazione portava ad ammettere che, in via intermedia, si potesse formare dall'idrossilammina il nitrosobenzolo e che questo si fosse trasformato, per la nota reazione di Angeli, in presenza di alcoolato, in azossibenzolo.

Abbiamo reputato opportuno perciò sperimentare in soluzione acquosa alcoolica, in cui era presumibile un diverso andamento delle reazioni.

Al miscuglio di gr. 6 di nitroprussiato sodico in cc. 30 di acqua e di gr. 2.18 di fenilidrossilammina, previamente disciolti in 10 cc. di alcool metilico, aggiungemmo gr. 1 di sodio disciolto in 10 cc. di alcool metilico. La soluzione assumeva rapidamente colorazione violetto porpora intensa e si precipitava oleoso il ferro-acquo-pentacianuro.

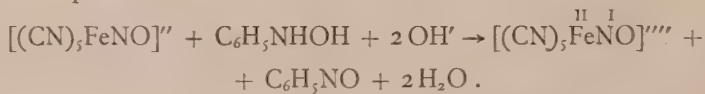
La precipitazione dell'acquo-prussiato venne completata mediante aggiunta di un triplo volume di alcool metilico. La soluzione metil-alcoolica del sale colorato, liberata dall'acquo-prussiato, venne trattata con egual volume di etere che separava, in forma di soluzione concentrata oleosa, il sale colorato. Questo venne depurato mediante ripetuto discioglimento in alcool metilico assoluto e riprecipitazione con etere. Venne infine essiccato nel vuoto su acido solforico. Le analisi hanno dato i risultati che più oltre riportiamo.

Il sale corrisponde al prodotto ottenuto da O. Baudisch da nitrosobenzolo e ferrocianuro, oppure dallo stesso nitrosoderivato e ferro-acquo-pentacianuro ⁽¹⁾: $[(CN)_5Fe(NO) \cdot C_6H_5]Na_3$.

Questo sale non ha nessuna attitudine, come noteremo in seguito, alla cristallizzazione, è estremamente deliquescente e trattiene tenacemente a temperatura ordinaria una molecola d'acqua. Esso ha tutti i caratteri chimici che ha già descritto L. Cambi ⁽²⁾.

Per riconoscerlo più esattamente venne confrontato alla analisi spettrofotometrica delle soluzioni, con il prodotto ottenuto direttamente del nitrosobenzolo e ferro-acquo-pentacianuro. I sali per le due vie risultarono identici.

Il processo cioè, in ambiente acquoso alcoolico, procede probabilmente per la fase primaria



(1) « Ber. », 54 (1921), 414.

(2) Questi « Rendiconti », vol. III (1926), 8.

L'iponitrosoferrocianuro intermedio si scinderà ad iponitrito alcalino, facilmente decomponibile nelle condizioni d'esperienza ad N_2O ⁽¹⁾, per generare acquo-ferrocianuro:



Per azione del nitrosobenzolo si formerà l'arilnitrosocomplesso



Quest'ultimo processo è analogo a quello che conduce allo stesso arilnitrosoferrocianuro per azione del nitrosobenzolo sul ferrocianuro.

È probabile che la polimerizzazione dell'aggruppamento (NO') ad N_2O_2'' preceda l'azione del nitrosobenzolo, in modo che questo sfugga alla nota condensazione col nitrossile.

Il rendimento in fenilnitrosoferropentacianuro raggiunge circa il 30 %. Evidentemente larga parte del nitrosobenzolo viene distrutta, all'atto della ossidazione della idrossilammina, per le note e citate trasformazioni che esso subisce in mezzo alcalino. A questa trasformazione del nitrosobenzolo fa riscontro l'acquocianuro che si forma sul processo.

Dobbiamo aggiungere che il sale sodico od ammonico (cupferron) della fenilnitrosoidrossilammina col nitroprussiato, per azione di alcali od alcoolato, non dà luogo al sale colorato, che subito si manifesta con intensissima colorazione, aggiungendo analogamente alcali alle soluzioni di nitroprussiato contenenti fenilidrossilammina.

Questo fatto da noi osservato porta ad escludere l'intervento della arilnitrosoidrossilammina nella reazione cromatica predetta.

4. Per l'esatto riconoscimento del prodotto formatosi nella reazione precedente venne da noi preparato il sale $Na_3[Fe(CN)_5(NO) \cdot C_6H_5] \cdot H_2O$ partendo da nitrosobenzolo e dal ferro-acquo-pentacianuro. Abbiamo operato in soluzione acquoso-alcoolica con eccesso di nitrosobenzolo. Venne separato con alcool metilico l'acquocianuro rimasto inalterato. Procedemmo alla purificazione col metodo sudescritto.

La separazione completa dell'acquocianuro dal nitrosocianuro si compie con difficoltà, e la si raggiunge soltanto sacrificando larga parte del sale colorato.

La purezza dei prodotti ottenuti venne controllata all'analisi:

Calcolato per	Trovato	
	sale da fenilidrossilammina e nitroprussiato	sale da nitrosobenzolo e ferro-acquo-pentacianuro
$Na_3[(CN)_5Fe(NO) \cdot C_6H_5] \cdot H_2O$		
Fe	14.70 %	14.97 %
Na	18.17 %	18.08 %
N	22.13 %	22.15 %
		22.07 %

(1) L. CAMBI, questi « Rendiconti », vol. III (1926), 10.

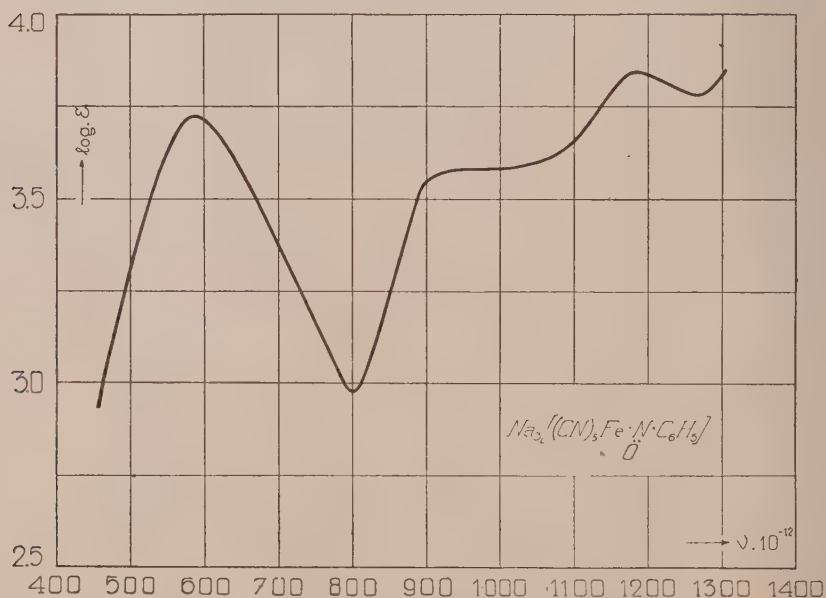
L'identificazione definitiva del sale ottenuto dalla fenilidrossilammina venne da noi compiuta mediante lo studio spettrofotometrico delle soluzioni acquose.

Non era noto finora alcun dato in merito. Procedemmo col metodo già descritto per altri pentacianuri del ferro e casi analoghi⁽¹⁾.

I diagrammi risultanti dai sali ottenuti per le due vie diverse, sono coincidenti.

I risultati sono riassunti nella tabella e nel diagramma che qui riportiamo.

$\text{Na}_3[(\text{CN})_5\text{Fe}(\text{NO})\cdot\text{C}_6\text{H}_5]$		$C = M/5115; \quad d = 0.997$	
$\nu \cdot 10^{-12}$	$\log \varepsilon$	$\nu \cdot 10^{-12}$	$\log \varepsilon$
475	3.075	900	3.549
500	3.320	950	3.590
550	3.773	1000	3.590
591 (max)	3.712	1050	3.590
600	3.710	1100	3.660
650	3.580	1150	3.790
700	3.372	1180 (max)	3.835
750	3.150	1200	3.827
800 (min)	2.980	1267 (min)	3.790
850	3.265	1300	3.830



(1) L. CAMBI e L. SZEGOE, « Gazzetta », vol. LVII (1927), 536. Questi « Rendiconti » vol. V (1927), 633.

5. Analoghe reazioni abbiamo verificato coll'acido o-idrossilamminbenzoico, che genera in soluzione acquosa alcoolica col nitroprussiato un complesso colorato, affatto analogo a quello da noi ottenuto dall'acido o-nitrosobenzoico e ferro-acquo-pentacianuro. In questo caso la purificazione col nitrosocomplesso presenta maggiori difficoltà.

I risultati però da noi ottenuti indicano che la reazione tra nitrosobenzolo e fenilidrossilammina presenta carattere generale.

I fatti che esponiamo costituiscono una ulteriore dimostrazione dell'alta reattività ed affinità che presentano il ferro dell'aggruppamento $\text{Fe}^{\text{II}}(\text{CN})_5$, e l'azoto degli arilnitrosoderivati.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla costruzione delle bisestuple di rette.* Nota di B. SEGRE, presentata ⁽¹⁾ dal Socio F. SEVERI.

1. Il sig. G. Tzitzéica ha recentemente dimostrato che *prese genericamente nello spazio cinque rette incidenti ad una sesta, le cinque rette ulteriori che si appoggiano alle varie quaterne di rette tratte dalle prime cinque, ammettono una secante comune* ⁽²⁾.

Mi permetto qui di rilevare, che la suddetta notevole proposizione, su cui hanno anche portato la loro attenzione P. Montel e B. Gambier ⁽³⁾, trovasi già stabilita — mediante considerazioni iperspaziali — in una Nota di H. W. Richmond, che risale al 1908 ⁽⁴⁾.

Il modo più semplice per ottenere quel risultato, è di osservare che cinque rette a due a due sghembe ed aventi una ed una sola secante comune, stanno su di una superficie del 3° ordine, F^3 (che, a norma di un teorema di J. Lüroth, è il luogo dei punti dello spazio da cui le sei rette son proiettate secondo piani che toccano uno stesso cono quadrico ⁽⁵⁾): le cinque rette sghembe costituiscono su F^3 una γ -pla di 1ª specie, eppertanto stanno in una *bisestupla* ⁽⁶⁾. Il risultato enunciato in principio è così stabilito; esso offre il modo di costruire *con sole operazioni lineari* la più generale bisestupla di rette.

2. Può essere istruttivo d'indagare le cause che hanno condotto H. W. Richmond a trarre dalla precedente proposizione una conseguenza,

(1) Nella seduta del 2 marzo 1930.

(2) Cfr. G. TZITZÉICA, «Bull. de Math. et Phys. de l'Éc. Polyt. de Bucarest», I (1929), p. 17. Un teorema analogo, relativo a rette di un assegnato complesso lineare, ho dato a p. 227 del lavoro intitolato: *Le piramidi inscritte e circoscritte alle quadriche di S_4 ecc.*, «Mem. R. Acc. Naz. dei Lincei», t. II, serie 6ª, 1927.

(3) Ved. B. GAMBIER, «Configurations», «Comptes Rendus», t. 190 (1930), p. 344.

(4) H. W. RICHMOND, *On property of a double-six of line, and its meaning in hypergeometry*, «Proceed. Cambridge Phil. Soc.», t. XIV, 1908, p. 475. Ved. anche la Nota *A Simple Proof of Double Six Theorem* di ASAJIRŌ ICHIDA («The Tôhoku Math. Journ.», vol. 32 (1929), p. 52), in cui son date numerose notizie bibliografiche in proposito.

(5) Ved. p. es. la mia Nota: *Quartiche piane e superficie cubiche*, «Boll. Un. Mat. It.» (1929), p. 205.

(6) Cfr. E. BERTINI, *Complementi di geometria proiettiva* (Bologna, Zanichelli, 1928), p. 248.

relativa ai determinanti del 6° ordine, che — come già è stato osservato ⁽¹⁾ — non è corretta.

Il geometra inglese ha ritenuto tale proposizione equivalente alla seguente: se cinque delle sei 5-ple che possono formarsi con sei rette dello spazio non appartenenti ad un complesso lineare, sono costituite da rette aventi una comune secante, anche la sesta 5-ple ammette una cinquesecante. Ora *questo fatto, che è vero quando le sei rette date sono a due a due sghembe, può cadere in difetto quando esse presentino fra loro particolari incidenze*; a riprova di ciò, basta prendere una quadrica Q ed un piano Π segantisi lungo una conica Γ irriducibile, e considerare il gruppo delle rette costituito da tre generatrici di Q di uno stesso sistema, e da tre rette generiche di Π lati di un triangolo con due vertici su Γ .

Il paradosso che qui si riscontra, si dirime subito osservando che i gruppi di sei rette indipendenti dallo spazio, con cui si possono formare cinque 5-ple costituite da rette aventi una secante comune, *non costituiscono un unico sistema continuo*; invero, il sistema continuo (completo) delle sestuple di rette a due a due sghembe dello spazio che stanno in una bisestupla, e quello dei gruppi di sei rette considerati nell'esempio dianzi addotto, sono certo distinti, poichè hanno entrambi la dimensione uguale a 19.

La presunta proprietà dei determinanti del 6° ordine enunciata dal Richmond, che cioè un determinante di 6° ordine non nullo, del quale siano nulli gli elementi principali ed i determinanti complementari di cinque di questi, ha di conseguenza nullo il sesto determinante complementare, non è vera, perchè il determinante formato in relazione alla bisestupla gode di questa proprietà, mentre il determinante formato in relazione alle sei rette dell'ultimo esempio, pur soddisfacendo alle ipotesi iniziali, non soddisfa alla tesi. La traduzione algebrica dell'argomentazione geometrica sopra addotta, è che non si può passare con continuità dal secondo determinante al primo!

(1) Ved. A. COLUCCI, *Su di una presunta proprietà dei determinanti simmetrici del 6° ordine*, « Atti R. Acc. Naz. dei Lincei », t. III, serie 6^a 1926₁, p. 376; l'A. qui si giova di considerazioni da me svolte in una Nota anteriore (*Intorno ad una proprietà dei determinanti simmetrici del 6° ordine*, « ibid. », t. II, 1925₂, p. 539), nella quale però — com'egli osserva — vanno sopprese le parole: *e del 4° ordine*, alla riga 10 del n. 1.

Matematica (Calcolo numerico). — *Saggio del metodo dei minimi quadrati per l'integrazione numerica delle equazioni differenziali lineari*⁽¹⁾. Nota di MARIA D'ASCIA, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. G. SCORZA.

In recenti ricerche di Fisica il prof. Fermi⁽³⁾ ha dovuto considerare l'integrale nell'intervallo $(0, +\infty)$ della seguente equazione:

$$(1) \quad y'' = \frac{y^2}{\sqrt{x}}$$

verificante le condizioni terminali:

$$(2) \quad y(0) = 1 \quad ; \quad y(+\infty) = 0$$

per calcolare di esso il valore della derivata prima nel punto zero; ed egli ha indicato come sufficientemente approssimato il valore -1.58 . Per ritrovare tale risultato nel modo più rapido anche valutando l'errore d'approssimazione, serve assai bene la conoscenza nell'intervallo $(0, +\infty)$ dell'integrale dell'equazione lineare

$$(3) \quad y'' = \frac{y}{\sqrt{x}},$$

verificante le stesse condizioni terminali (2), poichè da una bene approssimata conoscenza di tale integrale si può, con successive approssimazioni, dedurre due successioni numeriche convergenti al valore della derivata prima dell'integrale della (1) verificante le (2), la prima per difetto, la seconda per eccesso, e quindi dedurre il calcolo dell'indicata derivata prima, con la simultanea maggiorazione dell'errore d'approssimazione. Si dimostra peraltro, che l'integrale della (3) verificante le condizioni terminali (2) coincidendo con l'integrale della (1) sul punto zero, ne rimane poi tutto al disotto, per modo che si può dire che il valore della derivata prima del primo integrale nel punto zero, deve risultare inferiore di quello, nello stesso punto zero, della

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Calcolo della R. Università di Napoli.

(2) Nella seduta del 2 marzo 1930.

(3) E. FERMI, *Un metodo statistico per la determinazione di alcune proprietà dell'atomo*. «Rendiconti della R. Accademia nazionale dei Lincei», 2° sem. 1927, p. 605.

derivata prima per il secondo integrale. Si ha così un primo controllo favorevole al risultato numerico del prof. Fermi, in quanto che, mediante il calcolo da me eseguito, ho trovato per la derivata prima dell'integrale della (3) nel punto zero il valore — 1.73.

Il metodo seguito consiste nell'applicazione del metodo dei minimi quadrati, nella forma recentemente datagli dal prof. Picone⁽¹⁾.

La buona convergenza del metodo indicato è stata dimostrata dal prof. Picone per equazioni i cui coefficienti, in tutto l'intervallo di definizione dell'integrale, devono risultare finiti e continui e supponendo inoltre l'intervallo finito.

Ciò non ostante, io ho voluto sperimentare il metodo nelle condizioni del problema considerato dal Fermi e come mostrano i risultati raggiunti, si constata che il metodo riesce anche in detto caso, di rapidissima convergenza.

1. In un primo saggio ho preso come combinazioni d'approssimazioni le seguenti

$$(4) \quad y_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} e^{-kx}$$

determinando, per ogni n le $a_k^{(n)}$ in modo che abbia il minimo valore l'espressione:

$$(5) \quad J(y_n) = \int_0^\infty [y_n''\sqrt{x} - y_n(x)]^2 dx + [y_n(0) - 1]^2.$$

Con un calcolo assai accurato, in modo da poter garantire la esattezza delle cifre decimali fino alla quinta inclusa, ho trovato i valori delle costanti $a_k^{(i)}$ riportate nella tabella seguente.

(1) PICONE, *Sul metodo delle minime potenze ponderate e sul metodo di Ritz, per il calcolo approssimato nei problemi della Fisica-matematica*. « Rendiconti del Circolo matematico di Palermo », 1928.

TABELLA I.

$\frac{i}{k}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.89020	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	0.64873	0.29325	—	—	—	—	—	—	—	—
3	1.07485	— 0.64029	0.54610	—	—	—	—	—	—	—
4	0.91934	0.01358	— 0.33137	0.38220	—	—	—	—	—	—
5	1.26358	— 2.12119	4.56309	— 4.40372	1.68998	—	—	—	—	—
6	1.13517	— 0.96351	0.58447	2.08391	— 3.35170	1.50415	—	—	—	—
7	1.44649	— 4.66615	18.21426	— 40.06035	50.26214	— 33.17587	8.97486	—	—	—
8	1.32998	— 2.85475	6.81992	— 2.86957	— 18.16888	38.42005	— 30.77533	9.09427	—	—
9	1.55274	— 6.78832	38.37984	— 137.13483	313.26016	— 461.15233	414.00186	— 207.59029	44.48484	—
10	1.51831	— 6.93629	37.84991	— 124.54796	246.89785	— 273.83032	120.014881	60.22252	— 87.41867	27.19680

Il valore dell'integrale $J(y_n)$ fornisce quello che si può chiamare l'errore globale che si commette sostituendo all'integrale $y(x)$ la combinazione d'approssimazione $y_n(x)$. Si trova

$$\rho_n = J(y_n) = 1 - \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} = 1 - y_n(0).$$

I valori di ρ_n sono forniti dalla seguente tabella:

TABELLA II.

n	1	2	3	4	5
ρ_n	0.10980	0.058024	0.019339	0.0162460	0.008255
n	6	7	8	9	10
ρ_n	0.007504	0.004612	0.004307	0.003333	0.002967

la quale mostra la rapida tendenza a zero di ρ_n al divergere di n .

I valori della derivata di $y'_n(0)$ sono forniti dalla seguente tabella:

TABELLA III.

n	1	2	3	4	5
y'_n	— 0.89020	— 1.23522	— 1.43257	— 1.48119	— 1.54550
n	6	7	8	9	10
y'_n	— 1.56362	— 1.59511	— 1.60472	— 1.61838	— 1.62529

dalla quale però si constata la lenta convergenza di $y'_n(0)$ al divergere di n .

Le combinazioni d'approssimazioni (4) si rivelano pertanto poco adatte a rappresentare l'integrale e le sue derivate nelle vicinanze del punto zero.

D'altronde si deve considerare che, laddove l'integrale ha la derivata seconda infinita nel punto zero, le considerate combinazioni vi hanno sempre derivate seconde finite.

Si ha però una conferma che al divergere di n l'approssimazione va sempre migliorando, dalla circostanza che la derivata seconda di $y_n(x)$ nel punto zero cresce rapidamente al crescere di n come si rileva dalla seguente tabella:

TABELLA IV.

n	1	2	3	4	5
$y_n''(0)$	0.89020	1.82172	3.42859	4.10652	5.63666

n	6	7	8	9	10
$y_n''(0)$	6.24090	7.73513	8.31910	9.39264	9.97831

Ho voluto anche esaminare l'entità degli errori puntuali che si commettono nel soddisfare l'equazione con le nostre funzioni approssimatrici.

Alla decima approssimazione, la combinazione y_{10} sostituita nel primo membro dell'equazione da soddisfare dà i risultati riportati nella seguente tabella:

TABELLA V.

x	0	1	2	3	4
$y_{10}''\sqrt{x} - y_{10}$	-0.9970	-0.0038	-0.0014	0.0052	0.0156

x	5	6	7	8	9	10
$y_{10}''\sqrt{x} - y_{10}$	0.0106	0.0052	0.0023	0.0009	0.0004	0.0002

La considerazione di questa tabella fa vedere che l'approssimazione puntuale è deficiente nelle vicinanze dello zero, circostanza che avevamo prevista, ma l'approssimazione migliora rapidamente allontanandoci dallo zero e si vede che per $x \cong 1$ l'errore puntuale non va mai al di là di 0.016 e anche che, essendo tale errore puntuale -0.0014 nel punto $x = 2$ e 0.0052 nel punto $x = 3$, nell'intervallo (2, 3) il detto errore puntuale si mantiene assai prossimo allo zero.

2. Con una rapidità assai più soddisfacente si consegue il calcolo approssimato dell'integrale $y(x)$ della (3) verificante le (1), servendosi delle combinazioni d'approssimazione.

$$y_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} e^{-kx} \left(1 + \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} \right),$$

le quali hanno tutte la derivata seconda infinita nel punto zero se la somma dei coefficienti della combinazione è diversa da zero.

La determinazione delle costanti $a_k^{(r)}$ con cinque cifre decimali esatte che rendono, per ogni n , minimo l'integrale (5) dà i risultati rappresentati dalla seguente tabella:

TABELLA VI.

$i \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.35814	—	—	—	—	—	—	—	—
2	0.074128	0.88500	—	—	—	—	—	—	—
3	0.085575	0.83402	0.04016	—	—	—	—	—	—
4	0.19000	0.16359	1.29877	— 0.65910	—	—	—	—	—
5	0.13823	0.66788	— 0.23464	1.17544	— 0.74701	—	—	—	—
6	0.14418	0.58848	0.12492	0.46029	— 0.10243	— 0.21547	—	—	—
7	0.14403	0.59101	0.10915	0.50627	— 0.17051	— 0.16586	— 0.014125	—	—
8	0.14524	0.56431	0.32716	— 0.35944	+ — 1.68464	— 2.35781	1.32962	— 0.33376	—
9	0.14396	0.59904	— 0.029518	1.47192	— 3.58814	6.54318	— 7.41243	4.28955	— 1.017587

L'errore globale ρ_n commesso alle varie approssimazioni è fornito dalla seguente tabella:

TABELLA VII.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ρ_n	0.64286	0.04087	0.04026	0.00675	0.00010	0.00004	0.00003	0.00003	0.00003

dalla quale si vede con quanta rapidità l'errore ρ_n tenda a zero.

I valori della derivata $y'_n(0)$ sono forniti dalla seguente tabella:

TABELLA VIII.

n	1	2	3	4
$y'_n(0)$	— 0.35814	— 1.84412	— 1.87408	— 1.77709

n	5	6	7	8	9
$y'_n(0)$	— 1.73678	— 1.73208	— 1.73198	— 1.73126	— 1.73063

L'esame dei valori riportati nella precedente tabella fa vedere che a cominciare dalla quinta approssimazione, il segno meno e le cifre 1, 7 e 3 rimangono immutati, il che fa ben presumere che il valore richiesto della derivata nel punto zero della derivata dell'integrale della (3) è dato, con un errore minore di $\frac{1}{100}$, da

$$(6) \quad -1.73.$$

Una conferma di tale presunzione si ha al modo seguente: dalla equazione assegnata si trae:

$$y'(\infty) - y'(0) = \int_0^{\infty} \frac{y}{\sqrt{x}} dx$$

e quindi

$$y'(0) = - \int_0^{\infty} \frac{y}{\sqrt{x}} dx,$$

orbene prendendo la nona funzione approssimatrice y_9 si trova

$$-\int_0^{\infty} \frac{y_9}{\sqrt{x}} dx = -1.724 \dots,$$

valore assai prossimo a (6).

Quanto all'entità degli errori puntuali commessi nel soddisfare alla equazione (3) con le attuali funzioni d'approssimazione, basta considerare che i valori ottenuti col sostituire per esempio la y_7 nel primo membro dell'equazione (3) sono dati dalla seguente tabella:

TABELLA IX.

x	0	1	2	3	4
$y_7'' \sqrt{x} - y_7$	0	0.0004	0.0002	-0.0006	0.0014

x	5	6	7	8	9	10
$y_7'' \sqrt{x} - y_7$	0.0030	0.0029	0.0021	0.0013	0.001	0.0004

dalla quale si desume che detto errore, rigorosamente nullo nel punto zero, non va mai al di là di 0.003 in tutti gli altri punti.

La condizione per l'integrale di assumere il valore uno nel punto zero può dirsi poi rigorosamente verificata già fin dalle prime approssimazioni. Si trova:

$$y_7(0) = 0.999965 \dots$$

$$y_8(0) = 0.999967 \dots$$

$$y_9(0) = 0.999969 \dots$$

Concludiamo dunque affermando che la combinazione:

$$y_9(x) = \sum_{k=1}^9 a_k^{(9)} e^{-kx} \left(1 + \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} \right),$$

per la quale i coefficienti $a_k^{(9)}$ hanno i valori che si trovano nella nona riga della tabella VI dà, con una approssimazione ben soddisfacente per i bisogni della pratica, in tutto l'intervallo $(0, \infty)$ l'integrale dell'equazione (3) verificante le condizioni terminali assegnate.

Per incitamento del prof. Picone ho reso noti questi particolari risultati numerici, per l'interesse generale che offrono, come saggio dell'efficacia e della portata pratica dei metodi di approssimazione adottati.

Matematica. — *Sopra le sorgenti puntuali del calore in un piano irradiante in equilibrio termico.* Nota di M. BRELOT, presentata ⁽¹⁾ dal Socio V. VOLTERRA.

1. Continuo qui lo studio cominciato in una Nota recente ⁽²⁾ alla quale rimando il lettore. Ma ora adotterò per l'equazione dell'equilibrio termico:

$$(1) \quad \Delta u = c(x, y) u(x, y)$$

il punto di vista esposto nella mia ultima Nota ⁽³⁾ in cui ho generalizzato i risultati dell'altra e dei miei studi anteriori della (1) ⁽⁴⁾.

Supporrò dunque solamente $c(x, y)$ continua e ≥ 0 nelle vicinanze d'un punto O in cui *non si fa alcuna ipotesi*; e prenderò il Laplaciano nel senso generalizzato indicato nella Nota precedente. E continuo lo studio degli integrali della (1) nelle vicinanze di O per i quali questo punto è « sorgente semplice ».

2. Ho mostrato ⁽²⁾ che, se per un integrale u , O è sorgente calda, u è, nelle vicinanze di O , la somma di un integrale di modulo limitato (senza flusso in O) e di un integrale ≥ 0 . Inoltre u soddisfa a:

$$(2) \quad u(M) + \frac{1}{2\pi} \iint_{\gamma} g(M, P) c(P) u(P) d\sigma_P = A \log \frac{1}{OM} + \omega(M)$$

[$g(M, P)$ funzione di Green del contorno γ circondante O ; $A = \text{cost} \geq 0$; $\omega(M)$ armonica in γ anche in O tale che il secondo membro prenda su γ gli stessi valori di u].

Da ciò si deduce che u è della forma: $f(M) \log \frac{1}{OM}$ dove $f(M)$ è limitata nel modulo, e d'altronde ≥ 0 se l'integrale è ≥ 0 . Di più, designando con $\bar{f}(O)$ il « più grande limite » in O di $f(M)$

$$0 \leq \bar{f}(O) \leq A.$$

Ora mostrerò che se φ è il flusso (≥ 0) di O per u , $f(M)$ ammette un « valore medio » in O ⁽⁵⁾, $f_m(O)$, e che

$$(3) \quad f_m(O) = \bar{f}(O) = A = \frac{\varphi}{2\pi} \geq 0.$$

(1) Nella seduta del 2 marzo 1930.

(2) *Sopra la nozione di sorgente puntuale del calore in un piano irradiante in equilibrio termico*, « Rend. Accad. Lincei », fasc. 3°, p. 268.

(3) *Sopra l'equazione $\Delta u = cu$* , « Rend. Accad. Lincei », fasc. n. 4, p. 371.

(4) « C.-R., Ac. Sc. », 30 dicembre 1929, 13 gennaio, 3 febbraio, 17 febbraio 1930.

Da ciò risulterà che per $f(M)$ c'è « *quasi-continuità* » ⁽¹⁾ in O , conseguenza facile dell'uguaglianza di $f_m(O)$ e $\bar{f}(O)$.

3. Prima, studiamo la funzione $\Psi(M) = \iint_{\delta} \log \frac{1}{MP} \psi(P) d\sigma_P$ (integrale esteso alla vicinanza δ di O), dove $\psi(P)$, funzione continua ≥ 0 , tranne forse in O in cui non si suppone niente, dà senso al suo integrale sulle vicinanze di O .

In primo luogo, se γ è un contorno semplice circondante O , tracciato su δ , si ha:

$$(4) \quad \int_{\gamma_{\text{int}}} \frac{d\Psi}{dn} ds = 2\pi \iint_{(\gamma)} \psi(P) d\sigma_P$$

che è l'estensione della formula di Gauss del potenziale logaritmico al caso di un punto singolare per la densità $\psi(M)$.

È facile ottenere la (4), isolando O per mezzo di un cerchio C_ρ , applicando la formula di Gauss al potenziale dovuto all'esterno di C_ρ e poi passando al limite ($\rho = 0$).

Ora studiamo il *valore medio* di $\Psi(M)$ su una circonferenza C_ρ . Isolando C_ρ per mezzo di una piccola corona circolare, O per mezzo di un piccolo cerchio, utilizzando per la parte di $\Psi(M)$ relativa al resto del campo δ l'inversione delle integrazioni e la proprietà che:

$$\frac{1}{2\pi\rho} \int_{C_\rho} \log \frac{1}{PM} ds_M = \begin{cases} \log \frac{1}{OP} & \text{se } P \text{ è esteriore a } C_\rho \\ \log \frac{1}{\rho} & \text{se } P \text{ è interiore a } C_\rho \end{cases}$$

e finalmente passando al limite, si ottiene:

$$\frac{1}{2\pi\rho} \int_{C_\rho} \Psi(M) ds_M = \iint_{\delta - (C_\rho)} \log \frac{1}{OP} \psi(P) d\sigma_P + \log \frac{1}{\rho} \iint_{(C_\rho)} \psi(P) d\sigma_P.$$

$$\text{Ora } \frac{1}{\log \frac{1}{\rho}} \iint_{\delta - (C_\rho)} \log \frac{1}{OP} \psi(P) d\sigma_P \text{ tende a } 0 \text{ con } \rho.$$

Infatti, dato $\varepsilon > 0$ scegliamo $\rho' > 0$ abbastanza piccolo di modo che

$$\iint_{(C_{\rho'})} \psi(P) d\sigma_P < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(1) Vedi « C.-R., Ac. Sc. », 3 febbraio 1930.

Allora, se è $\rho < \rho'$ l'espressione sarà al più uguale a

$$\frac{1}{\log \frac{1}{\rho}} \iint_{\delta - (C_{\rho'})} \log \frac{1}{OP} \psi(P) d\sigma_P + \frac{\varepsilon}{2}$$

che diverrà $< \varepsilon$ quando ρ sarà minore di un certo numero > 0 . Si termina subito.

Quindi $V(M) = \frac{\Psi(M)}{\log \frac{1}{OM}}$ ammette sulla circonferenza C_ρ un valore

medio che tende a 0 con ρ .

Si deduce facilmente che il valore medio su una corona circolare di centro O tende anche a 0 col raggio esterno.

Nel senso dato nella referenza, vi è dunque per $V(M)$ un valore medio in O uguale a 0.

4. Torniamo all'enunciato del n. 2. Riducendosi a considerare solamente integrali ≥ 0 e utilizzando l'equazione (2), si conclude subito dal numero precedente e dalle proprietà immediate del secondo membro armonico della stessa (2), che:

$$A = \frac{\Phi}{2\pi} \quad ; \quad f_m(O) \text{ esiste e } f_m(O) = A$$

siccome:

$$O \leq \bar{f}(O) \leq A \quad \text{e} \quad \bar{f}(O) \geq f_m(O)$$

$$\bar{f}(O) = f_m(O) = A.$$

L'enunciato è così stabilito.

Da ciò risulta la *non-multiplicità*, tolto un integrale limitato oppure per valori dati su un contorno γ circondante O , di un integrale corrispondente a una sorgente semplice di flusso dato.

Basta vedere che se O è sorgente semplice di flusso nullo, l'integrale è limitato nel modulo in O . Ora se O è per esempio sorgente calda di flusso nullo, l'integrale è, tolto un integrale limitato, della forma $f(M) \log \frac{1}{OM}$, in cui $f(M) \geq 0$ ha in O il più grande limite uguale a 0; allora $f \rightarrow 0$ con OM . Quindi l'integrale è limitato in O ⁽¹⁾. Si può anche dimostrarlo utilizzando l'equazione (2) e il fatto che $A = 0$.

5. Rimane da studiare l'esistenza degli integrali corrispondenti a una sorgente semplice di flusso $\neq 0$ dato. Se ne esiste uno, ne esiste per ogni flusso (moltiplicazione per una costante). Basterà considerare integrali > 0 ; e mostrerò prima come, se esistono, possono essere ottenuti per passaggio al limite.

(1) Vedi «C.-R., Ac. Sc.», 13 gennaio e 3 febbraio 1930.

Più generalmente, consideriamo un integrale $u \geq 0$ della forma

$$(5) \quad f(M) \log \frac{1}{OM}$$

dove $f(M)$ ammette in O un più grande limite $A > 0$. Tracciamo una successione di cerchi C_{ρ_n} di centro O e raggi ρ_n decrescenti e tendenti a 0 . Per ciascuno, cambiamo all'interno la $c(M)$ senza aumentarla nè alterare la sua continuità di modo che sia *nulla* nelle vicinanze di O ; si può fare sì che la successione delle $c_n(M)$ così definite sia in ogni punto non decrescente.

Consideriamo l'integrale $u_n(M)$ di $\Delta u = c_n(M)u$, prendendo i valori di u su un contorno fisso γ circondante O , e ammettendo O come singolarità logaritmica di valore $A > 0$. Dico che $u_n(M) \rightarrow u$ e che $\iint_{(\gamma)} \Delta u d\sigma$

ha senso, quindi che O è per u , sorgente calda di flusso $2\pi A$. Infatti, u_n è non crescente⁽¹⁾; si può dedurne⁽²⁾ che u_n ha un limite $v \geq 0$ integrale di $\Delta u = cu$, prendendo i valori di u su γ . Ora, si vede⁽¹⁾, isolando O , che

$$u_n(M) \geq \lambda u(M) \quad \text{in cui} \quad \lambda = \text{cost qualunque} < 1.$$

Dunque:

$$v \geq \lambda u(M) \quad \text{e} \quad v \geq u.$$

Da $u_n \geq v \geq u$ risulta che il più grande limite in O di $\frac{v(M)}{\log \frac{1}{OM}}$ è A , come

$$\text{per } \frac{u_n}{\log \frac{1}{OM}} \quad \text{e} \quad \frac{u}{\log \frac{1}{OM}}.$$

Per terminare basta provare che v dà senso a $\iint_{(\gamma)} cvd\sigma$ perchè, allora, $u \leq v$ darà senso a $\iint_{(\gamma)} cu d\sigma$, e gli integrali u e v per i quali O sarà sorgente calda, avranno lo stesso flusso in O .

Mostriamo dunque che sulla corona $\Gamma_{n_1, n}$ compresa tra $C_{\rho_{n_1}}$ e C_{ρ_n} , $\iint_{\Gamma_{n_1, n}} \Delta v d\sigma$ è limitato quando $n \rightarrow +\infty$.

Basta vedere che

$$\iint_{\Gamma_{n_1, n}} cu_n d\sigma = \int_{C_{\rho_n}^{\text{int}}} \frac{du_n}{dn} ds - \int_{C_{\rho_{n_1}}^{\text{int}}} \frac{du_n}{dn} ds$$

(1) Vedi «C.-R., Ac. Sc.», 3 febbraio 1930.

(2) Vedi «C.-R., Ac. Sc.», 13 gennaio e 17 febbraio 1930.

è limitato. Ora, in primo luogo

$$\int_{C_{p_{n_1}} \text{ int}} \frac{du_n}{dn} ds \rightarrow \int_{C_{p_{n_1}} \text{ int}} \frac{dv}{dn} ds \quad (n = +\infty),$$

visto la convergenza *uniforme* delle derivate di u_n verso quelle di v in ogni campo chiuso delle vicinanze di O , ma non contenente O . (Si dimostra utilizzando un'equazione integrale che verifica u_n , e la proprietà che se, in un dominio, una successione di funzioni armoniche ≥ 0 è non crescente, la successione delle derivate tende alla stessa derivata del limite, *uniformemente* nelle vicinanze di ogni punto).

D'altra parte si vede che

$$\int_{C_{p_n} \text{ int}} \frac{du_n}{dn} ds \leq 2\pi A.$$

Si conclude subito.

Questo passaggio al limite mostra facilmente che per due integrali ≥ 0 di

$$\Delta u = c_1 u \quad \Delta u = c_2 u \quad 0 \leq c_1 \leq c_2,$$

avendo flussi

$$\varphi_1, \varphi_2 \text{ in } O : \quad \varphi_1 \geq \varphi_2,$$

se è $u_1 \geq u_2$ su un contorno γ circondante O , si avrà nell'interno $u_1 \geq u_2$.

Inoltre, se non esistono integrali ≥ 0 della forma (5), la successione u_n corrispondente a $A > 0$ tende verso un integrale limitato e se esistono tali integrali per una $c(M)$, ne esisteranno per ogni altra c al più uguale.

Infine, paragonando a successioni convenienti di C_{p_n} e u_n , si ottiene l'enunciato generale del passaggio al limite:

Consideriamo una successione di contorni di Jordan Γ_n circondanti O e riducentisi a O ; per ciascuno cambiamo all'interno la $c(M)$ di modo che la nuova sia dappertutto, anche in O , continua, $\leq c$, e consideriamo l'integrale corrispondente u_n , prendendo valori ≥ 0 su γ fisso circondante O e ammettendo O come singolarità logaritmica di valore $A > 0$; quando $n \rightarrow +\infty$, u_n tende verso un integrale di $\Delta u = cu$, di flusso $2\pi A$ in O o limitato secondo che esistono o no integrali della forma (5).

6. Indico terminando due casi semplici per i quali esistono o no tali integrali.

Prima se $c(M) \geq \frac{\alpha}{OM^2}$ ($\alpha > 0$) non ne esistono.

Altrimenti, ne esisterebbe uno per $c = \frac{\alpha}{OM^2}$, prendendo uno stesso valore ≥ 0 su una circonferenza γ di centro O , e per un flusso $2\pi A > 0$.

L'unicità esige la simmetria attorno a O e l'integrale sarebbe della forma $f(M) \log \frac{1}{OM}$, in cui $f(M)$ sarebbe continua e uguale a $A > 0$ in O ; allora $\iint c \cdot u \, d\sigma$ non avrebbe senso; quindi la contraddizione.

Invece se $c(M) \leq \frac{\alpha}{OM^{2-\varepsilon}}$ ($\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$) ne esistono.

Basta considerare il passaggio al limite e vedere che, secondo

$$u_n(M) + \frac{1}{2\pi} \iint_{(\gamma)} g(M, P) c_n(P) u_n(P) \, d\sigma_P = A \log \frac{1}{OM} + \omega(M)$$

in cui $\iint_{(\gamma)}$ è limitato superiormente a riguardo di $n \rightarrow +\infty$ e M in (γ) ,

$u_n(M)$ rimane superiore a una funzione di M non limitata in O , dunque non può tendere verso un integrale limitato.

Matematica. — *Generalizzazione di un teorema di F. Neumann sul calcolo di certi integrali.* Nota di L. PELOSI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sur les integrales de S. Lie.* Nota di G. PFEIFFER, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica celeste. — *Sur l'analyse anharmonique des inégalités séculaires fournies par l'approximation de Lagrange.* Nota di A. WINTNER ⁽¹⁾, presentata ⁽²⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Lagrange a montré ⁽³⁾, que (d'après sa théorie linéaire) les inégalités séculaires des périhélie et des nœuds des grandes planètes admettent certainement un moyen mouvement, pourvu que soit vérifiée une certaine condition, qu'on a appelée ensuite condition de Lagrange ⁽⁴⁾ et qui se trouvait d'ailleurs satisfaite pour presque toutes les planètes. Il est à peine nécessaire de rappeler que admettre un moyen mouvement signifie que la coordonnée angulaire ϑ (du périhélie ou de nœud), envisagée comme fonction du temps, peut se mettre sous la forme

$$(1) \quad \vartheta(t) = \gamma \cdot t + \psi(t),$$

où γ désigne une constante, qu'on nomme justement moyen mouvement et $\psi(t)$ est une fonction de t , qui reste bornée pour $t \rightarrow \infty$. Il paraît en surplus bien vraisemblable, que le terme complémentaire $\psi(t)$ possède un caractère oscillatoire plus ou moins marqué. On peut maintenant le fixer d'après la théorie de M. Bohr ⁽⁵⁾. D'une manière précise je m'en propose d'établir, que $\psi(t)$ est *presque-périodique*. Il en résulte aussi, en s'appuyant sur un théorème, que j'ai démontré il y a quelque temps ⁽⁶⁾, que chaque exposant Λ_m du développement (Fourier-Bohr)

$$(2) \quad \psi(t) = \sum_n A_n e^{i\Lambda_n t}$$

(1) International Education Board Fellow.

(2) Nella seduta del 2 marzo 1930.

(3) Comparez F. TISSERAND, *Traité de Mécanique Céleste*, to. 1, pp. 404-430; ou C. L. CHARLIER, *Die Mechanik des Himmels*, to. 1, pp. 335-424.

(4) Quelques autres cas ont été étudiés par P. BOHL, « Crelles Journ. für Mathematik », to. 135, pp. 189-283 (1908); F. BERNSTEIN, « Math. Annalen », to. 71, pp. 417-439 (1911); H. WEYL, « Math. Annalen », to. 77, pp. 319-324 (1916); voyez de même T. LEVI-CIVITA, « Annales de l'École Norm. Sup. », sér. 3, to. 28, pp. 325-376 (1911) et « Atti del Reale Istituto Veneto », to. 74, pp. 932-939 (1914-1915); E. E. LEVI, « Comptes Rendus », to. 153, pp. 799-802 (1911); LIBERA TREVISANI, « Atti del Reale Istituto Veneto », to. 71, pp. 1089-1137 (1911-1912). Voir notamment une indication de P. Bohl sur l'impossibilité d'une continuité uniforme (et par là même de la presque-périodicité) du reste, loc. cit., pp. 198-199.

(5) H. BOHR, « Acta Math. », to. 45, pp. 29-127 (1924).

(6) A. WINTNER, « Math. Zeitschrift », t. 30, p. 299 (1929).

est une combinaison linéaire à coefficients entiers d'un nombre fini des exposants λ_n , qui interviennent dans l'expression complexe

$$(3) \quad \zeta(t) = \sum_n \alpha_n e^{i\lambda_n t} ; \quad \alpha_n = \rho_n e^{i\varphi_n}, \quad \rho_n = |\alpha_n|$$

des inégalités dont il s'agit. La démonstration de la presque-périodicité du reste $\psi(t)$ n'est pas difficile; le caractère oscillatoire est même regardé par les astronomes comme évident⁽¹⁾; mais il fallait le préciser au point de vue analytique; et il est sans doute intéressant que la question soit si nettement épuisée par la théorie de M. Bohr⁽²⁾. Le développement (2), qui en ressort, met au jour la possibilité d'une décomposition de $\psi(t)$ en oscillations élémentaires. Bien entendu, il ne faut pas oublier qu'il s'agit ici des inégalités séculaires dans le sens de Lagrange, ce qui est encore bien loin des questions asymptotiques posées par la dynamique moderne.

Dans l'expression (3) d'une fonction presque-périodique $\zeta(t)$ séparons les parties réelle et imaginaire en posant

$$(3') \quad \zeta(t) = x(t) + iy(t),$$

c'est-à-dire

$$(4) \quad x(t) = \sum_n \rho_n \cos(\lambda_n t + \varphi_n), \quad y(t) = \sum_n \rho_n \sin(\lambda_n t + \varphi_n).$$

En introduisant encore les coordonnées polaires $r = |\zeta|$, ϑ , on aura

$$(5) \quad \zeta(t) = |\zeta(t)| e^{i\vartheta(t)},$$

où la fonction $|\zeta(t)|$ est presque-périodique, dès qu'il en est ainsi pour la fonction $\zeta(t)$. Au contraire le rapport

$$(6) \quad F(t) = \frac{\tilde{\zeta}(t)}{|\zeta(t)|} = e^{i\vartheta(t)}$$

n'est pas en général presque-périodique, pas même lorsque $|\zeta(t)|$ ne s'annule jamais. Dans ce cas toutefois l'équation (5), en lui associant la condition initiale $0 \leq \vartheta(0) < 2\pi$, définit *univoquement* une fonction (réelle) *continue* $\vartheta(t)$, laquelle peut d'ailleurs ne pas rester bornée pour $t \rightarrow \infty$. Supposons maintenant que la fonction $|\zeta(t)|$, non seulement ne s'annule pas, mais admet en outre pour $t \rightarrow \infty$ une borne inférieure $\delta > 0$. Alors, les fonctions

(1) Voir TISSERAND, loc. cit., p. 418 et p. 425; comparez aussi CHARLIER, loc. cit., p. 421; etc.

(2) Pour l'application de la théorie de M. Bohr à une autre question classique de la Mécanique Céleste, on peut lire ma Note: « Math. Zeitschrift », to. 31, pp. 434-440 (1930).

$\zeta(t)$, $|\zeta(t)|$ étant presque-périodiques, il en est de même, d'après M. Bohr, de leur rapport (6).

La condition

$$(7) \quad |\zeta(t)| \cong \delta > 0$$

se trouve vérifiée chaquefois que $\zeta(t)$ remplit la condition de Lagrange, c'est-à-dire qu'il existe un indice j tel, qu'on ait

$$(8) \quad \rho_j > \sum_n' \rho_n \quad \left(\sum_n' \rho_n = -\rho_j + \sum_n \rho_n \right).$$

En effet, dans ce cas on peut prendre, d'après (3),

$$(7)' \quad \delta = \rho_j - \sum_n' \rho_n > 0.$$

[Il y a lieu d'ajouter, que, si les λ_n du développement (3) de $\zeta(t)$ sont linéairement indépendants, la condition (8) de Lagrange est non seulement suffisante, mais aussi nécessaire pour l'existence d'une limite inférieure positive: c'est ce qui résulte immédiatement d'un théorème classique de Kronecker⁽¹⁾ (en remarquant, que, d'après M. Bohr, la série $\sum \rho_n$ est nécessairement convergente dans le cas des exposants linéairement indépendants). Nous supposons désormais que la condition de Lagrange soit remplie, sans exiger toutefois l'indépendance linéaire des exposants].

Le théorème de Lagrange nous assure que, si l'on pose

$$(9) \quad \psi(t) = \vartheta(t) - \lambda_j \cdot t,$$

cette fonction $\psi(t)$ reste bornée, c'est-à-dire que $\vartheta(t)$ possède un moyen mouvement, donné par l'exposant de l'oscillation partielle prépondérante. Mais il y a plus: le reste $\psi(t)$ est presque-périodique. Nous nous en assurons sans peine, en tenant compte de la circonstance, connue depuis Lagrange⁽²⁾, que l'oscillation maximale de la fonction $\psi(t)$ [c'est-à-dire la différence de ses limites supérieure et inférieure] ne peut pas dépasser π . Il nous suffira d'ailleurs de retenir que cette oscillation maximale est moindre que 2π . On peut dans ce cas supposer sans restriction — en choisissant ε assez petit et en ajoutant à $\psi(t)$, s'il y a lieu, une constante réelle convenable —, que l'on a, pour toute valeur de t ,

$$(10) \quad 0 < \varepsilon \leq \psi(t) \leq 2\pi - \varepsilon.$$

Remarquons d'autre part que la fonction

$$(11) \quad G(t) = e^{i\psi(t)}$$

(1) Comparez P. BOHL, loc. cit.

(2) Voyez TISSERAND, loc. cit., p. 418; CHARLIER, loc. cit., p. 370.

est presque-périodique. En effet, on a, d'après (9) et (11),

$$G(t) = e^{-i\lambda_j t} F(t),$$

où $F(t)$ n'est que le rapport (6), presque-périodique, comme on l'a remarqué.

Ceci posé, rappelons, que, si l'on désigne par \mathfrak{P} un ensemble fermé d'un plan complexe ζ et par $L(\zeta)$ une fonction uniforme et continue dans \mathfrak{P} , enfin par $\zeta = g(t)$ une fonction presque-périodique, dont toutes les valeurs appartiennent à \mathfrak{P} , alors la fonction

$$(12) \quad \psi(t) = L(g(t))$$

résulte elle même presque-périodique⁽¹⁾. Il suffit donc de prendre comme ensemble \mathfrak{P} l'arc

$$(10)' \quad 0 < \varepsilon \leq \arg \zeta \leq 2\pi - \varepsilon$$

de la circonférence $|\zeta| = 1$ et de poser

$$(11)' \quad g(t) = G(t), \quad L(\zeta) = -i \log \zeta,$$

en entendant par $\log \zeta$ la branche uniforme sur \mathfrak{P} , qui se déduit par continuité de la détermination $i\pi$ pour $\zeta = -1$.

Le théorème, qu'on vient de démontrer, se rattache à la théorie des inégalités séculaires dans une manière bien connue⁽²⁾: si l'on désigne par $\hat{e}(t)$ l'excentricité, par $\tilde{\omega}(t)$ la longitude du périhélie d'une planète et l'on pose

$$(4)' \quad x(t) = \hat{e}(t) \cos \tilde{\omega}(t), \quad y(t) = \hat{e}(t) \sin \tilde{\omega}(t),$$

les équations différentielles de Lagrange donnent les formules (4) [où les sommes sont non seulement presque-périodiques, mais aussi finies:

$$\sum_n = \sum_{n=1}^8,$$

le nombre des termes étant le nombre ($= 8$) des grandes planètes]. A cause de (4)' et (5), on a immédiatement

$$\mathfrak{P}(t) = \tilde{\omega}(t);$$

de même pour les nœuds.

Meccanica. — *Intorno ai carichi di punta per aste a momento d'inerzia variabile.* Nota di G. KRALL, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Cette remarque se déduit immédiatement des théorèmes bien connus de Weierstrass et de M. Bohr; voir p. 299 de mon mémoire, cité au début.

(2) Comparez TISSERAND ou CHARLIER, loc. cit.

Geofisica (Geofisica mineraria). — *Sulla tectonica di alcune strutture profonde scoperte gravimetricamente nella pianura padana.* Nota di A. BELLUIGI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. P. VINASSA DE REGNY.

In una Conferenza ⁽²⁾ al 2° Congresso Internazionale delle Perforazioni, ebbi occasione di accennare, tra l'altro, alla scoperta di alcune anticlinali gravimetriche, intorno a cui oltre a studi di dettaglio, in possesso dell'A. G. I. P. ho già fatto qualche pubblicazione ⁽³⁾.

Scopo della presente Nota è aggiungere al cenno descrittivo della planimetria di dette anticlinali (vedi Conferenza), un cenno descrittivo della tectonica di esse, adottando un semplice procedimento, consigliabile, se non altro, per potersi subito orientare nel problema di cui si tratta. Questo procedimento mi ha condotto a risultati (alcuni dei quali già controllati con perforazioni) non molto discosti da quelli avuti per altra via, con indagini più complesse e più esatte, (vedi (3)), ottenuti applicando un principio che può definirsi « del corpo immaginario che più s'approssima al corpo reale », già da me esposto in forma succinta ⁽⁴⁾, nel caso del corpo immaginario ad una dimensione infinita. Esso consiste, soprattutto, nell'esclusiva utilizzazione dei gradienti di gravità per il calcolo degli elementi dimensionali e di ubicazione del corpo immaginario.

Ritengo di valore esclusivamente teorico le pur interessanti Memorie di K. Jung ⁽⁵⁾, riguardanti il calcolo suindicato, con l'impiego di gradienti e curvature, specie nell'esame di rilievi in prossimità di catene montuose, pur riconoscendo, come ho dimostrato altrove, che la curvatura, può essere utilizzata in altri problemi di gravimetria.

(1) Nella seduta del 2 marzo 1930.

(2) A. BELLUIGI, *Communication sur la recherche géophysique du pétrole en Italie*, II Congrès International de Forage, Paris, 16-23 sept. 1929.

(3) A. BELLUIGI, *Contributo geofisico allo studio della regione di S. Colombano al Lambro*. « La Miniera Italiana », n. 4, aprile 1929; M. ANELLI e A. BELLUIGI, *A proposito di una conferma di induzioni geologiche e di risultati geofisici*, « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », luglio 1928.

(4) A. BELLUIGI, *Le argille scagliose e il problema del petrolio nell'Emilia*, « L'Industria Mineraria », XI, 1928.

(5) K. JUNG, *Die Bestimmung von Lage und Ausdehnung einfacher Massenformen unter Verwendung von Gradient und Krümmungsgrösse*, « Zeitschr. f. Geoph. », 3, 257-280, 1927; *Zur Bestimmung von Lage und Ausdehnung einfacher Massenformen u. s. w.*, « Zeitschr. f. Geoph. », 1929, H. 5-6.

Mi limiterò qui ad esaminare brevemente i profili delle strutture profonde, gravimetricamente perturbanti, a partire da quella di S. Colombano al Lambro fino a quella di Cavriago (Reggio Emilia).

Ad est di Reggio il rilievo è la risultante di influenze gravifiche regionali oltre che locali⁽¹⁾ e l'eliminazione di quelle importa una nuova configurazione superficiale della gravità, la quale sola può avere un interesse minerario.

Ma poichè tale eliminazione non può mai esser fatta rigorosamente, col solo sussidio dei dati gravimetrici, eötvössiani, pendolari (argomento che chiarirò a parte) così non si possono prendere in rigoroso esame alcune strutture profonde ad est di Cavriago, strutture da me già indicate come esistenti in via di massima, in seguito a correzioni dei dati eötvössiani per disturbi topografici profondi, a carattere regionale.

Il profilo di g'' , da S. Colombano a Podenzano (40 Km.), in un allineamento quasi parallelo all'andamento medio del margine appenninico, offre una diminuzione di g'' da -110.10^{-3} a -145.10^{-3} con un piccolo aumento di g'' a Podenzano; da Podenzano a Fontevivo (50 Km.) la gravità diminuisce fino a -150.10^{-3} (fossa gravifica di Carpaneto), per riprendere lo stesso valore o quasi a Fontevivo; il profilo di g'' , da Fontevivo a Cavriago, offre tre massimi, quasi uguali (Fontevivo $\equiv F$, Montepelato $\equiv M$, Cavriago $\equiv C$), su un percorso complessivo di 42 Km., e due minimi, uno alla sinistra del T. Parma l'altro all'altezza del T. Enza. Ad est di Cavriago, g'' , dopo una lieve diminuzione, aumenta fino a Bologna (-126.10^{-3}), ma, come s'è detto, si è in presenza qui di più influenze gravifiche non esattamente distinguibili.

Così da S. Colombano a Bologna, marginalmente all'Appennino, il profilo di g'' , nel suo complesso, si manifesta come una grande sinclinale gravifica, il fondo della quale si ondula in tre anticlinali gravifiche: (F), (M), (C).

La configurazione delle isogamme, ed altre varie considerazioni che per brevità ometto, autorizzano ad assumere come elissoidica la parte più vicina al suolo della struttura di S. Colombano (SC), irregolare e geometricamente mal definibile la struttura di Podenzano (P), sferica con apofisi parallelepipedica a sud-est quella di F, sferica la M, elissoidica la C.

Infatti, per M, nota la profondità minima (vedi (3)), dato il valor medio della linea indicatrice (48 UE), posto $\Delta\sigma = 0.3$, si ricava un (raggio di sfera) $\rho = 500$ m: le curve dei gradienti e delle curvature calcolate e osservate coincidono abbastanza bene (non possono evidentemente coincidere in modo perfetto dato che la forma imposta alla massa perturbante è sempre più o meno approssimata).

(1) A. BELLUIGI, *Caratteristiche fisiche fondamentali della pianura padana*, «Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei», luglio 1929.

Si tratta ora di ricavare, con lo stesso metodo, le profondità minime delle altre strutture indicate, determinando ρ dalla posizione delle indicatrici e verificando poi la coincidenza approssimativa delle curve dei gradienti e delle curvature calcolate e osservate: se tale coincidenza non si verifica, si calcola, per tentativi.

Variando $\Delta\sigma$ da 0.2 a 0.5 si ha, per le profondità minime di SC ($\rho = 500$ m.), C ($\rho = 400$ m.), F ($\rho = 1000$ m.), P ($\rho = 1500$ m.), il grafico fig. 1:

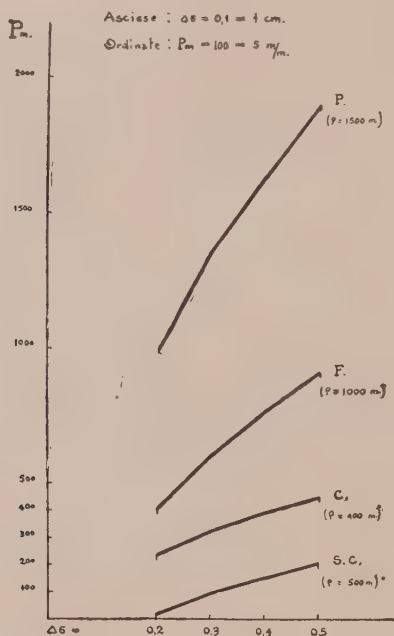


Fig. 1.

Posto $\Delta\sigma = 0.3$ (valore medio più probabile di tutti gli altri indicati e ciò per ragioni geologiche), ricavo, per la profondità minima della struttura di S. Colombano, m. 90.

Ciò è in accordo con la mia interpretazione di questa struttura (vedi (3)) e in contrasto con l'interpretazione dell'Exploration di Berlino, risultata errata in seguito a indagini di controllo con perforazioni.

Per la profondità minima della struttura di Caviro trovo 330 m., per quella di Fontevivo 600 m., per quella di Podenzano 1350 m.

Variando ρ (posto $\Delta\sigma = 0.3$ valore medio più probabile), per SC da

500 a 1000 m., per F da 500 a 2000 m., per C da 200 a 1000 m., per P da 500 a 2000 m., varieranno le profondità minime come risulta dal grafico fig. 2:

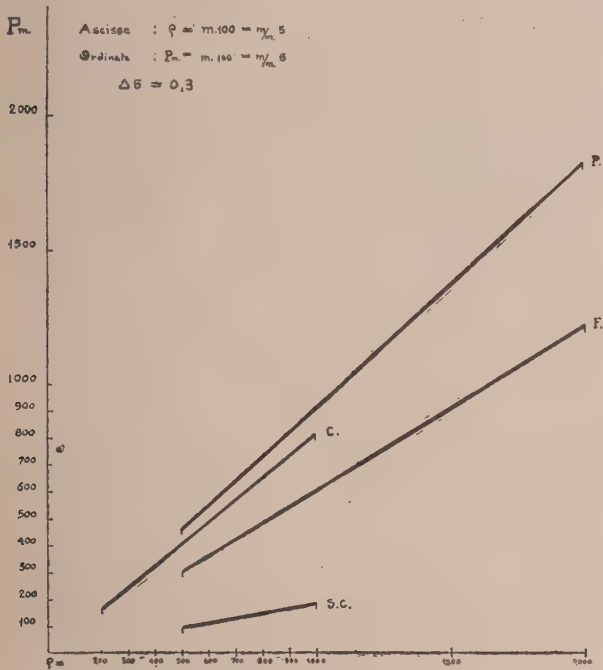


Fig. 2

La scelta del ρ più conveniente si determina, nel modo che ho già detto, e così è possibile tracciare un profilo delle profondità minime delle strutture in esame, e aver subito un'idea della loro tectonica.

Questo procedimento è particolarmente indicato per rapide ispezioni come ho dimostrato in questa Nota.

Fisica. — *Sul galvanometro a vibrazione di Moll.* Nota di STEFANO LODOVICO STRANEO, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. L. LOMBARDI.

1. Il galvanometro di Moll costruttivamente differisce dagli ordinari galvanometri a corda per corrente alternata solamente in quanto in esso si trova in più uno speciale dispositivo che, benchè semplicissimo, altera profondamente il funzionamento dello strumento. Questo dispositivo consiste in uno specchietto di piccolissime dimensioni che è fissato nella parte centrale della corda vibrante *dissimetricamente*, in modo p. es. che $\frac{1}{4}$ della superficie dello specchio sia da una parte della corda e $\frac{3}{4}$ dall'altra.

Scopo di questo dispositivo è di fare sì che, alle consuete piccole vibrazioni trasversali della corda, si associno vibrazioni torsionali: queste possono essere assai opportunamente esaltate quando vengano soddisfatte speciali relazioni tra la frequenza della corrente elettrica e quella delle vibrazioni proprie della corda. Così diviene possibile l'osservazione dello strumento a distanza e rimane escluso l'uso, non sempre gradito, del microscopio che d'ordinario si adopera per osservare i galvanometri a corda.

In questa Nota dò un breve cenno del funzionamento di questo strumento⁽²⁾.

2. La teoria dei galvanometri a corda è già di per sè assai complicata, poichè la forza agente in ogni istante su ogni elemento della corda tesa in un campo magnetico costante è funzione non solo della differenza di potenziale applicata agli estremi dell'elemento stesso, ma, per i noti fenomeni di induzione, anche dello stato (posizione e moto) di tutti gli altri elementi. In altri termini l'intensità della corrente è una funzione di linea o un funzionale e l'equazione fondamentale indefinita del movimento è un'equazione integrodifferenziale⁽³⁾.

Lo studio rigoroso del galvanometro di Moll come estensione di quelli a corda sarebbe pertanto enormemente difficile e fors'anche impossibile, se si pone la condizione che le soluzioni ricavate debbano essere praticamente utilizzabili.

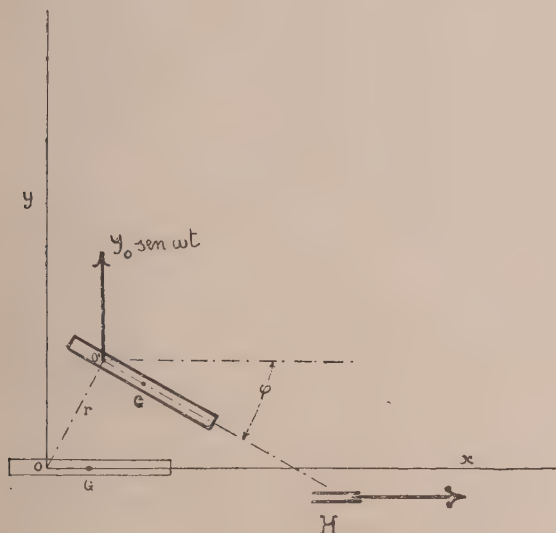
(1) Nella seduta del 2 marzo 1930.

(2) Uno svolgimento più particolareggiato e con maggiore considerazione delle applicazioni verrà pubblicato prossimamente nel «Nuovo Cimento».

(3) HERTZ PAUL, *Zur Theorie des Seitensgalvanometers*, «Zeitschr. für Mathematik und Physik», vol. 58, 1910, p. 1 e sgg.

È quindi evidente la necessità di ricorrere a qualche semplificazione, la cui ragionevolezza e compatibilità colle premesse sia, almeno *a posteriori*, assicurabile.

3. Lo specchietto rettangolare del galvanometro di Moll sia fissato sulla corda vibrante verticale in modo che, nelle condizioni di riposo, il suo piano sia parallelo alla direzione del campo magnetico, ossia normale al piano in cui vibrerebbe la corda prima dell'applicazione dello specchio, quando essa venisse percorsa da una corrente alternata. Supponiamo inoltre lo specchietto fissato eccentricamente come già è stato accennato: allora evidentemente il moto dovrà risultare perturbato rispetto a quello che si avrebbe qualora lo specchietto fosse applicato simmetricamente.



È quasi intuitivo che si avranno: *a*) una più o meno sensibile deviazione dal piano y, z , in cui avverrebbe la vibrazione della corda nuda o collo specchietto fissato simmetricamente; *b*) una vibrazione rotatoria della corda e quindi dello specchietto, dipendente anzitutto dalla coesistenza della eccentricità e dell'inerzia di quest'ultimo; *c*) ripercussioni sulle varie componenti del moto complessivo dovute all'eccentricità di talune delle reazioni.

Determineremo pertanto approssimativamente il moto dello specchietto seguendo quest'ordine di idee, tenendo conto di tutte le varie azioni e reazioni da cui non è lecito prescindere e senza introdurre *a priori* alcuna ipotesi restrittiva.

4. La massa della corda (ordinariamente la corda è del diametro di pochi millesimi di mm.) è praticamente trascurabile innanzi a quella m

dello specchietto. In queste condizioni, l'artificio che si presenta più spontaneo è quello di considerare semplicemente il moto dell'elemento di corda cui è applicato lo specchietto come se fosse isolato dal resto del galvanometro, supponendo che su esso si eserciti tanto la forza periodica stazionaria attiva dovuta alla coesistenza del campo magnetico e della corrente alternata che percorre la corda, quanto le reazioni dovute a tutta la rimanente parte della corda, oltre, naturalmente, a tutte le eventuali nuove reazioni dovute all'esistenza dello specchietto applicato all'elemento.

Il problema è così senz'altro ricondotto a quello del moto di un'asticina di massa m uguale a quella dello specchietto, mobile senza attrito in un piano orizzontale x, y , sotto l'azione di forze opportune e di reazioni conseguentemente assunte.

5. Supporremo sinusoidale la corrente alternata che percorre la corda e costante e uniforme l'intensità H del campo magnetico diretto secondo l'asse x . Sia (vedi fig.) G il baricentro dell'asticina, O' il corrispondente del punto d'attacco dello specchietto alla corda, x_0 la distanza di questi due punti. Inizialmente, quando tutto il sistema, sottratto a ogni forza attiva, è in quiete, l'asticina sia disposta secondo l'asse x ed O' coincida col centro O delle coordinate (posizione disegnata a tratto sottile in fig.).

La forza attiva, sempre applicata in O' , è quella periodica sinusoidale che indicheremo con $Y_0 \sin \omega t$. Essa è per noi la risultante di tutte le azioni elettromagnetiche dovute alla coesistenza del campo magnetico H e della corrente.

La reazione principale è quella che tende a riportare O' in O ; quando l'asticina sia allontanata dalla posizione di riposo. Essa è da considerarsi come la risultante di tutte le reazioni elastiche della corda: come d'ordinario, l'assumeremo perciò proporzionale allo spostamento r : quindi le sue componenti secondo gli assi potranno essere indicate con $-k^2x$ e $-k^2y$.

Altra reazione essenziale al desiderato funzionamento fisico del galvanometro è quella che tende a riportare l'asticina nella direzione x , ossia ad annullare qualsiasi rotazione φ . L'indicheremo con $-h^2\varphi$ (l'angolo φ , nella posizione segnata in fig. deve evidentemente ritenersi affetto da segno negativo).

Le reazioni secondarie sono prevalentemente determinate dalle dissipazioni di energia cinetica dovute alla resistenza dell'aria e all'imperfetta elasticità della corda: ordinariamente, nella teoria degli strumenti di misura si ritengono semplicemente proporzionali alle velocità corrispondenti. Per quel che riguarda la resistenza dell'aria, ciò è perfettamente giustificato dalle moderne teorie aerodinamiche, perchè è ormai noto che piccoli oggetti, movendosi nell'aria con moderate velocità (e tanto più in caso di moto alternativo), trascinano con sè l'aria in immediato loro contatto e non producono affatto dei vortici: incontrano quindi resistenze del tipo di quelle del noto regime di Poiseuille, approssimativamente proporzionali alle rispettive velocità.

Le resistenze dovute alla traslazione per quanto riguarda la corda si possono pertanto indicare con $-b\dot{x}$ e $-b\dot{y}$, essendo b una costante: potremo ritenere in esse conglobate senz'altro le componenti della resistenza dovuta all'imperfetta elasticità alla flessione della corda stessa.

Così pure ammetteremo per le componenti della resistenza che incontra lo specchietto nelle sue traslazioni le consuete espressioni

$$-q\dot{x}S \sin \varphi \quad \text{e} \quad -q\dot{y}S \cos \varphi,$$

ove con S è indicata la superficie dello specchietto e con q un coefficiente empirico abbastanza costante per le velocità non troppo elevate. Bisogna però ancora osservare che la resistenza complessiva

$$R = -qS \sqrt{\dot{x}^2 \sin^2 \varphi + \dot{y}^2 \cos^2 \varphi}$$

agisce sul centro dello specchietto; perciò, trasportandola in O' , come noi facciamo, dovremo tener conto, oltre che delle due componenti, anche della coppia $R \cdot x_0$ che si è prodotta in seguito a tale trasporto.

Infine la reazione dissipativa corrispondente alle variazioni della coordinata φ la riterremo proporzionale alla velocità angolare; ossia la indicheremo con $-a\dot{\varphi}$, ritenendo nel coefficiente costante a conglobati anche gli effetti dell'imperfetta elasticità della corda alla torsione e quelli della resistenza dell'aria per le rotazioni intorno all'asse verticale passante per O' .

6. Assumiamo x, y, φ (corrispondenti ai tre gradi di libertà del sistema) come coordinate generali per impostare le equazioni dinamiche di Lagrange nella nota forma:

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad k = 1, 2 \dots n$$

essendo q_k le coordinate generali, \dot{q}_k le velocità generali, T l'energia cinetica del sistema, Q_k le componenti della risultante di tutte le forze applicate al sistema nella direzione di ciascuna delle coordinate q_k .

L'espressione di T risulta, detto A il momento d'inerzia dello specchietto rispetto ad O'

$$(2) \quad T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} A \dot{\varphi}^2 + m x_0 \dot{\varphi} (\dot{y} \cos \varphi - \dot{x} \sin \varphi).$$

Tenendo conto dell'analisi delle azioni e reazioni fatta al n. 6, possiamo esprimere le Q_k e sostituendo nelle equazioni di Lagrange ottenere il sistema:

$$(3) \quad \begin{cases} m\ddot{x} - m x_0 (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) = -k^2 x - b\dot{x} - c\dot{x} \sin \varphi \\ m\ddot{y} - m x_0 (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = -k^2 y - b\dot{y} - c\dot{y} \cos \varphi + Y_0 \sin \omega t \\ A\ddot{\varphi} - m x_0 (\ddot{x} \sin \varphi - \ddot{y} \cos \varphi) = -b^2 \varphi - a\dot{\varphi} - c x_0 \sqrt{\dot{x}^2 \sin^2 \varphi + \dot{y}^2 \cos^2 \varphi} \end{cases}$$

ossia

$$(4) \begin{cases} m\ddot{x} + (b + c \sin \varphi) \dot{x} + k^2 x = mx_0 (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \\ m\ddot{y} + (b + c \cos \varphi) \dot{y} + k^2 y = mx_0 (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) + Y_0 \sin \omega t \\ A\ddot{\varphi} + a\dot{\varphi} + h^2 \varphi = mx_0 (\ddot{x} \sin \varphi - \ddot{y} \cos \varphi) - cx_0 \sqrt{\dot{x}^2 \sin^2 \varphi + \dot{y}^2 \cos^2 \varphi}. \end{cases}$$

A questo sistema si devono naturalmente aggiungere le condizioni che devono verificarsi per $t = 0$, ossia, in generale, i valori di $x, y, \varphi, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\varphi}$ all'inizio dei tempi.

7. La difficoltà di integrare il sistema soprascritto è ancora assai grande. Si può però anzitutto osservare che, essendo l'unica forza attiva agente sul sistema, $Y_0 \sin \omega t$, periodica di frequenza $\frac{\omega}{2\pi}$, dopo un tempo sufficientemente lungo, tutto il fenomeno di moto definito dalle (4) dovrà assumere un carattere nettamente periodico di ugual frequenza. In altri termini la soluzione dovrà potersi esprimere per mezzo di una parte *transiente* e di una parte *periodica stazionaria*. In pratica il movimento transiente, nelle nostre condizioni, sparisce dopo un tempo brevissimo.

Ci limiteremo quindi a cercare la parte periodica delle soluzioni delle (4).

Inoltre già è stato ricordato che l'angolo φ è sempre molto piccolo: potremo pertanto, con sufficiente approssimazione, porre $\sin \varphi = 0$; $\cos \varphi = 1$ e si potrà anche trascurare $\dot{\varphi}^2$. In queste ipotesi il sistema diventa a coefficienti costanti e lineare

$$(5) \begin{cases} m\ddot{x} + b\dot{x} + k^2 x = 0 \\ m\ddot{y} + (b + c) \dot{y} + k^2 y = + mx_0 \ddot{\varphi} + Y_0 \sin \omega t \\ A\ddot{\varphi} + a\dot{\varphi} + h^2 \varphi = + mx_0 \ddot{y} - cx_0 \dot{y}. \end{cases}$$

8. La prima equazione è indipendente ed è l'equazione differenziale delle vibrazioni libere smorzate di un sistema a un grado di libertà. La x , che è della forma $x = e^{-\frac{b}{2m}t} (A_1 \cos ut + A_2 \sin ut)$, essendo u, A_1, A_2 costanti, risulta composta di due soli termini che, per la presenza del coefficiente b di smorzamento, si vanno attenuando col tempo e tendono a zero.

Segue che, sempre per angoli φ sufficientemente piccoli, il sistema vibrerà, con grande approssimazione, nel solo piano y, z .

9. Pertanto poniamo $\dot{x} = 0$ nella terza equazione del sistema (5) e determiniamo la soluzione, supposto che la parte periodica di y sia del tipo

$$(6) \quad y = Y_1 \sin (\omega t + \alpha),$$

con Y_1 e α costanti.

A posteriori verificheremo la veridicità di questa ipotesi. Calcolando allora \ddot{y} , \dot{y} e componendo i due termini del secondo membro, che risultano sinusoidali e della stessa frequenza, la terza delle (5) assume la forma:

$$(7) \quad A\ddot{\varphi} + a\dot{\varphi} + b^2\varphi = B \cos(\omega t + \theta),$$

essendo B e θ costanti dipendenti da $m, x_0, \omega, Y, c, \alpha$: e la (7) è l'equazione delle oscillazioni forzate per mezzo di una forza cosinusoidale e smorzate. La parte periodica delle φ è pertanto del tipo

$$(8) \quad \varphi = \Phi \sin(\omega t + \alpha - \psi)$$

essendo Φ e ψ costanti nelle cui espressioni intervengono esclusivamente m, ω, c, A, x_0, Y , ed ωt , pulsazione delle vibrazioni torsionali libere della corda non smorzata. La componente φ è pertanto una vibrazione sinusoidale di frequenza $\frac{\omega}{2\pi}$. Dall'esame dell'espressione di Φ si ricava che φ è di ampiezza finita anche nel caso di risonanza $\omega t = \omega$.

9. Infine, calcolando $\ddot{\varphi}$ servendosi della (8) e sostituendo nella seconda delle (5) per ricavare la parte periodica di y , si trova un'equazione del tipo già trovato per la φ , ossia

$$(9) \quad m\ddot{y} + (b + c)\dot{y} + k^2y = C \sin(\omega t + \delta),$$

C ed δ essendo costanti. La (9) è quindi ancora l'equazione delle vibrazioni forzate smorzate, provocate dalla forza sinusoidale $C \sin(\omega t + \delta)$, e la parte periodica di y è quindi:

$$(10) \quad y = B \sin(\omega t + \tau),$$

essendo ancora B e τ costanti dipendenti oltre che dalle costanti precedenti, anche dalla pulsazione ω_0 delle vibrazioni trasversali libere della corda.

Questa formola è perfettamente compatibile colla premessa (6), quindi la via seguita è legittima.

Le costanti incognite Y_1 ed α si possono numericamente calcolare per successive approssimazioni dalle equazioni trigonometriche che si ottengono uguagliando rispettivamente gli argomenti e le ampiezze di y , forniti dalle due equazioni (6), (10). Il problema è così risolto.

10. Riassumendo i risultati si può dire: a) per moti sufficientemente piccoli, quali sono quelli che in pratica possono interessare, la corda vibra con grande approssimazione nel piano yz ; b) lo specchietto, oltre alla vibrazione trasversale in senso normale alla sua posizione di riposo e con frequenza uguale a quella della corrente che percorre il filo, assume una vibrazione torsionale con uguale frequenza; c) la massima ampiezza della φ si raggiunge, a parità di tutti gli altri elementi, quando il filo sia teso in modo che la frequenza delle vibrazioni torsionali proprie sia uguale a quella della corrente alternata.

Fisica. — *Un metodo per lo studio della deviazione magnetica dei raggi penetranti* ⁽¹⁾. Nota di B. ROSSI, presentata ⁽²⁾ dal Socio A. GARBASSO.

1. Pare ormai accertato che i fenomeni di ionizzazione, mediante i quali ci si rivela la radiazione penetrante, siano prodotti da raggi corpuscolari dotati di grandissima energia. Rimane invece ancora aperta la questione, se la radiazione penetrante stessa sia di natura corpuscolare, o se questi corpuscoli non siano piuttosto originati nell'atmosfera (per effetto Compton o disintegrazioni atomiche) da una radiazione penetrante analoga ai raggi γ .

In favore della prima ipotesi parlano i risultati delle interessanti esperienze di Bothe e Kolhörster ⁽³⁾, le quali dimostrano come il coefficiente di assorbimento dei raggi corpuscolari abbia lo stesso ordine di grandezza di quello attribuito alla radiazione penetrante. Il problema comunque attende la soluzione definitiva da una conoscenza più approfondita delle proprietà di questi corpuscoli. Informazioni preziose sia sulla loro carica che sulla loro velocità potrebbero trarsi, in particolare, da esperienze di deviazione magnetica ⁽⁴⁾.

Una tale esperienza è appunto in corso presso questo Laboratorio e la presente Nota è dedicata alla descrizione del metodo ed alla esposizione dei primi risultati.

2. L'apparecchio adottato per rivelare la radiazione penetrante (qui e nel seguito indico sotto questo nome i raggi corpuscolari dei quali ho parlato nel precedente paragrafo) è il nuovo tipo di contatore a tubo di Geiger e Müller ⁽⁵⁾, che presenta, sulle altre camere di ionizzazione, il vantaggio di segnalare il passaggio dei singoli corpuscoli.

(1) Ricerca eseguita presso il Laboratorio di Fisica in Arcetri.

(2) Nella seduta del 2 marzo 1930.

(3) *Das Wesen der Höhenstrahlung*. «Zs. f. Phys.», 56 (1929) p. 751.

(4) Ricordo a questo proposito che L. F. Curtiss ha recentemente comunicato (in una lettera all'Editore pubblicata nel numero del 15 novembre 1929 del «Physical Review») di aver osservato la deviazione dei raggi penetranti in un campo magnetico di 7000 gauss creato tra le espansioni polari di un elettromagnete. Mancano però ancora i particolari di questa esperienza.

Ricordo anche che SKOBELZYN («Zs. f. Phys.», 54 (1929) p. 686), studiando col metodo della nebbia di Wilson le traiettorie dei raggi β in un campo magnetico di 1700 gauss, ha fotografato alcune tracce di raggi corpuscolari estremamente veloci e le ha attribuite ad elettroni Compton prodotti dalla radiazione penetrante.

(5) «Phys. Zs.», 29 (1928) p. 839 e «Phys. Zs.», 30 (1929) p. 489.

Poichè non si può evidentemente pensare di delimitare mediante schermi un fascio di raggi penetranti, ho adoperato, per studiarne la traiettoria, un sistema di tre contatori, disposti parallelamente ad una certa distanza l'uno dall'altro; le scariche contemporanee di questi tre contatori indicano il passaggio di un medesimo corpuscolo attraverso ad essi.

Per registrare in modo assai comodo queste coincidenze triple, mi sono servito del dispositivo schematicamente rappresentato nella fig. 1. Esso presenta sul metodo, comunemente usato, della registrazione simultanea degli impulsi su di una medesima film (vedi p. es. Bothe e Kolhörster loc. cit.), il pregio di una maggiore semplicità e di una maggiore sicurezza; poichè le coincidenze casuali vengono, in tal modo, praticamente eliminate ⁽¹⁾.

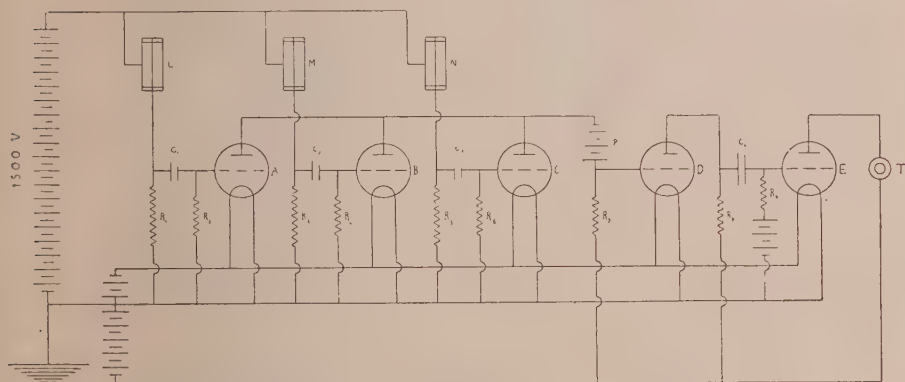


Fig. 1.

$$C_1, C_2, C_3 = 10^{-4} \mu F \quad ; \quad C_4 = 2 \cdot 10^{-3} \mu F$$

$$R_1, R_3, R_5 = 5 \cdot 10^9 \text{ ohm} \quad ; \quad R_2, R_4, R_6, R_7 = 8 \cdot 10^6 \text{ ohm} \quad ; \quad R_8 = 10^5 \text{ ohm} \quad ; \quad R_9 = 10^6 \text{ ohm}.$$

I fili dei tre contatori L, M, N, sono accoppiati elettrostaticamente alle griglie delle tre valvole termoioniche A, B, C. In condizioni normali queste sono a potenziale zero e divengono negative ad ogni scarica del corrispondente contatore, interrompendo il passaggio della corrente. Poichè la resistenza R_7 è grande rispetto alle resistenze interne normali delle lampade A, B, C, la griglia della lampada D è generalmente, (a causa della batteria ausiliaria P) ad un potenziale negativo. Questo potenziale subisce piccole variazioni quando uno o due soli contatori funzionano, mentre subisce un brusco aumento quando, per il simultaneo funzionamento dei tre contatori, la corrente si interrompe in tutte tre le lampade. La corrispondente variazione

(1) Mentre il presente lavoro era in corso, Bothe ha pubblicato (« Zs. f. Phys. », 59 (1929) p. 1) un metodo pel conteggio delle coincidenze, che ha qualche analogia con quello esposto. Tale metodo, che si basa sull'uso di una lampada bigriglia, si applica però soltanto al caso delle coincidenze doppie.

della corrente di placca, amplificata da una quinta valvola E, viene rivelata mediante il telefono T. Basta poi interrompere il circuito di placca di una delle lampade A, B, C, per registrare, col medesimo apparecchio, le scariche contemporanee dei contatori congiunti alle altre due.

Le resistenze, relativamente piccole, R_2 , R_4 , R_6 , riportano in un tempo brevissimo a zero, dopo ogni scarica, il potenziale delle griglie delle tre lampade A, B, C. La probabilità quindi che esse, per una causale coincidenza, siano contemporaneamente negative è assolutamente trascurabile. Posti infatti i tre contatori in posizione tale che un medesimo corpuscolo non potesse attraversarli, non ho registrato, durante due ore di osservazione, alcuna coincidenza.

3. Per quanto dalle citate esperienze di Bothe e Kolhörster risulta in modo sicuro che le coincidenze non possono essere prodotte se non dalla radiazione penetrante, ho stimato opportuno ripetere, per verificare il funzionamento degli apparecchi, le prove di controllo eseguite da questi A.

a) Posti due contatori uno accanto all'altro e, allineato con essi, a 5 m. di distanza, un preparato di radio, non ho notato, per la presenza di quest'ultimo, alcun sensibile aumento nella frequenza delle coincidenze, mentre la frequenza degli impulsi nei singoli contatori era più che triplicata.

b) Posti due contatori coll'asse orizzontale, ora uno sopra l'altro, ora uno accanto all'altro, ho osservato nel primo caso un numero di coincidenze molto superiore che nel secondo; fenomeno questo in relazione colla nota anisotropia della radiazione penetrante.

c) Interponendo fra i due contatori un blocco di ferro di 7 cm. di spessore, non ho notato una sensibile diminuzione nel numero delle coincidenze.

Un'ultima prova riguarda il « rendimento » dei contatori. Ho posto perciò uno sopra l'altro tre contatori, in modo che un raggio non potesse attraversare i due estremi senza attraversare anche quello centrale. Congiunto quest'ultimo con un elettroscopio e gli altri due col dispositivo acustico già descritto, ho osservato che le coincidenze segnalate da questo erano accompagnate assai spesso, ma non sempre, da un impulso nell'elettroscopio. Non ho ancora un numero sufficiente di osservazioni per poter stabilire con esattezza la percentuale dei corpuscoli che, attraversando un contatore, vengono da questo rivelati, ma la valuto circa il 70 %.

4. Per ottenere una deviazione sensibile dei raggi penetranti non basta disporre di un campo magnetico intenso, ma occorre che questo agisca lungo un tratto notevole della loro traiettoria; bisogna inoltre tener presente che i contatori non possono essere troppi corti e che è opportuno sottrarli, per quanto è possibile, all'azione del campo magnetico, che potrebbe turbarne il funzionamento.

Queste considerazioni mi hanno indotto a tentare di far deflettere i raggi penetranti nell'interno del nucleo di ferro di un elettromagnete, an-

ziché nell'aria. Lavorando così a circuito magnetico chiuso l'induzione può raggiungere facilmente valori elevati, mentre il campo magnetico fuori del nucleo è assai piccolo.

La fig. 2 rappresenta schematicamente il dispositivo sperimentale. I contatori L, M, N, hanno una lunghezza di 16 cm. ed un diametro interno di 2 cm.; la distanza fra i loro assi è di 10 cm.; l'ultimo può venire spostato lateralmente di qualche centimetro. Il diametro del nucleo di ferro F è di 7 cm.

I due primi contatori isolano (come farebbero due schermi forati posti davanti ad una sorgente estesa) un fascio di radiazione penetrante, il quale

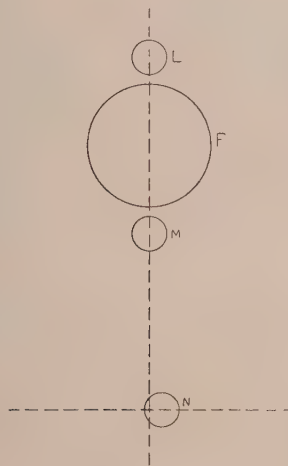


Fig. 2.

presenta la massima intensità nella parte centrale (zona di piena illuminazione) e intensità decrescente verso l'esterno nella regione periferica (zona di penombra). Il terzo contatore poi serve ad analizzare la distribuzione di intensità nelle varie sezioni di questo fascio; la frequenza delle coincidenze triple misura infatti il numero dei corpuscoli che, per unità di tempo, cadono sul terzo contatore dopo aver attraversato i primi due.

Se fra il primo e il secondo contatore si fa agire, lungo un tratto l , un campo magnetico che defletta la traiettoria dei raggi secondo archi di cerchio di raggio ρ , il fascio emerge dal secondo contatore deviato di un angolo $\frac{l}{2\rho}$ rispetto alla direzione primitiva; il che produce, ad una distanza D , uno spostamento laterale uguale a $\frac{lD}{2\rho}$. Col campo diretto in senso op-

posto la deflessione avviene pure in senso contrario; cosicchè, invertendo il campo, si ottiene uno spostamento complessivo $\Delta = \frac{lD}{\rho}$.

Se p. es., i raggi penetranti fossero costituiti di elettroni di 10^9 volt, la loro traiettoria avrebbe, in un campo di induzione di 16500 gauss (come quello che si può creare nell'interno del nucleo), un raggio di curvatura $\rho = 200$ cm. Da cui si ricava, essendo $l = 7$, $D = 10$:

$$\Delta = 0.35 \text{ cm.}$$

Ho eseguito alcune prove preliminari ponendo l'asse del terzo contatore ad una distanza di 13 mm. dal piano degli altri due. In tali condizioni uno spostamento del fascio di 0.35 cm. dovrebbe produrre approssimativamente una variazione del 15 % nella frequenza delle coincidenze triple.

Poichè queste, date le dimensioni e le mutue distanze dei contatori, sono assai rade, non ho potuto finora raccogliere che un numero molto scarso di osservazioni. Su 46 coincidenze registrate in 17 ore, invertendo il campo ogni 30 minuti, 26 sono state segnalate col campo diretto in senso tale, da deviare verso il terzo contatore gli elettroni che hanno attraversato i primi due; 20 col campo diretto nel senso contrario.

Sarebbe evidentemente prematuro concludere in base a questi numeri alcunchè di preciso.

Se la medesima proporzione dovesse mantenersi nel corso di una estesa serie di misure, che ho intenzione di eseguire valendomi di una registrazione automatica delle coincidenze, si sarebbe condotti ad identificare i corpuscoli di radiazione penetrante con elettroni di energia corrispondente a circa 10^9 volt. Pel momento si può dire soltanto che, se si tratta di elettroni, la loro energia non deve essere molto inferiore a quella indicata; giacchè elettroni di 10^8 vol non potrebbero, nelle condizioni dell'esperienza, attraversare i tre contatori quando il campo è invertito.

Fisica. — *L'effetto « Hall » per i metalli Ni, Fe, Cu in campi magnetici deboli.* Nota di E. BOSSA, presentata⁽¹⁾ dal Socio M. CANTONE.

L'effetto Hall, per sostanze ferromagnetiche, secondo i dati forniti dagli autori⁽²⁾ che su di esse sperimentarono, genera una debolissima differenza di potenziale che non può misurarsi facilmente se non quando si ricorra, per la produzione dell'effetto, a campi magnetici molto forti: il coefficiente di Hall risulta dell'ordine di 10^{-3} . In tali condizioni, per proce-

(1) Nella seduta del 2 marzo 1930.

(2) HALL, « Philos. mag. », 1885; MOREAU, « Comp. Ren. », 1900; ZAHAN, « Ann. der Phy. », 1904.

dere ad uno studio inteso ad assodare il comportamento del Fe e del Ni in campi magnetici molto deboli, ho creduto opportuno elevare il grado di sensibilità del mezzo sperimentale di misura; ed a tal fine mi sono servito di un sistema amplificatore costituito da un triodo funzionante nelle condizioni di generatore di oscillazioni.

Lo schema di montaggio del dispositivo amplificatore è quello rappresentato in figura: in essa va notata la disposizione del condensatore di blocco nel circuito griglia - filamento, con una delle armature a terra; ed è inoltre da osservare la diversità dagli altri metodi adottati per l'accoppiamento dell'amplificatore all'apparecchio di misura, costituito da un galva-

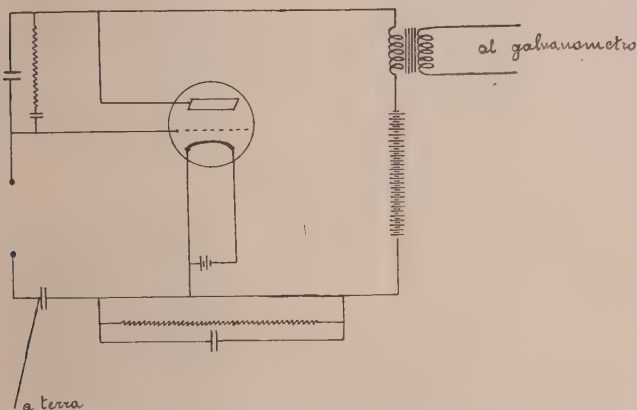


Fig. I.

nometro Hartmann e Braunn, di tipo balistico, con sensibilità di 2.05×10^{-9} . L'accoppiamento suddetto è fatto per tramite di un trasformatore a nucleo di ferro chiuso, il cui avvolgimento primario è inserito nel circuito anodico del triodo, mentre l'avvolgimento secondario è chiuso attraverso il circuito interno del galvanometro.

La taratura del sistema amplificatore fu fatta servendosi di debolissime differenze di potenziale, ottenute per mezzo di una disposizione potenziometrica comprendente varie cassette di resistenze preventivamente tarate per un ammontare complessivo di 4.103.000 ohm, ed una pila Weston quale sorgente di forza elettromotrice: fu possibile così, derivando il ramo mobile del circuito potenziometrico su frazioni di ohm, ottenere differenze di potenziale dell'ordine di 10^{-10} volt.

Dai dati sperimentali della taratura effettuata, tenendo conto della sensibilità del galvanometro e della sua resistenza interna, risultò un rapporto amplificatore di uno a mille. Ed è notevole il fatto che un sistema dotato

di tale grado di sensibilità risultò di una stabilità sufficiente a garantire facilmente i decimi di divisione su spostamenti di circa 100.

Il metodo di misura così realizzato ha permesso di portare l'indagine dell'effetto studiato nei campi magnetici deboli e con intensità della corrente primaria solo di qualche decimo di ampere in modo da poter ritenere trascurabili i disturbi derivanti da effetti termici per il passaggio della corrente anzidetta.

Il dispositivo adoperato per generare l'effetto Hall è quello attuato per la prima volta dal prof. Adinolfi⁽¹⁾ per la misura dello stesso effetto nel caso del Bi e del Te. La lamina cimentata è portata da un apposito sostegno di ebanite cui sono fissi quattro portaelettrodi che permettono, mercè un movimento di rotazione che può darsi agli estremi poggianti sulla lamina, la simmetrizzazione di questa senza ricorrere al metodo potenziometrico. Poichè non era nello scopo del lavoro spingere l'indagine a valori forti del campo, ad evitare i disturbi derivanti per magnetismo residuo dall'uso di masse polari il campo magnetico era creato con un solenoide di filo di rame senza nucleo di ferro: si otteneva così, per l'intensità di un ampere circolante nel solenoide, un campo magnetico di 57.4 gauss.

Sia per il campo magnetico che per la corrente primaria venivano usate come sorgenti di forza elettromotrice batterie di accumulatori, e l'intensità di corrente era controllata con amperometri Hartmann e Braun.

Una prima serie di misure fatte con una lamina di Ni dello spessore di 0.1 m/m, adoperando un valore dell'intensità primaria di 0.18 ampere e facendo diminuire il campo magnetico fino a 10.78 gauss, dimostrarono una tendenza del coefficiente di Hall ad aumentare continuamente a misura che diminuisce il campo magnetico. Si notava altresì che, con l'invertirsi del campo, le deviazioni galvanometriche non erano simmetriche, ma con questo di notevole che l'andamento del fenomeno, pur con una maggiore accentuazione della differenza al crescere del campo, era perfettamente analogo nei due casi onde si era indotti a dedurre il coefficiente di Hall dai valori medi. Non si riscontrò traccia di effetto d'isteresi, anche partendo fin da principio dai valori più bassi del campo.

Si procedette poi alla deduzione del coefficiente di Hall facendo aumentare l'intensità della corrente primaria, e precisamente portandola a 0.45 ampere: fu in tal caso possibile ridurre il limite inferiore del campo magnetico, per lo studio in esame, fino a 1.25 gauss, senza peraltro correre il rischio di avere, anche in questo campo di maggiore sensibilità, disturbi apprezzabili per effetti termici.

Le determinazioni eseguite con queste serie di esperienze sul nichel sono notevoli in quanto portano a risultati anomali rispetto a quelli ottenuti dagli altri autori, nel caso di campi non deboli, essendo risaputo che

(1) ADINOLFI, *L'effetto Hall*.

per forze magnetiche non molto piccole il valore del coefficiente di Hall si mantiene pressochè costante e cioè risulta di circa -11×10^{-3} . Le esperienze ora eseguite mostrano invece che il coefficiente rimane quasi invariato fino ad un limite inferiore del campo di 30 gauss circa, ma per ulteriore diminuzione di H , il coefficiente di Hall nel nichel aumenta in valore assoluto con notevole rapidità, come mostrano i grafici riportati, fino

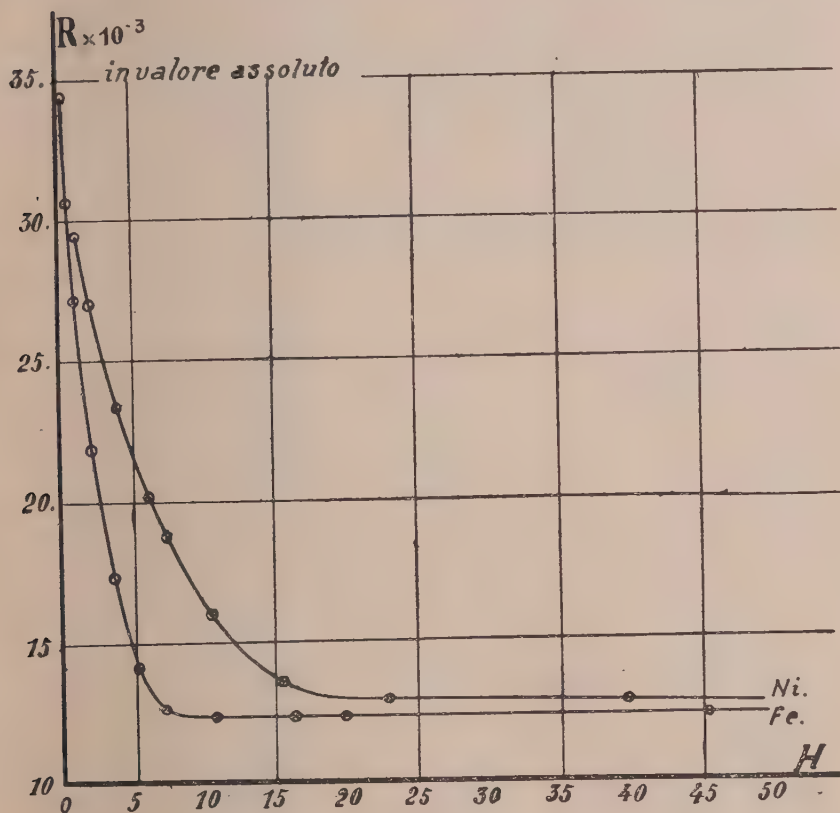


Fig. 2.

ad assumere, per un campo di 1.25 gauss, una grandezza doppia di quella avuta per campi d'intensità media.

Poteva sorgere il dubbio che l'andamento anomalo del coefficiente fosse dovuto a variazioni di temperatura nella lamina, e quindi ad una differenza di potenziale di origine termoelettrica, tra la lamina e gli elettrodi di rame; ma essendosi ottenuti, con una lamina ritagliata con quattro appendici formanti elettrodi, risultati sperimentali identici a quelli che si erano avuti con elettrodi di metallo diverso, il dubbio suesposto cade.

Interessava osservare anche il comportamento del ferro nei campi deboli, e per accertare che le anomalie non si estendessero ai metalli non ferromagnetici si credette opportuno prendere in esame anche il rame.

Nonostante il fatto di aversi, a differenza di quanto si verifica per il Ni, un coefficiente di Hall positivo per il Fe, i risultati sperimentali dimostrano in modo netto che l'andamento, per ciò che riguarda la variazione della grandezza del coefficiente di Hall, è quasi del tutto analogo a quello del Ni. L'esperienza mostrò infatti che il coefficiente di Hall ha un valore positivo quasi costante con leggera tendenza ad aumentare per campi magnetici decrescenti fino a 6.2 gauss circa, e che per un ulteriore diminuzione del campo il coefficiente aumenta rapidamente e raggiunge per 0.2 gauss il valore di 34.5×10^{-3} , che è circa tre volte più grande di quello ottenuto per i campi forti.

La dissimetria delle deviazioni galvanometriche sussiste anche in questo caso, anzi è molto più accentuata che per il Ni.

TABELLA I.

Lamina di Ni $b = 0.01 \text{ cm.}$				$i = 0.45$
H gauss	Deviazioni			$R \times 10^{-3}$
	a destra	a sinistra	media	
1.25	13.1	15.0	14.0	— 29.5
2.95	13.4	21.0	17.2	26.9
4.01	17.0	25.9	22.0	23.4
5.31	20.2	32.2	26.2	21.2
7.10	29.5	47.9	37.4	18.3
10.30	38.6	60.4	49.5	16.0
15.51	49.1	81.3	65.2	13.7
29.05	73.5	100.1	103.5	12.8
40.20	138.9	217.5	178.2	12.7
70.35	180.0	274.0	227.3	12.6
130.20	— 26.00	467.0	431.0	12.1
177.15	— 70.0	598.0	539.0	12.1
290.20	— 167.0	857.0	786.0	11.1
355.17	— 478.0	1078.0	901.0	11.1
471.72	— 588.0	1129.0	1140.0	10.3

TABELLA II.

Lamina di Fe $b = 0.02$ cm.				$i = 0.49$
H gauss	Deviazioni			$R \times 10^{-3}$
	a destra	a sinistra	media	
0.2	1.0	0.4	0.7	+ 34.5
0.5	3.2	0.9	1.6	30.7
1.0	8.6	2.8	2.9	27.2
3.5	18.3	15.7	6.8	17.5
5.1	27.9	22.3	7.8	14.1
7.1	54.3	29.7	12.3	12.6
10.5	68.2	40.8	13.7	12.3
16.2	99.4	66.0	21.7	12.3
45.5	150.9	26.7	62.1	12.2
80.8	202.0	1.3	107.8	12.2
197.0	316.0	— 70.0	206.6	12.1
252.1	440.0	— 180.7	322.1	12.1
306.5	529.0	— 242.0	403.8	12.1
425.8	694.0	— 325.0	551.7	11.9

TABELLA III.

Senza amplificatore

Lamina di Ni $b = 0.01$ cm.				$i = 2.93$
H in gauss	Deviazioni			$R \times 10^{-3}$
	a destra	a sinistra	media	
119.9	1.1	2.9	1.53	— 12.5
249.5	0.7	5.3	3.02	11.8
327.2	— 0.2	7.9	3.86	11.5
375.4	— 0.4	9.0	4.32	11.2
560.8	— 1.0	12.8	5.93	10.3

TABELLA IV.

Lamina di Cu $b = 0.01$ cm.				$i = 0.98$
H in gauss	Deviazioni			$R \times 10^{-4}$
	a destra	a sinistra	media	
1.3	0.9	0.7	0.8	— 7.12
3.1	1.95	1.87	1.9	7.10
5.2	3.2	3.2	3.2	7.10
10.5	6.3	6.7	6.5	7.10
24.3	14.5	15.5	15.0	7.04
45.8	28.0	28.3	28.1	6.98
80.4	48.0	48.2	48.1	6.82
157.0	90.1	91.0	90.9	6.60
285.2	134.0	136.2	135.0	6.13
407.8	205.0	206.5	205.0	5.73

I dati sperimentali ricavati nel caso del Cu mostrano chiaramente che l'anomalia della legge di variazione del coefficiente di Hall, dedotta dalle determinazioni fatte per il Ni e per il Fe, è caratteristica di queste sostanze. Infatti, cimentata una lamina di Cu di 0.1 m m di spessore, allo stato crudo, con intensità della corrente primaria di 1.98 ampere e con valori del campo magnetico da 1.30 gauss fino ad un massimo di circa 462, il coefficiente di Hall dedotto dalle determinazioni presentò un valore quasi costante, poichè da -7.10×10^{-4} per i campi debolissimi, si arrivò in modo graduale a -5.55×10^{-4} per i campi più forti. Ciò è conforme a quanto fu trovato dagli altri sperimentatori²¹ che operarono a partire da valori non piccoli della forza magnetizzante.

A togliere ogni dubbio sulla precisione delle misure fatte col metodo amplificatore suddescritto, ho profittato della possibilità di attuare tale metodo anche per campi per cui il metodo ordinario basta alla deduzione del coefficiente di Hall, per stabilire un legame fra le esperienze eseguite con i due metodi: i dati sperimentali che si riportano per il Ni, mostrano chiaramente che, salvo una leggera differenza che rientra nei limiti dell'errore possibile, i risultati per il valore del coefficiente di Hall sono identici e indicano una identica legge di variazione.

(1) ZAHAN, loc. cit.

CONCLUSIONI.

I dati sperimentali raccolti permettono di venire alle seguenti conclusioni:

1. L'andamento del coefficiente di Hall, nei campi magnetici deboli è sostanzialmente diverso, per il Ni e per il Fe da quello che si ha per i campi forti, in quanto il graduale aumento, che si osserva al diminuire del campo, si converte in aumento rapido a partire da 30 gauss circa per il Ni e da 6.2 gauss circa per il Fe; e questo particolare andamento si mantiene fino ai limiti cui si è arrivati in queste esperienze e cioè di 2 gauss per il Ni e 0.2 per il Fe.

2. Esiste per queste sostanze dissimmetria delle deviazioni galvanometriche con l'invertirsi del campo magnetico.

3. Per il Cu non vi è traccia di dissimmetria, ed il coefficiente di Hall presenta un leggero aumento col diminuire del campo magnetico fino al valore limite di 1 gauss circa cui si è arrivati in queste esperienze.

Al prof. Cantone, per gli aiuti ed i consigli datimi, rivolgo i miei vivi ringraziamenti.

Chimica. — *Sulla 2-5-dibromo-fenetidina*⁽¹⁾. Nota di G. BARGELLINI e A. GRIPPA, presentata⁽²⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

In una Nota precedente⁽³⁾ fu dimostrato che la dicloro-fenacetina che Reverdin e Düring⁽⁴⁾ avevano ottenuta clorurando la fenacetina, contiene i due atomi di cloro in posizione 2-5-. Era altresì noto che bromurando la stessa fenacetina, si forma una mono-bromo-fenacetina (formula II) nella quale Hodureck⁽⁵⁾ e Reverdin e Düring (loc. cit.) dimostrarono che l'atomo di bromo è contenuto in posizione 2. Se la bromurazione della fenacetina (formula I) si fa con una quantità di bromo corrispondente a quattro atomi, si forma invece una dibromo-fenacetina (formula III) dalla quale per saponificazione si ha facilmente la dibromo-fenetidina corrispondente (formula IV).

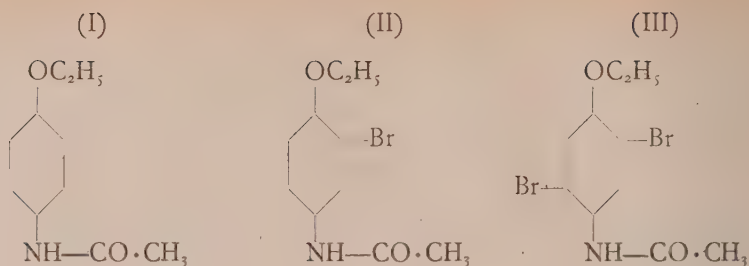
(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 2 marzo 1930.

(3) BARGELLINI e MONTI, questi « Rendiconti », 1928 (2), p. 590.

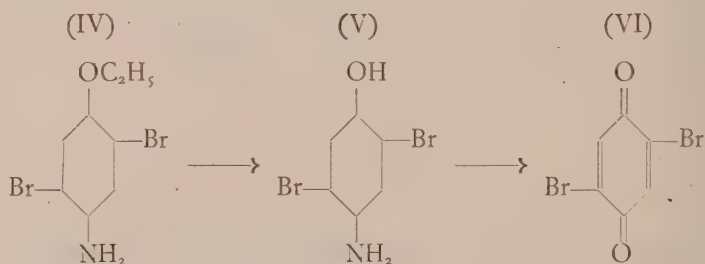
(4) REVERDIN e DÜRING, « Ber. », 32 (1899), p. 154.

(5) HODURECK, « Ber. », 30 (1897), p. 478.



Descriviamo in questa Nota la preparazione e le proprietà di questa nuova dibromo-fenetidina e descriviamo altresì alcuni dei suoi derivati adatti per caratterizzarla meglio.

La formula di costituzione di questa dibromo-fenetidina si può dimostrare trasformandola nel dibromo-ammino-fenolo corrispondente (formula V) il quale per ossidazione dà origine al 2-5-dibromo-chinone (formula VI) che da lungo tempo era noto.



Dalle esperienze descritte in questa Nota risulta così confermato quanto fu dedotto nella prima Nota sopraindicata: quando s'introducono atomi di alogeno nella molecola della fenacetina, il primo entra in posizione orto al gruppo $\text{—OC}_2\text{H}_5$, ed il secondo entra in posizione orto al gruppo —NH—CO—CH_3 .

PARTE SPERIMENTALE.

2-5-dibromo-fenacetina (formula III). — Si può ottenere con un metodo analogo a quello con cui si prepara la 2-5-dicloro-fenacetina, cioè facendo agire una miscela di bromuro e bromato di sodio sopra la fenacetina sciolta in acido acetico e acido cloridrico. Meglio si prepara però sciogliendo gr. 10 di fenacetina in 30 cc. di acido acetico e aggiungendo poco a poco alla soluzione raffreddata ed agitata, una soluzione di gr. 18 di bromo in 30 cc. di acido acetico. Dopo aver lasciato in riposo per qualche ora, si scalda per 20-30 minuti su bagnomaria per completare la reazione e infine si versa in acqua. Il prodotto greggio della reazione che così si preci-

pita si purifica facendolo cristallizzare dall'alcool dopo ebollizione con carbone animale. Secondo le condizioni in cui si fa la cristallizzazione si può ottenere in due forme differenti trasformabili l'una nell'altra tutte e due fusibili a 169-171°.

Da soluzioni concentrate e per rapido raffreddamento si ottiene la sostanza in sottili aghi che, osservati al microscopio, sembrano talvolta ramificati e tal'altra incurvati a guisa di virgola. Da soluzioni alcooliche diluite e per lento raffreddamento la sostanza cristallizza in grossi cristalli di apparenza romboedrica.

Trovato Br % 47.32 N % 4.31
per $C_{10}H_{11}O_2NBr_2$ Calcolato Br % 47.47 N % 4.15.

È insolubile nell'acqua: si scioglie nell'alcool, nell'acido acetico e nel benzolo.

2-5-dibromo-fenetidina (formula IV). — Una soluzione di gr. 6.5 di dibromo-fenacetina in 50 cc. di acido acetico e 50 cc. di acido cloridrico concentrato si fa bollire per 4-5 ore a ricadere. Già durante l'ebollizione comincia a separarsi il *cloridrato* poco solubile, il quale poi per raffreddamento si deposita tutto cristallizzato in lunghi aghi di colore bianco argenteo. Fonde a 225-226°. Dal cloridrato poi con acqua ammoniacale si ha facilmente la dibromo-fenetidina che si purifica facendola distillare in corrente di vapore e poi cristallizzandola da alcool diluito. Aghetti bianchi fusibili a 55-56°.

Trovato Br % 54.39 N % 4.95
per $C_8H_9ONBr_2$ Calcolato Br % 54.24 N % 4.74.

Si scioglie facilmente nell'alcool, nell'acido acetico e nel benzolo.

Aggiungendo una soluzione alcoolica satura di acido picrico alla soluzione alcoolica di dibromo-fenetidina, si ha il *picrato* in aghetti gialli fusibili a 144-145°.

Benzoil-2-5-dibromo-fenetidina. — Si prepara facendo reagire il cloruro di benzoile in quantità calcolata sulla dibromo-fenetidina sciolta in benzolo. Si purifica facendolo cristallizzare dall'alcool bollente. Aghetti bianchi fusibili a 145-147°.

Trovato N % 3.75
per $C_{15}H_{13}O_2NBr_2$ Calcolato N % 3.51.

Si scioglie facilmente nell'alcool, nell'acido acetico e nel benzolo.

1-etossi-2-5-dibromo-piperonal-anilina. — Una soluzione di 2 gr. di dibromo-fenetidina e 1 gr. di piperonalio in 20 cc. di alcool si fa bollire per 4-5 ore su bagnomaria a ricadere. Il prodotto di condensazione che si

deposita per raffreddamento si fa cristallizzare dall'alcool bollente. Aghetti di color giallo chiaro fusibili a 143-145°.

Trovato N % 3.55
per $C_{16}H_{13}O_3NBr_2$ Calcolato N % 3.27.

Nell'alcool, nell'acido acetico e nel benzolo si scioglie facilmente; è insolubile in etere di petrolio.

1-etossi-2-5-dibromo-2'-4'-dinitro-difenilammina. — Gr. 2 di dibromo-fenetidina con gr. 1 di cloro-dinitro-benzolo, gr. 2 di acetato sodico e 20 cc. di alcool, si riscaldano per 5-6 ore su bagnomaria a ricadere. Il prodotto greggio della reazione, una sostanza resinosa rossa, si purifica facendolo cristallizzare più volte dall'alcool bollente. Si ottiene finalmente in cristallini rosso mattone che si fondono decomponendosi in modo non netto fra 145 e 165°.

Trovato N % 8.81
per $C_{14}H_{11}O_5N_3Br_2$ Calcolato N % 9.11.

È solubile nell'alcool, nell'acido acetico, ed anche nel benzolo.

2-5-dibromo-4-ammino-fenolo (formula V). — Gr. 5 di dibromo-fenacetina si mescolano con 25 cc. di acido iodidrico ($d = 1.7$) e si riscalda su bagno di sabbia a ricadere. Dopo 6-7 ore di riscaldamento si versa il prodotto in acqua contenente bisolfito di sodio e si neutralizza con ammoniaca. Si deposita una polvere cristallina grigia che si purifica facendola cristallizzare dal benzolo bollente. Si ha così in scaglie bianco-giallognole fusibili a 195°-197°.

Trovato Br % 59.61 N % 5.61
per $C_6H_5ONBr_2$ Calcolato Br % 59.91 N % 5.24.

Si scioglie nell'acqua bollente ed anche nell'alcool a caldo: però le soluzioni si alterano rapidamente diventando rosse. È facilmente solubile nell'etere e nel benzolo bollente.

2-5-dibromo-chinone (formula VI). — Sciogliendo il dibromo-ammino-fenolo sopra descritto in acido solforico ed aggiungendo alla soluzione fredda una soluzione concentrata di bicromato di potassio si forma il dibromo-chinone che precipita. Dopo averlo raccolto e lavato, si purifica facendolo distillare in corrente di vapore. Laminette gialle fusibili a 185-186°. Il 2-5-dibromo-chinone che Benedikt⁽¹⁾ e poi Sarauw⁽²⁾ avevano preparato dal dibromo-idrochinone corrispondente, fonde a 188°, mentre il 2-6-dibromo-chinone che era stato ottenuto da Heinichen⁽³⁾ ossidando con miscuglio cromatico il 2-6-dibromo-4-ammino-fenolo, fonde a 131°.

(1) « Monathsh. », 1 (1880) p. 346.

(2) « Ann. », 209 (1881), p. 113.

(3) « Ann. », 253 (1889), p. 288.

Chimica. — *Sullo sdoppiamento ottico delle aldeidi racemiche.* Nota I di M. BETTI, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *2-6-dibromo-fenetidina e 3-5-dibromo-fenetidina.* Nota di G. BARGELLINI e L. MONTI, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sugli idruri dei metalloidi. - I. La struttura cristallina dell'idrogeno solforato.* Nota di G. NATTA, presentata dal Socio G. BRUNI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geologia. — *Alcune osservazioni intorno all'età dei travertini di Ellera nei dintorni di Perugia.* Nota di P. PRINCIPI, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. G. ROVERETO.

È già noto come ad ovest di Perugia i depositi travertinosi originano un esteso pianoro, compreso fra la stazione di Ellera, S. Sisto ed il podere Stroz-zacaponi, con un piccolo lembo isolato presso le Volpaie. La superficie del giacimento appare pianeggiante, pur presentando un'elevazione alquanto maggiore nella zona centrale, dove si aprono numerose cavità doliniformi, dovute in gran parte all'opera dell'uomo, e degradante lentamente verso i margini occidentali ed orientali. Mentre in corrispondenza di questi ultimi il travertino è separato, mediante una sottile zona di detriti, dai calcari del Cretaceo superiore del M. Lacugnano, lungo la parte occidentale esso si appoggia direttamente sulla formazione marnoso-arenacea dell'Eocene medio, la quale costituisce i Monticelli ed il colle di S. Mariano.

La zona centrale più elevata è stata in questi ultimi anni incisa da una trincea, che doveva servire per una ferrovia raccordante la stazione di Ellera colla miniera di lignite di Pietrafitta, e le pareti del taglio eseguito permettono di esaminare facilmente la successione dei diversi strati del giacimento.

(1) Nella seduta del 2 marzo 1930. In relazione a questa Nota vedi anche P. PRINCIPI, *I bacini pliocenici e quaternari dell'Umbria centrale.* « Atti Soc. Linguistica di Sc. e di Lett. », Genova, 1922; P. PRINCIPI, *Osservazioni intorno al Quaternario dell'Umbria centrale.* « Rendiconti R. Accademia dei Lincei », 1922.

Nella parte inferiore si scorge un banco compatto, talvolta terroso o marnoso, di colore biancastro, della potenza di circa un metro e contenente numerose conchiglie di Molluschi lacustri. Le specie, a cui essi si riferiscono, sono: *Planorbis nautilus* Lin., *Planorbis spirorbis* Lin., *Helix carthusiana* Müll. *Helix pulchella* Müll., *Carychium minimum* Müll., *Bythinia* sp. A questo banco succede uno strato spesso dai 30 ai 60 cm., costituito in gran parte da un impasto di foglie e di fusti di Graminacee (*Arundo*, *Phragmites*) e di Cyperacee (*Carex*?). Segue, poi, nella parte superiore una serie di strati orizzontali, di colore giallastro, numerosi, ma di esiguo spessore, di un travertino spugnoso ed interessato da frequenti disgiunzioni. Qua e là la roccia calcarea è ricoperta da terra rossa, che raggiunge una notevole potenza soprattutto nei dintorni della stazione di Ellera.

A proposito dell'origine di questo giacimento io ho avuto già occasione di rilevare come in epoca, in cui ancora le acque lacustri non avevano evacuato la regione ad ovest del M. Lacugnano, numerose sorgive, provenienti dal vicino gruppo calcareo del Monte Malbe, convogliavano nel lago le loro acque calcarifere; modificatosi verso la fine del Pleistocene il regime delle piogge, le sorgenti scomparvero, ma rimasero i materiali da esse depositati a testimoniare la loro attività.

Io avevo dapprima riferito questa formazione travertinoso al periodo infraglaciale succeduto al Mousteriense, per il fatto che nei depositi di terra rossa di Pila si trovano mescolati frammenti di travertino e numerosi manufatti litici, che rammentano alcuni tipi caratteristici dei giacimenti di Aurignac, di Solutré e de la Magdaleine; nuove scoperte paleontologiche nel territorio in questione tendono a dimostrare un'età alquanto più antica.

Alcune escavazioni eseguite a sud di G. Rosci, a lieve profondità dalla superficie del suolo, hanno portato alla luce numerosi frammenti di ossa e di denti fossili di mammiferi, i quali si trovano inclusi in un travertino di colore giallastro, con frequenti spalmature di terra rossa, spesso così duro e compatto da rendere estremamente difficile la estrazione dei resti fossili.

Il materiale raccolto mi ha permesso di riconoscere le seguenti forme:

Elephas antiquus Falc. - Vari frammenti di denti molari, di cui alcuni assai ben conservati e caratteristici sia per le lamelle più grosse e meno numerose di quelle dell'*Elephas primigenius* e meno spesse di quelle dell'*Elephas meridionalis*, presso a poco parallele e colle pareti dello smalto crespe verso la parte mediana, sia per il piccolo numero di figure di erosione incomplete rispetto a quelle complete.

Cervus elaphus Lin. Frammento di mandibola con quattro denti molari.

Bos primigenius Boj. Denti molari inferiori o superiori e frammenti di femore e di cresta sottotrocanteriana.

Sus scrofa L. *ferox*. Un canino.

Ursus spelaeus Blumb. Un canino ed un molare.

Numerosi altri frammenti di ossa lunghe e di vertebre sembrano avere appartenuto ad altri Bovidi, di non grande taglia, ma sono troppo incompleti per poter permettere una determinazione più precisa.

Tutti questi resti fossili si riscontrano in un'area assai ristretta, che trovasi ai margini dell'affioramento travertinoso, dove probabilmente per un brusco avvallamento del fondo lacustre gli animali venivano facilmente inghiottiti dalle acque.

La maggior parte delle specie riscontrate appartiene ad una fauna calda, vissuta verosimilmente nella terza Infraglaciale, corrispondente al periodo compreso tra le alluvioni dell'alta terrazza, o Rissienne, e quelle della bassa terrazza, o Wurmiense. La mancanza assoluta di resti di *Elephas primigenius* tende ad escludere che i travertini di Ellera siano riferibili alla quarta Infraglaciale, come dapprima avevo ritenuto. In questa ultima fase, quando con la scomparsa dello specchio lacustre i depositi travertinosi si trovarono sottoposti all'azione degli agenti meteorici, si iniziò la formazione della terra rossa ed il pianoro calcareo assunse a poco a poco il profilo largamente convesso, che mostra attualmente, in seguito alla erosione esercitata dal Fosso Bulagaio e da altri corsi d'acqua, che si costituirono lungo i margini della placca travertinosa.

Biologia. — *L'eutrofismo da stagnazione nei laghi artificiali* ⁽¹⁾.
Nota di G. BRUNELLI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Da diversi anni ho richiamato l'attenzione dei limnologi sulla necessità di studiare la colonizzazione dei laghi artificiali, argomento che avevo assegnato al dott. Ranzi, mio assistente, che poi dovette per sopravvenute circostanze interromperlo appena all'inizio.

In una mia Nota ho già fatto conoscere che i laghi artificiali nei riguardi delle caratteristiche dello idrobios, tendono, almeno nelle regioni calde, a rientrare nel tipo eutrofico del Thienemann.

Procedendo nel mio studio ho fermato la mia attenzione sopra i particolari fenomeni di fioritura del Tirso e del Coghinas.

Salvo ad approfondire tale studio comunico qualche risultato interessante. La fioritura del Tirso e del Coghinas nella stessa epoca (estate del decorso anno) presentava qualche carattere differente e può essere in rapporto alle condizioni diverse d'invasatura e stagnazione; ma non sono da escludere altre condizioni biofisiche, peculiari a ciascuno dei laghi.

(1) R. Laboratorio centrale di idrobiologia. Roma.

(2) Nella seduta del 2 marzo 1930.

La fioritura del Tirso era costituita a prevalenza di *Microcystis aeruginosa* Kütz, mentre nel Coghinas si riscontrava una enorme quantità di *Ceratium hirundinella* O. Fr. Müller, vi erano inoltre mescolati alle *Microcystis* filamenti di *Anabaena*, di *Melosira granulata* (Ehrb) Pritch ⁽¹⁾. Seguendo la nomenclatura di Forel ⁽²⁾ si indica come fioritura delle acque la comparsa di macchie colorate dovute all'accumulo di elementi vegetali alla superficie di un lago.

In una sua recente e interessante pubblicazione, la Monti ⁽³⁾ ha discusso un fenomeno simile di fioritura nelle acque del Lario, ove già in passato era stato descritto da qualche autore, e ne ha fatto argomento per discutere tale fenomeno riportando un'accurata bibliografia, che ci dispensa qui dal ripeterla.

La sunnominata autrice pone anche in discussione il pericolo o meno che la fioritura possa avere per il pesce e conclude che esso, almeno in laghi profondi, non è pericoloso per la pescosità.

Quello che è interessante è che la fioritura, fenomeno quasi di eccezione per i laghi naturali, diviene invece un fenomeno normale per i laghi artificiali con stagnazione più intensa e meno esposti all'azione del vento. A ciò si aggiungono senza dubbio le condizioni favorevoli della temperatura, piuttosto elevata, che si verifica nei periodi di prolungata stagnazione estiva.

I limnologi che, come osserva la Monti nella citata Memoria, hanno descritto la fioritura, hanno spesso insistito (Apstein, Steuer, Steinger, ecc.) nel fare notare che il fenomeno appare più spesso in piccoli bacini tranquilli, molto bene riparati dal vento, e che nei laghi maggiori si manifesta solo in giorni di assoluta bonaccia quando le acque sono immobili. Inoltre la Monti ha visto comparire la fioritura in giornate coperte senza un filo d'aria e l'ha vista sparire non appena rinforzato il vento.

Con ciò si spiegherebbe il fenomeno di convergenza etologica con quello da me descritto nei laghi artificiali, in cui si verificano per la stagnazione da invasatura condizioni simili.

Io designo come eutrofismo da stagnazione la fioritura dei laghi artificiali. Detto fenomeno viene ad assumere una notevole importanza sia in vista di studiarne gli effetti sulla pesca, che quelli sulla malaria.

Nei riguardi della pesca io credo che il cattivo sapore che hanno alcuni pesci catturati nei laghi artificiali sia in relazione anche a questo *flos aquarum*, e che sia opportuno nei riguardi della stabulazione del pesce, costruire vasche di spurgo per i pesci innanzi di commercialarli.

(1) Debbo la determinazione delle suddette alghe alla cortesia del chiarissimo dottore Achille Forti di Verona.

(2) FOREL F. A., *Le Leman*, vol. III. Lausanne, edit. Rouge, 1895.

(3) MONTI R., *La rifioritura delle acque del Lario*. R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, vol. 58, 1925.

Tale pratica vado da tempo raccomandando agli idroelettrici che cominciano ad interessarsi di pesca, anche perchè non si può trascurare una fonte, sia pur piccola, della nostra ricchezza nazionale nell'economia del patrimonio idrico.

Nei riguardi della malaria il fenomeno dell'eutrofismo è senza dubbio pericoloso per l'anofelismo, e credo di essere stato tra i primi, nel 1915, a indicare che i laghi artificiali dovevano nei riguardi della malaria non prestarsi a ottimismo eccessivi.

Sù bacini artificiali e malaria hanno anche richiamato l'attenzione malarologi stranieri come Le Prince ⁽¹⁾ e Gage ⁽²⁾ e tra noi per non dire di altri Marginesu ⁽³⁾ e Fermi ⁽⁴⁾, i quali opportunamente si sono occupati delle condizioni igieniche dei bacini del Tirso e del Coghinas nei riguardi della malaria.

Non vi ha dubbio che lo studio idrobiologico dei laghi artificiali presenti un triplice interesse, per l'industria idroelettrica, interessando l'idraulica lacustre, per la pesca e per la malaria, a prescindere dall'interesse più generale della scienza pura e dei connessi problemi della colonizzazione dei laghi.

Fermi ricorda come i laghi artificiali in località malarica accanto agli immensi vantaggi idraulici, elettrici, agrari ed economici, se non sono insieme ai canali irrigui costruiti e mantenuti secondo le regole antimalariche, possono, come è notorio, non solo aumentare la malaria, ma persino importarla in località salubri. Pericolo che io avevo già rilevato nei miei scritti sulla bonifica idrobiologica ⁽⁵⁾.

È perciò importante che i limnologi si apprestino a uno studio della idrobiologia dei bacini artificiali, che anche all'estero per opera di Kreitmänn e di altri studiosi va prendendo naturale impulso e non deve da noi trascurarsi.

Notizie recenti sul successo dell'acclimatazione del pesce persico nei laghi artificiali, dove abbondano copepodi e larve di insetti, fanno prevedere che lo sfruttamento colla pesca di detti laghi potrà di pari passo essere condotto colle pratiche della lotta antimalarica.

(1) LE PRINCE, « U. S. Public Health Reports », vol. XXX, 1915.

(2) GAGE, « U. S. Public Health Reports », vol. XL, 1925.

(3) MARGINESU P., *Bacini artificiali e malaria*. « L'igiene moderna ». Genova 1927.

(4) Da una relazione manoscritta cortesemente fornitami dall'autore.

(5) BRUNELLI G., *Ricerche di idrobiologia sanitaria. Nuovi studi sulle bonifiche e le irrigazioni*. Tip. del Senato, Roma, 1915.

Biologia. — *Ricerche sulla cronassia.* — III. *Azione del litio sulla cronassia del preparato neuromuscolare di rana.* Nota di P. S. ISRAEL, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. FANO.

Le proprietà biologiche del litio e la sua influenza sull'eccitabilità muscolare, sono state ampiamente studiate da Overton⁽²⁾, Benda⁽³⁾ ed altri; tutti gli sperimentatori sono giunti alla quasi unanime conclusione che il litio presenta delle proprietà molto analoghe a quelle del sodio e che per conseguenza esso potrebbe sostituire quest'ultimo soprattutto per quello che riguarda la conservazione dell'eccitabilità muscolare.

Ho creduto interessante, proseguendo le mie ricerche sull'azione di alcuni joni sulla cronassia, di saggiare il comportamento del litio, con i due parametri dell'intensità e della durata dello stimolo.

Mi sono servito del metodo già descritto in un lavoro precedente⁽⁴⁾ e consistente essenzialmente nel portare sul preparato delle scariche di condensatori di diverse capacità; è il metodo adoperato dal Lapicque nel cui laboratorio ebbi l'occasione di poterlo applicare per la prima volta. I risultati che ho riportato sulle tabelle che seguono questa Nota, non sono dati in minuti secondi; ma in microfarad riservandomi di farne il calcolo nel lavoro « in extenso ».

Ho sperimentato su preparati neuromuscolari di rana temporaria che si prestano perfettamente per questo esperimento.

Immergevo il preparato, per una o due ore in Ringer ordinario quindi misuravo la cronassia facendo passare lo stimolo attraverso il nervo appoggiato sugli elettrodi impolarizzabili; immediatamente dopo immergevo il preparato in una soluzione di Ringer opportunamente modificata e dopo 3-4-6 e talora anche dopo 10 ore, riprendevo la misura della cronassia; nello stesso tempo temevo un altro preparato costantemente immerso in Ringer ordinario come controllo, e questo Ringer veniva cambiato contemporaneamente a quello del preparato sottoposto all'esperimento.

Ho ordinato le ricerche nel seguente modo:

In un primo tempo ho immerso il preparato neuromuscolare in una soluzione di Ringer nel quale il NaCl era stato completamente sostituito da una quantità isotonica di LiCl; (Soluzione A).

In un secondo tempo mi sono servito di una soluzione Ringer contenente parti isotonicamente uguali di NaCl e LiCl (Soluzione B) quindi di Ringer contenente delle quantità sempre più piccole di LiCl (Soluzione C).

(1) Nella seduta del 2 marzo 1930.

(2) E. OVERTON, « Pflügers Arch. », 92, 346, 1912.

(3) R. BENDA, « Zeitschr. f. Biol. », 63, 531, 1914.

(4) « Boll. Soc. Biol. Sper. », vol. IV, fasc. 1, 1929.

I risultati di queste prime esperienze mi indussero a ricercare se l'azione del litio veniva comunque modificata variando le concentrazioni del Ca e del K nei loro rapporti reciproci; ho provato così due altre modificazioni del Ringer: una contenente del LiCl ed una proporzione di CaCl_2 inferiore a quella ordinaria (Soluzione D), un'altra contenente del LiCl ma priva affatto di calcio (Soluzione E).

Un'ultima soluzione Ringer (Soluzione F) conteneva del litio (in sostituzione del NaCl) ed una proporzione di K. superiore a quella ordinaria mentre la proporzione del CaCl_2 era ridotta.

I risultati ottenuti e di cui riferisco nelle tabelle soltanto i casi più caratteristici, sono i seguenti:

1° L'immersione del preparato neuromuscolare nella Soluzione A (sostituzione del Na col Li) ha avuto come conseguenza assolutamente costante la completa scomparsa della cronassia al termine di 2-3 ore.

2° L'identico risultato ho ottenuto con l'immersione in Soluzione B (Na e Li in parti uguali).

3° Dopo l'immersione in Soluzione C; (Li in proporzioni sempre più ridotte) ho notato ancora una scomparsa della cronassia che si constatava però dopo un periodo di tempo sempre più lungo; anche piccolissime quantità di litio erano sufficienti, a lungo andare, a far scomparire la cronassia; perchè quest'ultima potesse conservarsi era necessario scendere ad una concentrazione di litio del 0.08 %.

In tutte queste esperienze la quantità di litio tolta veniva sempre sostituita con una quantità isotonicamente uguale di NaCl.

La reobase ha presentato un aumento nelle prime ore dopo l'immersione nella soluzione modificata mentre la cronassia si è mantenuta pressochè invariata; però questo aumento della reobase non è stato costante e si è verificato soltanto nel 20 % dei casi sperimentati.

4° Con la Soluzione D (Li senza Na e calcio in proporzioni inferiori a quelle ordinarie) e con la Soluzione E (Li invece di Na e senza calcio) la cronassia scompare rapidamente, dopo un'ora quasi; però riducendo la quantità di Soluzione E contenuta in Ringer ordinario, la cronassia non subisce variazione alcuna e si mantiene analoga a quella del preparato di controllo.

5° Con la Soluzione F la cronassia in un primo tempo diminuisce mentre la reobase aumenta e dopo due o tre ore scompaiono l'una e l'altra.

Poichè questi risultati erano ottenuti mediante la stimolazione indiretta del muscolo, essi potevano quando erano negativi, attribuirsi soltanto al nervo e non al muscolo; saggiai allora la cronassia diretta del muscolo e notai che le soluzioni A, B e C non fanno mai scomparire la cronassia del muscolo bensì l'aumentano notevolmente parallelamente alla reobase; le altre soluzioni invece fanno scomparire contemporaneamente la cronassia del muscolo e quella del nervo.

Tutti i fenomeni constatati mediante l'immersione del preparato in Ringer modificato, si sono dimostrati assolutamente reversibili e tale reversibilità è apparsa essere in rapporto diretto con la durata dell'immersione nel Ringer modificato, presentando un notevole ritardo soltanto nei preparati sottoposti all'azione dei Ringer D ed E, cioè di quelli contenenti del CaCl_2 in proporzioni ridotte o non contenevano affatto.

Conclusione: Per quello che riguarda la cronassia del preparato neuromuscolare, il LiCl ha su di essa un'azione nettamente sfavorevole e non può in nessun modo sostituire il NaCl ; quest'azione si esercita particolarmente sul nervo mentre il muscolo la subisce in un grado inferiore.

Nè il CaCl_2 , nè il KCl , riescono a modificare sensibilmente questa azione del litio; variando le concentrazioni rispettive di questi due joni si vedono in genere apparire in un primo tempo (prima che possa esercitarsi l'azione del litio) i fenomeni che caratterizzano l'azione del Ca e del K , sulla cronassia del preparato, così come sono stati osservati nel precedente lavoro ⁽¹⁾.

TAVOLE.

Esperienza eseguita con soluzione Ringer A.

Ora	10.25	10.40	11.50	12.30	12.33	12.35	17.20
Reobase e cronassia	(0.8) 160	In soluz. A	(1.4) 161	(1.9) 184	Non reagisce	In Ringer ordinario	(1.1) 181

Esperienza eseguita con soluzione Ringer B.

Ora	16.25	16.28	18.40	19	21.30
Reobase e cronassia	(0.9) 173	In soluz. B	Non reagisce	In Ringer comune	(2) 182

Esperienza eseguita con soluzione Ringer C.

Ora	11	11.10	15.20	15.25	16.30
Reobase e cronassia	(0.7) 209	In soluz. C	Non reagisce	In Ringer comune	(1.5) 192

Esperienza eseguita con soluzione Ringer D.

Ora	10.5	11.20	11.25	15.30	15.35	20.35
Reobase e cronassia	(0.8) 173	In soluz. D	(0.4) 238	Non reagisce	In Ringer comune	(0.5) 268

Esperienza eseguita con soluzione Ringer E.

Ora	16	16.15	16.50	17.30
Reobase e cronassia	(1) 238	In soluz. E	(1) 257	Non reagisce

Esperienza eseguita con soluzione Ringer F.

(KCl 0.38 o/o)

Ora	11	11.30	16.15	16.22	19.22
Reobase e cronassia	(1) 337	In soluz. F	Non reagisce	In Ringer comune	(1) 373.

Nota. — I numeri posti fra parentesi si riferiscono alla reobase. Ho creduto opportuno, per brevità citare di ogni serie di esperienza la più caratteristica; le altre differiscono di poco; ma concordano esattamente nei risultati.

(1) « Boll. Soc. Biol. Sper. », vol. III, fasc. 8, 1928.

Biologia. — *Studi cirripedologici.* — VI. Sul comportamento di « *Chthamalus stellatus* » in diverse condizioni sperimentali. Nota di B. MONTEROSSO, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. A. Russo.

Nel corso di ricerche, iniziate già da lungo tempo e dirette ad investigare quello speciale fenomeno, che è stato chiamato « anabiosi » ho a volta a volta reputato necessario di istituire particolari esperienze, che direttamente o indirettamente entrano in relazione col fenomeno medesimo.

Pur intendendo di rendere noti diffusamente i vari protocolli soltanto nel lavoro, che sarà pubblicato fra non molto, per esteso, credo tuttavia dar subito e succintamente qualche notizia, che ritengo possa contribuire alla miglior conoscenza della biologia di questi interessanti organismi.

In tutte quante le ricerche mi sono servito esclusivamente di *C. stellatus* Ranzani, varietà *depressa* (Poli) la quale mostra prerogative speciali, come è stato detto in scritti precedenti.

*
* *

Parmi, anzitutto, utile proseguire la storia di quel lotto d'individui, attaccati ad un frammento di scoglio basaltico, di cui diedi particolare notizia in una Nota pubblicata nel presente periodico⁽²⁾.

Il blocco in parola fu staccato dalla spiaggia (località *Plaia*) il 12 aprile 1927.

Fino ad oggi gli individui che lo popolano son vivi. Durante i tre anni di trattamento sperimentale ne ho staccati parecchi, per ragioni di studio; degli altri solo pochissimi sono morti — fatto che può non essere attribuito in modo assoluto e completo alle condizioni sperimentali, ma si può benissimo far dipendere da cause individuali, per esempio dall'età. Difatti, con un'approssimazione molto grande si possono calcolare a non più di 10-12 gli individui, che son venuti a soccombere in ognuno dei tre anni di esperimento.

Certo si è che dal 12 aprile 1927 al 12 aprile 1930 tali esemplari sono rimasti su di un tavolo, lontani dal loro ambiente naturale, e senza altra cura che un'immersione di uno-due giorni, ogni tre mesi circa, come può vedersi benissimo dallo annesso specchietto. L'immersione ha avuto luogo in una bacinella, contenente circa due litri di acqua marina fresca e tersa, nella quale si son fatte gorgogliare a getto continuo delle bolle di aria. Se pure il liquido, sempre privo di plankonti visibili, ha fornito qualche

(1) Nella seduta del 2 marzo 1930.

(2) Questi « Rendiconti », vol. VII, serie 6^a, I sem., fasc. 11, pp. 939-944, 1928.

sostanza alimentare, non può certo dirsi che questi organismi siano stati nutriti abbondantemente.

La prima data dello specchietto corrisponde al momento, in cui il blocco, contenente i Cirripedi, fu staccato dalla spiaggia e introdotto in Laboratorio ⁽¹⁾.

*Il trattamento sperimentale degli esemplari in parola si è dunque protratto per giorni mille e novantasei continui, dei quali solo **cinquantanove** passati in acqua e intercalati ai **mille e trentasei** che sono stati trascorsi all'aria libera, fuori d'ogni liquido, in ambiente asciutto e a temperatura normale.*

In media, dunque, e senza contare le ore, si è avuto un giorno di immersione su 17 giorni e mezzo di emersione. Come facevo però notare nella Nota citata, a simili computi aritmetici non può annettersi alcuna importanza. Basta difatti pensare che l'emersione, iniziata il 11 dicembre 1928, è durata *cento e diciannove giorni*, preceduta da un'immersione di giorni *uno*, e seguita da un'altra immersione di giorni *due e ore ventuno* (v. tabella annessa).

Non potremmo discutere qui il significato della resistenza mostrata da questi Ctamalini, ad una condizione così lontana dalla naturale; il trattamento usato e la facoltà, messa ora in evidenza, saranno inquadrati ed interpretati esaurientemente nel lavoro completo, accompagnati con i dati forniti da altri lotti, anch'essi per lunghi periodi costretti a vita anfibia.

Certo, indipendentemente dal fenomeno, che abbiamo studiato (vita ridotta, anabiosi) molte interessanti incognite sorgono dal comportamento di questi animali; fra le quali voglio formulare la seguente domanda: gli organismi, così trattati, se fossero rimasti sulla spiaggia, in condizioni assolutamente normali, sarebbero vissuti tre anni? Che io sappia, sulla longevità dei Ctamalini non abbiamo alcun dato, ma non credo del tutto arbitrario il sospetto che tali piccoli crostacei potrebbero normalmente vivere anche meno di tre anni.

Si noti inoltre, che, di solito, la durata dei periodi di emersione, in questo esperimento, è dipesa dalle esigenze di altre mie occupazioni, sicchè ho dato luogo all'immersione irregolarmente, quando potevo disporre di tempo e dell'acqua marina necessaria.

Ogni periodo di emersione, specialmente i più brevi, poteva dunque ancor protrarsi, ciò che io non ho fatto anche per il timore che questi preziosi esemplari potessero non « rivivere »; osservo in proposito che altri lotti, dopo quattro-cinque mesi di permanenza all'asciutto, eran venuti a soccombere.

Un altro particolare notevole, che qui solo accenno perchè verrà discusso nel lavoro completo, consiste nel fatto, che in ogni immersione quasi tutti gli individui hanno rigettato la spoglia (cuticola) del corpo.

(1) L'ultima data (12 aprile 1930) fu aggiunta durante la stampa di questa Nota.

Immersione (i) Emersione (e)	Data delle variazioni	Durata di ogni emersione	Durata di ogni immersione
e	12 aprile 1927 h. 7	giorni 3 h. 2	—
i	15 » » » 9	—	giorni 1 h. 7
e	16 » » » 16	» 3 » 17	—
i	20 » » » 9	—	» 3 » 7
e	23 » » » 16	» 5 » 1	—
i	28 » » » 17	—	» 1 » 17
e	30 » » » 10	» 4 » 1	—
i	4 maggio » » 11	—	» — » 23
e	5 » » » 10	» 12 » —	—
i	17 » » » 10	—	» 6 » 7
e	23 » » » 17	» 14 » 18	—
i	7 giugno » » 11	—	» 5 » 22
e	13 » » » 9	» 14 » 8	—
i	27 » » » 17	—	» 1 » 17
e	29 » » » 10	» 38 » 7	—
i	6 agosto » » 17	—	» 2 » 18
e	9 » » » 11	» 24 » 23	—
i	3 settembre » » 10	—	» 1 » 23
e	5 » » » 9	» 50 » 1	—
i	25 ottobre » » 10	—	» 6 » —
e	31 » » » 10	» 77 » 6	—
i	16 gennaio 1928 » 16	—	» 3 » 18
e	20 » » » 10	» 53 » —	—
i	13 marzo » » 10	—	» 3 » —
e	16 » » » 10	» 72 » 1	—
i	27 maggio » » 11	—	» 3 » 7
e	30 » » » 18	» 69 » 17	—
i	8 agosto » » 11	—	» 1 » —
e	9 » » » 11	» 30 » 6	—
i	8 settembre » » 17	—	» 2 » 2
e	10 » » » 19	» 35 » 20	—

Segue TABELLA

Immersione (i) Emersione (e)	Data delle variazioni	Durata di ogni emersione	Durata di ogni immersione
	16 ottobre 1928 h. 15	—	giorni 1 h. —
e	17 » » » 15	giorni 45 h. 20	—
i	2 dicembre » » 11	—	» 2 » —
e	4 » » » 11	» 5 » 23	—
i	10 » » » 10	—	» 1 » —
e	11 » » » 10	» 119 » —	—
i	9 aprile 1929 » 10	—	» 2 » 21
e	12 » » » 7	» 118 » 12	—
i	8 agosto » » 19	—	» 3 » 1
e	11 » » » 20	» 78 » 15	—
i	29 ottobre » » 11	—	» 2 » —
e	31 » » » 11	» 90 » 5	—
i	29 gennaio 1930 » 16	—	» 2* » 19
e	1 febbraio » » 11	» 69 » 20	—
i	12 aprile » » 7	—	—
Tempo complessivo di EMERSIONE . . .		giorni 1036 h. 7.	
Tempo complessivo di IMMERSIONE . . .			giorni 59 h. 17
Durata totale dell'ESPERIMENTO . . .		giorni 1096	

*
* *

Interessanti risultati ho potuto ottenere mantenendo esemplari della specie su citata, in acqua di fonte. Anche a tale riguardo non spingerò l'esame fino ai particolari.

Ricorderò che un blocco di quasi trenta individui fu lasciato in acqua di fonte, mutata spesso e per certi periodi fluente, dal 21 novembre 1928 al 20 marzo 1929, e un altro rimase in una bacinella con acqua di fonte, mutata di tanto in tanto, dal 24 novembre 1928 al 22 gennaio 1929.

Durante questo tempo, gli esemplari tenevano la fessura opercolare strettamente chiusa. Solo di tanto in tanto allontanavano le valve calcareo-chitinose, continuando a preservare il corpo, dall'ambiente liquido, mediante la chiusura ermetica dei lembi membranosi opercolari⁽¹⁾.

Solo rarissimamente aprivano un esilissimo ostiolo, fra questi. Nonostante tale comportamento una gran parte rispondevano agli stimoli meccanici, con maggiore o minore vivacità, fino alla morte.

*
* *

Tralasciando altre esperienze, dirò che un piccolo blocco di individui, senza entrare in vita latente, rimase, dal 23 maggio al 26 luglio; e sei esemplari, dal 10 marzo al 31 maggio, immersi del tutto e senza alcuna interruzione in olio di vaselina, in modo che questo sovrastava al più alto punto del blocco per alcuni centimetri. Durante tale permanenza, gli individui restarono vivi, ma col corpo immobile, salvo i pezzi opercolari che venivano, di tratto in tratto, divaricati — talora in modo esagerato — e mantenuti per molte ore in tale condizione. Va inteso, che la fessura tra i lembi membranosi era lasciata beante, sicchè l'olio di vaselina occupava tutta la cavità palleale, ma fra la superficie del mantello (e del corpo) e l'olio restava un'esile spazio dovuto alla differenza tra la tensione superficiale dell'acqua, che imbeve costantemente i tessuti dell'animale, e quella della sostanza estranea (olio). Gli organismi in parola non caddero in anabiosi.

Siffatta esperienza fu istituita per dimostrare la costante presenza di un velo di acqua sul corpo del Cirripede e per meglio studiare la grande resistenza di *Chthamalus stellatus depressus* all'asfissia.

*
* *

I risultati di queste e di altre esperienze moltissime, fatte dal 1926 ad oggi, mi hanno finalmente permesso di penetrare nell'intimo significato e nel valore del cosiddetto fenomeno di *anabiosi*, come sarà esaurientemente dimostrato nella monografia completa, di prossima pubblicazione.

(1) Per il significato di queste espressioni vedere la mia precedente Nota in questi « Rendiconti », vol. VIII, serie 6^a, 2^o sem., fasc. 1-2, p. 92.

Biologia. — *Prime osservazioni su la mutazione di un ifomicete.* Nota di M. CURZI, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. L. PETRI.

In questi ultimi anni, mentre molti studi sono venuti a provare l'esistenza della sessualità nei funghi, molti altri ci hanno fatto conoscere la presenza di variazioni brusche ereditarie tanto nei funghi quanto nei batteri.

Queste ultime da molti autori sono state chiamate « saltations » da altri « dissociazioni » e da altri ancora « mutazioni ». L'ultima denominazione è certamente quella più giusta e quella che più si adatta a indicare le variazioni delle specie microbiche quando esse non sono semplici modificazioni fenotipiche dipendenti più che altro dal substrato culturale, o la somma di graduali e progressive variazioni limitatamente ereditarie per via vegetativa ottenute per favorire, con condizioni ambientali appropriate, lo sviluppo di una data forma vegetativa o fruttifera (*arricchimento* di Schwarz)⁽²⁾, ma sono modificazioni profonde comparse improvvisamente e che poi si perpetuano nelle successive generazioni.

Le mutazioni nei funghi e nei batteri sono quasi sempre modificazioni di ife o di cellule vegetative durante lo sviluppo di una specie e sono rivelate dalla comparsa di settori nelle colonie con caratteristiche diverse da quelle dello stipite materno. Tali settori rappresentano nuovi tipi di accrescimento e quindi nuove forme di sviluppo che si sono segregate dallo stipite originario. Essi stanno ad indicare perciò delle mutazioni vegetative che si manifestano generalmente con la perdita di uno o più caratteri, come diminuzione o scomparsa del micelio aereo, di organi di conservazione e di riproduzione, di pigmentazione, di virulenza, ecc..

I settori comparsi nelle colonie dei funghi e dei batteri, isolati e coltivati separatamente si conservano distinti dalle colonie originali, ma non sempre la differenziazione persiste nei successivi trapianti. Spesso si osserva il ritorno dello stipite isolato allo stipite materno, e su queste reversioni alcuni autori hanno basato l'opinione dell'instabilità delle mutazioni vegetative nelle specie microbiche e del ritorno del mutante allo stipite originale, in modo che si avrebbe un'oscillazione di caratteri attorno ad un tipo medio in una data orbita specifica sostenuta dall'Hadley⁽³⁾ nei batteri e dal Leonian⁽⁴⁾ nei *Fusarium*.

(1) Nella seduta del 2 marzo 1930.

(2) W. SCHWARZ, *Entwicklungsphysiologische Untersuchungen über die Gattungen Aspergillus und Penicillium*, « Flora », Bd. 123, Heft. 4, pp. 386-440 — fig., 1928.

(3) P. HADLEY, *Microbic dissociations*, « Journal Inf. Dis. », v. 40, pp. 1-312, 1927.

(4) L. H. LEONIAN, *Studies on the variability and dissociations in the genus Fusarium*, « Phytopathology », v. 19, n. 9, pp. 753-868, Pl. XVI-XXXIII, 1929.

Altri autori fanno osservare invece che, se non tutte, le forme ottenute per variazione settoriale, molte rimangono stabili, resistono ai vari eccitanti chimici e fisici e non manifestano alcun ritorno al tipo originale.

Per gli uni i settori non rappresentano che delle fluttuazioni inabili ad originare stipiti e razze nuove per la limitata variazione dei caratteri attorno ad un tipo medio a seconda delle condizioni che possono far esaltare una fase piuttosto che un'altra, per gli altri invece i settori rappresentano vere mutazioni, attraverso le quali è possibile avere razze nuove o piccole specie esistenti in natura sugli stessi ospiti o su ospiti diversi, le quali si conservano tali dopo essere passate attraverso agli animali o alle piante parassitizzate e dopo essere state coltivate per numerose generazioni in substrati assai vari.

*
* *

Dalla stabilità degli stipiti comparsi e isolati da un dato stipite originario dipende evidentemente tutta l'importanza scientifica e pratica di queste speciali mutazioni. E per questo mi sono proposto di indagare, con una serie* di ricerche che intendo eseguire in questa Stazione sotto la direzione del prof. Lionello Petri, il quale ha messo a mia disposizione ogni mezzo d'indagine, se è possibile ottenere da una colonia monosporogenita di un dato stipite fungino stipiti differenti, non reversibili, e di ricercare attraverso alla modificazione di ogni singolo carattere l'entità della deviazione ed i rapporti biologici e tassonomici fra stipiti materni e mutanti.

Le prime ricerche sono state fatte sul *Fusarium Moronei* Curzi⁽¹⁾ dopo un dettagliato studio morfologico e fisiologico della specie; esse si possono riassumere come segue:

Dalle colture monosporogenite di *Fusarium Moronei* si possono avere settori di variazione e separare diversi stipiti del fungo che differiscono dall'originale per l'aumento o la diminuzione del micelio aereo, per la presenza o assenza di sclerozi, o di determinate forme di sporificazione e di clamidospore.

La composizione e la concentrazione dei principi nutritivi nel substrato hanno una sensibile influenza sulle variazioni settoriali delle colture.

I settori sono più frequenti nei terreni ricchi che in quelli poveri, ma non però in quelli poverissimi; nell'agar semplice con soluzioni saline e con soltanto tracce di glucosio e di asparagina essi compaiono pure con una certa frequenza.

I caratteri presentati dagli stipiti derivati dai settori rimangono pressochè costanti eccetto leggere fluttuazioni nello sviluppo del micelio.

(1) M. CURZI, *Intorno alla posizione sistematica di un « Fusarium » isolato dalla pelle del cane*, « Atti Ist. Bot. R. Università Pavia », ser. 4^a, vol. I, pp. 95-105, 2 figg., 1929.

Gli stipiti isolati originano a loro volta dei settori secondari, i quali se nella maggioranza tendono a dare stipiti a caratteri intermedi, alcuni ripetevano i caratteri dello stipite originario per cui non sono mancate le reversioni, che però sono sempre avvenute per nuove variazioni brusche nell'accrescimento delle ife in senso opposto alla variazione precedente.

Alcuni stipiti non reversibili sono stati ottenuti sottoponendo i trapianti dei settori di una coltura monoconidica ad una opportuna selezione. Due di questi stipiti (α e γ) si sono avuti scegliendo su numerose piastre e per diverse generazioni, per l'uno (α) il settore con micelio aereo più abbondante per l'altro (γ) il settore con il micelio aereo più povero.

Lo studio comparativo di questi due stipiti ha portato a rilevare differenze sostanziali sia nei caratteri colturali come in quelli morfologici e fisiologici. Così mentre lo stipite α ha abbondante micelio aereo e la fruttificazione sporodochiale, lo stipite γ invece ha poco o nulla micelio aereo e non sporifica che per pseudopionnoti, inoltre mentre il primo ha sclerozi, clamidospore colorate, echinulate ed aggrappate in numerosi e vari bottrioni, il secondo non ha che clamidospore intercalari sempre ialine e lisce.

Quando i due stipiti vengono a svilupparsi in opposizione sulle medesime piastre si manifesta un marcato antagonismo con la formazione, nella linea d'incontro delle due colonie, di una zona scura, di ife ramificate e contorte anormalmente, di micelio aereo e di sporoficazioni più abbondanti. Tale antagonismo, che secondo alcuni autori esisterebbe soltanto fra specie differenti e non fra stipiti della medesima specie, è quasi nullo nei terreni poveri, mentre è forte in quelli ricchi, ben forniti specialmente di principii idrocarbonati.

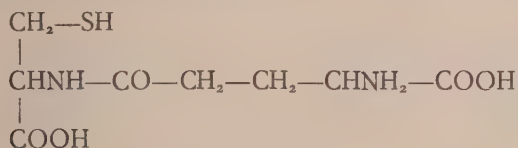
La posizione sistematica dei due stipiti nel più moderno quadro analtico del genere *Fusarium* elaborato nel 1925 da Wollenweber, Sherbakoff ed altri specialisti ⁽¹⁾ è nettamente diversa sebbene non esorbiti i limiti della sezione *Gibbosum* Wr. Lo stipite α conserva la posizione della specie nella sottosezione *Ferruginosum*, mentre invece lo stipite γ rientra nella sottosezione *Eugibbosum* ed è vicinissimo al *Fusarium falcatum* App. et Wr. col quale si confonde.

(1) H. W. WOLLENWEBER, C. D. SHERBAKOFF, O. A. REINKING, H. JOHANN and A. BAILEY, *Fundamentals for Taxonomic Studies of Fusarium*, « Journ. Agricol. Res. », v. XXX, n. 9, pp. 835-843, 1 fig., 1925.

Biologia. — *Contributo allo studio del glutatione nei teleostei.* — Osservazioni sul metodo di dosaggio ⁽¹⁾. Nota I di G. CANNICCI, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. FANO.

Allo scopo di iniziare una serie di ricerche sulle affinità e divergenze esistenti nel meccanismo intimo della respirazione dei tessuti nei pesci, paragonato a quello degli omeotermi — argomento sul quale si era fermata l'attenzione del prof. Brunelli — in rapporto al basso metabolismo di base di molte specie di questa classe, e al loro facile assuefarsi a un lungo, completo digiuno, abbiamo per prima cosa pensato di considerare in alcune forme il valore e le variazioni del tasso in glutatione.

È noto come al glutatione di Hopkins ⁽³⁾ venisse attribuita da Quastel, Stewart e Tunnicliffe ⁽⁴⁾ la formula:



attraverso lo studio analitico delle proprietà chimiche, formula confermata da Tunnicliffe e Stewart ⁽⁵⁾ che ottennero per via sintetica una glutamminilcisteina analoga in tutte le proprietà fisiche e chimiche a quella studiata da Hopkins.

Hunter, George e Eagles ⁽⁶⁾, basandosi soprattutto sulla percentuale di zolfo che secondo le loro analisi era contenuta nel glutatione da loro preparato, gli attribuirono la costituzione di tripeptide costituito da cisteina, acido glutammico e serina, in una comunicazione controbattuta da Hopkins ⁽⁷⁾ che

(1) Lavoro eseguito nel R. Laboratorio Centrale di Idrobiologia.

(2) Nella seduta del 2 marzo 1930.

(3) HOPKINS F. G., *On a autoxidable constituent of the cell.* « Biochem. Journal », vol. XV, 1921.

(4) QUASTEL J. H., STEWART C. P. and TUNNICLIFFE H. E., *On Glutathione. IV. Constitution.* « Biochem. Journ. », vol. XVII, 1923.

(5) STEWART P. C. and TUNNICLIFFE H. E., *Glutathione. Synthesis.* « Biochem. Journal », vol. XIX, 1925.

(6) HUNTER G. and EAGLES B. A., *Glutathione. A critical study.* « Journ. of Biol. Chem. », vol. LXXII, 1927.

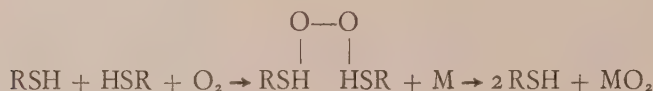
(7) HOPKINS F. G., *On the isolation of glutathione.* « Journal of Biol. Chem. », vol. LXXII, 1927.

attribuì il basso quantitativo di zolfo trovato dai sunnominati autori alla troppo prolungata idrolisi con idrato di bario, che provoca separazione di zolfo (come Hopkins aveva osservato in precedenti esperienze); la formula di dipeptide fu confermata anche da Johnson e Voegtlin ⁽¹⁾ — i quali usando per la preparazione una modificazione della tecnica di Hopkins, ottennero un prodotto che, secondo loro, presentava la composizione e le proprietà della glutamminilcisteina — ed è stata accettata finora da tutti i ricercatori.

Benedict e Newton ⁽²⁾ hanno preparato da sangue di pecora un prodotto che dava all'analisi dei valori in azoto e zolfo più concordi con la formula proposta da Hunter e Eagles che con quella di dipeptide: ultimamente poi, lo stesso Hopkins ⁽³⁾ — che dopo le obiezioni dei surricordati autori aveva ripreso a studiare sull'argomento — perfezionando il metodo di preparazione, ha trovato che il glutatione è un tripeptide, costituito da acido glutammico, cisteina e glicocola, e che ha come proprietà caratteristica una grande instabilità.

La formula di tripeptide è stata confermata anche da Pirie e Pinhey ⁽⁴⁾ mediante lo studio delle curve di titolazione, e da Kendall, Meckenzie e Mason ⁽⁵⁾ che hanno isolato il glutatione e proceduto a prove di identificazione.

I fisiologi sono concordi nel riconoscere l'importanza del glutatione nella respirazione dei tessuti mentre passa dalla forma di mono-solfuro a quella di disolfuro, meccanismo di azione che ben si accorda colla teoria di Wieland per la quale demolizione e trasformazione delle sostanze organiche nei tessuti avverrebbero mediante alternate idrogenazioni e deidrogenazioni, idratazioni e deidratazioni, anzichè per azione diretta dell'ossigeno; secondo Meyerhof il glutatione in presenza di ferro darebbe poi luogo alla formazione di un perossido labile che agirebbe secondo lo schema:



e cioè conformemente alla teoria di Warburg della attivazione dell'ossigeno molecolare.

(1) JHONSON J. M. and VOEGLIN C., *On the preparation and properties of pure Glutathione. (Glutaminyl-cystina)*. « Journ. of Biol. Chem. », vol. LXXV, 1927.

(2) BENEDICT S. R. and NEWTON E. B., *Studies on the non-sugar reducing substances on the blood and urine*. « Journ. of Biol. Chem. », vol. LXXXIII, 1929.

(3) HOPKINS F. G., *On Glutathione: A reinvestigation. I. Isolation of a cristalline substance*. « Journ. of Biol. Chem. », vol. LXXXIV, 1929.

(4) PIRIE N. W. and PINHEY K. E., *The titration curve of Glutathione*. « Journ. of Biol. Chem. », vol. LXXXIV, 1929.

(5) KENDALL E. C., MECKENZIE B. F. and MASON H. L., *A study of Glutathione*. « Journ. of Biol. Chem. », vol. LXXXIV, 1929.

*
* *

Il metodo applicabile per il rapido dosaggio del glutatione nei tessuti fu proposto da Tunncliffe⁽¹⁾, il quale usò per l'estrazione una soluzione al 10 % di acido tricloroacetico, che, mentre porta in soluzione il polipeptide di Hopkins, ha la proprietà di dare un filtrato privo di proteine, coagulandole. Il dosaggio del glutatione ridotto in soluzione tricloroacetica si effettua basandosi sulla proprietà del gruppo —SH di venire facilmente trasformato dallo jodio in —S—S—; la fine della reazione può venire apprezzata o dalla scomparsa della colorazione rosea prodotta dal solfidrile col nitroprusiato in presenza di ammoniacca, o dalla comparsa del composto azzurro, che lo jodio, non più consumato dal monosolfuro, dà con la salda d'amido: l'uso dei due indicatori è stato studiato e discusso da sperimentatori diversi, e con discordi pareri, poichè il punto finale della reazione, che dovrebbe indicare il preciso consumo di jodio da parte del glutatione presente, non coincide nei due metodi.

Mentre Thompson e Voegltin⁽²⁾ paragonando i valori ottenuti coi due reattivi, trovano che la salda d'amido dà valori troppo alti, fino al 50 % in più, Blanchetière e Mélon⁽³⁾ attribuiscono questa spiccata differenza di risultati all'eccessiva diluizione delle soluzioni sulle quali Thompson e Voegltin hanno lavorato (mg. 190–261 di dipeptide per Kg. di tessuto) soluzioni che si trovano al limite di sensibilità per la reazione del nitroprusiato, e preferiscono senz'altro la salda, che, secondo loro, dà una reazione più sensibile, se pur meno specifica.

Perlzweig W. e Delrue P.⁽⁴⁾, controllando i due metodi, hanno creduto poter concludere che i valori troppo alti trovati con la salda d'amido, anzichè dipendere da altre sostanze riduttrici non contenenti il gruppo —SH estratte insieme al glutatione dall'acido tricloroacetico, derivino dal fatto che il composto azzurro che lo jodio libero dà con la salda, non si formi alle prime tracce di jodio, per la troppo piccola quantità di joduro presente nella soluzione N/100, e danno una tabella dalla quale risulterebbe che, usando ancora la salda per indicatore, ma dopo avere aggiunto agli estratti tricloroacetici joduro di potassio e un eccesso di soluzione di jodio, eccesso che viene calcolato con soluzione N/100 di iposolfito sodico fino a scomparsa della colo-

(1) TUNNICLIFFE H. E., *Glutathione. The occurrence and quantitative estimation of Glutathione in tissues.* « Biochem. Journ. », vol. XIX, 1925.

(2) THOMPSON W. and VOEGLTLIN C., *Glutathione content of normal animals.* « Journ. of Biol. Chem. », vol. LXX, 1926.

(3) BLANCHETIÈRE et MÉLON, *Sur le dosage du glutathion.* « C.-R. Soc. de Biol. », vol. XCVII, 1927.

(4) PERLZWEIG W. A. and DELRUE G., *The use of the starch iodine end point in Tunncliffe's method for the determination of glutathione in tissues.* « Biochem. Journ. », vol. XXI, 1927.

razione azzurra, si trovano valori che coincidono quasi perfettamente con quelli ottenuti usando il nitroprussiato.

A conoscenza di tanti diversi pareri, e soprattutto per la discordanza delle cifre da noi stessi ottenute nelle prime determinazioni, abbiamo creduto opportuno studiare quale di questi metodi potesse venire più convenientemente usato, e di che entità fossero le differenze fra l'uno e l'altro, ed abbiamo cominciato coll'eseguire tre serie di titolazioni di una soluzione di jodio N/100 (ottenuta diluendone convenientemente una n/10 preparata da joduro e jodato) acidificata con *acido tricloroacetico*, mediante iposolfito a fattore noto, e procedendo nelle seguenti maniere diverse, onde paragonare i risultati ottenuti:

1. Senza aggiunta di joduro di potassio, facendo arrivare la soluzione di jodio su quella di iposolfito e prendendo come punto finale la *comparsa della colorazione azzurra* della salda, come si procede usualmente nei dosaggi di glutatione, in cui però al posto dell'iposolfito si trovano le sostanze riducenti estratte coll'acido tricloroacetico dagli organi o dal muscolo.

2. Sempre senza aggiunta di joduro di potassio ma facendo arrivare l'iposolfito sullo jodio fino a *scomparsa della colorazione azzurra* della salda, come si procede comunemente in jodometria.

3. Come nel caso precedente, ma dopo avere aggiunto qualche centimetro cubico di soluzione di joduro di potassio al 10 %, con lo stesso procedimento, cioè, seguito da Perlzweig e Delrue.

I risultati ottenuti sono riuniti nella tabella I.

TABELLA I.

	Senza aggiunta di KJ Punto finale: comparsa della colorazione azzurra		Senza aggiunta di KJ Punto finale: scomparsa della colorazione azzurra		Aggiunto cm.3 5 KJ al 10 % Punto finale: scomparsa della colorazione azzurra	
	Jodio N/100 cm.3	Iposolfito N/100 cm.3	Jodio N/100 cm.3	Iposolfito N/100 cm.3	Jodio N/100 cm.3	Iposolfito N/100 cm.3
1	24.8	25	25	25.3	25	25.45
	24.85	25	25	25.35	25	25.4
3	24.8	25	25	25.3	25	25.4
4	24.9	25	25	25.3	25	25.4
5	24.85	25	25	25.35	25	25.4
6	24.85	25	25	25.3	25	25.4

Poichè, come si vede, le quantità di jodio consumate *in vitro* per una stessa quantità di iposolfito, differiscono ben poco in qualunque modo si conduca la titolazione, con o senza joduro, prendendo come punto finale la

scomparsa o la comparsa del colore azzurro, non ci parve logico attribuire alla deficienza di joduro della soluzione N/100 il maggior consumo di jodio che si verificava nei dosaggi di glutatione nelle carpe, quando - dopo avere usato il nitroprussiato come indicatore esterno, fino a scomparsa dell'anello rosso, cioè fino ad esaurimento del solfidrile - si procedeva con salda fino a colorazione azzurra permanente.

Da nuove determinazioni eseguite sulle carpe nella stessa maniera, ma con aggiunta di joduro, osservammo che, se effettivamente il consumo di jodio necessario per far comparire la colorazione azzurra era in tali condizioni un poco minore che senza aggiunta di joduro, superava sempre quello necessario per la scomparsa completa della reazione del nitroprussiato, come si vedrà in una seguente Nota.

Desiderammo, in ogni modo, confermare questi nostri primi risultati, usando un materiale più adatto - il muscolo di carpa non dà quasi mai una reazione sensibile anche soltanto qualitativamente al nitroprussiato, e il fegato è di difficile maneggio per la sua mancanza di compattezza - ed eseguiammo nell'Acquario di Napoli diverse determinazioni su grossi esemplari di *Box salpa*, ottenendo i valori, concordanti colle prime osservazioni, raccolti nella tabella II.

TABELLA II.

	<i>Box salpa</i> L.		Soluzione di jodio N/100		
	Peso totale gr.	Peso del tessuto esaminato	Salda senza aggiunta di KJ cm.3	Salda con aggiunta di KJ cm.3	Nitroprussiato cm.3
♂	520	fegato . . . gr. 7.87	4.00		1.28
		muscolo . . . » 31.10	2.02		—
♀	450	fegato . . . » 6.45		2.00	1.01
		muscolo . . . » 23.10		1.15	—
♂	380	fegato . . . » 4.55		3.06	0.75
		muscolo . . . » 32 —	2.25		—
♂	438	fegato . . . » 3.40	3.4		0.9
		muscolo . . . » 43.25		0.9	—
♀	360	fegato . . . » 6.12		3.09	1.25
		muscolo . . . » 18.75		1.25	
♂	275	fegato . . . » 4.97	3.60		0.73
		muscolo . . . » 26.5	1.98		—

Tanto dalle determinazioni sulle salpe che da quelle sulle carpe risulta dunque, che il minimo consumo di jodio si verifica usando come indicatore il nitroprussiato, e il consumo massimo usando la salda senza l'eccesso di joduro di potassio; si hanno cioè tre punti diversi per la fine della reazione, senza che esista una certa costanza nel rapporto dei tre valori in jodio che si ottengono, costanza che farebbe pensare a una semplice differenza di sensibilità degli indicatori.

Mentre cercheremo di approfondire — non essendoci per ora del tutto spiegabile — la modificazione che lo joduro di potassio produce nell'estratto tricloroacetico, dove effettivamente fa un poco diminuire il consumo di jodio (con salda), ma porta ad una colorazione che non è proprio quella azzurra caratteristica del composto che si forma fra salda e jodio, ci sembra invece perfettamente chiaro il minimo consumo di jodio che risulta usando il nitroprussiato.

Tunncliffe ⁽¹⁾, nel proporre il suo rapido metodo di dosaggio, aveva già trovato che molte sostanze presenti nei tessuti, e che possono venire estratte dall'acido tricloroacetico, *urea, acido urico, creatinina, glucosio, fruttosio*, non reagiscono con lo jodio nelle condizioni in cui si eseguisce la reazione, e quindi non possono alterare i valori ricercati; abbiamo pensato, però, che alcuni prodotti intermediari del ricambio presenti nel muscolo e ancora più abbondantemente nel fegato, potessero comportarsi diversamente, e constatato che per es., *l'aldeide acetica, l'acetone, l'acido piruvico*, addizionati all'acido tricloroacetico anche in minima quantità, provocano consumo di jodio a freddo operando con la salda come indicatore, sebbene in modo più lento del gruppo —SH; ora, i corpi chetonici, e soprattutto l'acido piruvico, l'aldeide acetica, altre sostanze di composizione chimica simile, si hanno sempre, sia pure transitoriamente e in quantità maggiore o minore, nel muscolo e negli organi nelle trasformazioni degli idrati di carbonio, grassi e amminoacidi che ivi avvengono, ed essendo solubili in acido tricloroacetico, possono — a parer nostro — trovarsi presenti negli estratti che utilizziamo per il dosaggio.

Ammissa la presenza di questi composti nelle soluzioni che sottoponiamo alla titolazione con jodio, ne viene di conseguenza che l'errore diventa minimo usando il nitroprussiato, poichè, per la maggiore affinità esistente fra jodio ed —SH, la reazione tenderà ad avvenire in quel senso, con una distribuzione minima alle altre sostanze riducenti, fino a che i gruppi —SH siano esauriti; l'errore sarà invece maggiore proseguendo fino a colorazione permanente della salda, giungendo in tal modo a risultati sempre troppo alti, per il consumo di jodio da parte di quelle sostanze.

L'incostanza del rapporto tra le quantità di jodio consumate coi due indicatori, ci sembra un'ottima conferma del nostro modo di vedere, poichè

(1) Loc. cit.

i composti che si formano come prodotti intermediari in demolizioni e sintesi, si troveranno nell'organismo animale in quantità variabile, dipendente dal *momento fisiologico* in cui questo viene sacrificato.

In conclusione, pur ritenendo che anche il metodo del nitroprussiato non sia scevro di errori, lo riteniamo preferibile agli altri, abbastanza indicato e sensibile (specialmente nella modificazione di Randoin e Fabre)⁽¹⁾ per i lavori di fisiologia in cui occorrono soprattutto valori adatti per stabilire paragoni; nel nostro lavoro lo abbiamo seguito e lo seguiremo nella modificazione suddetta, e procurando di operare sempre in maniera identica, sia nella preparazione degli estratti tricloroacetici, sia nella loro titolazione con jodio.

Biologia. — *Su alcune caratteristiche delle associazioni lagunari mediterranee.* Nota di G. BRUNELLI, presentata dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Curva idremica provocata nel riposo e negli esercizi fisici*⁽²⁾. Nota II di U. CASSINIS e L. BRACALONI, presentata⁽³⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Abbiamo precedentemente studiato il comportamento della curva idremica, in soggetti digiuni, durante lo stato di riposo e nel lavoro muscolare⁽⁴⁾.

Con le presenti ricerche abbiamo esteso la nostra osservazione alla curva idremica provocata, con ingestione di acqua⁽⁵⁾, durante il riposo e nel lavoro muscolare (corsa, scherma) in soggetti⁽⁶⁾ in condizioni normali e nello stato di sete.

L'acqua, somministrata nella proporzione di 10-20 cmc. per kg. di peso corporeo, era ingerita a piccoli sorsi in 5-15'. Lo stato di sete era

(1) RANDOIN L. et FABRE M. R., *Glutathion et avitaminose B chez les pigeons*. « Bull. de la Soc. de Chimie Biol. », vol. IX, 1927.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisiologia Applicata della Scuola Centrale Militare di Educazione Fisica, Farnesina, Roma.

(3) Nella seduta del 2 febbraio 1930.

(4) *Sulla curva idremica normale nel riposo, nella marcia e nella corsa*. Questi « Rendiconti », Cl. sc. fis., mat. e nat., vol. IX, serie 6^a, 1° sem., fasc. 4, 1929; *Ulteriori ricerche sulla curva idremica a riposo, nella marcia e nella corsa*, « Arch. di Fisiologia », vol. XXVIII, fasc. 1°, 1930.

(5) Per tutte le esperienze acqua Pia-Marcia.

(6) In stato di digiuno da ca. 12 ore.

prodotto per sudorazione eseguendo un esercizio fisico intenso (tamburello, scherma).

Si eseguivano cinque gruppi di ricerche su tre soggetti.

I. — *Durante lo stato di riposo* (con il soggetto seduto).

1. Decorso della curva idremica provocata:

a) per ingestione di 10 cmc. d'acqua per kg. di peso corporeo (in media 600-700 cmc.). Si è osservato dopo 20-60' dall'ingestione un leggero aumento (ca. 0.5 %) della quota idremica cui segue rapidamente il ritorno al valore normale (sogg. I, II e III, Tav. I, esp. 1^a, 3^a e 5^a). La quantità di urina eliminata è 200-300 cmc.; l'aumento del peso corporeo, a fine esperienza, è di gr. 250-450.

b) per ingestione di 20 cmc. d'acqua per kg. di peso corporeo (1450 cmc.). L'aumento della quota idremica è dopo 20' di 0.67 % e la curva presenta un evidente andamento a parabola (sogg. III, Tav. I, esp. 6^a e diagr. curva 1). La quantità d'urina eliminata è 900 cmc.; l'aumento del peso corporeo è di gr. 150.

2. Decorso della curva idremica, senza ingestione di acqua, dopo la fine di un esercizio fisico che ha prodotto la sete.

a) La sete era prodotta facendo eseguire al soggetto 75' di scherma o 1^b di tamburello (1).

Per effetto di entrambi gli esercizi la prima quota idremica di riposo presenta un forte abbassamento (1-1.5 %) rispetto alla quota stabilita prima di iniziare l'esercizio fisico; successivamente la q. i. ha un aumento di 0.40-0.90 % e su questo valore tende a mantenersi per tutta la durata dell'esperienza (sogg. III, Tav. II, esp. 1 e 2; diagr. curva 2). Il soggetto emette 130 cmc. di urina e diminuisce gr. 1400-1550 di peso corporeo.

b) Facendo eseguire al soggetto un secondo esercizio fisico durante il periodo di sete la q. i. presenta una nuova diminuzione e su questo valore tende a mantenersi. La perdita di peso corporeo è di gr. 2350. (Tav. II, esp. 3).

3. Decorso della curva idremica provocata dopo la fine di un esercizio fisico che ha prodotto la sete. La sete era prodotta facendo eseguire al soggetto 1^b di tamburello. L'ingestione di 20 cmc. d'acqua per kg. di peso corporeo determina il ritorno immediato della curva idremica dai bassi valori di fine esercizio ai valori normali (sogg. III, Tav. III, esp. 1^a; diagr. curva 3). Il soggetto elimina 180 cmc. di urina e il suo peso corporeo, a fine esperienza, è presso che uguale a quello che aveva prima dell'esercizio.

(1) La scherma era eseguita dal soggetto vestito con apposito costume, il tamburello era eseguito a corpo libero. Durante questi esercizi la perdita di peso corporeo oscilla da 800 a 1400 gr. (vedi Tav. II e III).

II. — Negli esercizi fisici (corsa scherma).

4. Decorso della curva idremica provocata nella corsa piana di m. 3600 ⁽¹⁾.

La quantità d'acqua ingerita era di 10 cmc. per Kg. di peso corporeo. La curva idremica presenta un forte abbassamento durante il periodo della corsa con una diminuzione della prima q. i. di corsa maggiore all'1 % ⁽²⁾; appena terminata la corsa la curva idremica risale rapidamente fino a superare il valore di riposo (sogg. I e II, tav. I, esp. 2^a e 4^a). La quantità di urina eliminata è 50-180 cmc.; il peso corporeo rimane invariato o mostra una leggera diminuzione.

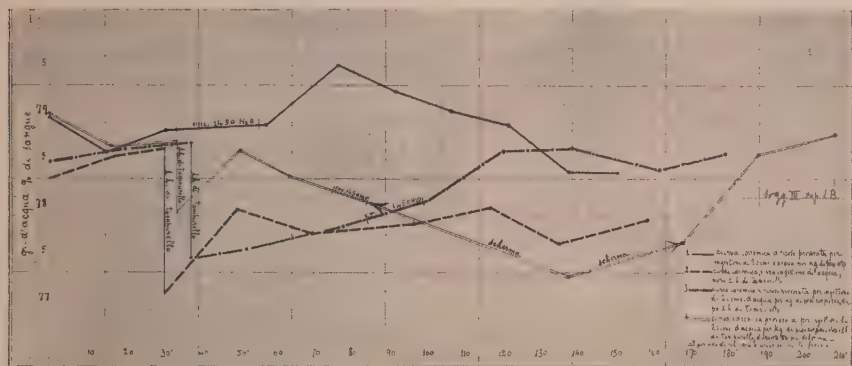


Fig. 1.

Questo comportamento della curva idremica provocata è affatto paragonabile a quello osservato, durante la corsa, nella curva idremica a digiuno ⁽³⁾.

5. Decorso della curva idremica provocata dopo la fine di un esercizio fisico che ha prodotto la sete, durante 56' di scherma.

La sete era prodotta facendo eseguire al soggetto 1^b di tamburello ed era seguita dall'ingestione di 20 cmc. d'acqua per kg. di peso corporeo (1450 cmc.). La curva idremica presenta un forte abbassamento durante il successivo periodo di scherma con una diminuzione della prima q. i. di lavoro di 0.75 %; appena terminata la scherma la curva risale rapidamente fino a superare i valori di riposo (sogg. III, Tav. III, esp. 2^a; diagr. curva 4). L'urina eliminata è 244 cmc. e il peso corporeo diminuisce di 1 kg.

(1) Anche la corsa era eseguita a corpo libero.

(2) I campioni di sangue alla fine degli esercizi fisici, sia nell'idremia provocata che nella sete, presentano in genere una maggiore fluidità, in corrispondenza cioè del minore contenuto idrico del sangue (v. anche « Arch. di Fisiol. », nota citata).

(3) Note citate.

CONCLUSIONI (E AUTORIASSUNTO).

a) per ingestione di 10 cmc. d'acqua per kg. di peso corporeo (circa 600 cmc.) si osserva un aumento massimo della q. i. di ca. 0.5 % dopo 20-60' dall'ingestione; talora la prima quota idremica, appena ingerita l'acqua, è leggermente inferiore (0.13-0.60 %) all'ultima q. i. di digiuno. L'urina emessa è 200-300 cmc.; l'aumento di peso corporeo gr. 250-400;

b) per ingestione di 20 cmc. d'acqua per kg. di peso corporeo (1450 cmc.) l'aumento massimo della quota idremica è 0.67 %; l'urina emessa è cmc. 900, l'aumento di peso corporeo gr. 150;

c) la c. i., senza ingestione di acqua, dopo un esercizio fisico che ha prodotto la sete, decorre a un livello più basso della curva determinata prima dell'esercizio. L'urina emessa è cmc. 130 e la diminuzione di peso corporeo gr. 1.500;

d) per ingestione di 20 cmc. d'acqua per kg. di peso corporeo (1450 cmc.) dopo la fine di un esercizio fisico che ha prodotto la sete, si osserva che la c. i. ritorna rapidamente dai bassi valori di fine esercizio ai valori normali determinati prima dell'esercizio. L'urina emessa è cmc. 180; il peso corporeo 90' dopo l'ingestione dell'acqua conserva un aumento di gr. 1200 cioè si restaura la perdita prodotta dall'esercizio fisico (gr. 1400);

e) il lavoro muscolare ha, in tutti i casi, sulla curva idremica *provocata* un'azione perfettamente paragonabile a quella osservata sulla curva idremica *a digiuno*; cioè durante il periodo lavorativo le q. i. subiscono sempre una forte diminuzione (0.75-1.5 %) e risalgono a valori più alti che nel riposo appena terminato l'esercizio fisico.

Nelle Tavole seguenti il tempo è contato per tutte le esperienze dal prelevamento del primo campione di sangue; i numeri in grassetto indicano le q. i. durante e alla fine dell'esercizio fisico; la q. i. più alta dopo l'ingestione dell'acqua è sottolineata; la durata degli esercizi rappresenta il tempo effettivo impiegato a compierli, cioè non vi è computato il tempo di sosta necessario per il prelevamento dei campioni di sangue.

TAV. I. — CURVA IDREMICA PROVOCATA A RIPOSO E NELLA CORSA.

N.°	Soggetto	Descrizione dell'esperienza	Quote idremiche a riposo				Durata della corsa	Quote idremiche successive					Tempi e quantità d'urina emessa cmc.	Tempi e variazione del peso corporeo gr.
1	Sogg. I Sold. F. Castagnini, agricoltore, età a. 21, peso corp. kg. 57.150	21-V-1929 Idremia alimentare a riposo con 570 cmc. di acqua tra 45' — 50'	78.37	20'	35'	57'	—	72'	90'	103'	122'	137'	151'	167'
2	id., peso corp. kg. 54.400	29-V-1929 t = 21° p = 764 Idremia alimentare con 570 cmc. di acqua tra 42'-44' e corsa m. 3600 * da 55' a 95' . . .	78.79	17'	32'	52'	15'	64'	77'	97'	110'	131'	148'	154'
3	Sogg. II Sold. G. Carbonetti, tipografo, età a. 21, peso corp. kg. 59.200	6-VI-1929 t = 21° p = 756 Idremia alimentare a riposo con 590 cmc. di acqua tra 34'-37'	78.76	13'	25'	44'	—	59'	71'	85'	98'	109'	121'	131'
4	id., peso corp. kg. 57.950	12-VI-1929 t = 24° p = 767 Idremia alimentare con 590 cmc. di acqua tra 22'-27' e corsa m. 3600 * da 58' a 85' . . .	79.08	13'	38'	54'	14'	65'	75'	85'	110'	130'	152'	160'
5	Sogg. III Cap. L. B., professionista, età a. 27, peso corp. kg. 72.300	21-VI-1929 t = 25° p = 766 Idremia alimentare a riposo con 725 cmc. di acqua tra 54'-61'	78.18	17'	44'	68'	—	86'	104'	121'	143'	163'	178'	181'
6	id., peso corp. kg. 72.600	27-VI-1929 t = 23° p = 759 Idremia alimentare a riposo con 1450 cmc. di acqua tra 34'-56'	78.96	15'	31'	58'	—	77'	92'	107'	123'	139'	152'	168'
								79.51	79.25	79.03	78.89	78.38	78.37	+ 150

* Il prelevamento dei campioni di sangue è fatto ogni 1200 m.

** Urinazione impellente.

Fisiologia. — *Razione proteica e razione energetica*⁽¹⁾. Nota di S. VISCO, presentata⁽²⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

Le presenti ricerche mirano a stabilire, su basi un po' più precise di quelle delle quali oggi si dispone, quali rapporti passino tra la razione energetica e la razione proteica. Fui indotto ad iniziare questo studio da alcune osservazioni fatte durante una serie di esperimenti di alimentazione di ratti con proteine di scarso valore nutritivo. Ebbi allora occasione di fermarmi a considerare, da un punto di vista nuovo, un fatto già noto: la perdita continua di peso da parte degli animali ai quali venivano somministrate proteine incomplete, e di metterla in rapporto con un eccezionale aumento del loro appetito per cui ingerivano quantità di cibi quasi doppie di quelle da essi mangiate durante i periodi di alimentazione completa. Pensai che vi potessero essere altri rapporti, oltre di quelli finora conosciuti, tra la razione proteica e quella energetica ed ho tentato di identificarli.

Dispositivo sperimentale. — Alcuni ratti adulti, in buone condizioni di salute ed approssimativamente della stessa età e dello stesso peso, vengono alimentati con un miscuglio, in proporzioni note, di grassi, proteine, sali minerali (miscela di Osborne), e del quale possono mangiare a volontà. Ogni giorno si determina il quantitativo di cibo ingerito, e si fa il calcolo delle calorie che gli corrispondono. Quando gli animali hanno perduto una certa quota del loro peso, allora, al miscuglio alimentare, si aggiunge una quantità variabile di caseina, e di esso si mette a disposizione di ogni animale una quantità limitata, e notevolmente inferiore, dal punto di vista energetico, a quella da ognuno di essi consumata nel primo periodo di esperimento. Si seguono quotidianamente le variazioni di peso dei singoli animali per il tempo che si ritiene necessario.

In alcuni ratti si determina l'azoto perduto per l'emuntorio intestinale e per quello renale, durante i due periodi di osservazione; e si stabilisce, con metodi precisi, il quantitativo di sostanze ternarie emesse con le feci. Non sempre è avvenuto che i ratti mangiassero il cibo loro somministrato in quantità sufficiente a coprirne i bisogni energetici minimi, però in moltissimi casi questa condizione si è verificata; e pertanto posso disporre di un materiale sperimentale oltremodo abbondante.

Di esso riporto qui soltanto una parte minima, quella che ritengo sufficiente a documentare i fatti prospettati, e le conclusioni che da essi si possono trarre.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Sassari.

(2) Nella seduta del 2 marzo 1930.

Protocolli delle esperienze eseguite.

Ratto n. 3 (maschio)					Ratto n. 4 (maschio)				
Data	Giorno di esperimento	Calorie in- gerite	Peso	Annotazioni	Data	Giorno di esperimento	Calorie in- gerite	Peso	Annotazioni
4-III		166 Peso iniziale			4-III		209 Peso iniziale		
5	1	83	162		5	1	92	206	
6	2	»	161		6	2	»	204	
7	3	»	157		7	3	74.5	202	
8	4	»	154		8	4	78.9	201	
9	5	»	153	digiuno proteico:	9	5	74.5	199	Digiuno proteico: giorni 15
10	6	»	143	giorni 16	10	6	63	195.5	
11	7	»	138	Calorie ingerite:	11	7	62.7	192.5	Calorie ingerite: 1008.2
12	8	»	128	1088.0	12	8	57.5	190.5	media giornaliera: 67.2
13	9	»	138.5	media giornaliera: 83	13	9	54.9	189.5	
14	10	»	134.5		14	10	63.9	188.5	
15	11	»	133	Diminuzione peso: 19.8 %	15	11	66.3	185.5	Diminuzione peso: 14.6 %
16	12	»	133.5		16	12	61	187.0	
17	13	»	134.5		17	13	57	179.5	
18	14	»	137		18	14	60.3	180	
19	15	»	133		19	15	49.6	178.5	
20	16	»	133		20	16	56.5	180	
21	17	56.5	132		21	17	47.5	175	
22	18	»	134.5		22	18	56.5	175	
23	19	»	134.5	Alimentazione pro- teica: giorni 12	23	19	52.9	175	
24	20	»	134.5	(caseina commerciale gr. 0.40)	24	20	50.5	174.5	
25	21	»	134.5		25	21	48.1	174.5	
26	22	»	137.5	Calorie ingerite:	26	22	52.5	178.5	Calorie ingerite: 1742.6
27	23	»	139.5	678.0	27	23	»	175.5	media giornaliera: 51.2
28	24	»	142	media giornaliera: 56.5	28	24	»	177	
29	25	»	141		29	25	»	175	Aumento peso: 5.6 %
30	26	»	143	Aumento peso: 14.8 %	30	26	58.5	177	
31	27	»	147		31	27	»	176	
1°-IV	28	»	153.5		1°-IV	28	»	176	
					2	29	60.5	178	

Segue ratto n. 4

Data	Giorno di esperimento	Calorie in- gerite	Peso	Annotazioni	Data	Giorno di esperimento	Calorie in- gerite	Peso	Annotazioni
3	30	60.5	178	Caseina commerciale gr. 1.10 Alimentazione proteica: giorni 34 Calorie ingerite: 1742.6 media giornaliera 51.2 Aumento peso: 5.6 %	13	40	60.5	185	Caseina commerciale gr. 1.10 Alimentazione proteica: giorni 34 Calorie ingerite: 1742.6 media giornaliera 51.2 Aumento peso: 5.6 %
4	31	56.1	179		14	41	33.7	179.5	
5	32	»	179		15	42	60.5	180.5	
6	33	60.5	180		16	43	54	184.5	
7	34	»	182		17	44	60.5	186	
8	35	»	184		18	45	43.9	186	
9	36	43	184		19	46	40.7	183	
10	37	60.5	185		20	47	50.4	183	
11	38	»	186.5		21	48	60.5	188.5	
12	39	53.4	184		22	49	»	188.5	

Ratto n. 10 (maschio)					Ratto n. 2 (maschio)				
22-VI			156 Peso iniziale		15-I			199 Peso iniziale	
23	1	54.6	159.5	Digiuno proteico: giorni 13 Calorie ingerite: 824.8 media giornaliera: 73.6 Diminuzione peso: 15.4 %	16	1	79.6	195	Digiuno proteico: giorni 11 Calorie ingerite: 686.0 media giornaliera: 62.3 Diminuzione peso: 11.0 %
24	2	65.2	161.5		17	2	64.8	194.5	
25	3	66.7	155.0		18	3	73.1	193	
26	4	»	159.0		19	4	58.1	190	
27	5	»	158.0		20	5	65.7	190	
28	6	»	151.0		21	6	59.8	186.5	
29	7	65.2	153.0		22	7	58.8	186.5	
30	8	66.7	150.0		23	8	62.3	187	
1°-VII	9	62.2	149.5		24	9	54.0	183.5	
2	10	60.6	145.5		25	10	47.5	182.5	
3	11	63.4	144.5	Caseina pura gr. 0.5 Aliment. proteica: giorni 3 Cal. ingerite: 120.5 media giornal.: 40.2 Aum. peso: %	26	11	62.3	177	Aliment. proteica: giorni 7 Calorie ingerite: 365.4 media giornaliera 52.2 Aum. peso 4.2 %
4	12	61.4	142.0		27	12	45.5	175.5	
5	13	58.7	141.5		28	13	45.0	175.5	
6	14	50.2	139.5		29	14	54.2	175.0	
7	15	38.5	140.5		30	15	54.1	178.5	
8	16	31.8	140.5		31	16	56.5	182.5	
					1°-IV	17	»	183.5	
					2	18	53.7	184.5	

Ratio n. 9 (maschio)

Data	Giorno di esperimento	Calorie in- gerite	Peso	Annotazioni
21-VI		198 peso iniziale		
22	1	73.1	199.5	
23	2	74.7	199	
24	3	»	193	
25	4	»	187	
26	5	»	187	Digiuno proteico: giorni 14
27	6	»	187	
28	7	»	184	Calorie ingerite: 1030.9
29	8	»	181.5	media giornaliera: 73.6
30	9	»	178	Diminuzione peso: 15.4 %
10-VII	10	»	177	
2	11	73.4	174	
3	12	74.7	173.5	
4	13	68.2	171	
5	14	68.2	170	
6	15	42.1	170	Alimentazione pro- teica: giorni 6 (caseina gr. 5)
7	16	46	168	
8	17	36.4	167	Calorie ingerite: 251.9
9	18	44.7	169.5	media giornaliera: 41.9
10	19	39.7	169.5	Aumento peso: 0.6 %
11	20	43	171	

Ratio n. 6 (maschio)

Data	Giorno di esperimento	Calorie in- gerite	Peso	Annotazioni
15-V		201 peso iniziale		
17	1	62.2	198	
18	2	»	201	
19	3	»	205	
20	4	»	196.5	
21	5	»	192	
22	6	66.2	187	
23	7	»	187.5	
24	8	»	192	
25	9	74.7	189.5	Digiuno proteico: giorni 20
26	10	74.7	182.5	Calorie ingerite: 1386.8
27	11	»	182.5	media giornaliera: 69.3
28	12	»	181.5	
29	13	72.8	182.5	Diminuzione peso: 10.3 %
30	14	72.8	179.5	
31	15	72.8	174	
10-VI	16	74.7	174	
2	17	62.9	172.5	
3	18	74.9	167.5	
4	19	74.7	167	
5	20	72.8	167.5	

Prendendo in esame i dati sopra riportati, il primo fatto che si rileva è che: durante il digiuno proteico i ratti perdono peso costantemente qualunque sia, dal punto di vista quantitativo, la razione energetica da essi ingerita.

Se ci fermiamo a considerare le diminuzioni di peso verificatesi constatiamo facilmente che esse non sono proporzionali alle razioni energetiche ingerite dai singoli animali; così, mentre il ratto n. 4 perde in 15 giorni il 14.6 % del proprio peso, con una razione media giornaliera ingerita di calorie 67.2, quello portante il n. 2, perde 15.4 %, in 14 giorni, con una razione energetica, superiore a quella del primo, dell'8.8 %. Parimenti, il ratto n. 6 diminuisce, in 20 giorni di osservazione, soltanto del 10.3 % del suo peso con una razione energetica di calorie 63.3 quotidiane, mentre il ratto n. 3 perde il 19.8 % di peso, in 16 giorni, non ostante le 83 calorie quotidianamente ingerite.

Quali sono le cause di queste perdite di peso?

La prima ipotesi che può formularsi è che: durante il digiuno proteico, e per effetto di esso, si modificassero i poteri digestivi o di assorbimento, o gli uni e gli altri insieme; e che, conseguentemente, dei principi alimentari ingeriti in misura così grande, fosse assorbita una parte quantitativamente insufficiente ai bisogni energetici degli animali in esperimento. Questa ipotesi, che teoricamente appare insostenibile, pure doveva essere presa in considerazione, avendo io spesso osservato che, in uno stesso animale, il quantitativo di feci emesse durante il digiuno proteico era maggiore di quello prodotto durante il periodo di alimentazione completa. Determinazioni quantitative mi hanno consentito di accertare che questi aumenti non sono costanti; e che, in ogni caso, pur essendo qualche volta cospicui, non riescono mai a portare il quantitativo delle sostanze assorbite, non dico al di sotto, ma neppure a cifre uguali ai bisogni energetici minimi dei ratti.

Eliminata così questa ipotesi, resta dimostrato che, durante il digiuno proteico, gli animali da me tenuti in esperimento hanno assorbito un quantitativo di sostanze ternarie superiori ai loro bisogni energetici.

Come è possibile spiegare le perdite di peso che, ciò non ostante, essi hanno presentate?

Durante il periodo del digiuno proteico, l'azoto perduto dai ratti, attraverso gli emuntori intestinale e renale, ha raggiunto, al massimo (ratto n. 10), la cifra media quotidiana di gr. 0.058, corrispondenti (0.058×6.25) a gr. 0.3675 di sostanza proteica.

I ratti, durante il periodo di alimentazione completa, hanno coperto il loro fabbisogno energetico con un minimo di 38-44 calorie assorbite, in media, al giorno, e tutte le volte che è stata superata questa cifra hanno guadagnato peso e in misura cospicua.

Ora, tenendo conto dell'eccesso di sostanze ternarie assorbite durante il digiuno proteico, e del quantitativo di tessuti che da esso poteva teorica-

mente derivare, non solo avrebbe dovuta essere mascherata la perdita di peso dovuta alla disintegrazione della sostanza proteica; quanto si sarebbe dovuto anche verificare un aumento della massa corporea dei singoli animali; cosa che è infatti avvenuta, anche riducendo la razione energetica fin del 46 %, quando l'alimento è stato reso completo mediante l'aggiunta della proteina mancante. Poichè questo non si è verificato, si deve ritenere che, durante il digiuno proteico, i ratti perdano la capacità di accumulare sostanze ternarie, costruendo con esse tessuto di riserva, e che, conseguentemente, consumino tutte quelle che penetrano in circolo.

Sono questi i fatti che dimostrano le ricerche avanti riferite, e da essi, secondo me, si può trarre la seguente concezione teorica:

« L'utilizzazione fisiologica ed economica delle sostanze ternarie assorbite « può essere effettuata soltanto da quegli organismi i cui bisogni di sostanze « proteiche siano stati soddisfatti. Quando questa condizione non si verifica, « gli animali disintegrano, in maniera antieconomica, tutte le sostanze non « azotate delle quali vengono a disporre, per abbondanti che siano, e finiscono « ineluttabilmente per morire con perdita progressiva di peso ».

Esaminerò, in una prossima Nota, come, e fino a qual punto, la utilizzazione economica della razione energetica sia una funzione della razione proteica, e che cosa debba intendersi, in base alla concezione sopra esposta, per minimo di azoto.

Fisiologia vegetale. — *Onde cosmiche e moltiplicazione cellulare (semi germinanti).* Nota I di V. RIVERA, presentata⁽¹⁾ dal Socio R. PIROTTA.

La influenza di questo tipo di onde sopra lo sviluppo dei vegetali fu affermata dal Lakhovsky⁽²⁾ in seguito agli esperimenti da lui condotti con *circuiti oscillanti*: una azione di questi circuiti sopra la moltiplicazione cellulare nei vegetali sarebbe confermata da vari autori⁽³⁾. Sembra che costesti apparecchi possano indurre una accelerazione della divisione cellulare e, qualche volta, determinare anche la eccitazione e poi la morte di vege-

(1) Nella seduta del 2 marzo 1930.

(2) Vedi LAKHOVSKY G., *L'origine de la vie*, Gautier Villars edit. Paris, 1928; vedi pure BRUNORI N., *La medicina e la teoria elettronica della materia*, Istit. edit. scient., Milano, 1927.

(3) MEZZADROLI e VARETON, *Influenza delle radiazioni astrali ad onda corta ecc.* « Zymologica », anno III, n. 6, Bologna dic. 1928; ID., *Azione esercitata da un circuito metallico ecc.* « Rendiconti R. Accad. Lincei », vol. IX, serie 6^a, Roma, febbraio 1929; RIVERA V., *Influenza dei « Circuiti aperti » di Lakhovsky nello sviluppo di tumori nei vegetali*, « Bollettino R. Staz. di Patol. veget. di Roma », 1928.

tazioni patologiche su questi vegetali e dei germogli che le portano ed in qualche caso invece un abbassamento del ritmo vegetativo di quelle.

Sembra però a chi scrive che sopra la spiegazione di questi rilievi sperimentali, che del resto hanno bisogno di una sperimentazione più ampia, per poter essere riconosciuti sicuri, non si possa essere d'accordo con il Lakhovsky: è infatti più ammissibile che questi *circuiti oscillanti* siano capaci di captare tipi di radiazioni di altra lunghezza d'onda, quali possono essere le onde herziane (22 ottave: $\lambda =$ da 30.000 m. a 0.00025 m.) anzichè la radiazione penetrante di piccolissima lunghezza di onda ($\lambda =$ da 0.004 a 0.007 Å): ciò non solo perchè questi circuiti, del diametro di alcune decine di centimetri, sono, per la loro costituzione, capaci di risuonare con radiazioni di lunghezza d'onda molto più lunga, ma anche perchè sperimentalmente fu potuto constatare⁽¹⁾ che gli effetti biologici, prodotti da questi *circuiti oscillanti*, sono propri delle onde elettromagnetiche.

Sembra cioè a chi scrive che la attribuzione di questa azione biologica dei *circuiti oscillanti* alle radiazioni cosmiche sia arbitraria e non fondata.

Ciò non esclude che la cellula vegetale possa avere una certa capacità di risonanza con le radiazioni cosmiche, ma non sono i *circuiti oscillanti* i più adatti a provare il fatto.

La conoscenza di queste radiazioni penetranti porta in verità la nostra mente, quasi spontaneamente alla *supposizione*, in parte veramente aprioristica, che esse possano avere qualche parte nei fenomeni vitali; ho pensato che la risoluzione di questo problema possa tentarsi, per ora, attraverso una via negativa e cioè ponendo in opera degli artifici speciali, capaci di ottenere lo sviluppo di vegetali in assenza di queste radiazioni, onde riconoscere innanzi tutto se per la moltiplicazione cellulare che si riferisce al primo periodo di sviluppo di un vegetale, questo tipo di energia radiante rappresenti una condizione di necessità, di eccitazione o di depressione.

La prima parte di questo quesito è stata tentata con una serie di esperimenti.

Onde ottenere un mezzo schermante di sufficiente spessore, non si vide altra via che quella di ricorrere alle acque di un lago sufficientemente profondo, in modo che l'altezza dell'acqua fosse tale che, ad una determinata profondità, i semi germinanti non potessero ricevere la radiazione penetrante.

Nelle vicinanze di Roma, adatto a questo tipo di prove vi è il lago di Castelgandolfo, che è il più profondo dei laghi dell'Italia peninsulare, raggiungendo, in una zona centro-meridionale dello specchio d'acqua, la profondità di m. 170: il lago, come si comprende, occupa il cratere di un antico vulcano.

Due apparecchi di bronzo erano stati costruiti appositamente con chiusure tali, da sopportare la forte pressione che si ha alla profondità di pa-

(1) Ciò sarà esposto in successivi lavori.

recchie decine di metri d'acqua: essi erano costruiti a guisa di scatola di forma cilindrica, avente nel centro una cameretta capace di alloggiare bottiglie, capsule Petri od anche un piccolo vaso di terracotta, su cui potevano essere seminati semi di varie specie vegetali.

Lo scopo di provè di questo genere era quello di studiare la germinazione di semi di piante terrestri ad una profondità alla quale le radiazioni penetranti non possano giungere ⁽¹⁾. La immissione dei semi nell'apparecchio, si faceva, come si comprende, solo un istante prima della immersione, in modo che il rigonfiamento dei semi e la germinazione di essi avvenisse esclusivamente in profondità.

Nella primavera del 1929 si eseguirono le prove seguenti: il 3 aprile furono immersi due apparecchi, uno alla profondità di m. 30 e l'altro a m. 60: in ciascuno di essi erano poste n. 6 capsule Petri portanti semi di varie specie di piante (fava, frumento, medica) posti su carta bibula inumidita; il 14 aprile si recuperarono gli apparecchi e si poté riscontrare che la maggior parte dei semi avevano regolarmente germinato.

Il 14 aprile si eseguì una seconda immersione con un solo apparecchio, aumentando la profondità fino a m. 90: questa immersione ebbe durata maggiore, perchè l'apparecchio fu estratto solo il 30 maggio: i semi risultarono anche germinati.

Il 5 giugno si fece una terza immersione, raggiungendo la profondità di m. 112, alla quale si lasciò l'apparecchio per 11 giorni: il 16 giugno, estratto l'apparecchio, si poté rilevare che i semi sottoposti all'esperimento, fava, orzo e medica, avevano germinato o erano in via di germinazione.

Questi esperimenti permettono di dedurre che, almeno per le specie vegetali sulle quali si è sperimentato, un mezzo schermante, sufficiente ad impedire la penetrazione fino ai semi di qualunque forma di energia radiante conosciuta, meno i raggi calorifici, ivi compresa la radiazione penetrante, non impedisce la germinazione di semi di piante terrestri, la quale avviene sollecitamente ed all'incirca così come si osserva avvenire in semi posti nelle stesse condizioni, a poca profondità dalla superficie dell'acqua.

Queste prove cioè rendono sempre meno verosimile la supposizione, cui in lavori precedenti si è accennato, che l'energia che avvia la divisione cariocinetica, e cioè l'energia capace di determinare la dislocazione

(1) MILLIKAN e CAMERON, immergendo nell'acqua dei laghi di Muir ed Arrowhead, l'elettroscopio munito di apparecchio registratore, osservarono che a 15 metri sotto il livello libero, avveniva la sparizione delle radiazioni penetranti e se ne poteva concludere che i 15 metri di acqua, più i 7 metri equivalenti all'atmosfera tutta, bastavano per arrestarle completamente. Ultime osservazioni di questi autori con elettroscopi perfezionati, diedero per risultato che la ionizzazione dei raggi ultra penetranti si annullò a 50 metri di profondità (lago di Gem) (vedi CASTELFRANCHI, *Fisica moderna*, Hoepli, Milano, 1929, p. 275).

dei centrosomi e della cromatina, sia del tipo di quella delle radiazioni più o meno penetranti.

L'energia, che dà impulso allo sviluppo della vita in un seme in condizioni di vita latente, è dunque ridotta alla semplicissima espressione, già concepita dai vecchi fisiologi del *calore* (in genere pochi gradi sopra 0° sono sufficienti) quando non manchi una sufficiente *umidità* del mezzo.

Quanto sopra è dunque oramai indubitabile; ma altro è il problema dell'energia che è capace di dare *inizio* della divisione cellulare, altro è quello della *rapidità* di moltiplicazione delle cellule, sulla quale rapidità i raggi di differente lunghezza di onda hanno indiscutibile influenza ⁽¹⁾.

Ma poco siamo in grado per ora di dire in merito alla influenza della radiazione penetrante nel determinare rallentamento od accelerazione nella moltiplicazione cellulare e nell'accrescimento, a causa dello scarso numero di osservazioni compiute e soprattutto perchè le nostre prove si sono, fino ad ora, limitate al rilievo dell'inizio di germinazione dei semi. Osservazioni successive permetteranno di meglio chiarire il fatto.

Fisiologia. — *Isteresi di conduttività elettrica di soluzioni di colloidi organici.* Nota di S. VISCO, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia vegetale. — *Sulla azione biologica della radiazione penetrante (raggi cosmici o ultra- γ) sopra lo sviluppo di semi di vegetali terrestri.* Nota II di V. RIVERA, presentata dal Socio R. PIROTTA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Vedi *Introduzione allo studio della radiosensibilità ecc.* in « Rivista di Biologia », vol. VIII, fasc. IV-V, 1926.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio MARCHIAFAVA presenta in omaggio una sua monografia dal titolo: « L'eredità nella patologia » e ne illustra il contenuto.

Il Socio LEVI-CIVITA, anche a nome del Socio AMALDI, presenta in omaggio la seconda edizione del Vol. I delle loro: *Lezioni di meccanica razionale*. Egli rileva che tale seconda edizione, conforme alla prima nelle linee generali, ha subito varî ritocchi, intesi a meglio chiarire taluni punti delicati e qualche aggiunta. Fra i primi segnala il rifacimento delle considerazioni generali sulla similitudine meccanica; fra le seconde la teoria delle travature reticolari (tralicci). Quivi sono state lumeggiate le circostanze analitiche che si collegano ai cosiddetti tralicci singolari ed è stata completata in un punto, che agli Autori sembra essenziale, la classica trattazione del Cremona dei diagrammi reciproci.

L'Accademico Segretario PARRAVANO presenta le opere giunte in dono segnalando il volume: « Fungi and Fungous Diseases » del Socio A. CASTELLANI; gli « Atti del Congresso internazionale dei matematici di Bologna, 1928 »; la « Bibliografia scientifica tecnica » compilata sotto gli auspici del Consiglio Nazionale delle Ricerche; il « Cours d'Analyse » di P. LÉVY; il II volume del « Dizionario di merceologia e di chimica applicata » di V. VILLAVECCHIA; « La morfogenesi delle prealpi lombarde » di G. B. CACCIAMALI.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci FANO, GARBASSO, LEVI-CIVITA, LOMBARDI, PARRAVANO, PETRI, PIROTTA, SEVERI, VOLTERRA.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 2 marzo 1930

- ALDRICH J. M. — New Genera and Species of Muxoid Flies. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 76). Washington, 1929. 8°, pp. 1-13.
- ALDRICH J. M. — Revision of the two winged Flies of the Genus *Coelopa* Meigen in North America. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 76). Washington, 1929. 8°, pp. 1-6.
- Atti del Congresso internazionale dei matematici. Tomo I, 1928. Bologna, 1929. 8°, pp. 1-338.
- BARDUZZI D. — In memoria di Domenico Barduzzi. Brisighella, 5-8-1847 - Siena, 27-2-1929. Pisa, 1930. 8°, pp. 1-46.
- BEIER M. — Alcuni pseudoscorpioni esotici raccolti dal Prof. E. Silvestri. (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici»). Vol. XXIII, pp. 197-209. Portici, 1930. 8°.
- Bibliografia scientifico-tecnica italiana sotto gli auspici del Consiglio nazionale delle Ricerche. 1928, gruppo I, III-X. Bologna, 1928. 8°, 1-78, 1-147, 1-30, 1-37, 1-89, 1-486, 1-323, 1-281, 1-148.
- CACCIAMALI G. B. — Morfogenesi delle prealpi lombarde ed in particolare di quelle della provincia di Brescia. Brescia, 1930. 8°, pp. 1-308.
- CASTELLANI A. — Fungi and Fungous Diseases. (Reprint. from the «Archives of Dermatology and Syphilology», 1927-1928). Chicago 1927-28. 8°, pp. 1-203.
- CESARÒ G. — Sur les Alvéoles à surface minima. (Extr. des «Bulletins de l'Académie Royale de Belgique. Classe des Sciences»). T. XV, pp. 881-899. Bruxelles, 1929. 8°.
- DALL'OPPIO L. — L'opera maggiore di Alessandro Volta. Bologna, 1929. 8°, pagine 1-163.
- FAVILLI G. e BONCINELLI U. — Differente vitalità nelle agar-culture dei batteri della specie «*Brucella melitensis*». (Estr. da «Lo Sperimentale». Anno LXXXII, n. V). Siena, 1928. 8°, pp. 1-12.
- FAVILLI G. — Osservazioni sopra un'epidemia di febbre ondulante nella provincia di Firenze. (Estr. da «Lo Sperimentale». Anno LXXXIII, pp. 515-525). Siena, 1929. 8°.
- FAVILLI G. — Sulla utilità di associare la termo- alla sieroagglutinazione nella sierodiagnosi della febbre ondulante. (Estr. dagli «Atti del XXXIV Congresso della Società Italiana di Medicina interna». 1928). Roma, 1928. 8°, pagine 1-4.
- FISCHER G. — Ueber die zwischen dem Erreger des Undulansfiebers (Maltafieber) und dem des Abortus epizooticus bovinus (Bac. Bang) bestehenden Analogien. (Sonderabd. aus dem «Zentralblatt f. Bakteriologie Parasitenkunde u. Infektionskrankheiten»). Band. 115, Ss. 219-222). Jena, 1930. 8°.
- FISCHER W. S. — New Species of Buprestid Beetles from Costa Rica. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 76). Washington, 1929. 8°. pp. 120.
- HESS F. L. — Oölites or Cave Pearls in the Carlsbad Caverns. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 76). Washington, 1929. 8°, pp. 1-5.
- LEVI-CIVITA T. e AMALDI U. — Lezioni di meccanica razionale. Vol. I. Bologna, 1930. 8°, pp. 1-XIV, 1-807.

- LÉVY P. — Cours d'analyse. Tome I. Paris, 1930. 4°, pp. I-VIII, 1-374.
- LUSTIG A. und VERNONI G. — Maltafieber (Undulant fever, Mittelmeerfieber) (Sonderabd. aus «Handbuch der pathogenen Mikroorganismen». Band IV, 1927, Ss. 511-584). Jena, 1927. 8°.
- MARCHIAFAVA C. — L'eredità nella patologia. (Trattato di anatomia patologica. Vol. XIII.) Torino, 1930. 8°. pp. 1-172.
- MATTIROLO O. e GOLA G. — L'opera botanica del prof. Caro Massalongo. (Accademia di Agricoltura, scienze e lettere di Verona). Verona, 1929. 4°, pagine 1-72, tav. I-XXV.
- MÉMERY H. — Quelques remarques sur la durée et l'intensité variables des périodes solaires. (Extr. des «Comptes Rendus de l'Association française pour l'avancement des Sciences. Congrès de la Rochelle. 1928»). Paris, 1928. 8°, pp. 1-4.
- MONTANELLI A. — Niccolò Paganini a Forlì nel 1818. (Estr. dalla Rivista «Forum Livii». 1929). Forlì, 1929. 12°, pp. 1-13.
- MUZZI S. — Clinica chirurgica ortopedica. Roma, s. d. 8°, pp. 1-15.
- PRICE E. W. — Two new Species of Trematodes of the Genus Parametorchis from Fur-Bearing Animals. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 76). Washington. 1929. 8°, pp. 1-5.
- SILVESTRI F. — Contribuzione alla conoscenza degli Japygidae (Thysanuree) della regione australiana. (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici». Vol. XXIII, pp. 210-226). Portici, 1930. 8°.
- SILVESTRI F. — Description of a new Genus and Species of Geophilida (Myriapoda, Chilopoda) from Madras (India). (From the «Records of the Museum». Volume XXXI, pp. 263-267). Calcutta, 1929. 8°.
- Sjön Tåkerns Fauna och Flora. Uppsala. 1929. 4°, pp. 1-37, 1-17, 1-12, 1-48, 1-62, taf. I-VIII, 1-5, 1-60, taf. I, 1-129. taf. I-VII.
- VILLAVECCHIA G. V. — Dizionario di merceologia e di chimica applicata. Volume II. Milano, 1930. 8°, pp. 1-1096.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 16 marzo 1930 (anno VIII)

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Chimica. — *Sopra alcune relazioni fra costituzione ed odore*⁽¹⁾.
Nota⁽²⁾ del Socio A. ANGELI.

Le relazioni che intercedono fra costituzione ed odore sono quanto mai vaghe ed incerte. Vi sono un grande numero di sostanze, appartenenti alle forme più disparate, che possiedono un odore che si rassomiglia: e qui basti ricordare tutti quei composti, per lo più chetonici, che hanno odore che ricorda quello della menta.

Altre volte invece basta un lieve cambiamento, non nella struttura ma nella composizione, per avere un odore affatto diverso, come nell'interessante caso posto in rilievo da I. von Braun⁽³⁾:

$C_6H_5 \cdot (CH_2)_4 \cdot CH_2 \cdot OH$ odore di cedro

$C_6H_5 \cdot (CH_2)_6 \cdot CH_2 \cdot OH$ odore di rose

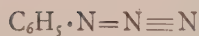
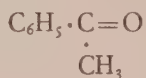
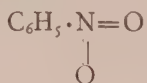
D'altra parte si deve anche riconoscere che taluni composti che presentano analogia di odore possiedono pure una struttura rassomigliante. Rammenterò qui il caso della benzaldeide, nitrobenzolo, benzonitrile, aceto-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Organica della R. Università di Firenze.

(2) Presentata nella seduta del 16 marzo 1930.

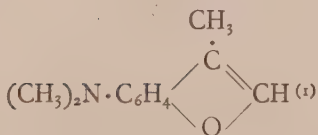
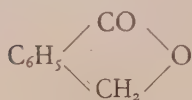
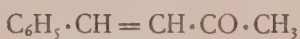
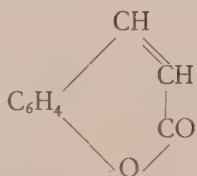
(3) « Berliner Berichte », 44 (1911), p. 2869.

fenone e fenilazide che contengono tutti, prossimo all'anello aromatico, un atomo di carbonio ovvero di azoto a legame multiplo:



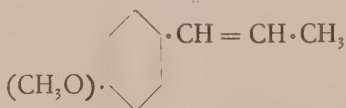
tutte queste sostanze possiedono un odore che ricorda quello delle mandorle amare.

Del pari le sostanze:



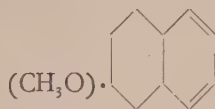
hanno odore analogo a quello della prima, la cumarina.

L'acetolo:

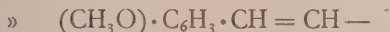


(1) VON PECHMANN e SCHAAL, « Berichte », 32 (1899), p. 3965.

possiede una struttura che ricorda quella dell'etere metilico del β -naftolo:

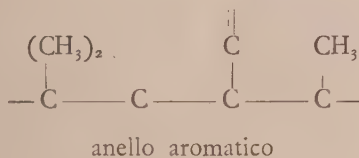


vale a dire entrambi contengono la catena simile:

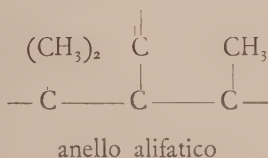


ed, in fondo, anche il loro odore non è molto diverso.

Ma un gruppo di sostanze caratterizzate per la straordinaria intensità e persistenza del loro odore, è costituito, come è ben noto, dai cosiddetti muschi artificiali (nitroderivati aromatici) e dai chetoni di viola (ionone, ecc.). Considerando il muschio chetonico, nei primi è contenuto il doppio legame fra carbonio ed ossigeno ed, uniti all'anello benzolico, sono presenti alcuni gruppi metilici, che per brevità potremo rappresentare nel seguente modo:



Pure nei chetoni delle viole (α -ionone e β -ionone, irone e metil- β -irone⁽¹⁾), all'anello alifatico sono uniti aggruppamenti che molto non differiscono dai precedenti:

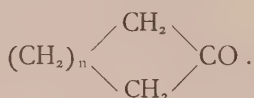


Inoltre la presenza del doppio legame prossimo a quello carbonilico è necessaria perchè, quando viene colmato, come p. es. nel biidroionone, l'odore scompare.

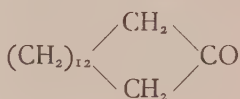
Come si vede, in tutte queste sostanze sono presenti gruppi metilici, accanto ad un residuo carbonilico. Considerate da questo punto di vista, sono perciò rimarchevoli un nuovo gruppo di sostanze oltremodo interessanti

(1) O. DIELS e K. ALDER, « Annalen », 470 (1929), p. 62.

descritte negli ultimi anni nei lavori magistrali di L. Ruzicka, e nelle quali un gruppo carbonilico fa parte di un anello alifatico, contenente un grande numero di metileni e che si possono rappresentare per mezzo della formula generale:

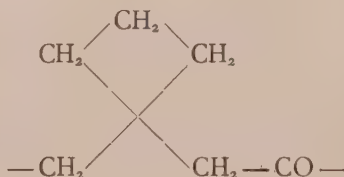


Alcuni di questi composti, o molto affini, sono contenuti nel muschio (muscone) e nello zibetto (zibettone) e precisamente, fondandosi sullo studio dei principi attivi presenti in questi prodotti, Ruzicka ha potuto effettuare le magnifiche sintesi di quelle sostanze, quali p. es. l'esaltone:



che possiede odore intensissimo ed identico a quello del muschio.

Sebbene si tratti di una classe di composti di tutt'altra natura, a prima vista può sembrare strano, dopo quanto prima si è detto, a proposito dei muschi aromatici e dei chetoni delle viole, che i chetoni scoperti da Ruzicka possiedano un odore così rimarchevole senza contenere gruppi metilici, disposti in determinato modo intorno al residuo carbonilico, e perciò non mi sembra azzardata l'idea che precisamente in seguito alle dimensioni dell'anello, determinate dalla presenza di un grande numero di metileni, sieno possibili deformazioni dell'anello stesso, in modo da produrre nodi laterali, costituiti da qualcuno di tali residui, e che facessero quasi l'ufficio dei gruppi metilici, considerati nei casi precedenti ⁽¹⁾. Per chiarire la mia idea potrebbe ad un di presso verificarsi quel che si può osservare in un anello di gomma che si ritorca intorno a sè stesso ovvero in un filo troppo ritorto, p. es. nel seguente modo:



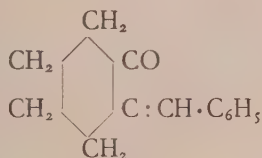
(1) Alla fine dello scorso febbraio il prof. Ruzicka ha tenuto un discorso davanti alla Società Chimica di Berlino; io non conosco il testo del discorso, nemmeno attraverso il riassunto, ma sarei ben lieto se le sue idee sopra questo punto fossero in accordo con le mie.

Questa supposizione sembra d'altra parte giustificata dal fatto, sebbene l'esame röntgenografico dei chetoni di Ruzicka non abbia fornito dati concludenti in proposito ⁽¹⁾, che W. B. Lee ha notato in alcuni composti a lunga catena, il manifestarsi anomalie di proprietà e che queste anomalie diventano massime nelle catene a 15 atomi di carbonio ⁽²⁾; inoltre W. B. Lee e van Rysselberge ammettono una *forma a spirale* nelle combinazioni a lunga catena ⁽³⁾.

Per farmi una idea, sia pure approssimata di queste possibilità, ho giudicato opportuno prendere in esame il comportamento chimico di alcuni chetoni ciclici, e soprattutto l'influenza che possono esercitare alcuni sostituenti (radicali alcoolici) sopra le reazioni che sono caratteristiche di tali chetoni.

Nella letteratura si trovano oramai dei dati sopra questo proposito, che sono stati, per il caso mio, di grande interesse.

Così, a riguardo della condensazione dei chetoni ciclici con la benzaldeide, O. Wallach ha stabilito ⁽⁴⁾ che quelli, come fanno i chetoni a catena aperta, possono fornire i soliti prodotti; così cicloesanone e aldeide benzoica danno con tutta facilità il composto:



Wallach inoltre ha trovato che se il ciclochetone è ortosostituito, la condensazione non avviene, tanto che la reazione può venire utilizzata per separare i chetoni ortosostituiti dagli altri. Inoltre, sulla facoltà di condensarsi ha influenza anche la stessa configurazione del chetone; tanto vero che col 3-metilcicloesanone otticamente attivo, riesce negativa la condensazione con le clorobenzaldeidi, mentre invece si compie col chetone inattivo. Evidentemente si tratta di impedimenti sterici.

D'altra parte dai lavori di H. Wieland risulta che, in modo simile a quanto fa la benzaldeide, i chetoni ciclici si condensano facilmente con nitrato di etile, in presenza di alcoolato di potassio, seguendo cioè il metodo di sintesi che io ho proposto ancora un quarto di secolo fa per la preparazione di alcuni nitroderivati. Nel caso in parola si forma, con cicloesanone,

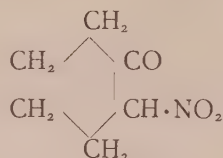
(1) KATZ e SELMAN, « Central-Blatt », (1928), I, p. 1743; BÜCHNER, KATZ e SAMWEL, ibid., (1929), II, p. 2869.

(2) « Central-Blatt », (1927), II, p. 1239.

(3) « Central-Blatt », (1930), I, p. 327.

(4) « Central-Blatt », (1908), I, p. 637.

il nitrochetone, nel quale naturalmente il gruppo nitrico è del pari prossimo al carbonile (1):



Assieme al nitrocomposto si forma anche il binitroderivato; anzi, nel caso del ciclopentanone la reazione è così energica che, pur impiegando quantità equimolecolari, si ottiene solamente il binitroderivato.

In questi casi dunque la reazione procede del tutto normale per uno ovvero anche per i due metileni prossimi al carbonile:



Che alcune reazioni risentano influenze di indole sterica, risulta provato anche dalle ricerche di Ruzicka stesso (2); egli ha trovato infatti che tali chetoni ciclici si sono potuti ottenere solamente da quelli acidi bicarbonici che nelle posizioni 1 e 2, hanno i metileni non sostituiti; si possono invece preparare da quelli acidi polimetilendicarbonici che portano metili nelle posizioni 3 ovvero 4.

Inoltre i chetoni ciclici contenenti un metile prossimo al carbonile possiedono un odore di muschio più debole dei corrispondenti chetoni non sostituiti (3).

Se la ipotesi che prima ho esposta aveva fondamento di verità, vale a dire se vicino al carbonile la catena dei metileni avesse subito deformazioni, in modo da simulare la presenza di sostituenti, era da aspettarsi che le condensazioni cui prima ho accennato, avessero potuto compiersi solamente in piccola parte o più verosimilmente nulla del tutto.

(1) « Central-Blatt », (1928), II, p. 143.

(2) « Helvetica Acta », 11 (1928), p. 686.

(3) È notevole il fatto che l'influenza della struttura ciclica, ovvero a catena aperta di un chetone, si manifesta anche sui prodotti di condensazione col ciclocitral. Nel mentre con acetone il ciclocitral si condensa facilmente per dare ionone, con pinacolina si ha un prodotto che ha odore di pesche e con acetofenone un olio che ha odore che ricorda quello dei lamponi; invece con cicloesanone si perviene ad una sostanza che non ha odore caratteristico. La medesima constatazione, operando più in grande, venne fatta dalla celebre casa Haarmann e Reimer di Holzminden sul Weser; infatti il dott. Wilhelm Haarmann mi ha gentilmente comunicato che è privo di proprietà odorose il chetone $\text{C}_{16}\text{H}_{24}\text{O}$, ottenuto per condensazione del ciclocitral col cicloesanone.

È per me un gradito dovere ringraziare il dott. W. Haarmann, che ha altresì posto a mia disposizione il ciclocitral che ha servito per le mie esperienze.

Come il più facilmente accessibile, io ho impiegato il ciclochetone a 15 atomi di carbonio, che si trova in commercio sotto il nome di *esaltone*⁽¹⁾; si comprende che dato l'altissimo prezzo di questa sostanza, io abbia dovuto limitarmi all'esecuzione di qualche esperienza di carattere più che altro orientativo, lasciando che altri, operando più in grande, possano in modo più sicuro confermare ovvero smentire i miei risultati.

Un determinato peso di esaltone venne mescolato con la quantità molecolare di benzaldeide e poi tentata la condensazione operando con potassa diluita ed a freddo; con potassa acquosa ed a caldo come nel caso del cicloesanone, ed infine con potassa alcoolica.

In ogni caso non si ebbe condensazione.

Inoltre, come nelle esperienze di Wieland, alla soluzione in alcool assoluto di una molecola di etilato potassico venne aggiunta una molecola di esaltone e successivamente, raffreddando con ghiaccio, una molecola di nitrato di etile; nel domani per aggiunta di etere, non si ebbe separazione di sali; si trattò con acqua e così si poté riottenere tutto l'esaltone impiegato.

Questo comportamento rende verosimile l'influenza di qualche *impedimento storico* e ciò parlerebbe in favore dell'ipotesi che prima ho esposta.

Molto probabilmente le stesse considerazioni si potranno estendere anche ai lattoni polimetilenici (p. es. ambrettolide), sopra i quali hanno richiamata l'attenzione gli interessanti lavori di Kerschbaum.

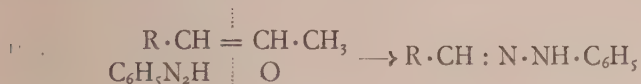
Ringrazio il prof. Raoul Poggi e la laureanda signorina Vanda Guastalla per l'aiuto che mi hanno prestato nella esecuzione di queste esperienze; essi pubblicheranno anche i dati relativi non appena avranno portato a compimento altre ricerche che hanno in corso sopra lo stesso argomento.

(1) Una parte del costosissimo prodotto impiegato in queste ricerche mi è stato regalato dalla fabbrica M. Naef e C. di Ginevra, alla quale esprimo i sensi della più viva gratitudine.

Scrivendo il diazoidrato normale nella forma:

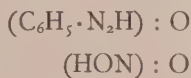


si può stabilire una eguaglianza perfettamente analoga, nel caso che reagisca una sola molecola, come hanno già posto in rilievo Jolles e Krugliakoff ⁽¹⁾:

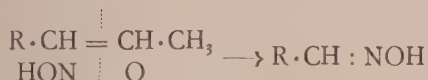


senza invocare la formazione di fenilidrazina.

Se questa spiegazione corrispondeva alla realtà, rammentando le grandi analogie di comportamento che presentano i diazoidrati con l'acido nitroso, e che io ho ripetutamente posto in rilievo, fra i corpi:



era da aspettarsi che anche l'acido nitroso stesso potesse comportarsi in modo analogo:



con formazione di ossima invece del fenilidrazone.

L'azione dell'acido nitroso sopra i derivati propenilici aromatici ha fatto oggetto di numerose ricerche che uno di noi ha eseguito ancora quaranta anni or sono: ma allora io operavo in modo da ottenere sostanze contenenti nella loro molecola due atomi di azoto, e delle quali sono riuscito a determinare la costituzione.

Invece, in altre condizioni, vale a dire impiegando nitrito d'amile e acido cloridrico in soluzione alcoolica, R. Fabiny ⁽²⁾, circa nello stesso tempo, partendo dall'asarone, ha ottenuto la corrispondente ossima, cui sopra ho accennato:



Se invece si fa reagire sopra il composto propenilico nitrito d'amile ed etilato sodico, il prodotto rimane inalterato: evidentemente si forma nitrito alcalino, che corrisponde agli isodiazotati, e che perciò non prende parte alla reazione.

(1) Questi « Rendiconti », 2 (1930), I, p. 197.

(2) « Zeit. physikalische Chemie », 12 (1893), p. 5.

Queste relazioni giustificano pienamente le analogie di struttura e di comportamento delle tre forme:

$$\begin{aligned} O &= O \\ (\text{HON}) &= O \\ (\text{C}_6\text{H}_5 \cdot \text{N}_2\text{H}) &= O \end{aligned}$$

cui prima si è accennato.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Le quasi-applicabilità proiettive di una superficie sul piano.* Nota di A. TERRACINI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. FUBINI.

Recentemente (in una comunicazione al Congresso internazionale dei Matematici in Bologna) ho avuto l'occasione di definire la quasi-applicabilità proiettiva fra due superficie. Lo scopo che mi proposi di raggiungere introducendo questa nuova nozione è quello di dare all'analogo proiettivo della ordinaria applicabilità metrica una portata più vasta di quella che compete alle applicabilità proiettive di Fubini ⁽²⁾. Secondo la mia definizione, la quasi applicabilità proiettiva è una corrispondenza puntuale fra due superficie S e S' — che supponiamo nel seguito riferite a uno stesso sistema di coordinate curvilinee u, v — per la quale sussistono le seguenti due condizioni, tolte a prestito dall'ordinaria applicabilità proiettiva:

1. Esistono, per ogni coppia di punti corrispondenti x e x' rispettivamente di S e S' , due centri di proiezione y e y' dai quali gli intorni di secondo ordine di x e x' si proiettano, p. es., sui piani ξ e ξ' tangenti a S e S' in x, x' , secondo due sistemi omografici. Osserviamo subito che quei centri di proiezione possono variare sulle rette che li congiungono ai punti x e x' rispettivamente della S e della S' senza che ciò influisca sul risultato: ciò che vi è di essenziale è soltanto la coppia delle congruenze K, K' descritte rispettivamente dalle rette $xy, x'y'$.

(1) Nella seduta del 16 marzo 1930.

(2) Al medesimo scopo è diretta un'altra estensione della ordinaria applicabilità proiettiva, in senso completamente diverso dall'attuale, dovuta al ČECH; cfr. una sua comunicazione allo stesso Congresso, e le sue Note: *Sur les correspondances asymptotiques entre deux surfaces*, questi « Rendiconti », 2° sem. 1928.

2. È possibile normare le coordinate dei punti di S e S' in modo che nella omografia che intercede — secondo 1. — fra i piani tangenti ξ e ξ' si corrispondano non solo x e x' ma anche $x_u^{(1)}$ e x'_u ; x_v e x'_v .

Vogliamo *ricercare* in questa Nota *tutti i possibili casi di quasi-applicabilità proiettiva di una superficie S su un piano S'* (2).

1. Supponiamo la S non sviluppabile, e adottiamo parametri asintotici u, v ; cosicchè, con le notazioni della *Geometria proiettiva differenziale* di Fubini e Čech sussistono le equazioni fondamentali (3)

$$(1) \quad \begin{cases} x_{uu} = \vartheta_u x_u + \beta x_v + p_{11} x, \\ x_{vv} = \gamma x_u + \vartheta_v x_v + p_{22} x. \end{cases}$$

Sia $y = Ax + Bx_u + Cx_v + x_{uv}$ il centro di proiezione relativo al punto x della S , dove A, B, C sono funzioni di u, v . Il punto $x + dx + \frac{1}{2} d^2 x$ della S si proietta da y , sopra il piano ξ tangente alla S in x , in un punto che — adottate entro ξ come coordinate non omogenee del punto $x + \eta x_u + \zeta x_v$ le η, ζ — ha per coordinate (nell'ordine di approssimazione considerato)

$$(2) \quad \begin{cases} \eta = du + \frac{1}{2} (d^2 u + \vartheta_u du^2 + \gamma dv^2) - B du dv \\ \zeta = dv + \frac{1}{2} (d^2 v + \beta du^2 + \vartheta_v dv^2) - C du dv. \end{cases}$$

Per il piano S' descritto dal punto $x'(u, v)$ sussistono equazioni fondamentali del tipo

$$(3) \quad \begin{cases} x'_{uu} = ax' + bx'_u + cx'_v, & x'_{uv} = ex' + fx'_u + gx'_v, \\ x'_{vv} = lx' + mx'_u + nx'_v; \end{cases}$$

(1) Pongo $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}$, ecc.

(2) Il risultato che troveremo fu già enunciato nella mia comunicazione citata.

(3) Invece per la S involuppo sussistono le

$$\begin{aligned} \xi_{uu} &= \vartheta_u \xi_u - \beta \xi_v + \pi_{11} \xi, \\ \xi_{vv} &= -\gamma \xi_u + \vartheta_v \xi_v + \pi_{22} \xi \end{aligned}$$

dove le espressioni π_{11}, π_{22} (che occorreranno più avanti) si possono ritenere definite dalle

$$\pi_{11} = p_{11} + \beta_v + \beta \vartheta_v, \quad \pi_{22} = p_{22} + \gamma_u + \gamma \vartheta_v.$$

cosicchè per il suo punto $x' + dx' = \frac{1}{2} d^2 x' = x' - \eta' x' + \zeta' x'$ si ha

$$(4) \quad \begin{cases} \eta' = du + \frac{1}{2} (d^2 u + b du^2 + 2 m du dv + f dv^2), \\ \zeta' = dv + \frac{1}{2} (d^2 v + c du^2 + 2 n du dv + g dv^2). \end{cases}$$

La quasi applicabilità si traduce nelle $\eta' = \eta, \zeta' = \zeta$, cioè nelle

$$(5) \quad \vartheta_u = b \quad ; \quad \vartheta_v = g \quad ; \quad \beta = c \quad ; \quad \gamma = f \quad ;$$

mentre

$$(6) \quad B = -m \quad , \quad C = -n.$$

Ora le condizioni di integrabilità a cui soddisfano i coefficienti che compaiono nelle (3), ove si tenga conto delle (5) diventano

$$(7) \quad a_v - l_u + l \vartheta_u + e \beta - a m - n l = 0,$$

$$(8) \quad \vartheta_{uv} + \beta \gamma - m_u - mn - l = 0,$$

$$(9) \quad \beta_v + n \vartheta_u - n_u + a - mn - l = 0,$$

con tre analoghe (7'), (8'), (9') che non scriviamo esplicitamente, e che si deducono dalle (7), (8), (9) scambiandovi u con v . La ricerca delle superficie quasi-applicabili su un piano equivale dunque alla ricerca delle superficie tali che, sostituiti nel sistema (7), (7'), (8), (8'), (9), (9') i relativi valori di β, γ, ϑ , il sistema stesso risulti compatibile. Le (8) e (8') permettono intanto di introdurre una funzione $\Phi(u, v)$ tale che $n = (\log \Phi)_u, m = (\log \Phi)_v$, con

$$(10) \quad \vartheta_{uv} + \beta \gamma - (\log \Phi)_{uv} - (\log \Phi)_u (\log \Phi)_v - l = 0;$$

mentre ricavando a ed e dalle (9), (9') ed l dalle (10) e sostituendole in (7) e (7') queste ⁽¹⁾ divengono

$$(11) \quad \begin{cases} \Phi_{uu} = \vartheta_u \Phi_u - \beta \Phi_v + (\pi_{11} + U) \Phi, \\ \Phi_{vv} = -\gamma \Phi_u + \vartheta_v \Phi_v + (\pi_{22} + V) \Phi. \end{cases}$$

dove U, V designano rispettivamente funzioni della sola u e della sola v . In corrispondenza a ogni soluzione Φ del sistema (11), quanto precede mostra che vi è effettivamente una quasi applicabilità — proiettiva della

(1) Ricordando le condizioni di integrabilità a p. 94 dell'op. cit. di FUBINI e CECIL.

superficie S su un piano: la relativa congruenza K — secondo le (6) — è descritta dalla retta che congiunge il punto x al punto $(\log \Phi)_v x_u + (\log \Phi)_u x_v - x_{uv}$. Distinguiamo ora due casi:

α) È $U = V = 0$: l'equazione $Udu^2 - Vdv^2 = 0$ delle sviluppabili della congruenza K mostra che le rette xy passano per un punto fisso. Effettivamente, proiettando da un centro fisso arbitrario una superficie arbitraria, si realizza una quasi-applicabilità di questa su un piano.

β) Se non è $U = V = 0$, variamo il fattore di proporzionalità delle coordinate x di punto e ξ di piano tangente della superficie S con l'assumere $x = \Phi \bar{x}$. Allora la congruenza K risulta luogo della retta $\bar{x}\bar{x}_{uv}$, mentre, p. es.

$$\Phi \bar{\pi}_{11} = -\Phi_{uu} + \partial_u \Phi_u - \beta \Phi_v + \pi_{11} \Phi = -U \Phi,$$

cioè $\bar{\pi}_{11} = -U$, $\bar{\pi}_{22} = -V$. Ne segue⁽¹⁾ che la congruenza K è una congruenza R , che la superficie S è essa stessa una superficie R oppure R_0 , e che la superficie S e la congruenza K sono *completamente coniugate* nel senso di Fubini, cioè le asintotiche delle falde focali della congruenza K corrispondono alle asintotiche della superficie S . Concludiamo intanto che *prescindendo dal caso delle proiezioni di una superficie fatte da un punto fisso (le quali effettivamente realizzano una quasi applicabilità di ogni superficie su un piano) le sole superficie (non sviluppabili) quasi applicabili su un piano sono le superficie R oppure R_0 .*

2. Lasciando da parte la superficie R_0 , studiamo come avvenga la quasi applicabilità di una superficie R su un piano, prospettata nel precedente teorema. La superficie S e la congruenza K sono, come si disse, completamente coniugate. Ora, nella sua op. cit. Fubini ha date due eleganti costruzioni per la più generale congruenza R (o rispettivamente superficie R) completamente coniugata a una data superficie (o rispettivamente congruenza) R . Ebbene, troveremo che precisamente attraverso le due costruzioni di Fubini (l'una o l'altra) si realizzano le nostre quasi applicabilità proiettive di una superficie R su un piano, secondo quanto ora sarà precisato.

Anzitutto, secondo la prima costruzione di Fubini, deformando proiettivamente la S in una nuova superficie, la congruenza K si riduce a una stella di rette σ : sostituendo a questa un piano prospettivo π , è proprio la corrispondenza puntuale che così nasce fra S e π quella che realizza la quasi applicabilità piana della S . Invero la deformazione proiettiva di S testè considerata subordina fra la superficie deformata di S e la S stessa un'omografia negli intorni di secondo ordine di due punti corrispondenti:

(1) FUBINI, *Sulla teoria delle superficie R e delle loro trasformazioni*, questi. « Rendiconti », serie 6^a, vol. IV, 1926. Cfr. anche B. SEGRE, *Le congruenze K e la trasformazione F delle superficie dello spazio ordinario*, « Rendiconti del Circ. di Palermo », t. LII, 1928.

e questa omografia spaziale subordina a sua volta un'omografia fra la stella σ e quella ad essa corrispondente nello spazio di S . Ne segue che la stella σ (cioè un piano π ad essa prospettivo) risulta quasi applicabile sulla superficie S . E siccome due piani quasi-applicabili sono proiettivi, risulta infine che il sistema piano π coincide con S' a meno di una trasformazione proiettiva.

Passando alla seconda costruzione di Fubini, se Σ è una delle due superficie R che sono falde focali della congruenza K , la superficie S , con una deformazione proiettiva di Σ , si riduce a un piano (t) . Ebbene, dico ancora che la quasi applicabilità proiettiva della superficie S su un piano, dalla quale abbiamo preso le mosse, si realizza precisamente nella corrispondenza puntuale che così nasce tra la superficie S e il piano (t) . Invero, chiamando $x^*(u, v)$ il punto che descrive la superficie Σ , e $\beta^*, \gamma^*, \vartheta^*$, ecc. le quantità analoghe a β, γ, ϑ ecc. relative a questa superficie, si può supporre (v. Fubini, op. cit. n. 4) che per la Σ sia $p_{11}^* = p_{22}^* = \text{cost.}$, mentre $x = x_u^* + x_v^*$. Desumendo da questa relazione, con opportune derivazioni, i valori di x_u, x_v, x_{uu}, x_{vv} , si ottiene

$$(12) \quad \beta = \beta^* - (\log \Delta)_u, \quad \gamma = \gamma^* - (\log \Delta)_v, \quad \vartheta = \vartheta^* + \log \Delta$$

avendo posto $\Delta = \beta^* + \gamma^* - \vartheta_u^* - \vartheta_v^*$; e inoltre si ricava x^* espresso per combinazione lineare dei punti x, x_u, x_v, x_{uv} così da dedurre che attualmente si può assumere $\log \Phi = \vartheta^*$. Se ora la Σ si deforma in Σ mantenendo gli stessi valori di β, γ, ϑ , e assumendo invece $\bar{p}_{11} = \bar{p}_{22} = 0$, la superficie S si trasforma in un piano (t) . Assumiamo per questo piano equazioni fondamentali della forma (3), e siano

$$(13) \quad \begin{cases} t_{uu} = a_1 t + b_1 t_u + c_1 t_v, & t_{vv} = c_1 t + f_1 t_u + g_1 t_v, \\ t_{uv} = l_1 t + m_1 t_u + n_1 t_v \end{cases}$$

Relazioni affatto analoghe alle (12) or ora considerate fra Σ e S valgono anche fra Σ e (t) il che porge $b_1 = \vartheta_u = b; g_1 = \vartheta_v = g; c_1 = \beta = c; f_1 = \gamma = f$. Infine formando t_{uv} ed esprimendolo linearmente per mezzo di t, t_u, t_v si trae $m_1 = \vartheta_v^* = (\log \Phi)_v = m, n_1 = \vartheta_u^* = (\log \Phi)_u = n$. In definitiva i piani (t) e S' (x') risultano proiettivamente applicabili e perciò proiettivi. c. d. d.

Matematica. — *Generalizzazione di un teorema di F. Neumann sul calcolo di certi integrali.* Nota di LUISA PELOSI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Com'è ben noto, si deve a F. Neumann ⁽²⁾ un teorema molto notevole e meraviglioso per la sua semplicità, cioè quello che serve a calcolare i *momenti magnetici* di un *ellissoide* qualunque, sotto l'azione di un campo magnetico arbitrariamente assegnato.

Questi momenti magnetici sono rappresentati dagli integrali

$$(1) \quad k \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial x} dS, \quad k \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial y} dS, \quad k \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial z} dS,$$

in cui S indica lo spazio occupato dal corpo che si considera, k è una costante (coefficiente di magnetizzazione) e φ è una funzione incognita, armonica nello spazio S , e che, secondo la teoria dell'induzione magnetica di Poisson, deve soddisfare, in tale spazio, all'equazione

$$(2) \quad U + \varphi - k \int_{\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = 0,$$

ove U è una funzione conosciuta, armonica in S , inoltre r è la distanza di un punto generico (x, y, z) di S da un punto qualunque (ξ, η, ζ) della superficie σ che limita S , ed n è la normale interna.

In questa breve Nota mi propongo di stabilire un risultato molto più generale di quello di Neumann; e precisamente faccio vedere che è possibile calcolare (senza conoscere la φ), per un ellissoide, gli integrali

$$(3) \quad \int_S P \frac{\partial \varphi}{\partial x} dS, \quad \int_S P \frac{\partial \varphi}{\partial y} dS, \quad \int_S P \frac{\partial \varphi}{\partial z} dS,$$

ove P è una funzione razionale intera data di (x, y, z) .

Come ben si vede, se P si riduce ad una costante k , si ritrova il teorema di Neumann.

(1) Nella seduta del 2 marzo 1930.

(2) F. NEUMANN, *Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus*, § 43 (Teubner; Leipzig, 1881). P. DUHEM, *Leçons sur l'Electricité et le Magnétisme*, t. II, p. 152 (Gauthier-Villars; Paris, 1892).

Per ottenere il risultato enunciato, è necessario stabilire dapprima le seguenti formule generali:

$$(4) \left\{ \begin{aligned} \int_S \rho \frac{\partial U}{\partial x} dS + \int_S \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x} dS - k \int_S \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \zeta} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right) dS &= 0, \\ \int_S \rho \frac{\partial U}{\partial y} dS + \int_S \rho \frac{\partial \varphi}{\partial y} dS - k \int_S \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial \zeta} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right) dS &= 0, \\ \int_S \rho \frac{\partial U}{\partial \zeta} dS + \int_S \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} dS - k \int_S \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \zeta} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial \zeta} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right) dS &= 0, \end{aligned} \right.$$

ove ρ è una funzione data comunque (regolare in S) e V è la funzione potenziale newtoniana dello spazio S , supposto pieno di materia avente densità ρ .

2. Dimostriamo intanto la prima delle (4).

Dalla (2) si ha ovviamente:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} - k \int_{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} d\sigma = 0,$$

e poichè $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (\zeta - \zeta')^2}$, è chiaro che $\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r}$, perciò:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} + k \int_{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r} d\sigma = 0,$$

moltiplicando per una funzione regolare $\rho(x, y, \zeta)$ ed integrando, risulta:

$$(5) \quad \int_S \rho \frac{\partial U}{\partial x} dS + \int_S \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x} dS + k \int_S \left(\int_{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\rho}{r} d\sigma \right) dS = 0.$$

Trasformiamo l'ultimo termine, che per brevità indicheremo con I ; è chiaro che:

$$I = k \int_{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \int_S \frac{\rho}{r} dS \right) d\sigma,$$

se ora si pone: $V = \int_S \frac{\rho}{r} dS$, la V è evidentemente la funzione potenziale

newtoniana dello spazio S , supposto pieno di massa avente densità ρ , e potremo scrivere:

$$I = k \int_{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{\partial V}{\partial \xi} d\sigma;$$

in virtù del noto lemma di Green:

$$\int_S u \Delta_2 v dS + \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) dS = - \int_{\sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma,$$

applicato alle funzioni $u = \frac{\partial V}{\partial \xi}$, $v = \varphi$, avremo infine:

$$I = -k \int_S \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \zeta} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right) dS,$$

e sostituendo nella (5) si ottiene la prima delle (4); le altre due poi si deducono con permutazioni circolari.

È bene avvertire che nelle (4) lo spazio S è qualunque.

3. Supponiamo ora che lo spazio S sia quello racchiuso dall'ellissoide di equazione $\mu_0 = 0$, ove

$$(6) \quad \mu_0 = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2},$$

e ricordiamo i seguenti importanti teoremi⁽¹⁾:

I. Qualunque funzione ρ , razionale, intera, di grado n , delle variabili x, y, z , si può esprimere nella forma:

$$(7) \quad \rho = \sum_{p,q,r} \alpha_{p,q,r} \frac{\partial^{p+q+r} \mu_0^{p+q+r}}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r},$$

ove le α indicano delle costanti e le p, q, r dei numeri interi (positivi o nulli), la cui somma non supera il grado n della funzione ρ .

II. Se lo spazio racchiuso dall'ellissoide $\mu_0 = 0$ è pieno di materia avente per densità la funzione ρ espressa dalla (7), allora la funzione potenziale newtoniana V di tale distribuzione è, in ogni punto **interno** all'ellissoide, rappresentata dalla seguente funzione intera di grado $n + 2$:

$$(8) \quad V = \pi abc \sum_{p,q,r} \frac{\alpha_{p,q,r}}{p+q+r+1} \int_0^\infty \frac{\partial^{p+q+r} \mu^{p+q+r+1}}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r} \frac{du}{R(u)},$$

(1) MORERA, *Sulla attrazione degli ellissoidi ecc.* § 6 (« Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino », serie II, t. LV, 1905).

ove

$$(9) \quad \mu = 1 - \frac{x^2}{a^2 + u} - \frac{y^2}{b^2 + u} - \frac{z^2}{c^2 + u}, \quad R(u) = \sqrt{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)}.$$

Ciò premesso, supponiamo anzitutto $\rho = 1$; allora la (8) ci dà senz'altro

$$V = \pi abc \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + u} - \frac{y^2}{b^2 + u} - \frac{z^2}{c^2 + u} \right) \frac{du}{R(u)},$$

che è la nota funzione potenziale dell'ellissoide omogeneo; essa risulta quindi della forma:

$$V = A_0 - Ax^2 - By^2 - Cz^2,$$

ove A_0, A, B, C sono costanti; sostituendo nelle (4) si ottengono senz'altro i valori degli integrali (1), e così si ritrova subito il teorema di Neumann. Supponiamo ora $\rho = x$; bisogna dare a ρ la forma (7), il che si fa subito, osservando che si può scrivere:

$$\rho = -\frac{a^2}{2} \frac{\partial \mu_0}{\partial x},$$

e allora la (8) porge, ricordando la (9):

$$V = \pi abc \frac{a^2}{4} \int_0^\infty \frac{\partial \mu^2}{\partial x} \frac{du}{R(u)} = \pi a^3 bc \int_0^\infty \frac{x \mu}{a^2 + u} \frac{du}{R(u)},$$

che è della forma:

$$V = A_1 x + B_1 x^3 + C_1 xy^2 + D_1 xz^2,$$

ove A_1, B_1, C_1, D_1 , sono costanti; del resto, dal fatto che la funzione V deve essere di 3° grado, è facile concludere che essa deve avere la forma precedente.

Sostituendo nelle (4) si ottengono 3 equazioni lineari nelle 9 incognite:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_S x \frac{\partial \varphi}{\partial x} dS, \quad \int_S x \frac{\partial \varphi}{\partial y} dS, \quad \int_S x \frac{\partial \varphi}{\partial z} dS, \quad \int_S y \frac{\partial \varphi}{\partial x} dS, \quad \int_S y \frac{\partial \varphi}{\partial y} dS, \\ \int_S y \frac{\partial \varphi}{\partial z} dS, \quad \int_S z \frac{\partial \varphi}{\partial x} dS, \quad \int_S z \frac{\partial \varphi}{\partial y} dS, \quad \int_S z \frac{\partial \varphi}{\partial z} dS. \end{array} \right.$$

Supponendo poi $\rho = y$, e $\rho = z$, la funzione potenziale V assume le forme:

$$V = A_2 y + B_2 x^2 y + C_2 y^3 + D_2 yz^2,$$

$$V = A_3 z + B_3 x^2 z + C_3 y^2 z + D_3 z^3,$$

ove le A_2, \dots, D_3 sono costanti. Sostituendo nelle (4) avremo altre 6 equazioni lineari nelle incognite (10), e così avremo complessivamente un sistema di 9 equazioni lineari nelle 9 incognite (10); tale sistema è effettivamente risolubile (come mostrerò fra poco) e così si vengono a calcolare gli integrali (10).

Di qui si conclude che, se P è una funzione di 1° grado di x, y, z , gli integrali (3) risultano completamente calcolati.

Prima di proseguire faccio vedere che il sistema di 9 equazioni lineari ora incontrato, si può realmente risolvere, cioè che il determinante Δ dei coefficienti è diverso da zero.

E infatti, se fosse $\Delta = 0$, vuol dire che il sistema considerato, nel quale si ponga $U = 0$, e quindi i termini noti siano sostituiti con zero (equazioni omogenee), avrebbe soluzioni costituite da valori non tutti nulli, cioè uno almeno degli integrali (10) sarebbe diverso da zero; ora ciò è assurdo, perchè dal teorema di unicità del problema dell'induzione magnetica, risulta che se nella (2) $U = 0$, anche $\varphi = 0$, e quindi gli integrali (10) devono essere nulli. Ciò mostra che è realmente $\Delta \neq 0$.

È utile osservare che il sistema considerato di 9 equazioni si spezza in un sistema di 3 equazioni colle incognite

$$\int_S x \frac{\partial \varphi}{\partial x} dS, \quad \int_S y \frac{\partial \varphi}{\partial y} dS, \quad \int_S z \frac{\partial \varphi}{\partial z} dS,$$

e in 3 sistemi di 2 equazioni ciascuno, colle coppie di incognite:

$$\int_S y \frac{\partial \varphi}{\partial x} dS, \quad \int_S x \frac{\partial \varphi}{\partial y} dS; \quad \int_S z \frac{\partial \varphi}{\partial y} dS, \quad \int_S y \frac{\partial \varphi}{\partial z} dS; \\ \int_S x \frac{\partial \varphi}{\partial z} dS, \quad \int_S z \frac{\partial \varphi}{\partial x} dS,$$

perciò la effettiva determinazione di queste incognite risulta abbastanza semplice.

Supponiamo ora successivamente:

$$\rho = x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz,$$

e formiamo mediante la (8) le corrispondenti 6 espressioni della funzione potenziale V che risulteranno di quarto grado; sostituendo nelle (4) {verremo ad avere un sistema di 18 equazioni lineari nelle 18 incognite

$$\int_S x^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} dS, \quad \int_S x^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} dS, \dots, \int_S z^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} dS,$$

e questo sistema è effettivamente risolubile, come si riconosce col ragionamento dianzi esposto.

Concludiamo perciò che se P è una funzione di 2° grado di x, y, z , gli integrali (3) risultano del tutto noti.

Così proseguendo si perviene al calcolo degli integrali (3) quando P è una funzione intera di grado qualsiasi.

Così il nostro asserto è dimostrato.

Matematica. — *Sulla curvatura media delle superficie.* Nota di M. CALONGHI, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Nella presente Nota si espone come la considerazione di elementi geometrici connessi ad una superficie lungo un ciclo infinitesimo conduca naturalmente alla nozione di curvatura media della superficie stessa. Il procedimento ravvicina la curvatura media alla curvatura totale la cui stretta connessione con le proprietà dei cicli infinitesimi tracciati sulla superficie è messa in luce dalla teoria del parallelismo superficiale.

Si consideri il piano π tangente in un punto P di una superficie Σ , e, detto P' un punto infinitamente vicino e l una retta tangente alla superficie in P' , sia n una normale a l tangente a Σ ; l'angolo di n con il piano π esprime una deviazione (dipendente dalla scelta di l) di Σ dal piano tangente; tale angolo verrà indicato semplicemente col nome di deviazione.

Sia σ una curva chiusa (ciclo) infinitesima in tutte le dimensioni, l la sua tangente in un punto e ϑ la relativa deviazione; l'integrale:

$$\int_{\sigma} \vartheta d\sigma$$

si indicherà col nome di *deviazione totale* relativa al ciclo σ .

Con tali denominazioni si può enunciare il seguente teorema:

« Il rapporto tra la deviazione totale e l'area del ciclo è la curvatura media della superficie ».

2. Sia $z = f(x, y)$ l'equazione della superficie Σ in un intorno del punto non singolare $P(x_0, y_0, z_0)$; nel piano π giacciono le tangenti alle linee $y = \text{cost.}$, $x = \text{cost.}$ ed i loro coseni di direzione sono⁽²⁾:

$$(1) \quad \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}, \quad 0, \quad \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}; \quad 0, \quad \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}, \quad \frac{q}{\sqrt{1+q^2}}.$$

(1) Nella seduta del 17 marzo 1930.

(2) Per le derivate parziali di $f(x, y)$ si segue la notazione di Monge.

Siano $P\xi, P\eta$ due assi (generalmente obliqui) coincidenti con le tangenti suddette e siano ξ, η le coordinate di un punto di π rispetto a codesti assi; le coordinate di (ξ, η) rispetto agli assi ortogonali ai quali è riferita la superficie sono date, per le (1), dalle formole:

$$(2) \quad x = x_0 + \frac{\xi}{\sqrt{1+p^2}}, \quad y = y_0 + \frac{\eta}{\sqrt{1+q^2}}, \quad z = \frac{p\xi}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{q\eta}{\sqrt{1+q^2}}.$$

Il punto (ξ, η) descriva su π una curva chiusa σ contenente P e infinitesima in tutte le dimensioni; intenderemo, nel seguito, che i calcoli siano limitati ai termini del primo ordine rispetto agli infinitesimi ξ, η omettendosi anche l'indicazione dei termini di ordine superiore. In tale ordine di approssimazione la curva σ si può considerare, per le (1), come appartenente a Σ .

Siano X, Y, Z i coseni di direzione della normale a Σ in P , si ha:

$$(3) \quad XdX + YdY + ZdZ = 0.$$

I coseni di direzione della normale a Σ nel punto (ξ, η) di σ sono dati, per le (2), dalle formule seguenti, ove Δ deve determinarsi quadrando e sommando membro a membro:

$$(4) \quad \begin{cases} X' = \frac{X + dX}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \left(X + \frac{\xi}{\sqrt{1+p^2}} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\eta}{\sqrt{1+q^2}} \frac{\partial X}{\partial y} \right) \\ Y' = \frac{Y + dY}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \left(Y + \frac{\xi}{\sqrt{1+p^2}} \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\eta}{\sqrt{1+q^2}} \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \\ Z' = \frac{Z + dZ}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \left(Z + \frac{\xi}{\sqrt{1+p^2}} \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\eta}{\sqrt{1+q^2}} \frac{\partial Z}{\partial y} \right). \end{cases}$$

Risulta:

$$\Delta = \sqrt{1 + 2(XdX + YdY + ZdZ) + \dots}$$

e, per la (3) si conclude che è $\Delta = 1$.

I coseni di direzione della tangente alla curva σ in (ξ, η) sono, per le (2):

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \frac{d\xi}{d\sigma}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+q^2}} \frac{d\eta}{d\sigma}, \quad \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \frac{d\xi}{d\sigma} + \frac{q}{\sqrt{1+q^2}} \frac{d\eta}{d\sigma}.$$

In conseguenza, supposto che σ sia percorsa in senso concorde alla rotazione da $P\xi$ a $P\eta$, e che la normale n a σ che è tangente a Σ sia

volta verso l'interno di σ , la retta n ha i coseni di direzione uguali ai minori della matrice:

$$\left\| \begin{array}{ccc} X' & Y' & Z' \\ \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \frac{d\xi}{d\sigma} & \frac{1}{\sqrt{1+q^2}} \frac{d\eta}{d\sigma} & \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \frac{d\xi}{d\sigma} + \frac{q}{\sqrt{1+q^2}} \frac{d\eta}{d\sigma} \end{array} \right\|.$$

Indicando con ϑ la deviazione si avrà:

$$\text{sen } \vartheta = \left| \begin{array}{ccc} X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \\ \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \frac{d\xi}{d\sigma} & \frac{1}{\sqrt{1+q^2}} \frac{d\eta}{d\sigma} & \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \frac{d\xi}{d\sigma} + \frac{q}{\sqrt{1+q^2}} \frac{d\eta}{d\sigma} \end{array} \right|$$

ovvero, tenuto conto delle (4):

$$(5) \quad \text{sen } \vartheta = \left| \begin{array}{cc} X & Y \\ \frac{\xi}{\sqrt{1+p^2}} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\eta}{\sqrt{1+q^2}} \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\xi}{\sqrt{1+p^2}} \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\eta}{\sqrt{1+q^2}} \frac{\partial Y}{\partial y} \\ \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \frac{d\xi}{d\sigma} & \frac{1}{\sqrt{1+q^2}} \frac{d\eta}{d\sigma} \\ Z & \\ \frac{\xi}{\sqrt{1+p^2}} \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\eta}{\sqrt{1+q^2}} \frac{\partial Z}{\partial y} & \\ \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \frac{d\xi}{d\sigma} + \frac{q}{\sqrt{1+q^2}} \frac{d\eta}{d\sigma} & \end{array} \right|.$$

Il prodotto $\text{sen } \vartheta d\sigma$ è della forma $Pd\xi + Qd\eta$ e differisce da $\vartheta d\sigma$ per termini di ordine superiore al primo rispetto a $d\xi, d\eta$. Si avrà dunque:

$$(6) \quad \int_{\sigma} \vartheta d\sigma = \int_{\sigma} Pd\xi + Qd\eta = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta$$

intendendo che l'integrale doppio sia esteso all'area $\delta\sigma$ racchiusa dalla curva σ .

Convien qui ricordare le note espressioni di X, Y, Z in funzione di

p, q e le formule fondamentali della teoria delle superficie che esprimono le derivate di X, Y, Z mediante le derivate di $f(x, y)^{(1)}$; si ha:

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{1}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} [pqs - (1+q^2)r] \\ \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{1}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} [pqr - (1+p^2)s] \\ \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{1}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} \{ [pqs - (1+q^2)r]p + [pqr - (1+p^2)s]q \}. \end{cases}$$

Per $\frac{\partial X}{\partial y}, \frac{\partial Y}{\partial y}, \frac{\partial Z}{\partial y}$ si hanno formule analoghe.

Dalla (5) si deduce agevolmente:

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} = \frac{1}{\sqrt{(1+p^2)(1+q^2)}\sqrt{1+p^2+q^2}} \begin{vmatrix} -p & -q & 1 \\ \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial x} \\ 0 & 1 & q \end{vmatrix}.$$

Tenendo conto delle (7) e sommando con l'ultima colonna la prima e la seconda rispettivamente moltiplicate per p e per q si ottiene:

$$(8) \quad \frac{\partial Q}{\partial \xi} = \frac{1}{(1+p^2+q^2)^2 \sqrt{(1+p^2)(1+q^2)}} \begin{vmatrix} -p & -q & 1+p^2+q^2 \\ pqs - (1+q^2)r & pqr - (1+p^2)s & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{pqs - (1+q^2)r}{(1+p^2+q^2)\sqrt{(1+p^2)(1+q^2)}}.$$

Con analoghi calcoli si trova:

$$(9) \quad \frac{\partial P}{\partial \eta} = - \frac{pqs - (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)\sqrt{(1+p^2)(1+q^2)}}.$$

È noto che la curvatura media H della superficie è data da:

$$H = \frac{2pqs - (1+p^2)t - (1+q^2)r}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(1) Le (7) si ottengono agevolmente combinando le formule (II) p. 117 delle *Lezioni di geometria differenziale* del BIANCHI [2^a ed., Pisa 1902, vol. I] con le formule fondamentali relative alle coordinate cartesiane ortogonali (ibid., p. 144).

percib, per le (8), (9) e la (6) si ha:

$$(10) \quad \int_{\sigma} \vartheta d\sigma = H \iint \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{\sqrt{(1+p^2)(1+q^2)}} d\xi d\eta$$

Ma, per le (2):

$$dx = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} d\xi, \quad dy = \frac{1}{\sqrt{1+q^2}} d\eta$$

onde la (10) diviene:

$$\int_{\sigma} \vartheta d\sigma = H \iint \sqrt{1+p^2+q^2} dx dy = H \delta\sigma.$$

Si ha dunque:

$$\frac{\int_{\sigma} \vartheta d\sigma}{\delta\sigma} = H$$

conformemente al teorema enunciato.

Matematica. — *Sur les intégrales de S. Lie.* Nota di G. PFEIFFER, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

La relation:

$$(1) \quad \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q, \varphi_{q+1}) = 0,$$

$$(2) \quad \varphi_i \equiv \varphi_i(x_1, \dots, x_n, \zeta, c_1, \dots, c_h),$$

Φ , fonction arbitraire de ses arguments,

$$(3) \quad c_1, c_2, \dots, c_h, \text{ constantes arbitraires,}$$

$$(4) \quad \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q, \varphi_{q+1}, \text{ fonctions, indépendantes par rapport aux } x_1, x_2, x_n, \zeta,$$

au cas, que dans le système des fonctions:

$$(5) \quad \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q, \varphi_{q+1}$$

(1) Nella seduta del 2 marzo 1930.

le nombre s des paramètres essentiels :

$$(6) \quad b_1, b_2, \dots, b_s, \\ b_i = \omega_i(c_1, \dots, c_h), \dots, b_s = \omega_s(c_1, \dots, c_h)$$

ne surpasse pas le nombre $n - q$:

$$(7) \quad s \leq n - q,$$

présente l'intégrale de S. Lie de la classe q d'une équation ou d'un système complet d'un certain nombre m d'équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue.

Il est pratiquement important de résoudre les questions suivantes :

« De quelle manière, d'après les fonctions données (5), peut-on constituer des critères, concernant seulement les fonctions (5) et permettant de juger :

« A) la relation (1), est-elle l'intégrale de S. Lie de la classe q ?

« et

« B) quand la relation (1) est l'intégrale de S. Lie, quel est le nombre m d'équations du système complet correspondant? ⁽¹⁾ ».

La question A) se résout par les recherches de L. Bianchi ⁽²⁾, la question B) par nos recherches ⁽³⁾.

L. Bianchi, ayant défriché le critérium connu de S. Lie ⁽⁴⁾, est venu au théorème ⁽⁵⁾, qui appliqué aux fonctions (5) donne le résultat :

« Si le rang de la matrice fonctionnelle, relative aux constantes c_1, c_2, \dots, c_h , des fonctions (5) et de leurs dérivées par rapport aux x_1, x_2, \dots, x_n, z , jusqu'à l'ordre $b - 1$, est égal à s , alors il y a au groupe des fonctions (5) s paramètres essentiels (6). La relation (1) est l'intégrale de S. Lie de la classe q si $s \leq n - q$ ».

En acceptant la condition (7), passons à la question B).

Nous devrions transformer les fonctions (5) aux paramètres (6), mais, pour simplifier l'écriture, nous prendrions, que les constantes (3) sont essentielles, et, par conséquent, $s = h$:

$$(8) \quad h \leq n - q.$$

(1) Le nombre m peut être l'unité.

(2) L. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni*. Bologna, 1928, pp. 28-37.

(3) G. PFEIFFER, *Sur les intégrales des équations et des systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue, qui possèdent les intégrales de S. Lie*. « C.-R. », 1929, t. 189, p. 1228.

(4) S. LIE, *Theorie der Transformationsgruppen*. Erster Abschnitt, Leipzig, 1888, p. 13; A. FORSYTH, *Theory of differential equations*. Vol. V, Cambridge, 1906, p. 192.

(5) Loc. cit., p. 36.

Ayant éliminé, par différentiation, dans la relation (1) la fonction arbitraire Φ , nous parviendrons, en faisant la supposition:

$$(9) \quad u = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q, \varphi_{q+1})}{D(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, x_q)} \equiv 0, \quad x_0 = \zeta,$$

qui ne restreint pas la généralité des raisonnements, au système des $n - q$ équations linéaires:

$$(10) \quad \begin{cases} p_k = \alpha_q^k p_q + \alpha_{q-1}^k p_{q-1} + \dots + \alpha_1^k p_1 - \alpha_0^k \\ = F_k(x_1, \dots, x_n, \zeta, c_1, \dots, c_h, p_1, \dots, p_q), \\ k = q + 1, q + 2, \dots, n; \end{cases}$$

$$(11) \quad \alpha_j^k = \frac{\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q, \varphi_{q+1})}{D(x_0, \dots, x_{j-1}, x_k, x_{j+1}, \dots, x_q)}}{\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q, \varphi_{q+1})}{D(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, x_q)}}, \\ j = 0, 1, \dots, q.$$

Admettons, que le rang de la matrice fonctionnelle, relative aux constantes c_1, c_2, \dots, c_h , des fonctions:

$$(12) \quad F_{q+1}, F_{q+2}, \dots, F_n$$

est égal à ρ : alors un, quelques-uns des déterminants:

$$(13) \quad \frac{D(F_{j_1}, F_{j_2}, \dots, F_{j_\rho})}{D(c_{g_1}, c_{g_2}, \dots, c_{g_\rho})}, \\ j_1, j_2, \dots, j_\rho, \text{ nombres de la suite } q + 1, q + 2, \dots, n, \\ g_1, g_2, \dots, g_\rho, \text{ nombres de la suite } 1, 2, \dots, h,$$

ou tous sont différents de zéro; les déterminants:

$$(14) \quad \frac{D(F_{\tau_1}, F_{\tau_2}, \dots, F_{\tau_\nu})}{D(c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_\nu})}, \\ \rho < \nu \leq h, \\ \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\nu, \text{ nombres de la suite } q + 1, q + 2, \dots, n, \\ i_1, i_2, \dots, i_\nu, \text{ nombres de la suite } 1, 2, \dots, h,$$

sont nuls.

En résolvant celles des équations:

$$(15) \quad p_{j_1} = F_{j_1}, p_{j_2} = F_{j_2}, \dots, p_{j_\rho} = F_{j_\rho}$$

du système (10), pour lesquelles :

$$(16) \quad \frac{D(F_{j_1}, F_{j_2}, \dots, F_{j_p})}{D(c_{g_1}, c_{g_2}, \dots, c_{g_p})} = 0,$$

par rapport aux constantes :

$$(17) \quad c_{g_1}, c_{g_2}, \dots, c_{g_p},$$

après la substitution de leurs expressions dans les équations restantes (10) nous arriverons au système complet de

$$(18) \quad m = n - q - p$$

équations aux dérivées partielles du premier ordre.

D'après nos recherches ⁽¹⁾, les hypothèses : qu'un, quelques-uns ou tous les déterminants (13) sont différents de zéro et que les déterminants (14) sont nuls, peuvent être remplacées par les conditions suivantes, concernant seulement les fonctions (5) : une, quelques-unes ou toutes les expressions :

$$(19) \quad \left[\frac{D \left(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial c_{g_1}}, \dots, \frac{\partial \varphi_{\lambda_p}}{\partial c_{g_p}} \right)}{D(x_0, x_1, \dots, x_q, x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_p})} \right]$$

j_1, j_2, \dots, j_p , nombres de la suite $q+1, q+2, \dots, n$,
 g_1, g_2, \dots, g_p , nombres de la suite $1, 2, \dots, h$,
 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, combinaisons avec répétitions p à p des $q+1$ éléments $1, 2, \dots, (q+1)$,

sont différentes de zéro; les expressions :

$$(20) \quad \left[\frac{D \left(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial c_{i_1}}, \frac{\partial \varphi_{\lambda_2}}{\partial c_{i_2}}, \dots, \frac{\partial \varphi_{\lambda_v}}{\partial c_{i_v}} \right)}{D(x_0, x_1, \dots, x_q, x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, \dots, x_{\tau_v})} \right],$$

$p < v \leq h$,
 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_v$, nombres de la suite $q+1, q+2, \dots, n$,
 i_1, i_2, \dots, i_v , nombres de la suite $1, 2, \dots, h$,
 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_v$, combinaisons avec répétitions v à v des $q+1$ éléments $1, 2, \dots, (q+1)$,

sont nulles.

(1) G. PFEIFFER, *Sur les intégrales des équations et des systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue, qui possèdent les intégrales de S. Lie.* « C.-R. », 1929, t. 189, p. 1228.

Le symbole $\left[\left[\begin{array}{c} \\ \end{array} \right] \right]$ indique, qu'on doit prendre la somme des Jacobiens indiqués pour toutes les permutations avec répétitions des éléments $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$

En définitive nous parvenons à la conclusion :

« Si dans les expressions (20) $v = h, h-1, \dots, (p+1)$ il n'y en a aucune différente de zéro et dans (19) il y en a, alors après l'élimination, par différentiation, dans la relation (1) de la fonction arbitraire Φ et des constantes arbitraires (3), essentielles pour les fonctions (5), nous obtenons un système complet de :

$$(21) \quad m = n - q - p$$

équations au dérivées partielles du premier ordre. Dans son intégrale complète d'après l'inégalité

$$(22) \quad \left[\left[\frac{D \left(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial c_{g_1}}, \frac{\partial \varphi_{\lambda_2}}{\partial c_{g_2}}, \dots, \frac{\partial \varphi_{\lambda_p}}{\partial c_{g_p}} \right)}{D(x_0, x_1, \dots, x_q, x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_p})} \right] \right] \equiv 0,$$

les constantes (3), qui ne figurent pas dans le groupe:

$$(23) \quad c_{g_1}, c_{g_2}, \dots, c_{g_p},$$

se présentent comme superflues; leur nombre est:

$$(24) \quad h - p.$$

Il n'y a pas des constantes superflues, si:

$$(25) \quad p = h.$$

APPLICATIONS.

Après avoir traité le cas général nous voulons appeler l'attention sur quelques cas particuliers.

Posons $q = 0$; alors l'équation (1), se réduit à

$$(1') \quad \Phi(\varphi) = 0,$$

ou, ce qui est la même chose, à

$$(2') \quad \Phi(x_1, \dots, x_n, \chi, c_1, \dots, c_h) = \text{const.},$$

et (8) et (9) deviennent

$$(3') \quad h < n,$$

$$(4') \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial \chi} \equiv 0,$$

Les constantes c_1, c_2, \dots, c_b étant censées essentielles, le rang de la matrice fonctionnelle, relative à celles-ci, de la fonction φ et ses dérivées par rapport aux $x_1, x_2, \dots, x_n, \zeta$, jusqu'à l'ordre $h-1$, est égal à b .

Les expressions (19), (20) prennent l'aspect:

$$(5') \quad \frac{D\left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial c_{i_1}}, \frac{\partial \varphi}{\partial c_{i_2}}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial c_{i_b}}\right)}{D(\zeta, x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, \dots, x_{\tau_b})} \\ \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_b, \text{ nombres de la suite } 1, 2, \dots, n, \\ i_1, i_2, \dots, i_b, \text{ nombres de la suite } 1, 2, \dots, b.$$

Si dans l'intégrale (1') il n'y a pas des constantes arbitraires superflues, alors en vertu des (25), (22):

$$(6') \quad \frac{D\left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial c_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial c_2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial c_b}\right)}{D(\zeta, x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, \dots, x_{\tau_b})} = 0, \\ \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_b, \text{ quelques nombres de la suite } 1, 2, \dots, n.$$

D'après (21) la relation (1') est l'intégrale d'un système de

$$(7') \quad m = n - b$$

équations aux dérivées partielles du premier ordre; elle est l'intégrale d'une seule équation, quand:

$$(8') \quad \begin{cases} m = n - b = 1, \\ b = n - 1. \end{cases}$$

De ce qui a été dit plus haut, on tire la conclusion importante:

« La relation:

$$(9') \quad \Phi(\varphi) = 0,$$

$$(10') \quad \varphi(x_1, \dots, x_n, \zeta, c_1, \dots, c_{n-1}) = \text{const.}$$

est l'intégrale complète, sans constantes arbitraires superflues, d'une seule équation aux dérivées partielles du premier ordre, si:

$$(11') \quad \frac{D\left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial c_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial c_2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial c_{n-1}}\right)}{D(\zeta, x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)} = 0, \\ k, \text{ un des nombres } 1, 2, \dots, n.$$

La condition (11') avait été signalée par nous depuis longtemps⁽¹⁾; elle était réduite à la forme⁽²⁾:

$$(12') \quad \frac{D \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_{k-1}}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_{k+1}}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{array} \right\}}{D(c_1, c_2, \dots, c_{n-1})} \equiv 0,$$

k , un des nombres $1, 2, \dots, n$.

Meccanica. — *Intorno ai carichi di punta per aste a momento d'inerzia variabile con discontinuità.* Nota di G. KRALL, presentata⁽³⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Tra i problemi di autovalori che si presentano in tecnica, quelli concernenti la determinazione dei carichi cosiddetti *critici* o *di punta* hanno interesse cospicuo sotto vari punti di vista. I quali sono ben noti, e tanto, che non è certo il caso di richiamarli qui in modo specifico.

Ordinariamente, la risoluzione di codesti problemi è affidata all'integrazione di un'equazione differenziale del quarto ordine, autoaggiunta, lineare ed omogenea, contenente un parametro da determinare con rispetto ad assegnate condizioni limiti. Oppure, quando tale integrazione sia difficilmente accessibile, a considerazioni di *estremo*, da perseguire coi metodi diretti del calcolo delle variazioni, concernenti un certo integrale rappresentativo della energia totale del sistema.

Del metodo più moderno e più comprensivo per la trattazione di problemi d'autovalori, vogliamo alludere alla teoria delle equazioni integrali, non è ancora rilevante il partito pratico che se ne è tratto in questo campo, se si prescinde da alcune questioni di esistenza, caratterizzazioni qualitative e dimostrazioni di convergenza di procedimenti per approssimazioni successive, quest'ultime, assai note agli ingegneri.

Or noi ci proponiamo di dimostrare qui, come la teoria nominata fornisca criteri eccellenti, fors'anche migliori di quelli prima ricordati, quando si vogliono conseguire apprezzamenti numerici. Ed a tale intento, riservando ad una prossima Nota la trattazione sistematica e completa della quistione,

(1) G. PFEIFFER, *Sur les conditions, qui expriment, que les intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre sont complètes.* «Bull. de l'Acad. des Sciences de l'Ukraine», t. II, f. 1, pp. 6-17.

(2) Ibidem, p. 14.

(3) Nella seduta del 2 marzo 1930.

perverremo considerando sotto due diversi aspetti, quello ordinario e quello suindicato, il caso notevole dell'effetto di una « intaccatura » (discontinuità finita del momento d'inerzia) in un'asta caricata di punta. Con che risulterà come, l'impostare certi problemi particolari sotto un punto di vista generale, porti talvolta alla soluzione con maggiore agilità che non si raggiunga, trattandoli per quel che effettivamente sono.

Consideriamo dunque un'asta di lunghezza assegnata L , modulo d'elasticità E , momento d'inerzia J , sollecitata da uno sforzo assiale Π .

È allora noto che, ove con $w = w(x)$ si indichi la deformata dell'asse geometrico, in funzione della coordinata x contata su questo (in condizione naturale), l'equazione che la determina si scrive

$$(1) \quad \frac{d^2}{dx^2} \left(EJ(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \frac{d}{dx} \left(\Pi \frac{dw}{dx} \right) = 0$$

con condizioni limiti per la w , in generale omogenee, caratteristiche per ogni tipo d'appoggio che si considera. Ad esempio $w = 0$, $\frac{d^2 w}{dx^2} = 0$; oppure $w = 0$, $\frac{dw}{dx} = 0$; agli estremi $x = 0$, $x = L$, per la trave appoggiata liberamente, rispettivamente incastrata. Fissando l'attenzione sul caso di appoggi liberi e d'una sollecitazione costante $\Pi = P$, tutto è ridotto a considerare l'equazione del second'ordine

$$(1a) \quad EJ(x) \frac{d^2 w}{dx^2} + Pw = 0$$

con le condizioni $w = 0$ per $x = 0$ e $x = L$, e quindi a ricercare quei valori di P per i quali effettivamente si hanno soluzioni non nulle di questa equazione soddisfacenti alle condizioni limiti. Tale intento noi vogliamo perseguire caratterizzando la $J = J(x)$ come costante eguale ad J_0 in tutto il campo salvo in un tratto $d = x_2 - x_1$, dove assume un valore J inferiore ad J_0 .

Cambiando coordinate con la posizione $\xi = x : L$, la (1a) si potrà scrivere

$$(1b) \quad \frac{d^2 w}{d\xi^2} + \lambda^2 \rho(\xi) w = 0$$

con $\lambda^2 = P : EJ_0$, $\rho = \rho(\xi)$ funzione definita, ove si ponga $\xi_i = x_i : L$, $i = 1, 2$; $\delta = (x_2 - x_1) : L$, dalle relazioni, $\rho = 1$ nei tratti $0 \leq \xi \leq \xi_1$; $(\xi_1 + \delta) \leq \xi \leq 1$, e $\rho = \frac{J_0}{J} = j^2$ nel tratto $\xi_1 < \xi < (\xi_1 + \delta)$.

Per trovare i valori di λ^2 per cui effettivamente si hanno soluzioni nulle in $\xi = 0$ e $\xi = 1$, basterà allacciare due integrali della (1b) nulli in

$\xi = 0$ rispettivamente in $\xi = 1$ con l'integrale spettante al tratto intermedio; tale allacciamento essendo inteso sia fatto con riguardo alla continuità della funzione w come pure della sua derivata (raccordo con contatto di due archi di linea elastica).

Tali integrali, essendo $w = \rho_1 \sin \lambda \xi$ nel tratto $0 \bar{\xi}_1$, $w = \rho_2 \sin \lambda (1 - \xi)$ nel tratto $\bar{\xi}_2 1$, infine $w = a \sin \lambda j \xi + b \cos \lambda j \xi$ nel tratto intermedio, dove a, b, ρ_1, ρ_2 designano delle costanti arbitrarie, portano a scrivere le equazioni

$$\begin{aligned} \rho_1 \sin \lambda \bar{\xi}_1 &= a \sin \lambda j \bar{\xi}_1 + b \cos \lambda j \bar{\xi}_1, & \rho_2 \sin \lambda (1 - \bar{\xi}_2) &= a \sin \lambda j \bar{\xi}_2 + b \cos \lambda j \bar{\xi}_2 \\ \rho_1 \cos \lambda \bar{\xi}_1 &= a j \cos \lambda j \bar{\xi}_1 - b j \sin \lambda j \bar{\xi}_1, & -\rho_2 \cos \lambda (1 - \bar{\xi}_2) &= a j \cos \lambda j \bar{\xi}_2 - b j \sin \lambda j \bar{\xi}_2 \end{aligned}$$

Eliminando da queste le costanti ρ_1, ρ_2, a, b , si ottiene l'equazione trascendente in λ

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \sin \lambda \bar{\xi}_1 & 0 & \sin \lambda j \bar{\xi}_1 & -\cos \lambda j \bar{\xi}_1 \\ \cos \lambda \bar{\xi}_1 & 0 & j \cos \lambda j \bar{\xi}_1 & j \sin \lambda j \bar{\xi}_1 \\ 0 & \sin \lambda (1 - \bar{\xi}_2) & \sin \lambda j \bar{\xi}_2 & -\cos \lambda j \bar{\xi}_2 \\ 0 & -\cos \lambda (1 - \bar{\xi}_2) & j \cos \lambda j \bar{\xi}_2 & j \sin \lambda j \bar{\xi}_2 \end{vmatrix} = 0.$$

La quale, risolta rispetto a λ , porterà alla determinazione di tutta la successione di valori $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ per cui il raccordo si effettua nella maniera voluta. Detto λ_k uno generico di codesti valori, il carico critico corrispondente sarà $P_k = \frac{EJ_0}{L^2} \lambda_k^2$.

Rinunciando alla ricerca delle radici (pur permettendoci di segnalarne l'interesse) di siffatta equazione, passiamo ora ad indicare la soluzione offerta dalla teoria delle equazioni integrali. Osservando la (1 b) è chiaro che, ove con $G = G(\xi, \eta)$ si indichi la funzione di Green relativa all'operatore $\frac{d^2}{d\xi^2}$, ed alle assegnate condizioni agli estremi, si avrà per la w l'equazione integrale

$$w(\xi) = \lambda^2 \int_0^1 \rho(\eta) G(\xi, \eta) w(\eta) d\eta,$$

la quale, per esser in ogni caso $\rho > 0$, e G un nucleo simmetrico *positivo* e *definito* nel senso di Hilbert-Schmidt, assicura l'esistenza di infiniti valori di λ^2 (autovalori) *reali*, *positivi*, ordinabili secondo la progressione non decrescente $\lambda_1^2 \leq \lambda_2^2 \leq \dots$.

Mirando ora a calcolare il primo autovalore λ_1^2 , che è quello di cui

unicamente si interessa la pratica, rileviamo che, per le condizioni cui soddisfano la G e la ρ , si ha

$$(2) \quad \sum_i \frac{1}{\lambda_i^2} = \int_0^1 \rho(\xi) G(\xi, \xi) d\xi.$$

Ed ancora, se con $\bar{\lambda}_k^2$ si indicano gli autovalori per la ρ costante $= \bar{\rho} = 1$ in tutto il campo, gli autovalori λ_i^2 corrispondenti alla ρ effettiva $\geq \bar{\rho}$ saranno tutti diminuiti, vale a dire si avrà $\lambda_1^2 \leq \bar{\lambda}_1^2$, $\lambda_2^2 \leq \bar{\lambda}_2^2$, ..., $\lambda_k^2 \leq \bar{\lambda}_k^2$, ...

Quindi, valendo per questi una relazione analoga alla (2), noto che sia, trattandosi d'un problema più semplice, $\lambda^2 = \bar{\lambda}_1^2$, si potrà scrivere, per la valutazione numerica (per difetto, quindi a favore delle stabilità) di λ_1^2 , a meno dell'errore $\sum_i (\lambda_i^{-2} - \bar{\lambda}_i^{-2})$,

$$\frac{1}{\lambda_1^2} \cong \frac{1}{\bar{\lambda}_1^2} + \int_0^1 (\rho - \bar{\rho}) G(\xi, \xi) d\xi$$

per ρ qualunque, purchè $\geq \bar{\rho}$.

Nel caso nostro, essendo $(\rho - \bar{\rho}) = 0$ nei tratti $0 \leq \xi_1$ e $\xi_2 \leq 1$, e $(\rho - \bar{\rho}) = (j^2 - 1)$ nel tratto $\xi_1 \leq \xi_2$, avremo, poichè $G(\xi, \xi) = \xi(1 - \xi)$, e $\bar{\lambda}_1^2 = \pi^2$ per $\rho = \bar{\rho} = 1$,

$$\frac{1}{\lambda_1^2} \cong \frac{1}{\pi^2} + (j^2 - 1) \left\{ (1 - \xi_1) \xi_1 \delta + \frac{\delta^2}{2} \left(1 - 2\xi - \frac{2}{3} \delta \right) \right\}$$

è quindi

$$P_1 = \frac{E J_0 \pi^2}{L^2} \left\{ 1 + \frac{J_0 - J}{J} \pi^2 \left[(1 - \xi_1) \xi_1 \delta + \frac{\delta^2}{2} \left(1 - 2\xi - \frac{2}{3} \delta \right) \right] \right\}^{-1}.$$

In particolare, trattandosi d'una intaccatura in mezzeria, per, $\xi_1 = \frac{1 - \delta}{2}$, e δ infinitesimo,

$$P_1 = \frac{E J_0 \pi^2}{L^2} \left\{ 1 + \frac{J_0 - J}{J} \frac{\pi^2}{4} \frac{d}{L} \right\}^{-1},$$

o, press'a poco,

$$P_1 = \frac{E J_0 \pi^2}{\left(L + \frac{J_0 - J}{J} d \right)^2} \quad (1).$$

(1) Quest'ultima espressione di P_1 è stata assegnata dal FÖPPL nella sua *Technische Mechanik*, Bd. III, p. 384 (IX Auflage, Teubner Berlin, 1922) con un ragionamento intuitivo che trova espressiva rappresentazione nella formula stessa.

Meccanica celeste. — *Sulla regolarizzazione del problema generale dei tre corpi.* Nota di W. KUSNETZOFF, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Si mostra in questa Nota come venga fatto con un unica trasformazione canonica di introdurre coordinate e momenti, che si mantengono *tutti* funzioni regolari di un parametro ausiliario τ , al variare del tempo t fra $-\infty$ e $+\infty$, anche se eventualmente si attraversano istanti in cui intervengano urti binari.

Siano x_i, y_i, z_i , ($i = 0, 1, 2$) le coordinate relative dei tre corpi P_0, P_1, P_2 legate dalle relazioni

$$x_0 + x_1 + x_2 = 0, \quad y_0 + y_1 + y_2 = 0, \quad z_0 + z_1 + z_2 = 0.$$

Prendiamo le equazioni differenziali nella forma canonica di H. Poincaré e facciamo la trasformazione di Darboux ponendo $d\tau = Udt$

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_{x_i}}, \quad \frac{dp_{x_i}}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \text{ ecc.} \quad (i = 0, 1)$$

dove

$$H = \frac{T}{U} - \frac{b}{U} = 1.$$

Se il momento risultante delle quantità di moto è diverso da zero, $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ e t sono funzioni regolari del parametro τ per tutto il corso del moto ⁽²⁾.

Le $p_{x_0}, p_{y_0}, p_{z_0}$ hanno un polo del 1° ordine all'istante di un urto fra P_1 e P_2 , nel quale istante avremo $\tau = \tau_0$; ma $p_{x_1}, p_{y_1}, p_{z_1}$ restano regolari. Quando tutte le mutue distanze sono finite e diverse da zero, $p_{x_0}, p_{y_0}, p_{z_0}, p_{x_1}, p_{y_1}, p_{z_1}$, sono funzioni regolari.

Facciamo la trasformazione definita dalle relazioni

$$x_i = 2 \xi_i \zeta_i, \quad y_i = 2 \eta_i \zeta_i, \quad z_i = \zeta_i^2 - \xi_i^2 - \eta_i^2 \quad (i = 0, 1, 2).$$

Ne consegue che

$$(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = (\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2)^2.$$

(1) Nella seduta del 3 novembre 1929.

(2) T. LEVI-CIVITA. « Acta Mathematica », t. 42, 1918, p. 132-138 e p. 140-143.

La formola

$$\zeta_i = \pm \sqrt{\frac{-\chi_i + \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + \chi_i^2}}{2}}$$

mostra che le funzioni ζ_i saranno sempre reali.

Il determinante funzionale della trasformazione sarà

$$\Delta_i = 8 \zeta_i (\zeta_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2).$$

Se ζ_i è diverso da zero ξ_i, η_i, ζ_i saranno anch'esse funzioni regolari della variabile reale τ .

Supponiamo ora che $\zeta_i = 0$ per $\tau = \tau_0$, ma che $\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2 \neq 0$; allora $\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} x_i = 0$, $\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} y_i = 0$ cioè

$$x_i = a_l (\tau - \tau_0)^l + \dots; y_i = b_m (\tau - \tau_0)^m + \dots; \chi_i = c_0 + c_1 (\tau - \tau_0) + c_2 (\tau - \tau_0)^2 + \dots; c_0 \neq 0.$$

Con un calcolo semplice avremo

$$\zeta_i = (\tau - \tau_0)^l \cdot \sqrt{\frac{a_l^2}{4 |c_0|}} \{ 1 + \gamma_{l+1} (\tau - \tau_0) + \dots \}; \xi_i = \sqrt{|c_0|} \{ 1 + \alpha_1 (\tau - \tau_0) + \dots \};$$

$$\eta_i = \frac{b_m}{a_l} \sqrt{|c_0|} (\tau - \tau_0)^{m-l} \{ 1 + \beta_{m-l+1} (\tau - \tau_0) + \dots \}$$

(supponendo $m \geq l$; a conclusione analoga si perviene supponendo $l > m$).

Il signor Sundman⁽¹⁾, nel caso in cui avviene un urto semplice, pervenne ad esprimere le coordinate di Iacobi con serie procedenti secondo le potenze intere della variabile u definita dalla relazione $dt = r du$.

Se in luogo delle coordinate di Iacobi prendiamo x_i, y_i, χ_i e se in luogo della u prendiamo τ , avremo, in corrispondenza ad un urto fra i corpi P_1 e P_2 , le serie seguenti:

$$x_0 = \frac{m_1 + m_2}{2 m_1^2 m_2^2} \varphi_0 (\tau - \tau_0)^2 + \dots; y_0 = \frac{m_1 + m_2}{2 m_1^2 m_2^2} \chi_0 (\tau - \tau_0)^2 + \dots;$$

$$\chi_0 = \frac{m_1 + m_2}{2 m_1^2 m_2^2} \psi_0 (\tau - \tau_0)^2 + \dots;$$

$$x_1 = x_{10} - \frac{1}{2 m_1 m_2^2} \varphi_0 (\tau - \tau_0)^2 + \dots; y_1 = y_{10} - \frac{1}{2 m_1 m_2^2} \chi_0 (\tau - \tau_0)^2 + \dots;$$

$$\chi_1 = \chi_{10} - \frac{1}{2 m_1 m_2^2} \psi_0 (\tau - \tau_0)^2 + \dots;$$

(1) K. F. SUNDMAN, « Acta Mathematica », t. 36, p. 140.

$$x_2 = -x_{10} - \frac{1}{2 m_1^2 m_2} \varphi_0 (\tau - \tau_0)^2 + \dots; \quad y_2 = -y_{10} - \frac{1}{2 m_1^2 m_2} \chi_0 (\tau - \tau_0)^2 + \dots$$

$$z_2 = -z_{10} - \frac{1}{2 m_1^2 m_2} \psi_0 (\tau - \tau_0)^2 + \dots;$$

$$\varphi_0^2 + \chi_0^2 + \psi_0^2 = 1;$$

e serie analoghe per gli altri urti.

Ne ricaviamo

$$\zeta_0 = \pm (\tau - \tau_0) \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{2 m_1^2 m_2}} \sqrt{\frac{1 + \psi_0}{2}} \{ 1 + \gamma_1 (\tau - \tau_0) + \dots \}$$

$$\xi_0 = (\tau - \tau_0) \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{2 m_1^2 m_2}} \left\{ \frac{\frac{1}{2} \varphi_0}{\sqrt{\frac{1 + \psi_0}{2}}} + \alpha_1 (\tau - \tau_0) + \dots \right\}$$

$$\eta_0 = (\tau - \tau_0) \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{2 m_1^2 m_2}} \left\{ \frac{\frac{1}{2} \chi_0}{\sqrt{\frac{1 + \psi_0}{2}}} + \beta_1 (\tau - \tau_0) + \dots \right\}$$

supponendo $1 + \psi_0 \neq 0$. Le $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ sono evidentemente regolari in causa delle ineguaglianze $\lim_{\tau=\tau_0} (\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) \neq 0$ e $\lim_{\tau=\tau_0} (\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2) \neq 0$.

Se $1 + \psi_0 = 0$ avremo $\varphi_0 = 0$ e $\chi_0 = 0$.

$$x_0 = a_{l+2} (\tau - \tau_0)^{l+2} + \dots; \quad y_0 = b_{m+2} (\tau - \tau_0)^{m+2} + \dots;$$

$$z_0 = \frac{m_1 + m_2}{2 m_1^2 m_2} \psi_0 (\tau - \tau_0)^2 + \dots = c_2 (\tau - \tau_0)^2 + \dots;$$

$$\zeta_0 = \sqrt{\frac{a_{l+2}}{4 |c_2|}} (\tau - \tau_0)^{l+1} + \dots = \gamma_{l+1} (\tau - \tau_0)^{l+1} + \dots;$$

$$\xi_0 = \frac{a_{l+2}}{2 \gamma_{l+1}} (\tau - \tau_0) + \dots; \quad \eta_0 = \frac{b_{m+2}}{2 \gamma_{l+1}} (\tau - \tau_0)^{m-l+1} + \dots;$$

supponendo $m \geq l$; a conclusione analoga si perviene ove sia invece $l > m$.

Ne concludiamo che le ξ_i, η_i, ζ_i saranno sempre funzioni regolari del parametro reale τ e che per un urto fra P_1 e P_2 ξ_0, η_0 e ζ_0 saranno divisibili per $(\tau - \tau_0)$.

Le variabili coniugate $p_{\xi_i}, p_{\eta_i}, p_{\zeta_i}$ si trasformano notoriamente mediante le formole

$$p_{\xi_i} = p_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_i} + p_{y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \xi_i} + p_{z_i} \frac{\partial z_i}{\partial \xi_i} \text{ ecc.} \quad (i = 0, 1);$$

cioè $p_{\xi_i}, p_{\eta_i}, p_{\zeta_i}$ sono funzioni regolari del parametro reale τ per un urto dei corpi P_1 e P_2 .

Per un urto dei corpi P_0 e P_2 si considerano le stesse equazioni; per regolarizzare un urto dei corpi P_0, P_1 prendesi un altro sistema canonico analogo (per esempio in $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$).

Ma formiamo ora un solo sistema canonico avente integrali ovunque regolari.

Le equazioni dei vincoli assumono l'aspetto

$$\begin{aligned} \xi_0 \zeta_0 + \xi_1 \zeta_1 + \xi_2 \zeta_2 &= 0, & \eta_0 \zeta_0 + \eta_1 \zeta_1 + \eta_2 \zeta_2 &= 0, \\ \zeta_0^2 + \zeta_1^2 + \zeta_2^2 - \xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \eta_0^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2 &= 0. \end{aligned}$$

I due vettori (ξ_0, ξ_1, ξ_2) e (η_0, η_1, η_2) di lunghezze ξ e η sono allora perpendicolari al vettore $(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2)$ di lunghezza ζ , le tre lunghezze risultando legate dalla relazione $\zeta^2 = \xi^2 + \eta^2$.

A quest'ultima si possono sostituire le espressioni parametriche

$$\xi = \zeta \cdot \cos i, \quad \eta = \zeta \sin i$$

dopodichè, introducendo gli angoli di Eulero possiamo scrivere

$$(1) \quad \xi_0 = \rho \cos i (\cos \kappa \cos \mu - \sin \kappa \sin \mu \cos \lambda)$$

$$(2) \quad \xi_1 = \rho \cos i (\sin \kappa \cos \mu + \cos \kappa \sin \mu \cos \lambda)$$

$$(3) \quad \xi_2 = \rho \cos i \sin \mu \sin \lambda$$

$$(4) \quad \eta_0 = \rho \sin i (\cos \kappa \cos \nu - \sin \kappa \sin \nu \cos \lambda)$$

$$(5) \quad \eta_1 = \rho \sin i (\sin \kappa \cos \nu + \cos \kappa \sin \nu \cos \lambda)$$

$$(6) \quad \eta_2 = \rho \sin i \sin \nu \sin \lambda$$

$$(7) \quad \zeta_0 = \rho \sin \lambda \sin \kappa$$

$$(8) \quad \zeta_1 = -\rho \sin \lambda \cos \kappa$$

$$(9) \quad \zeta_2 = \rho \cos \lambda.$$

ρ^2 è il semiperimetro del triangolo dei tre corpi e dunque è diverso da zero ⁽¹⁾.

I nostri ragionamenti saranno nel seguito esclusivamente rivolti alle funzioni analitiche reali e regolari su tutto l'asse reale del piano complesso della variabile τ , cioè per tutto il corso del moto.

Per abbreviare, quando non si dica esplicitamente il contrario, intenderemo semplicemente per funzione regolare una funzione che soddisfi a queste condizioni.

(1) K. F. SUNDMAN, *Recherches sur le problème des trois corps*. « Acta Societatis Fennicae », Vol XXXIV, 1907, § 12.

Abbiamo evidentemente

$$\rho = \sqrt{\zeta_0^2 + \zeta_1^2 + \zeta_2^2}.$$

Ora poichè $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2$ sono funzioni regolari e poichè ρ è diverso da zero ρ sarà funzione regolare.

Le altre funzioni $i, \kappa, \lambda, \mu, \nu$ compaiono sempre sotto i segni delle funzioni trigonometriche \sin e \cos .

Dimostriamo allora il lemma seguente:

Se $\sin \varphi$ e $\cos \varphi$ sono funzioni regolari φ sarà anche una funzione regolare.

Per designare una serie di Taylor, che proceda per le potenze di $(\tau - \tau_0)$, ci serviremo con Weierstrass del simbolo $P(\tau - \tau_0)$.

Se per $\tau = \tau_0$ $\varphi = \varphi_0$ noi possiamo scrivere

$$\sin(\varphi - \varphi_0) = \sin \varphi \cdot \cos \varphi_0 - \cos \varphi \cdot \sin \varphi_0 = P(\tau - \tau_0)$$

Ma la derivata della funzione $\sin(\varphi - \varphi_0) = P_1(\varphi - \varphi_0) \cos(\varphi - \varphi_0)$ è diverso da zero per $\varphi = \varphi_0$.

Allora

$$\varphi - \varphi_0 = P_2[\sin(\varphi - \varphi_0)] = P_2(\tau - \tau_0) \quad \text{c. d. d.}$$

Dalle formole (1), (2) e (3) si deduce

$$\cos i = \pm \sqrt{\left(\frac{\xi_0}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\xi_1}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\xi_2}{\rho}\right)^2}$$

e dalle formole (4), (5) e (6) si ha

$$\sin i = \pm \sqrt{\left(\frac{\eta_0}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\eta_1}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\eta_2}{\rho}\right)^2}.$$

Le funzioni

$$\left(\frac{\xi_0}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\xi_1}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\xi_2}{\rho}\right)^2 \quad \text{e} \quad \left(\frac{\eta_0}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\eta_1}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\eta_2}{\rho}\right)^2$$

hanno per reali valori dell'argomento τ soltanto gli infinitesimi d'ordine pari e quindi $\sin i$ e $\cos i$ saranno le funzioni regolari; ma per il lemma dimostrato anche i sarà una funzione regolare.

L'ordine d'un infinitesimo qualsiasi di $\cos i$ è sempre minore ovvero uguale all'infinitesimo corrispondente di $\frac{\xi_i}{\rho}$ onde risulta che

$$\frac{\xi_0}{\rho \cos i}, \quad \frac{\xi_1}{\rho \cos i}, \quad \frac{\xi_2}{\rho \cos i}$$

saranno funzioni regolari siccome

$$\frac{\eta_0}{\rho \operatorname{sen} i}, \quad \frac{\eta_1}{\rho \operatorname{sen} i}, \quad \frac{\eta_2}{\rho \operatorname{sen} i}.$$

Dalle (7), (8) si ha

$$\operatorname{sen} \lambda = \pm \sqrt{\left(\frac{\zeta_0}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\zeta_1}{\rho}\right)^2}$$

e dalla (9) si ha

$$\cos \lambda = \frac{\zeta_2}{\rho}.$$

Per mezzo di queste formole vediamo subito che $\operatorname{sen} \lambda$, $\cos \lambda$ e λ saranno funzioni regolari.

Evidentemente

$$\frac{\zeta_0}{\rho \operatorname{sen} \lambda}, \quad \frac{\zeta_1}{\rho \operatorname{sen} \lambda}$$

sono pure funzioni regolari e dalle formole

$$\operatorname{sen} \kappa = \frac{\zeta_0}{\rho \operatorname{sen} \lambda}, \quad \cos \kappa = -\frac{\zeta_1}{\rho \operatorname{sen} \lambda}$$

deducesi che lo stesso può dirsi di $\operatorname{sen} \kappa$, $\cos \kappa$ e κ .

Possiamo scrivere le (1), (2) e (3) così

$$(10) \quad \cos \kappa \cos \mu - \operatorname{sen} \kappa \operatorname{sen} \mu \cos \lambda = \frac{\xi_0}{\rho \cos i}$$

$$(11) \quad \operatorname{sen} \kappa \cos \mu + \cos \kappa \operatorname{sen} \mu \cos \lambda = \frac{\xi_1}{\rho \cos i}$$

$$(12) \quad \operatorname{sen} \mu \cdot \operatorname{sen} \lambda = \frac{\xi_2}{\rho \cos i}.$$

Ora moltiplichiamo i due membri della (10) per $\cos \kappa$, i due membri della (11) per $\operatorname{sen} \kappa$ e sommiamo i risultati, troveremo

$$\cos \mu = \frac{\xi_0}{\rho \cos i} \cos \kappa + \frac{\xi_1}{\rho \cos i} \operatorname{sen} \kappa.$$

D'altronde moltiplichiamo i due membri della (10) per $-\operatorname{sen} \kappa \cos \lambda$, i due membri della (11) per $\cos \kappa \cos \lambda$ e i due membri della (12) per $\operatorname{sen} \lambda$ e sommiamo i risultati, troveremo

$$\operatorname{sen} \mu = -\frac{\xi_0}{\rho \cos i} \operatorname{sen} \kappa \cos \lambda + \frac{\xi_1}{\rho \cos i} \cos \kappa \cos \lambda + \frac{\xi_2}{\rho \cos i} \operatorname{sen} \lambda.$$

Ne risulta che $\cos \mu$, $\sin \mu$ e μ sono funzioni regolari.

In modo analogo dimostriamo che $\cos \nu$, $\sin \nu$ e ν sono funzioni regolari.

Dalle formole

$$p_p = p_{\xi_0} \frac{\partial \xi_0}{\partial p} + p_{\eta_0} \frac{\partial \eta_0}{\partial p} + p_{\zeta_0} \frac{\partial \zeta_0}{\partial p} + p_{\xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial p} + p_{\eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial p} + p_{\zeta_1} \frac{\partial \zeta_1}{\partial p} \text{ ecc.}$$

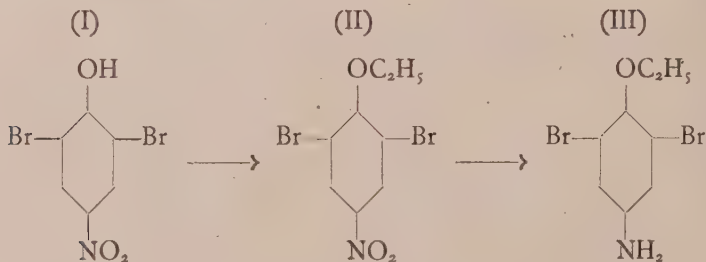
e dalle formole analoghe per gli urti dei corpi $P_0 P_1$ si trae immediatamente che p_p , p_i , p_x , p_λ , p_μ e p_ν sono funzioni regolari.

Osserviamo in fine che le equazioni differenziali non sono in generale olomorfe per gli istanti degli urti.

Chimica. — *2-6-dibromo-fenetidina e 3-5-dibromo-fenetidina* ⁽¹⁾.
Nota di G. BARGELLINI e LYDIA MONTI, presentata ⁽²⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

Dopo avere descritta in una Nota precedente ⁽³⁾ la 2-5-dibromo-fenetidina che non era ancora conosciuta, abbiamo voluto riprendere la 2-6-dibromo-fenetidina e la 3-5-dibromo-fenetidina, che erano già note, allo scopo di preparare alcuni dei loro derivati caratteristici per confrontarli con gli analoghi derivati della 2-5-dibromo-fenetidina.

La 2-6-dibromo-fenetidina è stata preparata dal 2-6-dibromo-4-nitro-fenolo col metodo che era stato descritto da Staedel ⁽⁴⁾ cioè passando per il 2-6-dibromo-4-nitro-fenetolo



Abbiamo anche provato a preparare questa dibromo-fenetidina riducendo il dibromo-4-nitro-fenolo a dibromo-4-ammino-fenolo, condensando

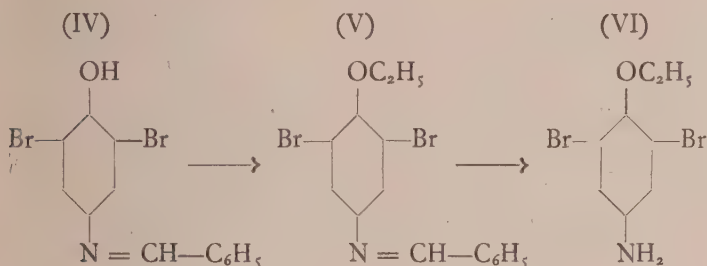
(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 2 marzo 1930.

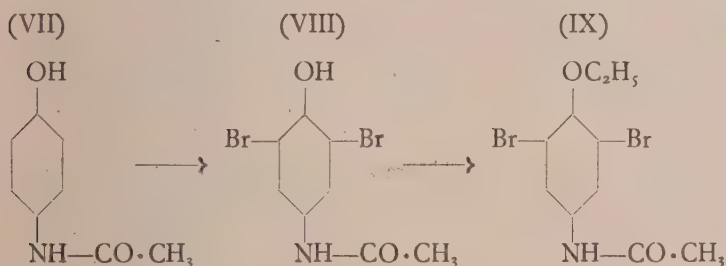
(3) BARGELLINI e GRIPPA, questi « Rendiconti », 1930 (5), p. 489.

(4) STAEDEL, « Ann. », 217, p. 67 (1883).

questo con aldeide benzoica ed etilando poi il prodotto di condensazione ottenuto. Per idrolisi dell'etere etilico si ottiene infine la dibromo-fenetidina cercata, però con rendita molto piccola.



Fra i derivati di questa 2-6-dibromo-fenetidina abbiamo preparato l'acetil-derivato che è identico alla dibromo-fenacetina che Fuchs ⁽¹⁾ aveva ottenuta bromurando l'acetil-p-ammino-fenolo ed etilando poi il derivato bromurato che si forma dapprima



La 3-5-dibromo-fenetidina è stata da noi ripreparata bromurando la fenetidina, come aveva indicato Fuchs (loc. cit.). Abbiamo constatato che essa non si condensa col cloro-dinitro-benzolo, con la benzaldeide, ecc., ed in generale con le sostanze capaci di reagire coi gruppi $-\text{NH}_2$. Questo fatto, analogo a quello che avviene per la 3-5-dicloro-fenetidina ⁽²⁾ va d'accordo con la formula di costituzione di questa sostanza, secondo la quale i due atomi di bromo che stanno in posizione orto-orto al gruppo $-\text{NH}_2$ esercitano su questo un impedimento sterico tale che non è più capace di reagire in maniera normale.

Anche di questa dibromo-fenetidina abbiamo preparati alcuni derivati adatti per meglio caratterizzarla in confronto con i suoi isomeri.

(1) FUCHS, «Monatsh.», 36, p. 113; «C. B.», 1915 (1), p. 1305; «Monatsh.», 38, p. 331; «C. B.», 1918 (1), p. 1018.

(2) BARGELLINI e LEONE, questi «Rendiconti», 1918 (2), p. 399.

PARTE SPERIMENTALE.

2-6-dibromo-fenetidina (formula III). — Si prepara prima il dibromo-p-nitro-fenolo fusibile a 143° (formula I) col metodo indicato da Möhlau e Uhlmann⁽¹⁾ bromurando il p-nitro-fenolo in soluzione acetica con la quantità calcolata di bromo. Il sale di argento di questo 2-6-dibromo-4-nitro-fenolo si riscalda poi per 2-3 ore su bagnomaria a ricadere con una soluzione alcoolica di ioduro di etile in eccesso. Dopo aver separato per filtrazione l'ioduro d'argento, la soluzione alcoolica si fa distillare. Rimane come residuo una massa giallastra di dibromo-p-nitro-fenetolo che si purifica per cristallizzazione dall'alcool. È in cristallini bianchi-giallognoli fusibili a 59° .

Il dibromo-p-nitro-fenetolo (formula II) così ottenuto si riduce infine riscaldandolo in soluzione alcoolica con zolfo e solfuro di sodio. Dopo aver fatto distillare l'alcool, al residuo si aggiunge acqua e si fa distillare in corrente di vapore. Distilla così la 2-6-dibromo-fenetidina che si purifica infine per cristallizzazione dall'etere di petrolio. Fonde a $107-108^{\circ}$ come la 2-6-dibromo-p-fenetidina descritta da Loring Jackson e Fiske⁽²⁾.

	Trovato	Br %	54.02	N %	4.88
per $C_8H_5ONBr_2$	Calcolato	Br %	54.24	N %	4.74.

È insolubile nell'acqua, facilmente solubile nell'alcool, nell'acido acetico, nel benzolo: si scioglie anche nell'etere di petrolio bollente.

Acetil-2-6-dibromo-fenetidina (*2-6-dibromo-fenacetina*) (formula IX). — Per evitare la formazione di un biacetil-derivato, abbiamo preferito preparare questa sostanza sciogliendo la dibromo-fenetidina in benzolo ed aggiungendo la quantità calcolata di cloruro di acetile pure sciolto in benzolo. Si precipita l'acetil-derivato poco solubile e si purifica facendolo cristallizzare dall'alcool diluito. Fonde a 198° come l'acetil-derivato che fu descritto da Fuchs (loc. cit.).

	Trovato	N %	4.25
per $C_{10}H_{11}O_2NBr_2$	Calcolato	N %	4.15.

2-6-dibromo-p-ammino-fenolo. — Il dibromo-p-nitrofenolo fusibile a 143° , sopra rammentato, viene ridotto a dibromo-p-ammino-fenolo riscaldando la sua soluzione alcalina con idrosolfito di sodio, cioè con un metodo

(1) « Ann. », 289 (1896), p. 94.

(2) « Ber. », 35 (1902), p. 1130.

che ci aveva già dato buon risultato nella riduzione del dicloro-*p*-nitro-fenolo (1).

Il dibromo-*p*-ammino-fenolo ottenuto cristallizza dal benzolo bollente in aghetti incolori fusibili a 191-193° come era stato indicato da Möhlau e da molti altri chimici.

1-ossi-2-6-dibromo-2'-4'-dinitro-difenilammina. — Si prepara riscaldando insieme in soluzione alcoolica gr. 3 di dibromo-*p*-ammino-fenolo, gr. 3 di acetato sodico e gr. 2.3 di cloro-dinitro-benzolo. Il prodotto greggio della reazione si purifica facendolo cristallizzare dall'alcool bollente. Si ottiene in filamenti lanosi rossi che fondono a 213-215°.

	Trovato	Br %	36.61	N %	9.87
per $C_{12}H_7O_5N_3Br_2$	Calcolato	Br %	36.92	N %	9.70.

La sostanza si scioglie nell'alcool e nell'acido acetico a caldo, meno nel benzolo.

Piperonal-2-6-dibromo-4-ammino-fenolo. — Si prepara riscaldando a 100° per 2-3 ore (in atmosfera di CO_2) una miscela di gr. 2 di dibromo-*p*-ammino-fenolo e gr. 1.1 di piperonalio. Il prodotto greggio si purifica facendolo cristallizzare dall'alcool bollente. Aghetti un po' giallognoli fusibili a 150-152°.

	Trovato	Br %	40.07	N %	3.77
per $C_{14}H_9O_3NBr_2$	Calcolato	Br %	40.07	N %	3.51.

È insolubile nell'acqua. Si scioglie facilmente nell'alcool, nell'acido acetico ed anche nel benzolo e nell'acetone.

Benziliden-2-6-dibromo-4-ammino-fenolo (formula IV). — Come il prodotto precedente, si prepara riscaldando a 100° per 2-3 ore (in atmosfera di CO_2) quantità equimolecolari di dibromo-*p*-ammino-fenolo e di benzaldeide. Il prodotto greggio della reazione si fa cristallizzare dall'etere di petrolio. Laminette leggermente rosee fusibili a 94-95°.

	Trovato	Br %	45.18	N %	4.18
per $C_{13}H_9ONBr_2$	Calcolato	Br %	45.07	N %	3.95.

La sostanza è insolubile nell'acqua, si scioglie facilmente nell'alcool, nell'acido acetico e nel benzolo: è solubile a caldo nell'etere di petrolio.

Da questo benziliden-2-6-dibromo-4-ammino-fenolo abbiamo potuto ottenere la 2-6-dibromo-fenetidina (formula VI) trasformandolo prima con

(1) BARGELLINI, questi « Rendiconti », 1928 (2), p. 506.

ioduro di etile e KOH nel corrispondente etere etilico (formula V), e idrolizzando poi il prodotto greggio della reazione per riscaldamento con HCl (1 : 1). La 2-6-dibromo-p-fenetidina così ottenuta fonde a 108° come la 2-6-dibromo-p-fenetidina descritta da Loring Jackson e Fiske.

3-5-dibromo-fenetidina. — Invece di prepararla, come l'ottenne Fuchs, bromurando la p-fenetidina in soluzione acetica, abbiamo visto che si può avere con rendita migliore facendo la bromurazione in soluzione cloroformica. Il prodotto greggio della reazione si fa distillare in corrente di vapor d'acqua e infine si cristallizza dall'alcool diluito. Aghetti incolori fusibili a 79° come aveva indicato Fuchs.

	Trovato	Br %	54.06
per $C_8H_9ONBr_2$	Calcolato	Br %	54.24.

È insolubile nell'acqua, si scioglie facilmente nell'alcool, nell'acido acetico e nel benzolo. Non reagisce nè con aldeide benzoica, nè con piperonalio, nè con cloro-dinitro-benzolo.

Acetil-3-5-dibromo-fenetidina (3-5-dibromo-fenacetina). — Si prepara aggiungendo cloruro di acetile in quantità calcolata (o poco più) alla soluzione di dibromo-fenetidina in benzolo⁽¹⁾. Cristallizza dall'alcool diluito in lamelle madreperlacee che cominciano a rammollirsi a 130°: la fusione completa si ha però soltanto a 144°, come aveva indicato Fuchs.

	Trovato	Br %	47.15
per $C_{10}H_{11}O_2NBr_2$	Calcolato	Br %	47.47.

Si scioglie in acqua bollente, è poco solubile in benzolo ed in etere di petrolio; si scioglie facilmente nell'alcool e nell'acido acetico.

Benzoil-3-5-dibromo-fenetidina. — Si prepara facendo agire il cloruro di benzoile in quantità calcolata sulla dibromo-fenetidina sciolta in benzolo. Cristallizza dall'alcool in aghetti bianchi fusibili a 186-188°.

	Trovato	Br %	40.22
per $C_{15}H_{13}O_2NBr_2$	Calcolato	Br %	40.10.

È insolubile nell'acqua, facilmente solubile nell'alcool, nell'acido acetico e nel benzolo.

Vogliamo qui ricordare e ringraziare il dott. Nicola De Filippis che ci ha aiutati nella esecuzione di una parte delle ricerche descritte in questa Nota.

(1) Se invece si fa bollire anche per pochi minuti, la dibromo-fenetidina con anidride acetica, si forma un *biacetil-derivato* fusibile a 91-92°.

Chimica. — *Polisolfuri, solfodiseleniuro e selendisolfuro difenilici.*

Nota ⁽¹⁾ di A. BARONI presentata ⁽²⁾ dal Socio G. BRUNI.

Il problema della costituzione dei polisolfuri, pur essendo stato oggetto di studi da parte di molti autori, è ben lungi dall'essere risolto. I mezzi chimici e chimico-fisici fino ad ora applicati non hanno sortito gli effetti sperati ed hanno permesso di stabilire con certezza solo le formule di costituzione dei mono e disolfuri; per i composti solforati superiori siamo invece ancora nel campo delle ipotesi.

In due Note precedenti ⁽³⁾, in collaborazione col prof. G. R. Levi, io mi occupai di questo problema e riferii gli studi compiuti sui polisolfuri e sulle catene miste di zolfo e selenio col radicale etilico. Furono allora discusse le probabili formule di queste sostanze in base al calcolo della rifrazione molecolare, e fu fatta rilevare l'incertezza delle nostre vedute sul modo con cui gli atomi di zolfo sono legati fra loro nelle diverse catene. Anche lo studio dei polisolfuri e delle catene miste di zolfo e selenio col radicale fenilico (di cui riferisco nella presente Nota) non ha permesso di trarre deduzioni sulla loro costituzione: mi limito perciò alla descrizione di questi composti, alcuni dei quali non erano ancora noti od erano descritti con costanti fisiche incomplete od errate.

Ho creduto di riprendere in primo luogo lo studio dei polisolfuri difenilici già descritti da precedenti autori ⁽⁴⁾ poichè essi mostrano nelle loro caratteristiche delle discontinuità poco plausibili. Così il monosolfuro difenilico è liquido, il disolfuro è solido, mentre il tri- e il tetrasolfuro sarebbero olii gialli. Io invece sono riuscito ad ottenere il trisolfuro allo stato solido sotto forma di grossi cristalli che fondono a 30°; non ho però ancora isolato il tetrasolfuro puro allo stato solido, sia forse per il suo punto di fusione ancor più basso, che per la presenza di zolfo libero proveniente da una parziale decomposizione del prodotto, il che rende il liquido troppo vischioso. A conferma di ciò sta il fatto che il trisolfuro, che si può ottenere anche per riscaldamento del disolfuro con zolfo a 150°, non si lascia cristallizzare dalla massa di reazione appunto per la presenza di zolfo non combinato. Devo poi far notare che il peso specifico del trisolfuro da me

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale e Chimica Fisica della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 16 marzo 1930.

(3) Questi « Rendiconti », fasc. 9, 1929, pp. 772-778 903-906; fasc. 11, 1929, pp. 1019-1024.

(4) BEILSTEIN, 4^a ed., pp. 299, 323, 325.

preparato ($D_4^{20}=1.418$) risulta notevolmente superiore a quello del tetra-solfuro preparato da Otto ⁽¹⁾ che sarebbe $D_4^{14.5}=1.297$, olio giallo di odore spiacevole. Ciò non appare molto probabile perchè il prodotto dovrebbe essere verosimilmente solido oltre che avere un maggior peso specifico.

I metodi di preparazione di questi polisolfuri e delle catene miste di zolfo e selenio, sono sostanzialmente gli stessi usati per i composti col radicale etilico; per i composti semplici di selenio ho invece applicato il metodo di azione del selenio sul bromuro di fenilmagnesio ⁽²⁾. Il punto di fusione del diseleniuro così ottenuto risulta essere 59° invece di 63°.5 dato dagli altri autori; quello del disolfuro 62° invece di 60°.

PARTE SPERIMENTALE. - *Preparazione del disolfuro difenilico.* - Il disolfuro difenilico viene ottenuto facendo gocciolare lentamente gr. 6.12 di cloruro di solforile in una soluzione raffreddata di gr. 10 di fenilmercaptano sciolto in 50 cc. di soda al 10%. A reazione avvenuta il disolfuro viene filtrato e ricristallizzato parecchie volte dall'alcool (gr. 9.3). Il suo punto di fusione è 62°, il rendimento della reazione è del 94 %.

Del disolfuro ho determinato anche il peso specifico, non ancora noto, ottenendo il valore $D_4^{20}=1.353$.

Preparazione del trisolfuro difenilico. - Il metodo da me usato nella preparazione di questo composto è basato sull'azione del cloruro di zolfo SCl_2 sul fenilmercaptano. Questo cloruro di zolfo permette di ottenere una buona resa in trisolfuro evitando la difficile separazione di-trisolfuro che si dovrebbe effettuare usando il cloruro di tionile. Si versano a piccole porzioni gr. 4 di SCl_2 sciolto in 25 cc. di solfuro di carbonio, in una soluzione fortemente raffreddata di gr. 10 di fenilmercaptano pure sciolto in 25 cc. dello stesso solvente. Quando tutto il cloruro di zolfo è stato aggiunto, si evapora il solfuro di carbonio a bagno maria e si raffredda poi l'olio residuo. Da questo si separano poi lentamente dei cristalli che vengono filtrati alla pompa e ricristallizzati dall'etere. Il loro punto di fusione è 30°. Questo prodotto venne analizzato effettuando dei micro Carius e dosando lo zolfo come $BaSO_4$; i risultati analitici sono i seguenti:

sostanza pesata	$BaSO_4$ pesato	S % teorico	S % trovato
0.003628	0.0146	55.52	55.29
0.008485	0.0343	»	55.48

Il trisolfuro difenilico non è quindi liquido, ma un solido, di color giallo chiaro, solubilissimo in alcool ed etere, insolubile in acqua. Il suo peso specifico, non noto in precedenza, è $D_4^{20}=1.418$.

(1) « Journal für praktische Chemie » (2), 37, 208.

(2) TABOURY., « Bull. Soc. Chim. de France » (3), 29, 762; (3), 35, 670; WUYTS., « Bull. Soc. Chim. de France » (4), 5, 407-411.

Preparazione del diseleniuro difenilico. — Il diseleniuro difenilico si ottiene come sottoprodotto nella preparazione del selenofenolo da selenio e bromuro di magnesiofenile; per effetto di reazioni secondarie la reazione dà luogo, oltre a selenofenolo, anche a seleniuro e diseleniuro. Il diseleniuro venne da me ottenuto anche per azione del cloruro di selenio Se_2Cl_2 sul selenofenolo. La reazione che dovrebbe condurre alla formazione di tetraseleniuro, dà per decomposizione del prodotto eventualmente formatosi solo diseleniuro: Se_2Cl_2 agisce perciò semplicemente da condensante.

Ho cercato anche di preparare il triseleniuro difenilico, ma non mi è stato possibile ottenerlo nè per azione dei cloruri di selenio sul selenofenolo, nè per riscaldamento di diseleniuro e selenio.

Il punto di fusione del diseleniuro è 59° mentre altri autori danno $63^\circ.5$; il suo peso specifico è $D_4^{20} = 1.743$ e non era stato precedentemente determinato.

Preparazione del disolfoseleniuro difenilico. — Questo composto si forma versando a goccia a goccia gr. 10.17 di cloruro di selenio Se_2Cl_2 sciolto in 25 cc. di solfuro di carbonio in una soluzione fortemente raffreddata di gr. 10 di tiofenolo pure sciolto in 25 cc. di solfuro di carbonio. A reazione avvenuta si distilla il solfuro di carbonio e si raffredda l'olio residuo: da esso si separano dei cristalli aghiformi rossastri che sono purificati ricristallizzandoli dall'alcool. P. F. $50^\circ-51^\circ$. L'analisi eseguita dosando lo zolfo come BaSO_4 e il selenio allo stato metallico, diede i seguenti risultati:

sostanza pesata	BaSO_4 pesato	Se pesato	S % trovato	Se % trovato
0.004311	0.0067	0.00115	21.34	26.68
0.003148	0.0049	0.00084	21.38	26.58

S % teorico = 21.56, Se % teorico = 21.34. Il peso specifico di questo composto è $D_4^{20} = 1.593$. Questo composto non era stato precedentemente descritto.

Preparazione del diselenosolfuro difenilico. — La preparazione viene fatta analogamente a quella del disolfoseleniuro sostituendo al tiofenolo il selenofenolo e al cloruro di selenio il cloruro di zolfo SCl_2 . Si ottengono dei cristalli giallo chiari che fondono a 55° . L'analisi eseguita nel solito modo diede i seguenti risultati:

sostanza pesata	BaSO_4 pesato	Se % pesato	S % trovato	Se % trovato
0.006851	0.0046	0.00314	9.22	45.83
0.005720	0.0038	0.00262	9.12	45.80

S % teorico 9.31; Se % teorico 45.97. Il peso specifico del diselenosolfuro è $D_4^{20} = 1.873$. Questo prodotto non era stato precedentemente descritto.

Per ciò che riguarda i pesi specifici devo far osservare che i prodotti allo stato solido anche in cristalli ben formati e abbastanza voluminosi tendono a far aderire aria alla loro superficie il che falsa assai facilmente i risultati; per la stessa ragione non si presta il metodo dei liquidi pesanti. Le determinazioni sono perciò state condotte fondendo in precedenza le sostanze nel picnometro stesso, aggiungendo poi l'acqua dopo la solidificazione e facendo infine il vuoto prima di portare a volume.

Riassumendo:

a) Viene dimostrato che il trisolfuro difenilico è solido anziché liquido con p. f. 30°.

b) Vengono corretti i p. f. del diseleniuro e del disolfuro che sono rispettivamente 59° e 62°.

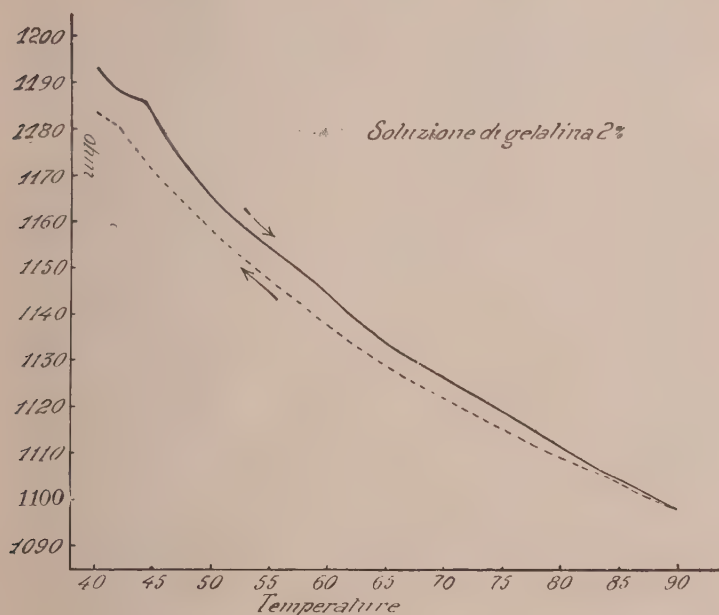
c) Vengono preparati il diselensolfuro e il disolfoseleniuro difenilici, non ancora noti, a p. f. rispettivamente 55° e 50-51°.

d) Sono determinate le seguenti costanti dei diversi composti sopra descritti.

	p. f.	D ₄ ²⁰
(C ₆ H ₅) ₂ S ₂	62°	1.353
(C ₆ H ₅) ₂ S ₃	30°	1.418
(C ₆ H ₅) ₂ Se ₂	59°	1.743
(C ₆ H ₅) ₂ S ₂ Se	50°-51°	1.593
(C ₆ H ₅) ₂ Se ₂ S	55°	1.873

Chimica fisica. — *Isteresi di conduttività elettrica in soluzioni colloidali* ⁽¹⁾. Nota di S. VISCO, presentata ⁽²⁾ dal Socio N. PARAVANO.

Cercavo di stabilire, mediante lo studio del comportamento della conduttività elettrica, la temperatura di coagulazione di alcuni colloidi quando notai che, nelle soluzioni in esame, i valori della conduttività, per una data temperatura, risultavano diversi secondo che la temperatura



N. 1.

voluta si raggiungeva per riscaldamento o per raffreddamento delle soluzioni stesse. I valori ottenuti, operando in questo secondo modo, erano sempre superiori a quelli ottenuti la prima volta.

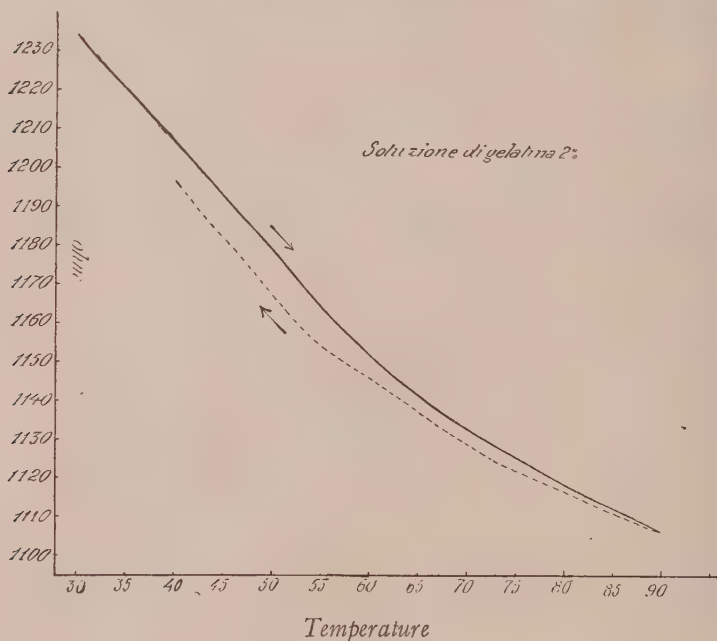
Ritenendo che il fenomeno avesse una certa importanza ne iniziai lo studio. Di esso riferisco i primi risultati, soltanto per precisare in che cosa

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Sassari.

(2) Nella seduta del 2 marzo 1930.

il fenomeno stesso consista, e riserbandomi di indicarne in seguito le modalità secondo le quali si estrinseca.

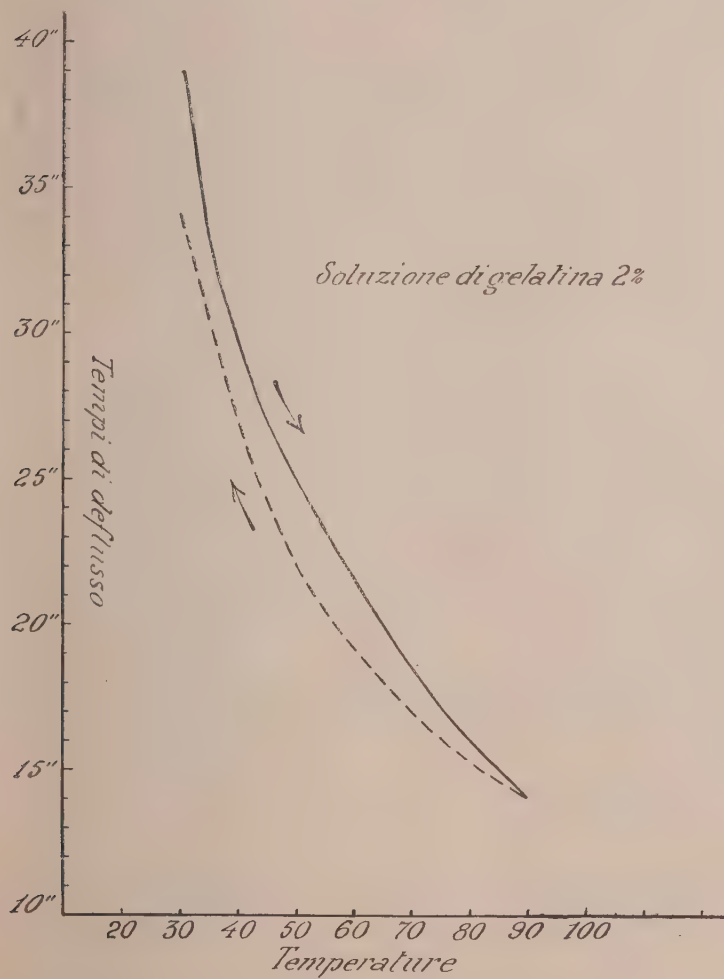
Metodo col quale è stata eseguita la ricerca. — Per l'esecuzione di questo gruppo di indagini ho usate soluzioni di gelatina granulare, variamente concentrate. Esse venivano preparate sciogliendo la sostanza in acqua, alla temperatura di 40° C. Le soluzioni venivano poi tenute a bagnomaria, o in termostato, alla temperatura indicata fino a che due determinazioni di conduttività elettrica, fatte in tempi diversi, non dessero lo stesso risultato. La conduttività è stata determinata col dispositivo di Kohlrausch e la vaschetta



N. 2.

di Arrhénius. Questa veniva tenuta in un piccolo termostato ad acqua, la cui temperatura si faceva variare lentamente, nell'intento di ottenere variazioni uguali di temperatura in tempi della stessa durata. Naturalmente ciò non si è verificato sempre, sia per la poca perfezione degli apparecchi dei quali ho potuto disporre, sia per le difficoltà che la cosa presenta di per sé stessa. Operavo poi nel modo seguente: messa la soluzione di gelatina nella vaschetta, ed immersa questa nel termostato, incominciavo a far salire la temperatura, e ad ogni aumento di 2, o di 5° C., secondo i casi, stabilivo il valore della resistenza della soluzione. Raggiunta la temperatura estrema, alla quale volevo arrivare, iniziavo il raffreddamento dell'acqua del termostato, e mano mano che la temperatura della soluzione di gelatina raggiungeva i gradi in

corrispondenza dei quali, durante il riscaldamento, era stato determinato il valore della resistenza, eseguivo la nuova misura. In tutte le soluzioni adoperate, non ostante avessero concentrazioni diverse, l'andamento del fenomeno è stato sempre lo stesso; perciò mi limito a riprodurre soltanto



N. 3.

la curva riassuntiva di una sola esperienza. La temperatura minima alla quale ho eseguite le misure di resistenza è stata di 30° C. perchè, a temperature più basse, le soluzioni di gelatina incominciano a gelificare e le curve tendono ad avvicinarsi troppo. Esaminerò a parte quello che si osserva a temperature che vanno da 30 a 0° C. e viceversa.

Dall'esame della grafica n. 1 riprodotta si rileva che i valori della resistenza elettrica di una soluzione di gelatina, determinati di 2 in 2° C., da 40 a 90° C., vanno mano mano decrescendo. Da essa inoltre appare che, se raggiunta la temperatura di 90° C. si lascia raffreddare la soluzione fino a 40° C., i valori della resistenza, determinati di nuovo di due in due gradi, durante il raffreddamento, risultano inferiori a quelli accertati la prima volta. In altre parole: ad uno stesso valore della temperatura corrispondono due diversi valori della resistenza elettrica, i quali dipendono dallo stato anteriore di riscaldamento della soluzione. Residua, quando si raffredda la soluzione, un certo grado della maggiore conduttività acquisito dalla soluzione quando la temperatura era stata innalzata; e questa conduttività residua fa risultare minore la resistenza. Si osserva quindi un fenomeno analogo a quello che si verifica quando si sottopone a forze magnetizzanti crescenti, ed indi decrescenti, un pezzo di ferro dolce, fenomeno che, per analogia, chiamo: **isteresi di conduttività elettrica**.

Quali ne sono le cause?

Le grafiche n. 2 e n. 3 riproducono rispettivamente il comportarsi della resistenza elettrica e della viscosità di una stessa soluzione di gelatina, nell'ascesa e nella discesa della temperatura. Come si vede da quella portante il n. 3, per la viscosità, cosa questa già nota, si verifica lo stesso fenomeno descritto per la conduttività, non solo, ma la zona più ampia di isteresi di questa corrisponde perfettamente alla zona più ampia di viscosità diversa. Ora, se teniamo presenti le ricerche di Carrol, Basset, e specialmente quelle di H. C. Jones⁽¹⁾ sui rapporti tra velocità degli ioni e viscosità dei solventi, l'unica spiegazione del fenomeno che può essere data è che: *trovandosi diminuita, nella fase della temperatura decrescente, la viscosità del mezzo, sia maggiore la velocità di migrazione degli ioni, e conseguentemente, minore la resistenza che la soluzione presenta al passaggio della corrente.*

(1) H. C. JONES. Monografia n. 80. Carnegie. « Inst. Publ. Memoir ».

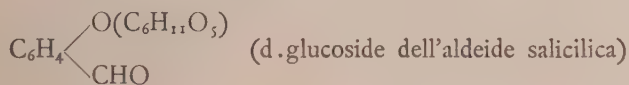
Chimica. — *Sullo sdoppiamento ottico delle aldeidi racemiche*⁽¹⁾.
Nota I di MARIO BETTI, presentata⁽²⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

Dei tre metodi proposti già da Pasteur per la scissione dei composti racemici nei loro antipodi ottici, quello fondato sulla separazione meccanica dei cristalli, per quanto di applicazione generale, serve soltanto in casi del tutto speciali; quello biochimico, di applicazione pure generale, si può impiegare solo per composti adatti alla vita dei microrganismi; quello per salificazione con un composto otticamente attivo, che è il più largamente in uso e che ha servito per la maggior parte delle scissioni effettuate fin qui, vale essenzialmente per gli acidi o per le basi. Il metodo, più recente, di Marckwald e MacKenzie⁽³⁾, basato sulla velocità di eterificazione, può in certi casi favorevoli permettere la scissione degli alcoli racemici.

Ma per lo sdoppiamento ottico delle aldeidi, che difficilmente cristallizzano, che, salvo il caso specialissimo degli aldosi, non si prestano alla vita dei microrganismi, che non si salificano e non si eterificano, il metodo finora più adatto consisteva nell'ossidarle ad acidi, scindere questi con un alcaloide adatto e ritrasformarli poi per idrogenazione in aldeidi. Metodo lungo, di scarso rendimento e spesso di esito incerto, perchè non di rado in qualcuna di queste operazioni il prodotto già scisso si racemizza di nuovo.

Tentativi di scissione « diretta » delle aldeidi si trovano descritti nella letteratura.

E. Erlenmeyer jun.⁽⁴⁾ avendo sdoppiata una base racemica, l'iso-difenil, ossietilamina: $C_6H_5-CH(OH)-CH(NH_2)-C_6H_5$, per mezzo della combinazione con un'aldeide otticamente attiva, l'elicina:



annunziò (loc. cit., p. 977) di avere iniziato degli esperimenti per scindere le aldeidi racemiche servendosi appunto della iso-difenil, ossietilamina otticamente attiva, ma non pubblicò mai più nulla a tale riguardo.

C. Neuberg⁽⁵⁾, quasi contemporaneamente ad Erlenmeyer, propose di impiegare le idrazine otticamente attive per la scissione delle aldeidi e dei chetoni e per mezzo della l. mentil, idrazina scisse l'arabinosio racemico e

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Bologna.

(2) Nella seduta del 2 marzo 1930.

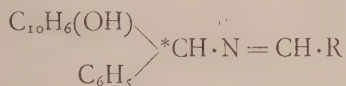
(3) « Berichte der Dtsch. Chem. Gesellsch. », 32, p. 2130 (1899).

(4) « Berichte der Dtsch. Chem. Gesellsch. », 36, p. 976 (1903).

(5) « Berichte der Dtsch. Chem. Gesellsch. », 36, p. 1192 (1903).

che si può ottenere facilmente e con buon rendimento⁽¹⁾ da prodotti comunissimi, quali il β-naftolo, la benzaldeide e l'ammoniaca e si può comodamente scindere nelle due forme otticamente attive mediante l'acido tartarico ordinario⁽²⁾. Esso è dotato di forte potere rotatorio ed ha l'atomo di carbonio asimmetrico legato direttamente al gruppo che reagisce colle aldeidi. Per queste sue proprietà il detto composto fu già da me preconizzato come particolarmente adatto per tali scissioni⁽³⁾.

Questa base ha grande tendenza a combinarsi colle aldeidi, dando composti stabilissimi, ben cristallizzati, di tipo aldeido-aminico:



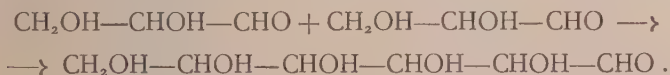
nel quale = CH·R è il residuo dell'aldeide. Da tali composti si può agevolmente riottenere l'aldeide libera. Tutte queste sono condizioni estremamente favorevoli per lo sdoppiamento delle aldeidi stato finora affrontato con così scarso risultato da tanti sperimentatori.

Nella presente Nota è descritta la scissione dell'aldeide p. metossi, idratropica: $\text{CH}_3\text{—O—C}_6\text{H}_4\text{—*CH}(\text{CH}_3)\text{—CHO}$, raggiunta appunto per mezzo della base sopraricordata e con risultati pienamente soddisfacenti:

$$\begin{array}{cc} \text{— } 2^\circ, 45 & \text{— } 4^\circ, 02 \\ [\alpha]_D = & [M]_D = \\ \text{+ } 2^\circ, 52 & \text{+ } 4^\circ, 13 \end{array}$$

Anche altre aldeidi hanno già dato ottimi risultati.

Il metodo potrà essere vantaggiosamente applicato alla scissione degli aldosi racemici ottenuti per sintesi, e p. es. di quelli provenienti dalla polimerizzazione aldolica dell'aldeide glicerica:



Sarà interessante vedere quale aldoso si formi se invece dell'aldeide glicerica racemica si polimerizza una delle sue forme otticamente attive. L'aldeide glicerica si combina facilmente col β-naftol, fenil, aminometano e forma un composto ben cristallizzato, ciò che fa bene sperare per lo sdoppiamento. È probabile che uno dei due glicerosi enantiomorfi sia fermentescibile e l'altro no.

(1) M. BETTI, « Gazz. Chim. It. », 31, I, p. 384; « Organic Syntheses », 9, p. 60 (1929).

(2) M. BETTI, « Gazz. Chim. It. », 36, II, p. 392.

(3) « Gazz. Chim. It. », 36, II, p. 669.

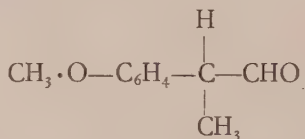
È già stato condotto quasi a termine anche lo sdoppiamento ottico del butil-clorale: $\text{CH}_3\text{—}^*\text{CHCl—CCl}_2\text{—CHO}$. Sarà interessante vedere se i due antipodi ottici di questo composto, che viene usato anche in medicina, hanno diversa azione fisiologica.

Anche per lo studio delle relazioni fra configurazione chimica e odore può avere interesse lo sdoppiamento di alcune aldeidi racemiche, e p. es. del citronellale sintetico.

Queste ricerche saranno pertanto sviluppate in diverse direzioni.

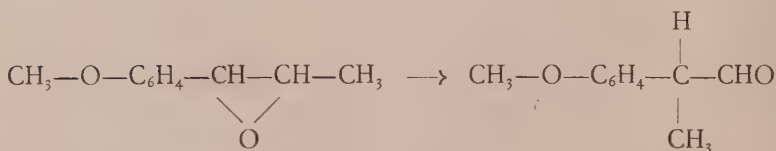
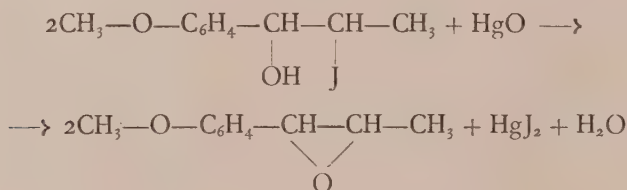
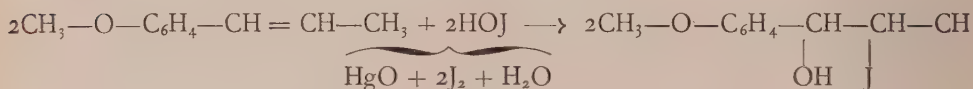
Sdoppiamento ottico dell'aldeide p. metossi-idratropica racemica.
(In collaborazione col dott. PIETRO PRATESI).

La scissione di questa aldeide:



presentava uno speciale interesse anche nei riguardi della sua struttura chimica, perchè il composto si prepara col metodo di Bougault⁽¹⁾ che, secondo lo schema dato dall'autore (loc. cit., p. 512), involve una trasposizione molecolare della quale non si ha frequente esempio in chimica organica ed è proprio in seguito ad essa che si origina il carbonio asimmetrico.

La preparazione dell'aldeide consiste infatti nell'ossidazione dell'anutolo con ossido mercurico e iodio. Le reazioni sono le seguenti:

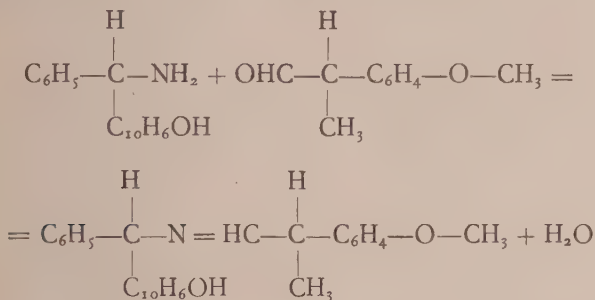


(1) « Annales de Chimie » (7), 25, p. 483 (1902).

Seguimmo le indicazioni date da Bougault ed ottenemmo un olio quasi incolore che bolliva a 255°, alla pressione di 760 mm., e che corrispondeva all'aldeide p. metossi, idratropica pura.

SCISSIONE DELL'ALDEIDE RACEMICA.

Alla soluzione di gr. 42 di β -naftol, fenil, aminometano (1 molecola) in 1340 cc. di alcool a 95° tiepido furono aggiunti gr. 27.7 di aldeide (1 molecola) sciolta in poco alcool. Avviene la reazione seguente:



In capo a qualche ora incominciò a separarsi della sostanza cristallina che dopo un giorno fu raccolta su filtro, lavata con alcool ed essiccata. Pesava 53 gr. ed evidentemente non era un composto « otticamente » puro perchè superava il peso di gr. 33.35 corrispondente alla metà della quantità teorica del prodotto totale (gr. 66.7).

DERIVATO ALDEIDO-AMINICO MENO SOLUBILE. — Il precipitato cristallino (53 gr.) fu dunque esaurito ripetutamente facendolo bollire con sempre nuove quantità di alcool finchè il potere rotatorio del prodotto che rimaneva indisciolto non risultò costante. Il composto, costituito da minutissimi cristalli bianchi, fondeva a 120°, era poco solubile nell'alcool (5 %) ma si scioglieva assai nel benzene.

Analisi: gr. 0.4047 di sostanza dettero cc. 11.8 di azoto secco a 20°,8 e 765 mm.

Trovato N % 3.41 Calcolato per $\text{C}_{27}\text{H}_{25}\text{O}_2\text{N}$ N % 3.54.

Potere rotatorio: una soluzione benzenica, al 2.028 % in volume, esaminata in un tubo lungo 2 dm. dette:

$$\alpha_D = + 1^\circ.75 \quad \text{da cui: } [\alpha]_D = + 43^\circ.1.$$

Idrolisi: ALDEIDE LEVOGIRA. — Siccome l'aldeide p. metossi-idratropica per ebollizione con acidi minerali si resinifica, così il derivato aldeidoaminico ora descritto fu idrolizzato facendolo bollire con una soluzione di acido

ossalico al 10 % presa in eccesso, mentre contemporaneamente si distillava in corrente di vapore. A mano a mano che l'idrolisi procedeva, l'ossalato della base passava in soluzione nell'acqua bollente e l'aldeide veniva asportata dalla corrente del vapore. Dalla soluzione ossalica, per raffreddamento, si separò ben cristallizzato l'ossalato della base, la quale si può così recuperare e far servire per altre operazioni. Il distillato, contenente gocce oleose di aldeide, fu estratto con etere e questo, dopo essiccato con cloruro di calcio e filtrato, fu pure distillato. Rimase l'aldeide sotto forma di liquido oleoso, quasi incolore, che bolliva a 251° alla pressione di 750 mm.

Per la misura del suo potere rotatorio servì una soluzione in cloriformio al 26.844 % in volume, che in un tubo lungo 1 dm. e alla temperatura di 17° dette:

$$\alpha_D = -0.66, \text{ da cui: } [\alpha]_D = -2.45 \text{ e } [M]_D = -4.02.$$

Ossima. — Gr. 2.5 di aldeide furono trattati in soluzione alcoolica con la quantità corrispondente (gr. 1.1) di cloridrato di idrossilamina e di carbonato sodico (gr. 3). Dopo un paio di giorni fu separato per filtrazione il cloruro di sodio depositatosi e l'alcool fu evaporato. Rimase un residuo oleoso che raffreddato con ghiaccio e sale divenne cristallino. Fu purificato per cristallizzazione da etere di petrolio misto con etere etilico. Puro fondèva a 88–89°.

La misura polarimetrica fu fatta con una soluzione alcoolica della concentrazione del 6.58 % in volume, alla temperatura di 18°, con un tubo lungo 1 dm. Si ebbe:

$$\alpha_D = +0.52, \text{ da cui: } [\alpha]_D = +7.9.$$

L'aldeide levogira dà dunque un'ossima destrogira.

DERIVATO ALDEIDO AMINICO PIÙ SOLUBILE. — Le acque madri alcooliche dalle quali si era separato il prodotto meno solubile e le diverse porzioni di alcool colle quali era stato successivamente esaurito furono riunite tutte insieme e concentrate alquanto. Col raffreddamento fornirono un po' di prodotto cristallino, che fu lasciato da parte come sostanza otticamente non pura. Il liquido filtrato, evaporato lentamente, a bassa temperatura ed in presenza di un germe cristallino, lasciò però un residuo sciropposo, incristallizzabile. Potemmo però trasformarlo in un prodotto cristallino ridisciogliendo il residuo con poco alcool e versando la soluzione alcoolica concentrata e calda in una capsula raffreddata esternamente con ghiaccio. Si ottenne così una sostanza quasi incolore, fusibile verso i 120°, molto solubile nell'alcool e nel benzene.

Potere rotatorio. La soluzione benzenica al 2.007 % in volume, in un tubo lungo 2 dm., dette:

$$\alpha_D = +1.62, \text{ da cui: } [\alpha]_D = +40.4.$$

Idrolisi: ALDEIDE DESTROGIRA. — Il composto aldeido-aminico molto solubile fu sottoposto ad un trattamento analogo a quello descritto per il prodotto poco solubile.

Per la misura del potere rotatorio dell'aldeide ottenuta da esso servi una soluzione in cloroformio della concentrazione del 4.75 % in volume, che in un tubo lungo 1 dm., alla temperatura di 17°, dette:

$$\alpha_D = + 0^{\circ}.12, \text{ da cui: } [\alpha]_D = + 2^{\circ}.52 \text{ e } [M]_D = + 4^{\circ}.13.$$

Anche dell'aldeide destrogira fu preparata l'ossima che, come era da aspettarsi, era levogira.

Chimica analitica. — *Un nuovo metodo per l'identificazione ed il dosaggio dei nitrati nelle acque* ⁽¹⁾. Nota di G. BINI, presentata ⁽²⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

Nella ricerca dei composti azotati inorganici nelle acque, l'acido nitrico ed i nitrati sono quelli di cui non solamente il dosaggio ma anche l'identificazione è la più difficile ad ottenersi. Infatti di tutti i reattivi che sono stati proposti per l'acido nitrico, e vi è un'enorme bibliografia in proposito, non ne esiste nessuno che sia essenzialmente specifico dell'acido nitrico, anzi la maggior parte di essi reagisce nello stesso modo sia con i nitriti che con altri composti ossidanti, (acqua ossigenata, sali ferrici, cromati, clorati, ferricianuri ecc.) senza tener conto di tutte le sostanze che impediscono lo svolgimento della reazione come cloruri, bromuri, ioduri, ecc.

Noi ancora non possediamo un reattivo esclusivo per l'acido nitrico e se prendiamo in considerazione le reazioni che si ottengono con la difenilammina, la brucina, la stricnina ridotta, i metodi di trasformazione dei nitrati in ossidi d'azoto, oppure in ammoniaca e la maggior parte di tutte le altre reazioni conosciute, vediamo che tutte queste sono perfettamente inutili se ci si trova in presenza di nitriti.

Tra le innumerevoli reazioni proposte per il riconoscimento ed il dosaggio dei nitrati nelle acque, sembrava che il metodo di Sprengel basato sull'azione dell'acido fenol-disolfonico fosse caratteristico dei nitrati in presenza dei nitriti e non fosse disturbato dalla presenza dei cloruri, cosa molto interessante nel caso particolare della ricerca dei nitrati nell'acqua del mare ⁽³⁾, ma da moltissime determinazioni che ho eseguito in questo senso

(1) Lavoro eseguito nel R. Laboratorio Centrale di Idrobiologia di Roma.

(2) Nella seduta del 16 marzo 1930.

(3) GIRAL J., *Quelques observations aux thèmes: Méthodes pour l'étude des phosphates et des matières azotées dans l'eau de mer.* « Rapport et Procès Verbaux des Reunions », vol. LIII, mars 1929.

posso escludere l'uso di tale reattivo come adatto per la ricerca dei nitrati nelle acque clorurate.

Altri reattivi simili a questo furono proposti per lo stesso scopo, come l'acido salicil-solfonico e l'acido pirogallol-solfonico che fu descritto dal De-Nardo⁽¹⁾ come reattivo adatto per la ricerca ed il dosaggio dei nitrati nelle acque e nel suolo.

Eseguendo delle prove comparative tra i diversi reattivi notai la facilità di preparazione di quest'ultimo e la sua estrema sensibilità che però a mio parere è più uno svantaggio che un vantaggio.

Il De-Nardo però consigliava a questo proposito di usare il pirogallolo puro come reattivo, nel caso che la quantità di nitrati superasse un certo limite, essendo il pirogallolo molto meno sensibile dell'acido pirogallol-solfonico.

Ho cercato quindi se era possibile ovviare a tale inconveniente senza usare come reattivo il pirogallolo puro troppo poco sensibile, a tal uopo ho eseguito una serie di ricerche sostituendo al pirogallolo degli altri fenoli, nell'intento di ottenere un reattivo simile ma che presentasse il vantaggio della minore sensibilità.

L'idrochinone è stato quello che mi ha dato migliori risultati, sia per la facilità di preparazione sia per la sostanza colorante che si viene a formare, che è verde e che differisce quindi da quelle generalmente ottenute con gli altri fenoli che sono rosse o gialle.

Per la preparazione del reattivo ho seguito il seguente metodo che mi è sembrato il migliore:

Si riscalda per circa dieci minuti con piccola fiamma a bagnomaria gr. 5 di idrochinone purissimo con cc. 7.5 di acido solforico concentrato e purissimo. Quando tutto l'idrochinone si è disciolto, si viene a formare un liquido molto denso, trasparente ed incolore, che si mantiene a 90°-100° fino a che non comincia a cristallizzare; dopo che la maggior parte del liquido è cristallizzata si toglie il tutto dal bagnomaria e si lascia raffreddare; dopo circa due o tre ore tutto il liquido si rapprende in una massa bianca fortemente igroscopica formata da acido idrochinon-solfonico, idrochinone e acido solforico non combinati. Si discioglie il tutto in circa cc. 500 di acqua bidistillata e si ottiene così un reattivo sensibilissimo per i nitrati e che ha le seguenti caratteristiche.

Reagisce con gli ioni NO_3 , dando origine ad una colorazione che va dal verde pallido al bruno secondo la loro concentrazione.

È capace di svelare la presenza di mg. 0.01 di NO_3 in 1000 cc. di acqua, mentre i nitriti fino alla concentrazione di mg. 0.2 per litro non

(1) DE-NARDO L. U. *Une nouvelle méthode de dosage colorimétrique des nitrates dans les sols et les eaux.* «Compt. Rend. de l'Acad. des Sciences», Paris, I semestre, t. 188, n. 8, febbraio 1929.

hanno nessuna influenza sulla reazione; però data la forte sensibilità del reattivo è bene eseguire la reazione nella seguente maniera:

In un cilindro graduato da 50 cc. si pongono 10 cc. dell'acqua in esame, vi si aggiunge 0.5 della soluzione del reattivo e si addizionano cautamente con 20 cc. di acido solforico purissimo e concentrato.

In presenza di piccolissime quantità di nitrati si viene a formare una colorazione verde pallida che diviene sempre più scura con l'aumentare della quantità di nitrati disciolta, fino a raggiungere una colorazione bruno-verdastra. Se però la colorazione non appare entro cinque minuti non bisogna tener conto della colorazione che eventualmente potrebbe apparire in seguito, perchè il reattivo è così sensibile che serve anche a svelare le infime tracce di nitrati che sono presenti anche nell'acido solforico il più puro. Anzi per meglio esser sicuri della reazione è più indicato eseguire una prova di confronto in bianco con acqua bidistillata.

Il reattivo può essere anche usato quantitativamente, confrontando la colorazione ottenuta nel cilindro con l'acqua in esame, con quelle che si ottengono in altrettanti cilindri graduati contenenti ciascuno quantità note e crescenti di nitrati, l'acido solforico ed il reattivo.

L'acido idrochinon-solfonico ha però l'inconveniente come del resto anche l'acido pirogallol-solfonico, di non essere un reattivo specifico dei nitrati, infatti i sali ferrici danno origine di una colorazione bleu-viola che però scompare per aggiunta di acido solforico, i cromati e l'acqua ossigenata danno la medesima reazione dei nitrati, ed i cloruri in forte quantità annullano completamente la reazione, quindi il reattivo non può essere adoperato per le determinazioni dei nitrati nelle acque di mare o di laguna. A questo proposito debbo notare che neanche il reattivo del De-Nardo può essere usato nelle determinazioni su acque clorurate, perchè la reazione non avviene completamente e invece della colorazione rossa si viene a formare una colorazione giallastra più o meno intensa e dipendente non solamente dalla quantità di nitrati disciolta ma anche dalla quantità di cloruri presenti.

Ho creduto opportuno riportare questa nota sull'uso dell'acido idrochinon-solfonico come reattivo particolarmente adatto per la ricerca dei nitrati nelle acque, eseguendo parecchie prove sperimentali e confrontandole con quelle ottenute con l'acido pirogallol-solfonico proposto dal De-Nardo come reattivo per i nitrati contenuti nel suolò e nelle acque.

Ambedue i reattivi hanno il pregio di rendere inutile la concentrazione delle acque dove si ricercano i nitrati, essendo estremamente sensibili; sono di facile preparazione, e hanno inoltre il vantaggio sugli altri reattivi già conosciuti come la brucina e la difenil-ammina, di conservarsi in soluzione anche per più di due settimane.

Inoltre poi dalle numerose prove sperimentali che ho eseguite con ambedue i reattivi, ho potuto constatare che l'acido idrochinon-solfonico ha il pregio sull'acido pirogallol-solfonico della relativa minore sensibilità.

Infatti, trattando 10 cc. di acqua bidistillata con mezzo cc. del reattivo proposto dal De-Nardo e con 20 cc. di acido solforico purissimo, non si dovrebbe avere teoricamente nessuna reazione, mentre invece si ottiene immediatamente una leggera colorazione rosea che gradatamente si va rinforzando, invece eseguendo la medesima prova usando però l'acido idrochinon-solfonico in luogo del pirogallol-solfonico non si ottiene nessuna colorazione distinta all'inizio dell'esperimento, e solamente dopo un quarto d'ora, mezz'ora, si comincia a notare una debolissima colorazione verde pallido che però non va rinforzando nemmeno due ore dopo l'esperimento.

Inoltre mentre milligrammi 0,2 per litro di NO_2 non hanno praticamente influenza sull'acido idrochinon-solfonico, con l'acido pirogallol-solfonico danno invece una colorazione rosea molto netta.

Paleontologia. — *Su di un caso di tetrameria in un Echinide exocisto*⁽¹⁾. Nota di G. CHECCHIA-RISPOLI, presentata⁽²⁾ dal Socio A. MARTELLI.

Il comm. Ignazio Sanfilippo ha con molta liberalità donato all'Istituto di Paleontologia dell'Università di Roma una magnifica collezione di fossili del Cretaceo superiore (Maestrichtiano) della Tripolitania, raccolti in un suo recente viaggio (1929), in vari punti della regione attraversata dal basso Sofeggin.

Oltre ad un gran numero di molluschi e di altri tipi di organismi, in perfettissimo stato di conservazione, fanno parte del materiale parecchi echinidi, di cui alcuni nuovi non solo per la Tripolitania, ma anche per la scienza⁽³⁾.

Fra questi ho potuto distinguere alcuni esemplari di *Conulus* (= *Echinoconus* auctorum) appartenenti ad una nuova specie, *Conulus Sanfilippoi*, provenienti dall'Uadi Urùrigh, affluente del Sofeggin, la cui descrizione verrà fatta insieme con gli altri echinidi nel lavoro in corso di preparazione.

Nella presente Nota do conto solamente di un esemplare che per le sue anormalità offre un'interesse particolare.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Paleontologico dell'Università di Roma.

(2) Nella seduta del 16 marzo 1930.

(3) A titolo d'informazione dirò che ho potuto distinguere tre buone specie nuove di *Noettingaster*.

Di questo genere si conoscevano fino ad oggi tre sole specie: *N. Boulei* del Madagascar, la sola ben conservata; e altre due, *N. paucituberculatus* del Belucistan, e *N. Montelli*, raccolta sul suolo a S di Bilma, nel Sahara orientale, in istato di incompletezza e fortemente deteriorate. L'ottimo stato di conservazione degli esemplari della Tripolitania permette una migliore conoscenza di questo genere maestrichtiano.

*
* *

La più importante anormalità di questo individuo di Uadi Urùrigh consiste nel fatto che la simmetria pentaradiata è profondamente alterata per la completa mancanza di un antimero: mancano infatti per tutta l'estensione della faccia superiore e di quella inferiore l'area ambulacrale III con la corrispondente piastra radiale e l'area interambulacrale 3 con la corrispondente piastra genitale.

L'esemplare è in ottimo stato di conservazione e raggiunge all'incirca le stesse dimensioni degli individui normali, essendo alto mm. 36 e lungo mm. 35 (asse antero-posteriore).

La faccia superiore è elevata, subconica, arrotondata all'apice, dai fianchi ripidi; il contorno è fortemente arrotondato e la faccia inferiore ristretta è pianeggiante. Negli individui normali la faccia inferiore è molto più estesamente pianeggiante ed il contorno più acuto.

In sezione mentre la forma degli individui normali è pentagonale, in quello anormale è subquadratica e più precisamente trapezoidale con la maggiore larghezza in corrispondenza degli ambulacri posteriori. Il perimetro del guscio verso l'ambito è di mm. 122, corrispondente all'incirca a quello di un individuo normale delle stesse dimensioni. Però mentre in questi ultimi le cinque aree interambulacrali hanno presso a poco la stessa larghezza, uguale a mm. 20 c., nell'individuo anormale la faccia anteriore è larga mm. 20; le facce laterali sono larghe mm. 21 c. e quella posteriore è notevolmente più larga raggiungendo c. 33 mm.

Le aree ambulacrali anteriori sono conformi in tutto a quelle degli individui normali; le posteriori invece sono fortemente divaricate e flessuose verso l'ambito, a causa della molto maggiore larghezza dell'interambulacro anale verso il contorno del guscio.

La forma e le dimensioni delle placche, come pure il numero, la disposizione e la grandezza dei tubercoli, che ornano la superficie del guscio, non mostrano alcuna differenza con quelli degli individui normali.

*
* *

Per causa della mancanza completa di un antimero, la costituzione dell'apparecchio apicale è molto differente da quella degli individui normali.

Qui abbiamo riportato per confronto l'apparecchio apicale di un individuo normale, che è simile a quello comune del genere (v. fig. 2). L'apparecchio dell'individuo anormale (v. fig. 1), nell'insieme di forma subquadratica, è costituito di 4 piastre genitali e di 4 ocellari, tutte perforate. Il *madreporide* (genitale 2) è notevolmente sviluppato e si è spostato dalla sua posizione normale, che è a destra ed in avanti, prendendo il posto

della radiale III; l'interambulacro 2 ha preso il posto dell'ambulacro III: così la piastra 2 e l'interambulacro 2 si sono messi simmetricamente rispetto all'asse antero-posteriore. Il madreporide si è spinto oltre il centro dell'apparecchio ed è circondato dalle rimanenti piastre apicali, eccetto nel lato anteriore. Per la scomparsa dell'antimero completo, sono scomparse la radiale III e la genitale 3, per cui procedendo da destra verso sinistra si trova la radiale IV, anch'essa molto sviluppata, indi la genitale 4, la radiale V, la genitale 5, che è perforata, la radiale I, la genitale 1 e la radiale II.

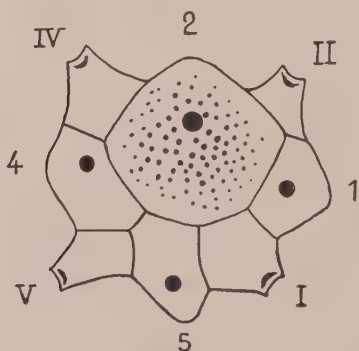


Fig. 1.

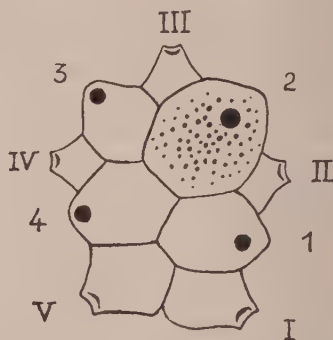


Fig. 2.

Apparecchi apicali di *Conulus Sanfilippo* sp. nov.

(ingrand. 8 volte)

Fig. 1 — Apparecchio dell'individuo anormale.

Fig. 2.— Apparecchio di un individuo normale.

La riapparizione della radiale 5 non è un fatto che possa sorprendere, perchè sappiamo che essa è presente in parecchie specie di *Conulus*. È vero che essa non è stata finora mai trovata perforata, ma in generi molto prossimi nel sistema ai *Conulus*, cioè in *Hoelectypus*, *Discoidea*, *Lanieria*, ecc. la genitale 5, che prende parte alla costituzione dell'apparecchio apicale, può essere sempre perforata, come nelle *Lanieria*, oppure, come avviene in *Hoelectypus*, *Discoidea* ecc. può anche non essere perforata.

I fori genitali di questo individuo anormale sono più piccoli di quei normali e si trovano sempre spostati dalla loro posizione abituale. Il foro 2 si è portato verso il centro della placca, quello della 4 verso l'angolo interno anteriore, quello della 5 si trova in posizione quasi normale, mentre quello della 1 è centrale. Notevole pure è la deformazione delle placche, come si può osservare dal paragone dei due apparecchi figurati.

*
* *

Le altre anomalie presentate dall'individuo di Uadi Urùrigt riguardano il periprocto ed il peristoma. Negli individui normali il periprocto è marginale e di forma ellittica appuntita in alto; nell'individuo anormale esso è di forma ovale e si trova in alto della faccia posteriore, spostato dalla linea mediana dell'interambulacro e deviato obliquamente a destra. Al posto del periprocto si trova una gibbosità che termina a punta, la quale manca in tutti gli altri esemplari.

Il peristoma infine che negli individui normali è centrale e quasi ovale, stretto, un po' angoloso, debolmente obliquo a sinistra, nell'esemplare anormale è subquadratico e spostato avanti.

*
* *

Ho creduto di un certo interesse descrivere questo singolare echinide, perchè i casi di tetrameria completa finora noti sono molto rari, per quanto più frequenti di quelli di trimeria e di quelli di esameria. I pochissimi casi di tetrameria sono stati riscontrati sia in forme fossili, che in quelle viventi. Chi volesse averne conoscenza può consultare la memoria del Thiery, pubblicata nel 1908⁽¹⁾, per le forme fossili e quella del Koehler, pubblicata nel 1924, per le viventi. In questa ultima troverà pure una raccolta completa delle anomalie, irregolarità e deformazioni del guscio degli Echinidi illustrate in un gran numero di tavole⁽²⁾.

È opportuno ricordare qui che nello stesso genere *Conulus* è stato riscontrato un caso simile di tetrameria completa in un esemplare di *Conulus subrotundus* del Lower Chalk di Skudy Camps (Cambridgeshire), illustrato dal Roberts nel 1891⁽³⁾. In questo esemplare il contorno delle piastre che costituiscono l'apparecchio apicale non è chiaro; solo si può scorgere che esso è composto di 4 genitali e di 4 radiali perforate. La genitale cor-

(1) THIÉRY P., *Note sur une anomalie des ambulacres chez Echinus melo*. « Soc. Sc. Nat. Haute-Marne », 5^e année, n. 19 (con bibliografia per gli Echinidi fossili), 1908. V. anche BATESON W., *Materials for the study of variation*, Londra, 1894.

(2) KOEHLER R., *Anomalies, irrégularités et déformations du test chez les Echinides*. « Ann. de l'Institut Océanographique », nouv. ser., tome I, pp. 159-480, con 32 tavole, Parigi, 1924.

(3) ROBERTS, *On Two Abnormal Cretaceous Echinoids*. « Geological Magazine », vol. VIII, 1891.

(4) Alla lista dei casi di tetrameria completa in forme fossili va aggiunto, tra gli altri, quello descritto dal Fourtau nel 1921, riguardante un esemplare di *Holaster Barthouxi* dell'Altipiano del Gebel Mandhour. V. FOURTAU, *Catalogue des Invertébrés fossiles de l'Égypte Terrains crétacés*. 3^e Part. Échinodermes. (Supplement). « Survey of Egypt. Geological Survey », Cairo, 1921.

rispondente all'interambulacro posteriore è perforata come nell'individuo di Uadi Urùrigh. Questo individuo del Lower Chalk non presenta altre anomalie. Il caso dell'individuo di Urùrigh ci sembra più interessante, perchè, nonostante tutte le anomalie presentate, ha potuto raggiungere notevoli dimensioni le quali corrispondono a quelle degli individui normali, con i quali si trova associato nello stesso giacimento.

Zoologia. — *Rigenerazione dell'apparato digerente nelle Oloturie* ⁽¹⁾. Nota di FAUSTA BERTOLINI, presentata ⁽²⁾ dal Socio **GIORGIO DAL PIAZ.**

Spesso è citato nei testi, e più ancora è noto nella comune scienza parlata, che le Oloturie, quando vengono disturbate o si trovano in ambiente inadatto, emettono con facilità l'intero apparato digerente, dall'esofago al retto, polmoni acquatici e reti mirabili compresi — e che poi lo rigenerano.

Quest'ultimo fatto non era stato controllato sperimentalmente, perchè in cattività l'animale preferisce morire, ma molti studiosi e i pescatori specializzati hanno più volte osservato in certe Oloturie un intestino sottile e trasparente al posto di quello normale.

La scorsa estate, mentre ero ospite della Stazione zoologica di Napoli, ho avuto a mia disposizione una grande quantità di *Stichopus regalis*, che veniva spesso pescato per questa ricerca, in abbondanza, nei « campi » di *Stichopus* presso Pozzuoli. Ho avuto la possibilità di raccogliere numerosi intestini in via di rigenerare, così da poterne ricostruire per stadi il processo. Sembra che in questa specie il fenomeno sia relativamente più frequente che nel genere *Holothuria*.

L'animale emette come già dissi tutto il tubo intestinale, lasciando in posto il primo tratto dell'esofago e l'ultima parte del retto, uniti tra loro dalla sottile lamina di mesentere.

Lungo essa si trova da prima un sottile tubicino trasparente che va man mano crescendo ed aumentando di consistenza. Poi si allunga e forma la curva, mentre dalla cloaca spuntano come gemme i futuri polmoni acquatici. Intanto si riformano anche le reti mirabili, e poco ci vuole perchè l'apparato digerente sia di nuovo allo stato normale.

Parecchie decine di esemplari mi hanno permesso di ricostruire i diversi stadi e seguire il fenomeno con certa precisione. Riferirò più in esteso di tutti i particolari e colle dovute figure, nelle « Pubblicazioni della Stazione zoologica di Napoli ». Intanto mi limito a dire nelle linee generali quello che accade e a spese di quali parti si riformano i nuovi organi.

(1) Lavoro eseguito nell'istituto di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparate della R. Università di Padova.

(2) Nella seduta del 16 marzo 1930.

Se in un individuo ancora privo di qualsiasi canale, ma che abbia emesso l'intestino (probabilmente da qualche giorno) si prende un pezzetto della lamina mesenterica e si osserva una sezione trasversa, si rimane colpiti dal fatto che i due margini del mesotelio si sono attaccati; in mezzo il mesenchima presenta l'accento di una cavità, non limitata da uno strato epiteliale. In un secondo tempo a spese del mesenchima si differenzia uno strato di cellule epiteliali a tappezzare la cavità interna. Questo differenziamento si può seguire, perchè in qualche caso la cavità è contornata da cellule non ancora completamente differenziate. Poi questo strato epiteliale ingrossa fino alla grandezza normale.

Il problema principale di questa rigenerazione è così risolto: l'apparato digerente viene rifatto a spese del mesoderma.

Si conosce già la rigenerazione di organi che hanno un'origine diversa da quella dello sviluppo embrionale. Negli anfibî il cristallino rigenera non dall'ectoderma, ma dal margine dell'iride, come hanno osservato numerosi osservatori.

Nei Nemertini, piccolissimi pezzi, privi anche d'intestino, completano un animale intero e rifanno il canale digerente da vari elementi mesodermici.

Nel caso delle Oloturie, che ho riferito, si tratta di un animale adulto e intero, che, spontaneamente privatosi dell'apparato digerente, lo riforma completamente a spese del mesoderma (e mesenchima) senza partecipazione dell'entoderma ⁽¹⁾.

Biologia. — *Contributo allo studio del glutatione nei teleostei* ⁽²⁾
Nota II di G. CANNICCI, presentata ⁽³⁾ dal Socio G. FANO.

VALORI E VARIAZIONI DEL TASSO IN GLUTATIONE DI ALCUNE SPECIE.

Come è stato detto in una precedente Nota ⁽⁴⁾, scopo della nostra ricerca era quello di studiare il tasso in glutatione di alcuni teleostei, per paragonarne il valore e le variazioni a quanto era già stato trovato per gli omeotermi, ed abbiamo scelto come metodo di dosaggio quello che si serve del nitroprussiato come indicatore, poichè ci è sembrato l'unico che potesse dare valori, se non esattissimi, almeno confrontabili, per la sua maggiore specificità. Le determinazioni sono state eseguite sempre in maniera perfettamente identica, e nel modo seguente:

(1) Bibliografia della rigenerazione in: E. KORSCHOLT, *Regeneration und Transplantation*, I B. 1927.

(2) Lavoro eseguito nel R. Laboratorio Centrale di Idrobiologia.

(3) Nella seduta del 2. marzo 1930.

(4) Questi « Rendiconti », vol. XI, fasc. n. 5, p. 509.

Dopo avere isolato fegato e muscolo mediante vivisezione, si procedeva immediatamente all'analisi mantenendo in ghiacciaia (Morel e Delore)⁽¹⁾ la parte da estrarre in un secondo tempo, sebbene ciò avvenisse nello spazio di pochi minuti, poichè nonostante Visco e Castagna⁽²⁾ abbiano trovato eccessiva la preoccupazione dei precedenti autori di una troppo rapida alterabilità (i fegati di bue da loro esaminati mostravano per circa due ore un contenuto in glutazione quasi invariato) noi avevamo a che fare con pezzi così minuti e senza compattezza, da ritenere utili tutte le precauzioni.

Per la quantità di acido tricloroacetico da usare nell'estrazione, ci siamo attenuti per il fegato a un numero di cc. triplo del peso in grammi del tessuto, e per il muscolo una volta e mezzo; l'eccessiva diluizione porterebbe, secondo Bierich e Kalle⁽³⁾ a risultati troppo elevati nel consumo di jodio, e secondo Blanchetière e Mélon a valori troppo bassi, raggiungendo presto il limite di sensibilità della reazione. Per il calcolo del tasso in glutazione abbiamo considerato come punto finale la scomparsa dell'anello rosso del nitroprussiato in soluzione ammoniacale, ma poichè non recava all'analisi nessun intralcio, abbiamo riunito nelle tabelle anche i numeri indicanti il consumo di jodio necessario per giungere all'azzurro della salda, operando qualche volta senza, e qualche volta con aggiunta di un eccesso di joduro di potassio; l'esame di questi numeri ci sembra una conferma della nostra ipotesi sulla presenza di sostanze riducenti non contenenti il gruppo solfidrile, che aumentano il consumo di jodio in maniera sempre diversa, per il facile variare della loro quantità.

Il glutazione è stato considerato con la formula di tripeptide (Hopkins, 1929), ma tra parentesi abbiamo lasciato anche i valori risultanti con la formula primitiva di dipeptide, per comodità di confronto con la letteratura precedente.

Abbiamo avuto per le trote e carpe esaminate i risultati riportati nelle qui unite tabelle; le carpe sono state tenute in condizioni normali di alimentazione e a digiuno, come appare indicato. Per gli individui adulti abbiamo notato anche il sesso: lavorando sui piccoli ci siamo serviti di materiale proveniente da due esemplari, in modo che il risultato rappresenta già una media.

(1) MOREL A. et DELORE P., *Autoxidation du glutathion réduit dans les organes cadavériques et son inhibition par frigidification*. «C.-R. Soc. de Biol.», vol. XCVI, 1927.

(2) VISCO e CASTAGNA, *Variazioni quantitative del glutathione negli organi isolati*. Nota I. «Boll. Soc. Ital. di Biol. Speriment.», vol. III, 1928.

(3) BIERICH und KALLE, *Über die Vorgänge bei der Sulphydryltitration mit Jodstärke und nitroprussidnatrium*. «Hoppeseylers Zeitschr. f. physiolog. Chem.», vol. CLXXV, 1928.

TABELLA I

<i>Salmo gairdneri</i> Rich.		Soluzione di jodio N/100			Glutazione ridotto % mg.
Peso totale gr.	Peso del tessuto esaminato	Salda senza aggiunta di KJ cm ³	Salda con aggiunta di KJ cm ³	Nitro- prussiato cm ³	
♀ 1347	fegato . . . gr. 5.150		2.93	1.28	(62.14) 76.37
	muscolo . . . » 16.470		0.64	+	
♂ 209.50	fegato . . . » 2.320		0.95	0.52	(56.03) 68.87
	muscolo . . . » 29.336		0.89	+	
♀ 350	fegato . . . » 3.690	0.98		0.56	(37.94) 46.63
	muscolo . . . » 28.710	0.72		+	
♂ 240	fegato . . . » 1.800	0.53		0.44	(61.11) 75.11
	muscolo . . . » 21.320		0.80	+	
♂ 305	fegato . . . » 1.910		0.62	0.45	(58.90) 72.40
	muscolo . . . » 22.815	0.67		+	
♂ 290	fegato . . . » 3.010	0.64		0.59	(48.98) 60.23
	muscolo . . . » 21.815	0.80		+	

TABELLA II

<i>Cyprinus carpio</i> L. (alimentazione normale)		Soluzione di jodio N/100			Glutazione ridotto % mg.
Peso totale gr.	Peso del tessuto esaminato	Salda senza aggiunta di KJ cm ³	Salda con aggiunta di KJ cm ³	Nitro- prussiato cm ³	
♂ 185	fegato . . . gr. 2.96	2.8		0.52	(43.91) 53.99
	muscolo . . . » 84.69	2.1		—	
♀ 159.5	fegato . . . » 2.74	0.89		0.49	(44.70) 54.95
	muscolo . . . » 23.91	1.26		—	
♀ 125.2	fegato . . . » 2.20		0.70	0.30	(34.09) 41.90
	muscolo . . . » 20.35		0.51	—	
♀ 152.5	fegato . . . » 2.54		0.75	0.25	(24.60) 30.20
	muscolo . . . » 18.32		0.48	+	
♂ 73.5	fegato . . . » 2.66	1.2		0.46	(43.23) 53.14
	muscolo . . . » 15.7	0.97		—	
41.2 23.9	fegato . . . » 3.52		1.27	0.39	(27.79) 34.05
	muscolo . . . » 13.60		1.01	+	

TABELLA III

	<i>Cyprinus carpio</i> L. (digiuno)		Soluzione di jodio N/100			Glutazione ridotto % mg.
	Peso totale gr.	Peso del tessuto esaminato	Salda senza aggiunta di KJ cm ³	Salda con aggiunta di KJ cm ³	Nitro- prussiato cm ³	
+Q	325.5	fegato . . . gr. 8.46	3.15		0.88	(26.12) 31.96
		muscolo . . . » 60.07	1.65		—	
+Q	180.5	fegato . . . » 2.7	0.9		0.31	(28.70) 35.58
		muscolo . . . » 50.00	1.34		—	
	35.6	fegato . . . » 3.84		1.1	0.58	(37.76) 46.41
	38.7	muscolo . . . » 41.76		0.43	—	
	32.4	fegato . . . » 3.14	1.69		0.45	(35.77) 44.10
	35.6	muscolo . . . » 8.90	0.55		—	
	36.3	fegato . . . » 4.10		0.4	0.36	(21.92) 26.98
	39.2	muscolo . . . » 12.02		0.34	—	
♂	157.5	fegato . . . » 2.62		1.15	0.43	(41) 50.43
		muscolo . . . » 42.15		0.46	—	

Riunendo e confrontando questi valori insieme con quelli precedentemente avuti per la salpa, abbiamo:

Tasso in glutazione ridotto del fegato
(espresso in mgr. per 100 gr. di tessuto)

	Valore minimo	Valore medio	Valore massimo
<i>Box salpa</i> Linn. . . .	(36.75) 45.17	(45.84) 56.35	(66.25) 81.43
<i>Cyprinus carpio</i> Linn. (alimentazione normale)	(24.60) 30.24	(36.40) 44.71	(44.70) 54.95
<i>Cyprinus carpio</i> Linn. (digiuno)	(21.92) 26.98	(31.88) 39.19	(41 —) 50.43
<i>Salmo gairdneri</i> Rich.	(37.94) 46.63	(54.18) 66.60	(62.14) 76.37

Abbiamo anzitutto rilevato che, nei teleostei esaminati, gli estratti tricoloroacetici di muscolo mostrano soltanto nella trota, d'accordo con la maggiore vivacità dei processi di ricambio di questa forma, una reazione

sempre sensibilmente positiva al nitroprussiato, sebbene anche in essa non sia possibile procedere ad un dosaggio quantitativo che dia una buona approssimazione: senza ritenere che nella salpa e nella carpa il tripeptide sia completamente assente nella forma ridotta, è certo — poichè sfugge quasi completamente alla ricerca qualitativa — che vi si trova in quantità straordinariamente esigua. Aggiungendo, secondo il metodo indicato dal Walker⁽¹⁾ qualche goccia di soluzione di cianuro di potassio al 5 %, ci è sembrato di ottenere reazione positiva, ciò che farebbe pensare alla presenza di un disolfuro, ma questo punto dovrà essere ulteriormente approfondito. Il glutatione nella forma ridotta è stato riscontrato nei reni, nella milza e nelle gonadi; per il fegato, l'unico degli organi ricchi in glutatione sul quale, per ragioni pratiche, sia stato possibile effettuare un numero considerevole di determinazioni del tutto soddisfacenti, non abbiamo trovato un tasso rilevante — ma anzi molto inferiore a quello degli omeotermi — ciò che si accorda col più basso metabolismo di base dei pesci, nei quali è naturale che si verifichi una minore velocità nei processi di ossido-riduzione, velocità che è legata alla quantità di catalizzatori organici presenti.

I nostri valori sono più bassi di quelli ottenuti in altre forme da Blanchetière e Mélon⁽²⁾, ma non si possono stabilire paragoni, poichè i detti autori si sono basati, per il dosaggio, unicamente sulla salda come indicatore.

I valori individuali presentano, in condizioni apparentemente uguali e normali, le forti oscillazioni già trovate per gli omeotermi, ed è quindi difficile stabilire l'influenza portata dal variare di una sola condizione controllabile, come per es., l'alimentazione.

Dai risultati ottenuti non possiamo infatti dedurre che esistano differenze molto considerevoli del tasso in glutatione tra carpe normalmente alimentate e carpe mantenute a lungo digiuno; per rilievi delicati i pesci si prestano ben poco a conclusioni sicure, per la lentezza del loro ricambio.

I valori medi ottenuti per la quantità di glutatione contenuta nel fegato di alcuni omeotermi, non si mostrano in genere molto diversi dai normali col cambiare di una condizione fisiologica, ed anche in alcuni stati patologici, come è stato trovato da Blanchetière e Binet⁽³⁾ in cani tenuti a diete esclusive, da Randoin e Fabre⁽⁴⁾ in colombi sottoposti all'ina-

(1) WALKER E., *A colour reaction for disulphides*. «Biochem. Journ.», vol. XIX, 1925.

(2) BLANCHETIÈRE A. et MÉLON L., *Sur la diffusion du glutathion dans le règne animal*. «C.-R. Soc. de Biol.», vol. XCVII, 1927.

(3) BLANCHETIÈRE A. et BINET L., *L'influence du régime sur la teneur en glutathion réduit des tissus du chien*. «C.-R. Soc. de Biol.», vol. XCV, 1926.

(4) RANDOIN L. et FABRE M. R., *Glutathion et avitaminose B chez les pigeons*. «Bull. de la Soc. de Chimie Biol.», vol. IX, 1927.

nizione e sottoalimentati, dal Di Mattei⁽¹⁾ in colombi resi paretici e paralitici, da Delore^{(2) (3)} in cavie tubercolose e in intossicazioni diverse, se si eccettuano i risultati ottenuti da Mélon⁽⁴⁾ su ratti alimentati con una dieta ricca in cistina, in cui si verifica un aumento del tasso in glutatione, e quelli di Blanchetière, Binet e Mélon⁽⁵⁾ su cani privati del pancreas, in cui se ne è osservata una diminuzione.

Se d'altra parte tanto nei casi sopra ricordati, come nel nostro, l'oscillazione si verifica solo entro certi limiti, in modo che le medie si mantengono molto vicine a quelle normali, non ci pare di poterne dedurre con Blanchetière e Binet l'*indipendenza* del tenore in tripeptide dagli stati fisiologici; date le forti differenze individuali che si riscontrano, non si potrebbe anche pensare a un rapido adattamento legato a parecchie cause non facilmente indagabili, tanto più che si tratta di un tripeptide, che può venire ossidato e trasformato in tanti modi nelle cellule viventi?

Prima di venire a conclusioni soddisfacenti in proposito, sarà necessario migliorare ancora il metodo di dosaggio, e condurre rigorosamente un gran numero di esperimenti su moltissime forme.

(1) DI MATTEI P., *Il glutatione dei tessuti nel beri-beri aviario*. « Biochim. e ter. Sperim. », anno XV, fasc. X, 1928.

(2) DELORE P., *Sur la teneur en glutathion réduit de divers organes du cobaye tuberculeux*. « C.-R. Soc. de Biol. », vol. XCVI, 1927.

(3) DELORE P., *Recherches sur la teneur en glutathion réduit des tissus animaux au cours de la tuberculose et de diverses intoxications*. « Bull. de la Soc. de Chimie Biol. », vol. IX, 1927.

(4) MÉLON L., *Influence d'une alimentation riche en cystine sur le glutathion des tissus*. « C.-R. Soc. de Biol. », vol. CI, 1929.

(5) BLANCHETIÈRE A., BINET L. et MÉLON L., *Influence de la dépancreatisation sur la teneur en glutathion réduit des tissus du chien*. « C.-R. Soc. de Biol. », vol. XCVII, 1927.

Biologia. — *Su alcune caratteristiche delle associazioni lagunari mediterranee*⁽¹⁾. Nota di G. BRUNELLI e N. APOLLONI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Le nostre conoscenze intorno alle associazioni lagunari sono molto limitate sebbene non manchino numerosi studi di sistematica sulla fauna lagunare specialmente veneta⁽³⁾ eseguiti in un tempo in cui il concetto di associazione, introdotto nella scienza da Möbius⁽⁴⁾, non era noto. Esistono è vero numerose ricerche sulle associazioni delle acque salmastre (brack-wässer) dei mari nordici e degli *Haffe* dei medesimi⁽⁵⁾: associazioni che non possono però paragonarsi a quelle delle nostre lagune per le differenti condizioni nelle oscillazioni termiche e di salsedine, imponenti le prime nelle nostre lagune in rapporto al loro piccolo volume d'acqua. Anche il lavoro di Steuer⁽⁶⁾ sulle saline, per quanto assai accurato, non serve molto al nostro scopo poichè l'ambiente della salina ha caratteristiche del tutto speciali data la sua forte salinità.

I più importanti lavori per le lagune mediterranee sono certamente quelli del Gourret⁽⁷⁾, sebbene quest'autore, pure appartenendo alla scuola biologica del Marion, per il tempo in cui furono eseguite le ricerche, non si sia preoccupato di individuare i caratteri di queste associazioni. Tale deficienza delle nostre conoscenze si rileva anche nei trattati di zoogeografia e di geografia ecologica come quelli di Hesse⁽⁸⁾ e di Dahl⁽⁹⁾ nei quali alle associazioni delle acque salmastre sono dedicati pochi periodi.

Per approfondire le nostre cognizioni intorno alla ecologia lagunare abbiamo cercato di fare accuratamente lo studio della fauna di fondo che caratterizza l'ambiente lagunare assai più del plancton, il quale nelle lagune è relativamente scarso.

La fauna lagunare vivente nel fondo è specialmente *iliofila* per usare

(1) Lavoro eseguito nel R. Laboratorio centrale di idrobiologia di Roma.

(2) Nella seduta del 2 marzo 1930.

(3) *Venezia e le sue lagune*. Vol. II, parte II, Venezia 1847.

(4) MÖBIUS K., *Die Auster und die Austernwirtschaft*. Berlin 1883.

(5) WILLER A., *Studien über das Frische Haff*. «Zeitsch. f. Fischerei», Bd. XXIII, Berlin 1925, pp. 317-379.

(6) STEUER A., *Biologisches Skizzenbuch für die Adria*. Leipzig u. Berlin 1910.

(7) GOURRET P., *Les Etangs saumâtres du midi de la France et leurs pêcheries*. «Annal. d. Musée d'Hist. Nat. d. Marseille», Tome V, 1897.

(8) HESSE R., *Tiergeographie*. Jena 1924.

(9) DAHL FR., *Ökologische Tiergeographie*. Erster Teil, Jena 1921.

un termine introdotto da Dahl⁽¹⁾. Chiameremo, per distinguerle dalle altre, le associazioni lagunari col termine di *almirobiocenosi* ⁽²⁾.

A questo studio abbiamo applicato anche il metodo di Petersen ⁽³⁾, per quanto gli imponenti fenomeni di mortalità (*tanatocenosi* di Wasmund) ⁽⁴⁾ rendano difficile il conteggio degli individui viventi, di fronte a quelli morti.

Lo studio delle *almirobiocenosi* riesce inoltre di grande interesse per la identificazione delle sedimentazioni di origine lagunare: tutte le discussioni sui laghi relitti fatte dai geologi per i bacini lacustri del Lazio e di altre località andrebbero riesaminate con la individuazione delle associazioni lagunari.

La classificazione dei molluschi mostra nel paragone tra le forme studiate da Gourret in Francia ⁽⁵⁾ da Willer in Germania ⁽⁶⁾ e tra quelle della laguna veneta ⁽⁷⁾, delle valli ferraresi ⁽⁸⁾ e della laguna di Orbetello notevoli fenomeni di concordanza per il ripetersi di specie assai comuni come appare dalle annesse tabelle.

Nella tabella I compaiono gli individui viventi nelle lagune italiane suddette, le specie della laguna veneta sono state ricavate in parte dall'opera citata, molte invece rappresentano nuovi reperti da materiale appositamente raccolto nelle valli venete.

Nell'elenco che Coen ⁽⁹⁾ fa dei molluschi viventi nell'Adriatico si ritrovano quelli veneti, non sono però precisate le stazioni ove gli individui furono presi.

Tutte le specie della laguna di Orbetello sono attualmente viventi e determinate su materiale raccolto nello stagno a cura di questo R. Laboratorio.

(1) Id. nota precedente.

(2) Già LEMMERMANN E. aveva parlato di *Hiphalmyroplankton* nel suo lavoro: *Zur Kenntnis der Algenflora des Saaler Boddens*. «Forschungsber. d. biol. Stat. in Plön.», VIII. Teil, pp. 74-85.

(3) PETERSEN C. G. J. and JENSEN P. B., *Valuation of the Sea I, Animal life of the Sea-Bottom, its food and quantity*. «Reports of the Danish Biological Station», vol. XX, 1911. PETERSEN C. G. J., *Valuation of the Sea II, The Animal communities of the sea-bottom and their importance for marine zoogeography*. Idem., vol. XXI, 1913; *On the animal communities of the sea-bottom in the Skagerak, the Christiania Fjord and the Danish waters*. Idem., vol. XXIII, 1915.

(4) WASMUND E., *Biocenose und Thanatocenose*. «Archiv f. Hydrobiolog.», Bd. XVII, 1926, pp. 1-116.

(5) Op. cit.

(6) Op. cit.

(7) Op. cit.

(8) BRIGHENTI D., *Ricerche biologiche sulle valli salse della Mesola*. «Boll. di Pesca, Piscic. e Idrobiol.», fasc. III, 1929, pp. 492-537.

(9) COEN G. S., *Contributo allo studio della fauna malacologica adriatica*. «R. Comitato Talassografico Ital.», Mem. XLVI, Venezia 1914.

Le Tabelle II e III mostrano la concordanza esistente tra i molluschi degli stagni francesi e degli *Haffe* tedeschi con quelli viventi nelle lagune italiane.

Nelle tabelle non sono stati riportati tutti i generi citati dai diversi autori, ma soltanto quelli che si ripetono nelle varie lagune.

Un'altro fatto molto importante è la presenza di numerosi Capitellidi nel fango dello stagno di Orbetello, che rende la fauna dei fanghi lagunari molto simile a quella dei fanghi luridi del golfo di Napoli studiati da Wilhelmi⁽¹⁾. Tale concordanza di vita è tutt'altro che fortuita, quando si pensi agli imponenti fenomeni di putrefazione che rendono l'ambiente lagunare povero di ossigeno e ricco di sostanze organiche⁽²⁾, assai simile a quello dei fanghi dei porti. Anche i Chironomidi che vivono nelle acque inquinate rientrano tra le forme caratteristiche della facies salmastra lagunare.

Le valli della laguna veneta si mostrano invece, almeno in apparenza, più ricche di Policheti della famiglia delle Nereidi.

Comunque la fauna di fondo lagunare, la quale è in rapporto con la vegetazione della laguna, offre ai pesci un ricco pascolo.

Si comprende senz'altro il predominio nella ittiofauna lagunare di pesci come i muggini⁽³⁾ che si nutrono di sostanze in decomposizione, oppure come le orate, malacofagi, mentre spigole e anguille si nutrono alla lor volta di crostacei e di pesci più minuti. Mancano alla ittiofauna lagunare pesci plantofagi se si eccettuano le acquadelle (lattarini) e i ciprinodonti (*Cyprinodon calaritanus*); quest'ultimo trova evidentemente un pascolo nelle larve di ditteri: Chironomidi e Culicidi.

Uno studio più approfondito che ci riserbiamo di compiere per le lagune di Orbetello e di Venezia mostrerà evidentemente che ci sono anche forme appartenenti ad altri gruppi sistematici le quali costituiscono ciò che Blegvad⁽⁴⁾ intende col termine di *epifauna*: ci riferiamo cioè alle attinie trovate su conchiglie di *Cardium edule* L. che evidentemente debbono rientrare nelle forme caratteristiche delle associazioni lagunari.

Non è escluso che approfondendo le nostre conoscenze su tale argomento si potrà arrivare al concetto di associazione distinguendone gli

(1) WILHELM J., *Die makroskopische Fauna des Golfes von Neapel, vom Standpunkt der biologischen Analyse des Wassers betrachtet. Entwurf einer biologischen Analyse des Meerwassers.* « Mitt. a. d. Kgl. Prüf. f. Wasserversorgung u. Abwasserbes. zu Berlin », 1912, Heft 16.

(2) BRUNELLI G., *Limnologia e ricerche lagunari.* « Atti d. Congr. Inter. di Limnologia teorica ed applicata », Roma 1929, pp. 249-251.

(3) BRUNELLI G., *Osservazioni sulle condizioni che determinano la montata dei mugili, con considerazioni sull'adattamento dei teleostei alla vita lagunare.* « R. Com. Talass. Ital. », Mem. LIX, 1916, p. 26.

(4) BLEGVAD H., *On the food of fishes in the Danish waters within the Skaw.* « Reports of the Danish Biological Station », vol. XXIV, 1916.

ecoidi secondo le tendenze moderne della Sinecologia introdotte da Gams ⁽¹⁾, Negri ⁽²⁾ e da altri autori nel campo della botanica.

Si fa notare che le presenti ricerche mentre interessano la ecologia e la biogeografia, hanno altresì notevole importanza per la industria della vallicoltura, in quanto i pesci delle valli si nutrono dei pascoli lagunari, nei quali la fauna di fondo è preponderante ⁽³⁾.

TABELLA I.

Laguna veneta	Laguna di Orbetello	Valli salse della Mesola
<i>Bulla hydatidis</i> , L.*	<i>Bulla (Haminea) hydatidis</i> , L.	
<i>Cyclonassa neritea</i> , L.	<i>Cyclonassa neritea</i> , L.	<i>Cyclonassa neritea</i> , Mtrs.
<i>Murex trunculus</i> , L.*	{ <i>Murex</i> sp.	
<i>Murex brandaris</i> , L.*		
<i>Cerythium vulgatum</i> , Brug.*	{ <i>Cerythium</i> sp.	
<i>Cerythium</i> (sic) <i>lima</i> , Brug.*		
	<i>Cerythium rupestre</i> , Ris.	
<i>Rissoa</i> sp.*	<i>Rissoa</i> sp.	
<i>Hydrobia ulvae</i> , Pen.	<i>Hydrobia ulvae</i> , Pen.	<i>Peringia ulvae</i> , Pen.
<i>Gibbula adansoni</i> , Payr.	<i>Gibbula adansoni</i> , Payr.	<i>Gibbula adansoni</i> , var. <i>adriatica</i> , Brus.
<i>Mytilus edulis</i> , L.	<i>Mytilus edulis</i> , L.	
<i>Cardium edule</i> , L.	<i>Cardium edule</i> , L.	<i>Cardium edule</i> , L.
<i>Loripes lactea</i> , L.	<i>Loripes lactea</i> , L.	
<i>Synedasma ovata</i> , Ph.	<i>Synedasma ovata</i> , Ph.	

Nota. — Gli antichi autori citano soltanto le specie contrassegnate dall'asterisco. Le specie *Bulla (Haminea) hydatidis*, L. e *Cerythium vulgatum*, Brug. sono state però anche determinate dal materiale raccolto appositamente in laguna.

(1) GAMS H., *Prinzipienfragen der Vegetationsforschung. Ein Beitrag zur Begriffsklärung und Methodik der Biocönologie*. « Vierteljahrsschr. d. naturforsch. Ges. in Zürich », 63, 1918.

(2) NEGRI, *Sociologia vegetale o Sinecologia?* « Atti del Congresso della Soc. It. d. Progresso d. Scienze. 15 Riunione Bologna ». Roma 1927.

(3) Il presente lavoro è stato diretto da uno di noi (Brunelli) mentre l'altro (Apoloni) si è specialmente occupato della determinazione dei molluschi.

TABELLA II.

Stagni salmastri della Francia	Laguna veneta	Laguna di Orbetello	Valli salse della Mesola
<i>Haminea bydatia</i> , Ad.	<i>Bulla bydatia</i> , L.	<i>Bulla (Haminea) bydatia</i> , L.	
<i>Nassa mutabilis</i> , L.			
» <i>reticulata</i> , Flem.			
» <i>corniculatum</i> , Petit.			
» <i>monilifera</i>	<i>Cyclonassa neritea</i> , L.	<i>Cyclonassa neritea</i> , L.	<i>Cyclonassa neritea</i> , L.
<i>Cyclonassa neritea</i> , Mtrs.			
<i>Murex erinaceus</i> , L.			
» <i>truncatus</i> , L.			
<i>Cerythium vulgatum</i> , Brug.	<i>Murex truncatus</i> , L.	<i>Murex</i> sp.	
	» <i>brandaris</i> , L.	<i>Cerythium</i> sp.	
	<i>Cerythium vulgatum</i> , Brug.		
<i>Rissoa oblonga</i> , Desm.	<i>Rissoa</i> sp.	<i>Rissoa</i> sp.	
» <i>venusta</i> , Ph.			
» <i>lineolata</i> , Mich.			
» <i>ventrosa</i>			
<i>Hydrobia ulvae</i> , Pen.	<i>Hydrobia ulvae</i> , Pen.	<i>Hydrobia ulvae</i> , Pen.	<i>Peringia ulvae</i> , Pen.
<i>Trochus (Gibbula) adriaticus</i> (Phil.) Monter.	<i>Gibbula adansoni</i> , Payr.	<i>Gibbula adansoni</i> , Payr.	<i>Gibbula adansoni</i> , var. <i>adriatica</i> , Brus.
<i>Mytilus galloprovincialis</i> , Lmk.	<i>Mytilus edulis</i> , L.	<i>Mytilus edulis</i> , L.	<i>Cardium edule</i> , L.
» <i>crispus</i> , var. <i>cylindraceus</i> , Reg.			
<i>Cardium edule</i> , L.			
<i>Loripes lactea</i> , Poli.			
<i>Syndesmya ovata</i> , Wkff.	<i>Syndesmya ovata</i> , Ph.	<i>Syndesmya ovata</i> , Ph.	

TABELLA III.

Frische Haff	Laguna veneta	Laguna di Orbetello	Valli salse della Mesola
<i>Hydrobia balthica</i> , Nils.			
	<i>Hydrobia ulvae</i> , Penn.	<i>Hydrobia ulvae</i> , Pen.	<i>Peringia ulvae</i> , Pen.
<i>Mytilus edulis</i> , L.	<i>Mytilus edulis</i> , L.	<i>Mytilus edulis</i> , L.	
<i>Cardium edule</i> , L.	<i>Cardium edule</i> , L.	<i>Cardium edule</i> , L.	<i>Cardium edule</i> , L.

Fisiologia vegetale. — Sulla azione biologica della radiazione penetrante (raggi cosmici o ultra- γ) sopra lo sviluppo di semi di vegetali terrestri⁽¹⁾. Nota II di V. RIVERA, presentata⁽²⁾ dal Socio R. PIROTTA.

In una Nota precedente abbiamo riportato le prove eseguite a tutto giugno 1929 nel lago di Castalgandolfo presso Roma, prove che ci hanno permesso di escludere che alla radiazione ultra- γ si debba far risalire la eccitazione alla divisione cellulare in semi germinanti, ma non abbiamo potuto riferire sopra prove comparative, allora solo all'inizio, sopra semi germinanti sotto l'influenza della radiazione al confronto di altri opportunamente schermati.

Ben tre impianti di prove fatte nel periodo estivo-autunale andarono perduti per burrasche (così frequenti in quel lago) che distrussero i galleggianti, sicché si è dovuto attendere fino a febbraio di quest'anno per disporre di prove complete e numerose.

Semi di diverse specie vegetali (ceci, favetta, pisello da foraggio, veccia, soia, medica, avena, frumento, orzo) furono posti a germinare in recipienti di vetro con sabbia inumidita, rinchiusi in apparecchi di ghisa cilindrici a perfetta tenuta di acqua ed immediatamente calati a diverse profondità nell'acqua (metri 1,50; 15; 95).

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Patologia Vegetale del R. Istituto Superiore Agrario di Perugia.

(2) Nella seduta del 2 marzo 1930.

(3) I dati numerici di questi rilievi sperimentali saranno esposti in un lavoro successivo.

Dopo 10 giorni si ritiravano gli apparecchi dall'acqua e si potè costantemente osservare che:

a) I germogli ottenuti a metri 15 di profondità apparivano apprezzabilmente più avanti nello sviluppo, che non quelli del controllo tenuto alla profondità di m. 1,50 e perciò investito da una parte della radiazione penetrante e ciò sebbene la temperatura dell'acqua a m. 15 sia di qualche decimo inferiore a quella di m. 1,50 in giornate invernali e con cielo coperto;

b) I germogli sviluppatisi a m. 95 di profondità, cioè sottratti completamente alla radiazione penetrante, apparivano di eguale o maggiore sviluppo di quelli cresciuti a m. 1,50: ciò è degno di rilievo, perchè alla profondità di m. 95 i semi in germinazione hanno lo svantaggio di una temperatura notevolmente inferiore (almeno un grado in giornate invernali fredde e con tempo coperto e molto più in giornate anche invernali, ma calde e di pieno sole ⁽²⁾).

Il compenso a questo svantaggio è dato, a nostro giudizio, dalla esclusione della radiazione penetrante.

Questi rilievi permettono di stabilire che non solo *la radiazione penetrante* non influisce positivamente sopra la germinazione di semi di piante terrestri, ma che essa ha invece sulla germinazione *una influenza lievemente depressiva* (ritardatrice dell'inizio di germinazione o rallentatrice dell'accrescimento dei germogli nati).

La azione biologica di questa radiazione non è dunque diversa ed in discordanza con quella esplicita da altre radiazioni pure di corta lunghezza d'onda (ottave immediatamente successive della gamma delle radiazioni conosciute e cioè raggi γ e raggi x) così come chi scrive queste note ha avuto occasione di mettere in rilievo sopra organismi vegetali: la radiazione penetrante apparterebbe cioè alla categoria delle radiazioni ritardatrici della moltiplicazione cellulare (delle quali è anzi all'estremo della gamma), che sembra possano essere identificate in tutte quelle aventi lunghezza d'onda inferiore alle onde ultraviolette ($\lambda =$ inferiore a 114 Å), mentre le radiazioni eccitatrici dell'accrescimento sembra si debbano identificare in quelle a più lunga onda ($\lambda =$ maggiore di 7600 Å) e cioè nelle onde infrarosse, calorifiche ed eriziane, come meglio si cercherà di indicare in successivi lavori.

Fisiologia vegetale. — *Variazioni del contenuto in O_2 nelle vesciche idrostatiche di alcune alghe brune.* Nota preliminare di SILVIA COLLA, presentata⁽¹⁾ dal Socio A. HERLITZKA.

Il gas contenuto negli organi idrostatici di alcune alghe brune è stato oggetto di studi non numerosi, e vi fu riscontrata la presenza di ossigeno, azoto, anidride carbonica, ed, in qualche specie, anche di ossido di carbonio. Di quest'ultimo gas sono state studiate le variazioni durante la giornata, senza però tener conto delle eventuali contemporanee variazioni della miscela degli altri gas⁽²⁾. Quanto all'anidride carbonica, si sa che essa varia dal 2 al 4 per cento. Per ciò che riguarda l'ossigeno, i valori riscontrati nei vari casi oscillano tra limiti vasti, anche in una medesima specie.

In uno studio più vasto sulle vesciche idrostatiche di alcune feoficee, ho seguito il comportamento della percentuale dell'ossigeno contenutovi nelle varie ore della giornata. Riferisco qui i risultati delle osservazioni eseguite su vesciche di *Fucus serratus* L. La determinazione quantitativa dell'anidride carbonica e dell'ossigeno era fatta per mezzo del microanalizzatore di Krogh per l'analisi dei gas dei tessuti. La percentuale dell'anidride carbonica veniva determinata mediante l'assorbimento per parte di una soluzione di idrossido di potassio al 10 %, quindi quella dell'ossigeno con l'assorbimento per mezzo di una soluzione di pirogallolo, sciolto in soluzione satura di idrossido di potassio.

Il gas da esaminare era raccolto su glicerina acidulata con acido acetico, come consiglia Krogh per evitare le perdite di CO_2 .

Il gas venne estratto dalle vesciche con una siringa di Pravaz, munita di sottilissimo ago contenenti entrambi glicerina acidulata: la vescica veniva punta sott'acqua e pure sott'acqua si trovava il raccordo ago-siringa, mentre si estraeva il gas dalla vescica.

In tal modo si impediva ogni eventuale entrata di aria dall'esterno nella siringa. Le determinazioni vennero eseguite dal 24 settembre al 12 ottobre del 1929.

RISULTATI SPERIMENTALI.

Per determinare la curva della variazione giornaliera di O_2 , era necessario sapere se la quantità di ossigeno è costante nelle vesciche di uguale grandezza ed in quelle in via di sviluppo.

(1) Nella seduta del 16 marzo 1930.

(2) LANGDON e GAILY, « Bot. Gaz. », 1920, 70, 230.

Quattro campioni di gas ricavato da altrettante vesciche ugualmente sviluppate, raccolte alle dieci del mattino da uno stesso cespo vivente su rocce soleggiate, diedero le seguenti concentrazioni:

	I	II	III	IV
O ₂ %	47.7	48.3	43.2	49.5.

Il contenuto percentuale dello stesso gas contenuto in vesciche appartenenti ad un esemplare cresciuto in un luogo poco illuminato (raccolto pure alle ore 10 del mattino) fu trovato il seguente in sei vesciche diverse:

	I	II	III	IV	V	VI
O ₂ %	13.8	14.2	16.2	13.2	15.5	13.9.

Alcune vesciche, raccolte al mattino, in tre giorni successivi a cielo sereno e temperatura costante, prima che fossero illuminate dal sole, prelevandole da un unico esemplare in vario periodo di accrescimento, diedero un gas il cui contenuto in O₂ che è riportato nella tabella sottostante:

	I	II	III
Esemplari con vesciche in formazione . . . O ₂ %	15.1	15.9	14.7
» » » ben formate, ma non ancora confluenti. »	13.2	15.5	13.9
Esemplari confluenti »	13.8	14.2	16.2.

Le misure eseguite al mattino su esemplari posti in medesima località rilevarono così un'oscillazione della concentrazione dell'O₂ al massimo del 3 % . Il confronto poi tra i campioni di gas raccolti al mattino, all'ombra e quelli prelevati dopo qualche ora di irradiazione, permise di notare che le alghe all'ombra hanno un contenuto di O₂ minore di quello degli individui esposti al sole. Sebbene non si sia notata una diversità sistematica del contenuto d'ossigeno tra vesciche di diversa grandezza, ebbi cura, per lo studio della curva delle oscillazioni giornaliere del contenuto di O₂, di raccogliere il gas da vesciche di ugual grandezza, appartenenti ad uno stesso individuo. Per evitare le possibili influenze, dovute all'alta e alla bassa marea, staccai l'alga con un pezzo di roccia sospendendola poi ad un galleggiante.

Riporto qui una curva delle variazioni del gas studiato, ottenute da un individuo messo nelle condizioni sopra indicate. La temperatura dell'acqua era di 18° 3, il cielo sereno; i *fucus* in esperimento presero sole dalle 10 alle 18. Le determinazioni furono fatte dalle ore 7.30 alle 19, con inter-

valli di circa 25' in media fino alle 11.15, con intervalli di 30' fino alle 13.45 e di 40' fino alle 17, e poi ancora una determinazione alle 18 e una alle 19.

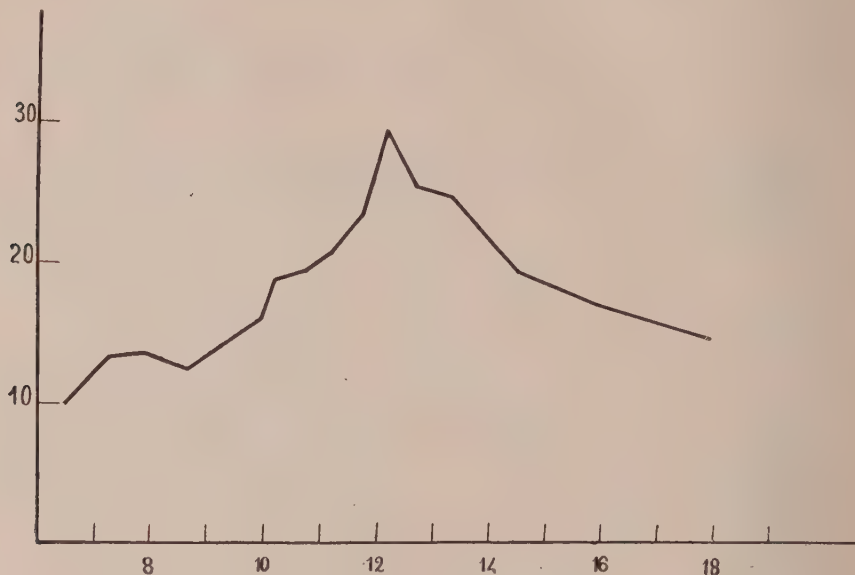


Fig. 1.

La seconda curva rappresenta il decorso della percentuale di O_2 del gas raccolto dalle vesciche di un unico cespito durante una giornata nuvolosa.

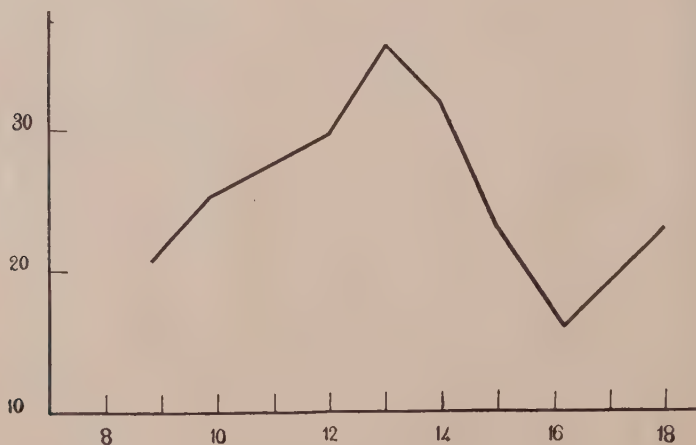


Fig. 2.

Le due curve non sono esattamente confrontabili, perchè nell'una (fig. 2), si parte da una percentuale di ossigeno superiore di quella iniziale della curva 1, nè noi sappiamo che importanza possa avere la tensione dell'ossigeno nelle vesciche rispetto alla formazione di nuovo gas. In ogni modo un fatto risulta evidente che col crescere della luminosità, sia di quella diffusa (curva 2) sia di quella diretta dal sole (curva 1), facendo astrazione da piccole oscillazioni esistenti nelle prime ore della mattina, dalle dieci circa si ha in ambo i casi un aumento della percentuale d'ossigeno, aumento che va crescendo per raggiungere il culmine verso le ore 13. Nel pomeriggio la curva si abbassa più lentamente di quanto era salita.

Per quello che riguarda la velocità dell'accumulo di ossigeno, data la irregolarità delle due curve, è difficile pronunziarsi in modo preciso. Tuttavia possiamo farcene un'idea approssimativa, unendo con una retta il valore iniziale e il valore estremo del tratto di curva che ci interessa, e determinando la tangente dell'angolo compreso tra l'ascissa e la retta.

Se consideriamo la curva tra le ore 10.30 e le 13 per le alghe all'ombra e tra le 10.15 e le 13.15 per quelle al sole, i due valori della tangente saranno rispettivamente 1.05 e 0.89; la produzione dell'ossigeno appare più rapida, sebbene di poco, nelle alghe all'ombra. Ma se limitiamo la nostra considerazione alle ore in cui il sole è più alto, cioè alla parte più alta della curva, cioè rispettivamente dalle 12 alle 13 per le alghe a luce diffusa e dalle 12.15 alle 13.15 per quelle al sole, i valori rispettivi delle tangenti saranno 0.98 e 1.43. Nelle vesciche al sole si è quindi verificato in questa ora un forte accumulo di ossigeno.

La poca diversità tra le due curve nell'aumento dell'ossigeno nelle ore in cui il sole è meno alto, non deve stupire, in quanto si sa⁽¹⁾, da un lato che la luce riflessa dalla superficie del mare è tanto maggiore quanto più basso è il sole, fino ad arrivare alla riflessione totale per un angolo di incidenza di 90°, dall'altro che l'assorbimento dei raggi, specialmente di quelli rossi, che anche nel caso delle alghe brune hanno un grande interesse sono fortemente assorbiti specialmente negli strati più superficiali. Calcolando che la profondità alla quale erano raccolte le vesciche fosse di circa 20 cm. dai dati di assorbimento esistenti si avrebbe che alle ore 10 l'87% delle radiazioni rosse giungerebbero all'alga, mentre alle 8.30 solo il 70% vi arriverebbe. Solo nelle ore del mezzogiorno, la quasi totalità delle radiazioni sarebbero utilizzate, e infatti in queste ore si ha la netta superiorità nell'aumento della percentuale dell'ossigeno per le vesciche esposte al sole diretto.

D'altro canto ancora è da osservare che non sappiamo nulla sulla quantità dell'ossigeno prodotto, potendo questo crescere anche notevolmente, senza una grande variazione nella percentuale, se contemporaneamente si

(1) F. VERCELLI, « Ist. Idr. R. Marina, Ann. Idrografici », vol. XI, 1926.

accumulano anche altri gas (CO_2) di cui non sappiamo se esistano oscillazioni giornaliere.

Infine è da osservare che un'altra causa della piccola differenza rilevata tra le due curve può ricercarsi nel fatto che l'acqua di mare aveva, nel giorno a cui si riferisce la 2^a curva, una temperatura maggiore di $1^\circ.7$ che nel giorno sereno.

Per controllare in altra guisa l'importanza della luce rispetto al contenuto di ossigeno nelle vesciche, ne ho tenute un certo numero all'oscurità per 12 e 24 ore, analizzando a questi intervalli il loro gas. Dopo 12 ore, riscontrai in tre casi un contenuto medio dell'1% di CO_2 e del 2.7% di O_2 . Dopo 24 ore, trovai pure l'1% di CO_2 e il 2% di O_2 .

Si potrebbe pensare che l'aumento della percentuale di ossigeno non dipenda da una produzione di questo gas, ma da una diminuzione degli altri gas presenti nella miscela. Sarebbe stato perciò mio desiderio determinare la pressione totale esistente nelle vesciche, ma fin d'ora ho urtato contro difficoltà tecniche che spero in avvenire di risolvere. Tuttavia già l'ispezione e la palpazione delle vesciche, ci permette di orientarci in proposito, in quanto nelle ore meridiane la tensione e la grandezza delle vesciche va evidentemente aumentando, mentre all'oscurità le vesciche diventano floscie o addirittura le pareti si accollano.

Le medesime alghe riportate nel loro ambiente normale, riprendono a dare O_2 nelle percentuali indicate.

Ho fatto anche un certo numero di analisi del contenuto delle vesciche di sargassi. Anche queste contengono ossigeno e anidride carbonica, oltre ad altri gas, che per ora non ho identificati. Anche qui, con l'illuminazione, varia la percentuale di O_2 . Così, alle ore 11, ho trovato valori intorno al 22% di O_2 , alle 13 tra il 24 e il 26%, alle 15 tra il 27 e il 28%, mentre in alcune vesciche al mattino alle 8 ho riscontrato una percentuale di O_2 del 16%.

Riassumendo, da tutti questi esperimenti risulta che l'ossigeno si raccoglie nelle vesciche delle alghe per effetto della illuminazione, mentre viene consumato o eliminato al buio. Viene quindi spontanea l'ipotesi che tale raccolta di ossigeno sia da considerarsi come effetto della fotosintesi.

A questo proposito ricorderò che Stiles e Langdon, studiando le variazioni dell'ossido di carbonio in una specie di *Nereocystis*, notarono incidentalmente che i gas contenuti negli organi di quest'alga, tenuti all'oscurità, variano con aumento della percentuale di ossido di carbonio e con diminuzione, fino al 2%, di quella dell'ossigeno. In questa alga della costa pacifica dell'America del nord si avrebbe dunque un fenomeno parallelo a quelli osservati da me nei *Fucus*.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 6 aprile 1930 (Anno VIII)

Presidenza del sen. prof. A. GARBASSO

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sulla meccanica ereditaria.* Nota ⁽¹⁾ del Socio
V. VOLTERRA.

1. In una recente Memoria ⁽²⁾ ho studiato la energetica nel caso della meccanica ereditaria, limitandomi al caso delle azioni ereditarie lineari. Nella presente Nota considero il caso di azioni non lineari, ma per semplicità tratto la questione per un sistema avente un solo grado di libertà rimanendo il caso generale ad un prossimo lavoro più esteso ⁽³⁾.

2. Sia q il parametro Lagrangiano del sistema, ossia la configurazione del sistema sia nota allorchè si conosce nell'istante attuale t il valore $q(t)$; ma supporremo che *dal punto di vista ereditario* lo stato del sistema resti definito solo quando si conosce $q(t - \tau)$ per tutti i valori di τ compresi fra 0 e T_0 . Si chiamerà T_0 la *durata dell'eredità*.

Lo *stato naturale* del sistema corrisponda a $q = 0$ durante un intervallo di tempo eguale a T_0 .

Portiamo ora il sistema dallo stato naturale nello stato individuato da

$$q(t - \tau) \quad \text{per} \quad 0 < \tau < T_0.$$

(1) Presentata nella seduta del 6 aprile 1930.

(2) *Sur la théorie mathématique des phénomènes héréditaires*. « Journal de Mathématiques », tome VII, fasc. III, 1928.

(3) Nella mia conferenza: *La teoria dei funzionali applicata ai fenomeni ereditarii* tenuta nel 1928 al Congresso dei Matematici di Bologna, ho dato un breve cenno del contenuto della presente Nota.

Ammettiamo che il lavoro necessario a questo scopo, detratto tutto quello che si è trasformato in calore o in altre forme di energia, sia dato da

$$P = F(q(t)) + \Phi \left| [q(t) - q(t - \frac{T_0}{\tau})] \right|$$

ove il primo termine è una funzione di funzione ordinaria di $q(t)$ ed il secondo è un funzionale della differenza $q(t) - q(t - \tau)$.

Formiamo il differenziale di P , ammettendo che quello di Φ sia regolare. Sarà

$$\begin{aligned} (1) \quad \delta P &= \frac{dF}{dq} \delta q(t) + \int_0^{T_0} \Phi' \left| [q(t) - q(t - \frac{T_0}{\tau}), \xi] \right| (\delta q(t) - \delta q(t - \xi)) d\xi \\ &= \left(\frac{dF}{dq} + \int_0^{T_0} \Phi' \left| [q(t) - q(t - \frac{T_0}{\tau}), \xi] \right| d\xi \right) \delta q(t) - \\ &\quad - \int_0^{T_0} \Phi' \left| [q(t) - q(t - \frac{T_0}{\tau}), \xi] \right| \delta q(t - \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Potremo assumere

$$(2) \quad M = - \frac{dF}{dq} - \int_0^{T_0} \Phi' \left| [q(t) - q(t - \frac{T_0}{\tau}), \xi] \right| d\xi$$

come la *forza interna* che agisce sul sistema nell'istante t ; il secondo termine di questa espressione sarà la *forza ereditaria*.

L'equazione del moto risulterà

$$(I) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{dF}{dq} + \int_0^{T_0} \Phi' \left| [q(t) - q(t - \frac{T_0}{\tau}), \xi] \right| d\xi = Q$$

essendo T la forza viva del sistema e Q la forza esterna.

Alle espressioni precedentemente considerate potremo dare un significato; così potremo considerare

$$\Phi' \left| [q(t) - q(t - \frac{T_0}{\tau}), \xi] \right| d\xi$$

come il contributo della forza ereditaria al tempo t che proviene dall'intervallo di tempo $(t - \xi, t - \xi - d\xi)$ e potremo considerare

$$\int_0^{T_0} \Phi' \left| [q(t) - q(t - \frac{T_0}{\tau}), \xi] \right| \delta(q(t) - q(t - \xi)) d\xi$$

come la variazione dell'energia potenziale dovuta alla variazione $\delta(q(t) - q(t - \tau))$ eseguita in ogni istante $t - \xi$ nell'intervallo $(t - T_0, t)$.

3. Poniamo

$$q(t) - q(t - \tau) = f(\tau)$$

$$\Phi' | [q(t) - q(t - \tau_0), \xi] | = \Psi' | [f(\tau_0), \xi] |.$$

Consideriamo poi il funzionale $X | [f(\tau_0), \xi] |$ che dipenda in modo speciale da $f(\xi)$ ⁽¹⁾ e soddisfi alla condizione

$$(3) \quad \delta X | [f(\tau_0), \xi] | = \Psi' | [f(\tau_0), \xi] | \delta f(\xi) + \int_0^{\tau_0} X' | [f(\tau), \xi, \eta] | \delta f(\eta) d\eta$$

mentre sia $X = 0$ per $f(\xi) = 0$.

Supponendo noto Ψ' , la ricerca di X corrisponde alla costruzione d'un funzionale di cui si conosce la *parte non regolare del differenziale*, onde questa ricerca si può paragonare ad una integrazione parziale.

Ammettiamo di variare $f(\tau)$ soltanto nelle vicinanze di $\tau = \xi$. Avremo in questa ipotesi

$$\delta X | [f(\tau_0), \xi] | = \Psi' | [f(\tau_0), \xi] | \delta f(\xi)$$

onde potremo scrivere

$$\int_0^{\tau_0} \Psi' | [f(\tau_0), \xi] | \delta f(\xi) d\xi = \int_0^{\tau_0} \delta X | [f(\tau), \xi] | d\xi.$$

Nel funzionale X noi possiamo supporre di cambiare ξ ; e di calcolare $\frac{dX}{d\xi}$. Con tale cambiamento cambia evidentemente $f(\xi)$; noi possiamo supporre di cambiare ξ e di mantenere inalterato $f(\xi)$; la corrispondente derivata si indicherà con $\frac{\partial X}{\partial \xi}$ ed avremo, come relazione fra le due derivate,

$$(4) \quad \frac{dX}{d\xi} = \frac{\partial X}{\partial \xi} + \Psi' | [f(\tau), \xi] | \frac{df(\xi)}{d\xi}$$

ossia

$$(5) \quad \int_0^{\tau_0} \frac{dX}{d\xi} d\xi = \int_0^{\tau_0} \frac{\partial X}{\partial \xi} d\xi + \int_0^{\tau_0} \Psi' | [f(\tau), \xi] | \frac{df(\xi)}{d\xi} d\xi.$$

(1) Vedi VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Chap. II, § 5. Paris, Gauthier-Villars, 1913.

Il primo membro di questa equazione potrà scriversi

$$X_{\xi=\tau_0} - X_{\xi=0} = X_{\xi=\tau_0}.$$

Infatti, per $\xi = 0$, noi abbiamo che

$$f(\xi) = q(t) - q(t - \xi)$$

si riduce a

$$q(t) - q(t) = 0$$

e quindi per quello che abbiamo supposto precedentemente

$$X_{\xi=0} = 0.$$

Dunque se noi supponiamo $X_{\xi=\tau_0} = 0$ il primo membro delle (5) sarà nullo, onde avremo

$$\int_0^{\tau_0} \frac{\partial X}{\partial \xi} d\xi = - \int_0^{\tau_0} \Psi' | [f(\tau), \xi] | \frac{df(\xi)}{d\xi} d\xi$$

ovvero

$$(6) \quad \int_0^{\tau_0} \frac{\partial X}{\partial \xi} = - \int_0^{\tau_0} \Phi' | [q(t) - q(t - \tau), \xi] | \frac{\partial(q(t) - q(t - \xi))}{\partial \xi} d\xi.$$

4. Ciò premesso riprendiamo l'equazione (I) e moltiplichiamo ambo i membri per $q'(t)$; si avrà

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(T + F) &= - \frac{dq(t)}{dt} \int_0^{\tau_0} \Phi' | [q(t) - q(t - \tau), \xi] | d\xi + Qq'(t) \\ &= - \int_0^{\tau_0} \Phi' | [q(t) - q(t - \tau), \xi] | \frac{\partial(q(t) - q(t - \xi))}{\partial t} d\xi - \\ &\quad - \int_0^{\tau_0} \Phi' | [q(t) - q(t - \tau), \xi] | \frac{\partial q(t - \xi)}{\partial t} d\xi + Qq'(t) \\ &= - \frac{d\Phi}{dt} - \int_0^{\tau_0} \Phi' | [q(t) - q(t - \tau), \xi] | \frac{\partial(q(t) - q(t - \xi))}{\partial \xi} d\xi + Qq'(t) \end{aligned}$$

e per la (6)

$$\frac{d}{dt}(T + F) = - \frac{d\Phi}{dt} + \int_0^{\tau_0} \frac{\partial X}{\partial \xi} d\xi + Qq'(t)$$

d'onde

$$\frac{d}{dt}(T + F + \Phi) - \int_0^{T_0} \frac{\partial X}{\partial \xi} d\xi = Qq'(t)$$

cioè

$$(II) \quad d(T + F + \Phi) - dt \int_0^{T_0} \frac{\partial X}{\partial \xi} d\xi = Qdq.$$

Se ora noi supponiamo che X sia una funzione decrescente di ξ , sarà $\frac{\partial X}{\partial \xi} < 0$ e quindi la equazione precedente ci dirà che il lavoro della forza esterna si trasforma in parte in energia cinetica e potenziale mentre una parte viene dissipata (cfr. Memoria citata, cap. II, § 1).

Il lavoro meccanico dissipato, ossia la *energia di dissipazione* sarà $-\int_0^{T_0} \frac{\partial X}{\partial \xi} d\xi$; perciò il solo *postulato energetico* da ammettere sarà che esista la funzione X , la quale verifichi la equazione (3), si annulli per $f(\xi) = 0$ e sia una funzione decrescente di ξ che diviene eguale a zero per $\xi = T_0$.

5. Per fare un confronto col caso della eredità lineare svolto nella citata memoria basta osservare che nel detto caso sarà

$$F(q) = \frac{1}{2}mq^2, \quad \text{con } m \text{ costante}$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_0^{T_0} F(\tau) (q(t) - q(t - \tau))^2 d\tau, \quad \text{con } \begin{cases} F(\tau) > 0, & \text{per } 0 \leq \tau < T_0 \\ F(T_0) = 0 \end{cases}$$

$$\delta\Phi = \int_0^{T_0} F(\xi) (q(t) - q(t - \xi)) (\delta q(t) - \delta q(t - \xi)) d\xi$$

$$M = -mq(t) - \int_0^{T_0} F(\xi) (q(t) - q(t - \xi)) d\xi$$

$$\Phi' = \Psi = F(\xi) (q(t) - q(t - \xi)) = F(\xi) f(\xi)$$

$$X = \frac{1}{2} F(\xi) f^2(\xi) = \frac{1}{2} F(\xi) (q(t) - q(t - \xi))^2$$

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} = \frac{d\chi}{d\xi} - \Psi f'(\xi) = \frac{1}{2} F'(\xi) f^2(\xi) < 0, \quad F'(\xi) < 0.$$

6. Un caso interessante (di cui quello lineare è un caso particolare) si ha nell'ipotesi che l'energia ereditaria Φ non dipenda che dai valori as-

soliti di $q(t) - q(t - \tau)$ e possa esprimersi mediante la serie convergente

$$\begin{aligned}
 (A) \quad \Phi &= \frac{1}{2} \int_0^{T_0} a_1(\tau_1) (q(t) - q(t - \tau_1))^2 d\tau_1 + \\
 &+ \frac{1}{2 \cdot 2} \int_0^{T_0} \int_0^{T_0} a_2(\tau_1, \tau_2) (q(t) - q(t - \tau_1))^2 (q(t) - q(t - \tau_2))^2 d\tau_1 d\tau_2 + \\
 &+ \dots \dots \dots \\
 &+ \frac{1}{2 n!} \int_0^{T_0} \dots \int_0^{T_0} a_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) (q(t) - q(t - \tau_1))^2 \dots (q(t) - \\
 &\quad - q(t - \tau_n))^2 d\tau_1, \dots, d\tau_n + \\
 &+ \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Le funzioni $a_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ si suppongono funzioni simmetriche delle variabili $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$.

Si avrà

$$\begin{aligned}
 &\Phi' | [q(t) - q(t - \tau), \xi] | = \\
 &= (q(t) - q(t - \xi)) \left\{ a_1(\xi) + \int_0^{T_0} a_2(\tau_1, \xi) (q(t) - q(t - \tau_1))^2 d\tau_1 + \dots + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{T_0} \dots \int_0^{T_0} a_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}, \xi) (q(t) - \right. \\
 &\quad \left. - q(t - \tau_1))^2 \dots (q(t) - q(t - \tau_{n-1}))^2 d\tau_1, \dots, d\tau_{n-1} + \dots \right\}.
 \end{aligned}$$

Calcoliamo adesso il funzionale X . Avremo

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{1}{2} (q(t) - q(t - \xi))^2 \left\{ a_1(\xi) + \int_0^{T_0} a_2(\tau_1, \xi) (q(t) - q(t - \tau_1))^2 d\tau_1 + \right. \\
 &\quad \left. + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{T_0} \dots \int_0^{T_0} a_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}, \xi) (q(t) - \right. \\
 &\quad \left. - q(t - \tau_1))^2 \dots (q(t) - q(t - \tau_{n-1}))^2 d\tau_1, \dots, d\tau_{n-1} + \dots \right\}.
 \end{aligned}$$

Evidentemente risulterà

$$X_{\xi=0} = 0$$

e se noi supponiamo che i coefficienti $a_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ si annullino quando una almeno delle variabili sia eguale a T_0 , avremo

$$X_{\xi=T_0} = 0.$$

Ponendo $a'_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}, \xi) = \frac{\partial a_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}, \xi)}{\partial \xi}$, e supponendo costante $f(\xi) = q(t) - q(t - \xi)$ (vedi form. (4)), otterremo

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \xi} = & \frac{1}{2} (q(t) - q(t - \xi))^2 \left\{ a'_1(\xi) + \int_0^{T_0} a'_2(\tau_1, \xi) (q(t) - q(t - \tau_1))^2 d\tau_1 + \right. \\ & + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{T_0} \dots \int_0^{T_0} a'_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}, \xi) (q(t) - \\ & \left. - q(t - \tau_1))^2 \dots (q(t) - q(t - \tau_{n-1}))^2 d\tau_1, \dots, d\tau_{n-1} + \dots \right\} \end{aligned}$$

e questa quantità sarà negativa, se tutte le a'_n saranno negative.

La energia di dissipazione sarà dunque

$$\begin{aligned} (B) \quad & \int_0^{T_0} \frac{\partial X}{\partial \xi} d\xi = \frac{1}{2} \int_0^{T_0} b_1(\tau_1) (q(t) - q(t - \tau))^2 d\tau_1 + \\ & + \frac{1}{2 \cdot 2} \int_0^{T_0} \int_0^{T_0} b_2(\tau_1, \tau_2) (q(t) - q(t - \tau_1))^2 (q(t) - q(t - \tau_2))^2 d\tau_1 d\tau_2 + \\ & + \dots \dots \dots \\ & + \frac{1}{2 n!} \int_0^{T_0} \dots \int_0^{T_0} b_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) (q(t) - q(t - \tau_1))^2 \dots (q(t) - \\ & \quad - q(t - \tau_n))^2 d\tau_1, \dots, d\tau_n + \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned}$$

avendo posto

$$(7) \quad b_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \sum_i^n \frac{\partial a_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)}{\partial \tau_i}.$$

Tutte le condizioni volute dal postulato energetico enunciato alla fine del § 4 saranno quindi soddisfatte.

Meccanica. — *Ancora sul moto di un corpo di massa variabile.* Nota⁽¹⁾ del Socio T. LEVI-CIVITA.

Riprenderò la questione⁽²⁾ *ab initio*, semplificandone in primo luogo l'impostazione secondo il suggerimento del collega Almansi⁽³⁾, che permette di evitare qualsiasi ammissione (che già non sia contenuta negli ordinari postulati della meccanica), riconducendosi al teorema delle quantità di moto.

Mostrerò poi come una ipotesi semplificatrice di natura statistica, che avevo ammessa senza discussione, risulta effettivamente giustificata, nel caso di un pianeta su cui cadono meteoriti, purchè la velocità media w^* di questi sia abbastanza piccola rispetto alla velocità v dello stesso pianeta, più precisamente tale che si possa trascurare $(w^*/v)^2$. Per giungere a questo risultato basta approfondire il calcolo indicato dal prof. Fermi in una lettera a me diretta, pubblicata anch'essa in questi « Rendiconti »⁽⁴⁾, dove si assume che valga, per le velocità dei meteoriti (supposti di eguale massa), la distribuzione maxwelliana (rispetto alle stelle fisse). Io assimilerò, più generalmente⁽⁵⁾, i meteoriti ad un insieme caotico di corpuscoli, in cui siano rappresentate, non soltanto tutte le velocità, ma anche tutte le masse.

Comunque, rimarrà confermata (sotto la limitazione testè riferita per w^*/v) la equazione del moto

$$(I) \quad \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F},$$

(in cui è evidente il significato delle lettere), quando, come nel caso suaccennato di un pianeta su cui cadono meteoriti, la massa va aumentando per aggregazione di corpuscoli. Invece, nel caso dell'emissione (irraggiamento), seguita a sussistere, pur variando m , l'equazione dinamica sotto la solita forma

$$(I') \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F},$$

contrariamente a quanto avevo asserito nella seconda delle citate mie Note dell'anno scorso *Aggiunta*, ecc. La ragione è semplicemente una svista ma-

(1) Presentata nella seduta del 6 aprile 1930.

(2) Di cui a pp. 329-333, 621-622 del vol. VIII (1929) di questi « Rendiconti ».

(3) In questi « Rendiconti », vol. IX (1929), pp. 1055-1056.

(4) Ibidem, pp. 984-986.

(5) Profittando delle conclusioni di una Nota testè pubblicata negli « Atti della Pontificia Accademia delle Scienze », anno LXXXIII, sessione IV del 16 marzo 1930.

teriale, commessa allora, assumendo μw quale misura dell'impulso che subisce un corpuscolo di massa μ , emesso con velocità (assoluta) w da un corpo in moto con velocità (assoluta) v . In realtà, siccome si tratta di emissione, si deve supporre che, immediatamente prima, il corpuscolo sia animato dalla stessa velocità v del corpo emittente, sicchè l'impulso risentito non è μw , ma $\mu(w - v)$. Tenendo conto di ciò, anche col ragionamento di allora, si arriverebbe, ben si intende, alla (I') [e non alla (I)].

Del resto già prima che apparisse l'*Aggiunta*, ecc., il prof. Persico era pervenuto per suo conto ⁽¹⁾ alla conclusione corretta che, nel caso dell'irraggiamento, deve appunto valere la (I').

I. — PIANETA SU CUI CADONO METEORITI.

Sia P un pianeta (o altro corpo celeste) la cui massa va aumentando per cattura di corpuscoli che esso incontra nella sua traiettoria.

Consideriamo un istante t , e un intervallo di tempo dt , abbastanza breve da potersi trattare come infinitesimo nei riguardi del moto di P, e, specificamente, della variazione di m e di v , ma d'altra parte abbastanza lungo per comprendere un numero grandissimo di urti (anelastici) coi corpuscoli.

Sia μ la massa di uno generico di questi, w la rispettiva velocità immediatamente prima dell'urto: s'intende, come già v , velocità assoluta, nel solito senso della meccanica classica. Sia **F** il risultante delle forze che sollecitano P (escluse le eventuali azioni provenienti dai corpuscoli).

Applichiamo al sistema, costituito da P (quale entità materiale di massa m , definita dallo stato in cui si trova all'istante t), e dai corpuscoli che vi cadono all'intervallo dt , il teorema delle quantità di moto, relativo appunto a dt . La variazione di quantità di moto è, per P, mdv ; per l'insieme suindicato di corpuscoli, siccome ciascuno di essi acquista la velocità di P, all'istante dell'urto, che differisce da v per un vettore infinitesimo ε (dell'ordine di dt), si ha

$$\sum \mu (v + \varepsilon - w).$$

$\sum \mu$ non è altro che dm , sicchè, a meno di infinitesimi di ordine superiore, rimane

$$dmv - \sum \mu w.$$

(1) Nelle sue *Lezioni di Meccanica razionale* (Firenze, Poligrafica Universitaria, 1929), p. 166. Cfr. altresì Sir J. H. JEANS, *Astronomy and Cosmogony* (Cambridge University Press, 1929), p. 298.

Eguagliando la variazione complessiva di quantità di moto all'impulso $F dt$ delle forze esterne al sistema (identificando con quelle che agiscono sul pianeta), si ha l'equazione

$$(1) \quad d(mv) = F dt + \sum \mu w,$$

e tutto è ricondotto al calcolo di

$$(2) \quad Q = \sum \mu w,$$

che è manifestamente nullo per simmetria (statistica), quando è nullo la velocità di P , e che lo aveva, senza discussione, posto eguale a zero per qualsiasi w .

2. - CORPO CHE IRRAGGIA.

Applichiamo analogamente il teorema delle quantità di moto al caso dell'irraggiamento, cioè al caso in cui la massa m di P , nel tempuscolo considerato dt , diminuisce di dm per emissione di corpuscoli (di massa μ e velocità w). Provenendo tali corpuscoli dalla disintegrazione di P , la loro velocità immediatamente anteriore all'emissione è v , sicché la variazione di quantità di moto nel tempuscolo dt vale

$$\sum \mu (w - v),$$

che si identifica col prodotto di $\sum \mu = dm$ per la velocità relativa a P del baricentro dei corpuscoli emessi durante l'intervallo elementare di cui si tratta. Ammetteremo, come è naturale, che l'emissione da P avvenga, rispetto allo stesso P , equabilmente in tutte le direzioni. Il prodotto contribuito è dunque senz'altro eguale a zero, e resta unicamente la variazione della quantità di moto di P , o, più precisamente, della parte che non si disintegra, la quale variazione è $(m - dm) dv$, ossia, a meno di infinitesimi d'ordine superiore, mdv .

Eguagliando a $F dt$, risulta, come si è annunciato, l'ordinaria equazione

$$(1') \quad m \frac{dv}{dt} = F.$$

3. - CALCOLO DEL TERMINE ADDIZIONALE $Q = \sum \mu w$

Introduciamo le quantità di moto dei singoli corpuscoli

$$(3) \quad p = \mu w$$

e lo spazio (euclideo) ω rappresentativo dei vettori p , ossia del loro estremi M , in quanto si suppongano spiccati tutti da una medesima ori-

gine O. Siano p_1, p_2, p_3 le coordinate cartesiane di M (cioè le componenti di \mathbf{p} riferite ad un triedro trirettangolo coll'origine in O), p, θ, φ le corrispondenti coordinate polari. Un elemento di volume $d\tilde{\omega}$ avrà l'espressione

$$d\tilde{\omega} = dp_1 dp_2 dp_3,$$

ovvero, in coordinate polari,

$$(4) \quad d\tilde{\omega} = p^2 dp d\Omega,$$

dove

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$$

rappresenta un angolo solido elementare (elemento di sfera di raggio 1).

Come ha notato il Fermi⁽¹⁾, supponendo che μ sia la stessa per tutti i meteoriti, se f è la funzione di ripartizione, ossia se $f d\tilde{\omega}$ designa il numero di meteoriti (per unità di volume), le cui velocità, ad un generico istante t , appartengono a $d\tilde{\omega}$, l'analogo numero di quelli che cadono su P in un tempuscolo dt successivo a t può essere posto sotto la forma

$$\lambda f \Delta \cdot d\tilde{\omega},$$

dove λ è una costante (cioè non varia al variare dell'elemento $d\tilde{\omega}$), e

$$\Delta = |\mathbf{w} - \mathbf{v}|.$$

Siccome (n. 1) $\sum \mu = dm$, si ha senz'altro

$$(5) \quad dm = \lambda \int_{\tilde{\omega}} f \Delta \cdot d\tilde{\omega}, \quad \mathbf{Q} = \sum \mu \mathbf{w} = \lambda \int_{\tilde{\omega}} f \Delta \cdot \mathbf{p} d\tilde{\omega}.$$

Se la distribuzione è maxwelliana, f dipende unicamente da p (non dall'orientazione del vettore \mathbf{p}). D'altra parte, assumendo l'asse polare orientato come \mathbf{v} (all'istante t), e scrivendo $\frac{p}{\mu}$ per $|\mathbf{w}|$, v per $|\mathbf{v}|$, si ha

$$(6) \quad \Delta = |\mathbf{w} - \mathbf{v}| = \sqrt{\left(\frac{p}{\mu}\right)^2 + v^2 - 2 \frac{p}{\mu} v \cos \theta},$$

sicchè Δ dipende da p e da θ , ma non da φ .

Le componenti di \mathbf{p} sono

$$p \sin \theta \cos \varphi, \quad p \sin \theta \sin \varphi \text{ (trasversali),}$$

$$\text{e } p \cos \theta \text{ (longitudinale, ossia secondo } \mathbf{v});$$

perciò, proiettando sui tre assi la seconda delle (5), si riconosce immediatamente (in quanto si immagini eseguita nel secondo membro l'integra-

(1) Loc. cit.

zione rispetto a φ , o, più semplicemente, si invochino considerazioni di simmetria) che si annullano le due componenti trasversali, mentre, per la componente longitudinale Q_z , eliminando λ a mezzo della prima delle (5), risulta

$$Q_z = dm \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(p) \Delta \cdot p \cos \theta \cdot d\tilde{\omega} : \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(p) \Delta \cdot d\tilde{\omega}.$$

Espletiamo, tanto nel numeratore quanto nel denominatore, le tre integrazioni, eseguendo quella rispetto a φ , e scindendo quella relativa a θ nei due intervalli $0 - \pi/2$ e $\pi/2 - \pi$. Ove si ponga altresì

$$(7) \quad \Delta' = \sqrt{\left(\frac{p}{\mu}\right)^2 + v^2 + 2 \frac{p}{\mu} v \cos \theta},$$

$$(8) \quad Q_v = -dm \cdot u,$$

si ha

$$(9) \quad u = A/B,$$

essendo

$$(10) \quad \begin{cases} A = \int_0^{\infty} f p^2 dp \int_0^{\pi/2} (\Delta' - \Delta) \sin \theta \cos \theta d\theta, \\ B = \int_0^{\infty} f p^2 dp \int_{\pi/2}^{\pi} (\Delta' - \Delta) \sin \theta d\theta. \end{cases}$$

Ad analoghe conclusioni si arriva anche quando si inserri un po' più da presso la realtà, togliendo la restrizione che tutti i meteoriti abbiano la stessa massa, e introducendo invece l'ipotesi che siano (pur con diversa frequenza) rappresentate masse di ogni calibro. Se ne trae (veggasi la Nota citata dell'Accademia Pontificia) come funzione di distribuzione di massima probabilità, che fa riscontro alla ordinaria distribuzione maxwelliana,

$$f(\mu, p) = e^{-\mu^2} e^{-p^2/b^2},$$

dove b ed b designano due costanti caratteristiche.

Il vettore Q risulta ancora parallelo a v ; e seguitano a valere le (8) e (9). Soltanto A e B , anziché essere fornite dalle (10), hanno le espressioni seguenti:

$$(11) \quad \begin{cases} A = \int_0^{\infty} e^{-\mu^2} d\mu \int_0^{\infty} e^{-p^2/b^2} p^2 dp \int_0^{\pi/2} (\Delta' - \Delta) \sin \theta \cos \theta d\theta, \\ B = \int_0^{\infty} e^{-\mu^2} \mu d\mu \int_0^{\infty} e^{-p^2/b^2} p^2 dp \int_{\pi/2}^{\pi} (\Delta' - \Delta) \sin \theta d\theta. \end{cases}$$

4. - LIMITE SUPERIORE DI u - CONDIZIONE SOTTO CUI PUÒ FORSI,
NELLA (I), $\sum \mu w = 0$.

Ci riferiremo alle espressioni (II) di A e di B, più conformi alle circostanze di fatto pel caso dei meteoriti; ma va rilevato che, qualitativamente, anche le (IO) condurrebbero alla stessa conclusione.

Cominciamo col determinare il minimo valore della somma $\Delta' + \Delta$, al variare comunque di p e di μ nel campo dei valori positivi, e di θ fra 0 e $\pi/2$.

Vi si arriva molto semplicemente per via geometrica come segue: si fissi in un piano un punto C, per C una retta ad arbitrio, e su questa, da una parte e dall'altra di C, due punti F ed F', distanti v da C. Sia poi X un punto generico del piano, e si indichino con w e θ le sue coordinate polari rispetto al polo C e a CF come asse polare. Ove si ponga $w = p'\mu$, apparisce ovviamente dalle (6) e (7) che Δ e Δ' sono interpretabili come distanze di X dai punti F ed F' rispettivamente. Ora, al variare di X in tutto il piano, la somma delle sue distanze $\Delta = \overline{FX}$, $\Delta' = \overline{F'X}$ dai due punti fissi F, F' è sempre $\geq \overline{FF'} = 2v$, e raggiunge effettivamente il minimo valore $2v$ allora e allora soltanto che X appartiene al segmento FF'. Tale constatazione vale perfettamente anche nel caso che ci interessa, sebbene X vari soltanto in un quadrante, per essere θ compreso fra 0 e $\pi/2$, e p e μ suscettibili di tutti i valori positivi.

Possiamo pertanto ritenere, sotto il segno, sia in A che in B,

$$(12) \quad \Delta' + \Delta \geq 2v,$$

e quindi, attese le espressioni (6) e (7) di Δ e di Δ' ,

$$(13) \quad \Delta' - \Delta = \frac{\Delta'^2 - \Delta^2}{\Delta' + \Delta} = \frac{4v \frac{p}{\mu} \cos \theta}{\Delta' + \Delta} \leq 2 \frac{p}{\mu} \cos \theta.$$

Ne consegue, tutto essendo positivo tanto in A quanto in B,

$$A \leq 2 \int_0^\infty e^{-b\mu} \frac{d\mu}{\mu} \int_0^\infty e^{-bp^2/\mu} p^4 dp \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta,$$

$$B \geq 2v \int_0^\infty e^{-b\mu} \mu d\mu \int_0^\infty e^{-bp^2/\mu} p^2 dp \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta.$$

Ove si ricordino i valori ben noti (cfr. per es. n. 4 della citata mia Nota dell'Acc. Pontificia) $\frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{\mu}{b}\right)^{3/2}$, $\frac{3}{8} \sqrt{\pi} \left(\frac{\mu}{b}\right)^{5/2}$ dei due integrali

$$\int_0^{\infty} e^{-bp^2/\mu} p^2 dp \quad \text{e} \quad \int_0^{\infty} e^{-bp^2/\mu} p^4 dp,$$

si trova immediatamente, eseguendo le integrazioni interne,

$$A \leq \frac{\sqrt{\pi}}{4} b^{-5/2} \int_0^{\infty} e^{-b\mu} \mu^{3/2} d\mu,$$

$$B \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} b^{-3/2} \int_0^{\infty} e^{-b\mu} \mu^{5/2} d\mu.$$

Siccome, per la definizione della funzione Γ di Eulero, gli integrali dei secondi membri valgono ordinatamente $b^{-5/2} \Gamma(5/2)$, $b^{-7/2} \Gamma(7/2)$, ed è, per la prima proprietà della Γ , $\Gamma(7/2) = \frac{5}{2} \Gamma(5/2)$, così, per divisione, risulta senz'altro

$$\frac{A}{B} \leq \frac{1}{5} \frac{b}{h} \frac{1}{v}.$$

La (9) dà quindi

$$(14) \quad \frac{u}{v} \leq \frac{1}{5} \frac{b}{h} \frac{1}{v^2}.$$

Nella Nota già più volte ricordata sulla estensione della distribuzione maxwelliana al pulviscolo cosmico si è rilevato che il rapporto b/h (delle due costanti che figurano nella legge di ripartizione) si identifica colla velocità media quadratica $w^* = \sqrt{w^2}$ dell'insieme dei meteoriti; perciò la (14) può essere scritta

$$(14') \quad \frac{u}{v} \leq \frac{1}{5} \left(\frac{w^*}{v}\right)^2.$$

Riprendiamo oramai la (1) per apprezzarvi l'ordine di grandezza di $\sum \mu w = Q$ di fronte a $d(mv) = dm v + m dv$. Essendo, in base alla (8), $dm u$ il valore assoluto di Q , va preso naturalmente come termine di confronto il valore assoluto $dm v$ del primo addendo del primo membro. Il rapporto è u/v , e la (14') mostra in definitiva che sussiste la (1), come se $\sum \mu w = 0$, purchè soltanto risulti trascurabile il quadrato di w^*/v .

Meccanica. — *Oscillazioni del pendolo libero fotografate.*
Nota ⁽¹⁾ del Socio Straniero G. HAGEN S. J.

L'idea di fissare le oscillazioni del pendolo libero su carta fotografica fu concepita ed eseguita dal P. E. F. Pigot S. J., direttore della stazione sismica a Sydney, Australia. L'originale della fotografia, che qui si presenta, si trova alla Specola Vaticana.

L'importanza dell'immagine fotografica sta nel fatto che la seconda prova della rotazione della Terra, appare molto più chiara che non nell'esperimento fatto ad occhio.

Le oscillazioni ovali si allargano a misura che si accorciano e perciò la seguente metà di una completa oscillazione è sempre più curvata della precedente. Ne consegue che la palla, nel momento che è liberata dall'uncino cui è legata, possiede una velocità laterale; e la fotografia mostra che questa velocità è in direzione contraria alla grande deviazione; in altre parole, che la sua direzione è quella stessa in cui gira la Terra.

Il Foucault non la scoprì, poichè al suo esperimento mancò l'esattezza sufficiente. Fu il Secchi che per la prima volta mostrò che le oscillazioni sono sempre ovali e che la direzione in cui la palla devia dalla linea retta si accorda con quella della rotazione terrestre. Però nè lui, nè i suoi contemporanei fecero la riflessione che è proprio l'uncino fissato al muro che impartisce alla palla la velocità laterale. Chi fu il primo che riconobbe la causa della velocità laterale non si può chiaramente dedurre dalla letteratura.

Il matematico Binet e l'astronomo Airy e altri furono, come il Secchi stesso, dell'opinione che la forma ovale delle oscillazioni fosse causata da qualche disturbo dell'esperimento. Airy calcolò l'effetto di questo disturbo sulla deviazione grande, interpretata dal Foucault e espressa con la formola — $\omega \sin \varphi$, dove ω è la velocità angolare della Terra e φ la latitudine geografica del luogo ove si fa l'esperimento.

La correzione da applicarsi alla legge del seno, calcolata dall'Airy ⁽²⁾, ha questa forma:

$$+ \frac{3}{8} \frac{ab}{l^2} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

dove l significa la lunghezza del pendolo e g l'accelerazione della gravità, e a, b rispettivamente il lungo e corto semiasse degli ovali. Il valore di b si prende positivo quando si accorda con il segno di ω , negativo quando le curve ovali vanno in senso contrario.

(1) Presentata nella seduta del 6 aprile 1930.

(2) AIRY, « Mem. R. A. S. », vol. 20 (1850-1851) 121.

OSCILLAZIONI DEL PENDOLO LIBERO

fotografate dal Rev. P. E. F. Pigot. S. I. Collegio Riverview, Sydney, Australia.



Lunghezza 28 m., durata 2^h.0 con intervalli di 5^m, $\varphi = -33^{\circ} 51'7$
(ridotto al 1/9 dell'originale).

Airy, a quanto ci sembra, non pervenne alla conoscenza che il semiasse b deve essere sempre positivo, e che la sua stessa esistenza costituisce una seconda prova della rotazione diurna.

Il primo autore che calcolò esattamente il valore del semiasse minore b , sembra essere stato il P. Jullien S. J. Nel suo *Problèmes de Mécanique Rationnelle* ⁽¹⁾ diede la formola:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{l}{g}} \omega \sin \varphi.$$

Siccome le quantità l, g, φ sono costanti determinate, e l'esistenza della quantità b è assicurata dalla fotografia, ne segue sicuramente l'esistenza di ω , cioè l'esistenza della velocità angolare della Terra.

E così la rotazione della Terra è dimostrata meccanicamente dalle oscillazioni del pendolo libero in *due diversi modi*, del tutto indipendenti fra loro.

Matematica. — *Metodo generale per l'analisi delle periodicità nei diagrammi statistici e sperimentali.* Nota ⁽²⁾ del Corrispondente F. VERCELLI.

Si consideri una curva costituita di un certo numero n di elementi sinusoidali, fluttuanti attorno a un asse di ordinata A_0 . Indicando con T_i, A_i, α_i il periodo, l'ampiezza e la fase dell'elemento di ordine i , ove i varia da 1 a n , e con y, t l'ordinata e l'ascissa, la curva è rappresentata dalla relazione

$$(1) \quad y = A_0 + \sum_{i=1}^n A_i \sin \frac{2\pi}{T_i} (t + \alpha_i).$$

Le ordinate siano lette a intervalli uniformi Δt ; i valori ottenuti siano scritti su una linea, a intervalli equidistanti, e indicati nel modo seguente, per mettere in evidenza la simmetria di posizione attorno a una ordinata qualsiasi detta y_0 :

$$(2) \quad \dots, y'_3, y'_2, y'_1, y_0, y_1, y_2, y_3, \dots$$

Partendo dai valori della successione (2) si vogliono determinare le caratteristiche incognite T_i, A_i, α_i dei singoli elementi componenti.

(1) Parigi (1855) 232-235. La formula però vale soltanto per la prima oscillazione, poichè essa non tiene conto della resistenza causata dall'aria.

(2) Presentata nella seduta del 6 aprile 1930.

Il problema è più generale di quello considerato nei procedimenti dei *ciclogrammi*, miranti alla determinazione dei soli periodi; è distinto da quello risolto coll'*analisi armonica*, la quale suppone noti i periodi; ed è diverso dagli sviluppi in *serie di Fourier*, nei quali si considerano intervalli definiti di curva, e si impongono i periodi, mentre noi supponiamo che le successioni tipo (2) siano indefinite e che gli elementi periodici componenti abbiano significato fisico, e non semplice carattere matematico arbitrario.

Ad y_0 si sostituisca il valore η_0 definito da una combinazione lineare fra coppie di ordinate simmetriche rispetto a y_0 ; indicando con $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ un gruppo di $m + 1$ coefficienti indeterminati, si ponga, cioè

$$(3) \quad \eta_0 = 2 a_0 y_0 + a_1 (y_1 + y'_1) + a_2 (y_2 + y'_2) + \dots + a_m (y_m + y'_m).$$

Siccome le coppie $y_1, y'_1; y_2, y'_2; \dots; y_m, y'_m$ distano da y_0 rispettivamente di intervalli $\pm \Delta t; \pm 2 \Delta t; \dots; \pm m \Delta t$, sarà

$$(4) \quad \eta_0 = 2 A_0 (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_m) + \\ + 2 \sum_{i=1}^m \left(a_0 + a_i \cos \frac{2 \pi}{T_i} \cdot \Delta t + a_2 \cos \frac{2 \pi}{T_i} \cdot 2 \Delta t + \dots + a_m \cos \frac{2 \pi}{T_i} \cdot m \Delta t \right) \sin \frac{2 \pi}{T_i} (t + \alpha_i).$$

Il valore η_0 dato dalle (3) e (4) differisce dal corrispondente valore di y_0 dato dalla (1) solo nei coefficienti di ampiezza; i periodi e le fasi restano con immutato valore. Togliendo la restrizione della simmetria fra le ordinate, si otterrebbero combinazioni di tipo più generale; ma sarebbero normalmente variate le differenze di fase.

Dopo eseguita la combinazione (3) le ampiezze dei singoli armonici sono moltiplicate per i *fattori di amplificazione*:

$$(5) \quad 2 \left(a_0 + a_1 \cos \frac{2 \pi}{T_1} \cdot \Delta t + a_2 \cos \frac{2 \pi}{T_1} \cdot 2 \Delta t + \dots + a_m \cos \frac{2 \pi}{T_1} \cdot m \Delta t \right).$$

Ponendo $\Delta t = 1$, e assumendo tale grandezza come unità di misura dei periodi, basterà porre nella (5), al posto di T_i , i valori corrispondenti, per ottenere i fattori di amplificazione. Al valore $T_i = \infty$ corrisponde il fattore della costante A_0 .

Senza togliere generalità, si può porre $a_0 = 1$. Tale scelta influisce solo sulla scala delle ampiezze, non sui valori relativi dei coefficienti di amplificazione. Fissato il numero m dei coefficienti a_1, a_2, \dots, a_m , imponiamo la condizione che questi debbano annullare i fattori di amplificazione di m arbitrari elementi componenti. Si ottengono m equazioni lineari, con m incognite; il primo membro è dedotto sempre dalla (5), sostituendo a T_i i valori assegnati. Le soluzioni del sistema definiscono il gruppo dei coefficienti da adottare nella combinazione lineare (3) delle ordinate. Facendo

successivamente coincidere y_0 con ognuna delle ordinate della (2) ed eseguendo la combinazione (3), si deduce una successione del tipo:

$$(2') \quad \dots, \eta'_3, \eta'_2, \eta'_1, \eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$$

In questa sono eliminati m elementi, scelti ad arbitrio, e sono alterate le ampiezze dei residui elementi secondo rapporti noti, espressi dai corrispondenti fattori di amplificazione.

Nel passaggio dalla (2) alla (2') avviene dunque una *selezione* di elementi (altri dice *residuaione*, *distillazione*, ecc., per ragione di evidenti analogie). Scegliendo in modo opportuno il numero dei coefficienti e gli elementi che si vogliono eliminare, si giunge a successioni numeriche in cui sono presenti solo gli eventuali elementi con periodi compresi fra dati limiti. Senza introdurre soverchie complicazioni, tali limiti non possono essere ristretti indefinitamente. Ma, pur con pochissimi coefficienti, già si raggiungono limiti sufficienti per molti fra i casi che praticamente si possono considerare. Se, fra detti limiti, si presenta un solo elemento, questo risulta isolato. Il periodo è riconosciuto mediante figurazione grafica. L'elemento è riportato in giusta scala, ove già non lo sia, dividendo i valori della successione ottenuta per il fattore corrispondente di amplificazione.

Se la selezione porta non a un elemento isolato, ma a un gruppo di elementi, può convenire la scelta di altro schema di operazioni. Ove si dovesse però ricorrere a schemi troppo complessi, sarà preferibile eseguire la selezione con due o più distinti schemi, che portino allo stesso gruppo di elementi selezionati. I rapporti di ampiezza saranno generalmente assai diversi da uno ad altro caso. Con semplici operazioni, stabilite sulla base dei fattori di amplificazione, si potranno separare i singoli elementi.

Le condizioni di scelta fra i possibili gruppi di coefficienti da adottare sono limitate solo da ragioni di convenienza. Saranno preferibili gli schemi di operazioni con coefficienti piccoli, espressi da frazioni semplici, così da rendere rapide le moltiplicazioni per i valori da analizzare. Tabelle di moltiplicazione per i fattori scelti possono essere rapidamente preparate, così da ridurre i prodotti a semplici letture nelle tavole stesse. Per facilitare il lavoro conviene scrivere i coefficienti sul margine di un cartoncino a intervalli eguali a quelli della (2), e disposti nel modo seguente:

$$a_m, \dots, a_2, a_1, 2a_0, a_1, a_2, \dots, a_m.$$

Il cartoncino viene posto in corrispondenza dei valori della (2) e spostato di un intervallo dopo ogni combinazione.

A titolo di esempio sono riferiti nella tabella alcuni schemi di combinazioni e i relativi coefficienti di amplificazione.

Lo schema A seleziona gli elementi di minimo periodo. Conviene nel caso si sospetti la presenza di componenti con T prossimo a 2.

TABELLA.

Schemi	Coefficienti										Fattori di amplificazione corrispondenti ai periodi						
	$2a_0$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_6	a_8	a_{10}	2	3	4	6	8	12	16	32	∞
A	$\frac{1}{4}$	$-\frac{0.216}{4}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{0.033}{8}$	—	—	—	—	1	0.27	0	-0.02	-0.01	0	0	0	0
B	$\frac{1}{2}$	$-\frac{0.15}{2}$	$\frac{1}{4}$	0.15	—	—	—	—	0	1.20	1.0	0.30	0.07	-0.01	-0.01	0	0
C	0.83	$-\frac{0.42}{4}$	$\frac{1}{4}$	0.42	-0.16	—	—	—	0	2.5	1.0	0.	0.01	0.03	0.03	0.01	0
D	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{0.15}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0.15	—	—	0	3.0	0	1.20	1.0	0.30	0.07	-0.01	0
E	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	—	—	—	—	0	0.25	0	0	0.25	0.60	0.75	0.88	1.0
F	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{0.045}{2}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0.295	0	0	0	0	0	1.5	1.0	0	0
G	$-\frac{2}{3}$	0	0.471	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{0.805}{3}$	0	0	0	0	0	-3.0	0	1.07	0

Lo schema B è adatto per determinare un elemento con T compreso fra 3 e 4. Se è presente anche la componente con $T = 6$, è preferibile lo schema C. I piccoli residui di elementi di maggiore periodo, ove non siano trascurabili, potranno venire eliminati quando gli elementi stessi saranno stati precisati.

Gli stessi schemi B e C, ma con intervalli Δt raddoppiati, valgono per selezionare un elemento con T compreso fra 6 e 8.

Quando si debbano selezionare componenti con periodi più lunghi, occorre introdurre un maggior numero di coefficienti. Ciò facendo si ha però l'inconveniente che vengono fortemente esaltati taluni gruppi di elementi prossimi a quelli annullati. Conviene allora eseguire la selezione in due tempi. Nel primo si eliminano le onde brevi, come avviene con lo schema E. Nel secondo si selezionano le componenti volute. Ad esempio, dopo eseguita la combinazione E e partendo dai valori così ottenuti, si possono isolare elementi con $T = 12-16$ mediante la F, ovvero con $T = 24-32$ mediante la G. I fattori di amplificazione delle combinazioni composte EF, EG sono dati dai prodotti dei fattori delle combinazioni semplici. Eventuali residui di elementi diversi, come l'onda $T = 12$ nella combinazione G, si eliminano mediante sottrazione.

In altra pubblicazione darò sviluppi più estesi sull'argomento, per facilitare le applicazioni del metodo ai numerosi casi che la pratica può presentare.

Ogni elemento selezionato può essere sottratto dalla curva originale; questa si semplifica e sono rese più agevoli le successive operazioni. Ma ciò non è necessario; la selezione può essere fatta agendo sempre sui dati originali. Eventuali errori, in una determinazione, restano così senza influenza sulle operazioni successive. Inoltre si viene a diminuire di gran lunga il numero delle ordinate che restano mancanti, nella serie tipo (2') rispetto a quella di partenza (2). Ogni selezione implica infatti, come è evidente, la perdita di m ordinate ai due lati della successione, se m è il numero dei coefficienti adottati.

I diagrammi di osservazione, oltre a presentare eventuali elementi componenti periodici, sogliono avere fluttuazioni aperiodiche sovrapposte. Inoltre gli elementi periodici, o quasi periodici (è difficile, sulla base di soli dati sperimentali, precisare quale dei due appellativi meglio convenga), più che a forma di tipo sinusoidale semplice, sono assimilabili a forme con ampiezza variabile, amplificata o smorzata. Alla formola rappresentativa (1) si dovrebbe allora sostituire l'espressione seguente, nella quale k_i sono costanti e A_0 va considerata non più costante, ma funzione dell'ascissa t :

$$(1') \quad y = A_0(t) + \sum_{i=1}^n A_i e^{-k_i t} \sin \frac{2\pi}{T_i} (t + \alpha_i).$$

In precedenti pubblicazioni ⁽¹⁾ è dimostrato che alcune operazioni selettive degli elementi, dimostrate per il caso ristretto di elementi sinusoidali, valgono ancora nel caso generale di espressioni tipo $(1')$, purchè si operi su coppie di ordinate aventi fra loro intervalli notevolmente limitati rispetto ai periodi degli elementi che si vogliono eliminare. È dimostrato pure che le stesse operazioni convengono anche in alcuni casi di elementi periodici non sinusoidali. Dimostrazioni analoghe possono essere ripetute per le combinazioni lineari poste a base del nuovo metodo; si giunge alla conclusione che il metodo stesso può essere esteso a curve costituite di elementi variabili, sovrapposte a fluttuazioni irregolari, purchè si adottino opportune limitazioni nella scelta degli schemi usati per singole selezioni. Gli schemi dianzi indicati soddisfano a tale limitazione; le combinazioni composte, di cui fu fatta parola, sono particolarmente necessarie in presenza di irregolarità e di elementi variabili.

Alle citate pubblicazioni rinvio pure per più estese notizie e per la bibliografia in argomento. Si veggano anche il cap. XIV del trattato *Calcoli numerici, grafici e meccanici* del prof. Cassinis e una Nota del medesimo autore ⁽²⁾.

Il notissimo *Metodo delle residuazioni* del Chrystal e quelli analoghi sono evidentemente casi particolari del metodo generale descritto. I procedimenti derivati da quello del Chrystal, proposti nella citata Nota *Cimanalisi e applicazioni*, si riducono pure a combinazioni lineari fra coppie di ordinate simmetriche; è assai facile precisare i relativi coefficienti. Il principio posto a base del metodo generale è stato dunque già virtualmente seguito nei procedimenti anteriori. Posto però, come ora, a base per la scelta diretta degli schemi di arbitrarie combinazioni, esso assume ampia portata, consente di svincolarsi dalle « residuazioni » del Chrystal e porta ad operazioni molto più rapide e precise di quanto prima fosse possibile.

Il concetto generico di combinazioni lineari fra le ordinate è adottato anche in un recente lavoro del sig. Labrouste ⁽³⁾. Ma gli eleganti sviluppi dati da questo autore, che non fa alcun cenno sui lavori già esistenti in argomento, sono condotti in modo diverso da quello dianzi esposto. E il metodo, a cui egli, in definitiva, si attiene, si riduce sostanzialmente al fatto evidente che, sommando coppie di ordinate per l'estensione del periodo di uno fra i possibili elementi componenti, tale elemento si annulla; ripetendo,

(1) F. VERCELLI, *Oscillazioni periodiche e previsione della pressione barometrica*. « Mem. R. Ist. Lombardo », XXI, 1916, p. 309; *Nuovi esperimenti di previsioni meteorologiche*. « Riv. Marittima », marzo 1923; *Cimanalisi e applicazioni*. « Atti Soc. It. Progresso Scienze », XVII Riunione (Torino), 1928, p. 322.

(2) G. CASSINIS, *L'analisi periodale dei fenomeni ciclici*. « Atti dell'Istituto Naz. delle Assicurazioni », Roma, 1929.

(3) H. LABROUSTE, *Analyse des graphiques résultant de la superposition de sinusoides*. « Annales de l'Institut de Physique du Globe », Paris, 1930, p. 190.

sui dati ottenuti, analoga somma estesa al periodo di altro elemento, anche questo è eliminato, e così via. Si giunge così alla selezione di elementi sinusoidali aventi anche periodi assai prossimi. Il Lambrouste procede dagli elementi di maggiore periodo verso quelli più brevi. È facile constatare che il metodo non è applicabile in presenza di elementi variabili o di irregolarità.

Rispetto al metodo numerico che abbiamo qui proposto, tutti i procedimenti indicati nelle precedenti pubblicazioni, siano essi numerici, grafici o meccanici, appaiono meno soddisfacenti, sotto ogni punto di vista. Il nuovo metodo sembra particolarmente adatto in tutte le applicazioni che mirano alla estrapolazione delle curve, a scopo di previsione.

Geofisica. — *Sulla formola della gravità normale.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. G. SILVA.

In una mia precedente Nota ⁽²⁾, in cui ho esaminati i diversi modi secondo i quali può essere definita la gravità normale, concludevo con il dire che una formola definitiva per essa non può essere determinata dall'esperienza, ma deve essere fissata convenzionalmente, e, seguendo il Somigliana ⁽³⁾, aggiungevo che per ragioni di uniformità con le convenzioni riguardanti la direzione del vettore gravità terrestre, anche l'intensità di questo vettore dovrebbe essere fondata sulla forma ellissoidica di rotazione della superficie di riferimento delle misure geodetiche e sui valori numerici fissati recentemente per questa superficie.

Una convenzione analoga è fatta dagli astronomi per la distanza e per la latitudine geocentriche dei luoghi di osservazione; esse sono calcolate da lungo tempo nell'ipotesi che la superficie matematica della Terra sia un ellissoide di rotazione, il cui raggio equatoriale viene assunto per unità di misura delle distanze geocentriche e fin dal 1911, nella Conferenza internazionale delle Effemeridi astronomiche tenuta a Parigi, è stato fissato a questo scopo per schiacciamento del detto ellissoide il valore 1/297, adottato dai geodeti solo in epoca più recente.

Stabilito quel criterio, possono essere facilmente fissati, per quanto non in modo assoluto, i valori numerici dei coefficienti β e β_1 della espressione della gravità normale:

$$g = g_e (1 + \beta \sin^2 \varphi + \beta_1 \sin^2 2\varphi).$$

(1) Presentata nella seduta del 6 aprile 1930.

(2) G. SILVA, *Sulla definizione della gravità normale*. « Rend. della R. Acc. dei Lincei ». S. 6, vol. VIII, dicembre 1928.

(3) C. SOMIGLIANA, *Teoria generale del campo gravitazionale dell'ellissoide di rotazione*. « Mem. Soc. Astr. It. », vol. IV, p. 426, 1929.

Con le formole del Somigliana è facile riconoscere che β ha il valore 0,005 288 5 per g_e compreso fra 978,030 e 978,042 e il valore 0,005 288 4 per g_e compreso fra 978,042 e 978,053, mentre β_1 ha il valore 0,000 005 9.

Il valore di g_e non può invece essere fissato che dall'Unione geodetica e geofisica internazionale, su proposta della sua particolare Commissione gravimetrica, ed è naturale che per questo scopo vengano seguiti particolari criterî ed utilizzati i valori numerici già noti. Mi propongo di esporre qui un criterio molto elementare ed alcuni valori di g_e che ne discendono.

Il criterio a cui alludo è quello di imporre al valore g'_e da scegliersi per gravità all'equatore la condizione di rendere il valor medio della gravità superficiale terrestre, calcolato con i valori ellissoidici, testè citati, dei coefficienti β e β_1 , coincidente con quello g_m calcolato con l'una o con l'altra delle principali formole finora dedotte sperimentalmente.

Per valor medio della gravità sulla superficie terrestre assumerò l'espressione:

$$g_m = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} g \cos \varphi d\varphi = g_e \left(1 + \frac{1}{3} \beta + \frac{8}{15} \beta_1 \right).$$

Calcolato g_m sostituendo in questa espressione a g_e , β , β_1 i valori delle formole note della gravità normale, si ha poi g'_e dividendo g_m per 1,001 759 65, valore numerico dell'espressione contenuta nella parentesi della precedente formola per i valori ellissoidici di β e di β_1 . Si ottengono così i risultati del seguente specchietto, nel quale ho ommesso di indicare il valore -0,000 007 adottato per β_1 da tutti gli Autori. Va infatti ricordato che in tutte le ricerche dell'ultimo trentennio, aventi lo scopo di fissare una formola numerica esprimente il variare della gravità sulla superficie terrestre, si è sempre supposto che questa superficie avesse la forma di uno sferoide leggermente depresso alle latitudini medie rispetto all'ellissoide di eguale raggio equatoriale e asse polare; questa depressione, inferiore ai 3 metri, altera il valore del β_1 ellissoidico di una unità della sesta decimale.

	Formola	g_e	β	g_m	g'_e
1.	Helmert 1901 (1)	978,030	0,005 302	979,755	978,034
2.	Bowie 1912 (2)	038	304	764	043
3.	*Helmert 1915 (3)	052	285	771	050

(1) E. BORRASS, *Bericht über die relativen Messungen der Schwerkraft etc.* «Verhandl. der XVI Allg. Conf. d. Int. Erdm.», 1909.

(2) W. BOWIE, *Effect of topographie and isostatic compensation etc.* «Coast and Geod. Survey», Spec. Publ. n. 12, 1912.

(3) F. R. HELMERT, *Neue Formeln für den Verlauf der Schwerkraft etc.* «Sitz. Ber. der K. Pr. Ak. d. Wiss.», n. 41, p. 676, 1915.

	Formola		g_e	β	g_m	g'_e
4. *Berroth	1916 ⁽¹⁾	I	978,046	0,005 296	979,769	978,048
5. Berroth	»	I _a	039	305	765	044
6. »	»	II	054	281	772	051
7. Bowie	1917 ⁽²⁾		039	294	761	040
8. *Heiskanen	1924 ⁽³⁾	I	048	293	770	049
9. Heiskanen	»	I _a	052	285	771	050
10. »	1928 ⁽⁴⁾	I	049	293	771	050
11. »	»	I _a	044	301	769	048
12. »	»	I _b	049	289	770	049
13. »	»	II _a	051	289	772	051

Le formole contrassegnate da un asterisco contengono anche un termine variabile con la longitudine, ma il suo valor medio lungo un parallelo è nullo ed è quindi nullo il contributo che esso dà al valor medio superficiale g_m . Per ognuna delle tre coppie I, I_a: del Berroth (1916) e dello Heiskanen (del 1924 e del 1928), le stazioni considerate sono le medesime, ma in ciascuna coppia una formola contiene il termine in longitudine e l'altra no; è naturale che le due formole di una medesima coppia debbano dare risultati non molto diversi; la diversità dei due valori di g_m e di g'_e , che nel caso del Berroth raggiunge 0,004 deriva dalla non uniforme distribuzione delle stazioni sulla superficie terrestre.

Le formole del Berroth ai nn. 4 e 5 provengono da stazioni continentali e la prima di esse è da ritenersi, secondo lo stesso Berroth, la più importante fra le numerose formole date nella sua Memoria. Le sole stazioni costiere, in numero assai più limitato, danno risultati alquanto diversi; riunendo in un sistema unico di equazioni normali i due sistemi di equazioni che il Berroth dà separatamente per le stazioni continentali e per le stazioni costiere ho ottenuto la formola del n. 6 dell'elenco che costituisce perciò il risultato più importante delle ricerche del Berroth per lo scopo di questa Nota.

È superfluo ricordare che quasi tutte le formole qui considerate furono dedotte per calcolare dal valore di β , ottenuto da un grande complesso di

(1) A. BERROTH, *Die Erdgestalt und die Hauptträgheitsmomente etc.* «Gerlands Beiträge z. Geoph.», vol. XIV, 1916.

(2) W. BOWIE, *Investigation of gravity and isostasy.* «Coast and Geod. Survey», Spec. Publ. n. 40, 1917.

(3) W. HEISKANEN, *Untersuchungen über Schwerkraft und Isostasie* «Verhandl. der Finn. Geod. Inst.», n. 4, 1924.

(4) W. HEISKANEN, *Ist die Erde ein dreiachsiges Ellipsoid?* «Gerlands Beitr. z. Geod.», vol. XIX, 1928.

osservazioni gravimetriche e con notevole lavoro di calcolo, il valore dello schiacciamento α dello sferoide terrestre e, nei casi in cui si tenne nella formola anche il termine in longitudine, la cosiddetta ellitticità dell'equatore terrestre; il Berroth ha anche tenuto in varie formole da lui calcolate termini con i fattori $\sin \varphi$ e $\sin^2 \varphi$ per riconoscere se era possibile far risultare qualche dato indicante una dissimetria nella distribuzione delle masse terrestri nei due emisferi boreale ed australe. A differenza di tutti questi casi le formole I_b e II_a del 1928 dello Heiskanen sono ottenute fissando già *a priori* il valore di β calcolato mediante il valore $1/297$ dello schiacciamento α . Se questo valore di β differisce nell'ultima cifra decimale da quello ellissoidico da me sopra indicato si è perchè l'ipotesi sferoidica, come modifica l'espressione di β_1 , modifica altresì leggermente l'espressione di β .

Singolare è la concordanza tra i valori di g'_e ottenuti dalla formola dello Helmert del 1915, da quelle del Berroth ai nn. 4 e 6 e da tutte quelle dello Heiskanen, benchè i valori della gravità siano stati ridotti al mare con la sola correzione di Faye (in aria libera) dallo Helmert e dal Berroth, col metodo isostatico dallo Heiskanen e siano per la maggior parte privi di riduzione isostatica quelli ottenuti dal Vening-Meinesz che hanno servito da soli a calcolare la II_a (1928) elencata al n. 13.

Singolare è altresì la concordanza tra il g'_e che deriva da quest'ultima formola, fondata su sole osservazioni in mare, con i g'_e che derivano dalle altre formole fondate generalmente su osservazioni in stazioni continentali.

Nel dare la formola I_b (n. 12 dell'elenco) lo Heiskanen ricorda che nella riunione internazionale di Praga la questione di adoperare una formola corrispondente al valore $\alpha = 1/297$ è stata lasciata aperta. Se una formola si vorrà scegliere più tardi, egli aggiunge, essa dovrà essere molto simile alla I_b . Io ritengo che la formola I_b dello Heiskanen, leggermente modificata come segue nei coefficienti β e β_1 perchè corrispondano all'ipotesi ellissoidica, anzichè alla sferoidica:

$$g = 978,049 (1 + 0,005\,288\,4 \sin^2 \varphi + 0,000\,005\,9 \sin^2 2 \varphi)$$

abbia effettivamente tutti i requisiti per una tale scelta.

La formola di Helmert 1901 (ridotta al sistema di Potsdam nel 1909), che viene prevalentemente usata tuttora, ha non solo l'inconveniente di corrispondere ad uno sferoide alquanto diverso per forma e per schiacciamento dall'ellissoide internazionale, ma anche quello di dare, per ogni latitudine, valori della gravità più piccoli di quelli che derivano da tutte le numerose e più sicure formole dedotte posteriormente.

Astronomia. — *Sopra la distanza del nuovo pianeta ultranettuniano.*
Nota del Socio G. ARMELLINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Un circuito a due valvole emittente treni d'onda discontinui.*
Nota del Corrisp. M. LA ROSA e L. SESTA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Patologia. — *Sulla immunità contro l'adeno-carcinoma del topino conferita mediante la poltiglia dello stesso tumore con aggiunta di formolo.* Nota preliminare ⁽¹⁾ di G. TIZZONI e di G. DE ANGELIS.

Abbiamo riferito in precedenti lavori ⁽²⁾ i risultati da noi ottenuti con l'aggiunta del fenolo alla poltiglia dell'adeno-carcinoma del topino (Ehrlich) dimostrando che tale poltiglia, in seguito alla aggiunta dell'acido fenico fatta in determinate condizioni di tempo e di dose, perde ogni suo potere patogeno e si trasforma in un potente vaccino capace di immunizzare l'animale contro lo stesso virus dal quale il vaccino era stato preparato. Ciò in perfetta armonia con quanto si verifica in talune infezioni originate indubbiamente da virus filtrabili, quali la rabbia, il neuro-vaccino, l'herpes, ecc.

Ma, come è facile immaginare, noi non potevamo arrestarci a questo primo successo, chè anzi i risultati incoraggianti da noi conseguiti dovevano invitarci ad allargare, come effettivamente fu esteso, il nostro programma di studio, per vedere se gli stessi risultati relativi alla trasformazione della poltiglia cancerosa in vaccino si ottenessero, oltre che a mezzo del fenolo, anche con l'aggiunta di altri prodotti chimici o con l'azione di mezzi fisici quale il radio può sviluppare.

Postaci la questione in questi termini, noi non potevamo esitare nella scelta di un altro prodotto chimico da sperimentare che cadeva subito sul formolo, come quello che è già noto in altri casi per la proprietà che esso ha di trasformare le tossine propriamente dette, annullando completamente ogni loro azione patogena e trasformando la tossina stessa o la coltura che la contiene, in antigene molto potente, atto a determinare nell'animale,

(1) Presentata nella seduta del 6 aprile 1930.

(2) TIZZONI e DE ANGELIS. R. Accademia dei Lincei «Rendiconti», classe Scienze fisiche, matematiche ecc. Seduta 1° giugno 1929, vol. IX, serie 6^a, primo sem., fasc. II; Id., *Ancora sulla immunità contro il cancro conferita agli animali con autovaccino fenolato*, «Annali d'Igiene», anno XXXIX, fasc. 12, dicembre 1929.

quando l'iniezione sia più volte ripetuta, una immunità a grado molto elevato e di durata abbastanza lunga. In tal modo noi avremmo potuto stabilire chiaramente le differenze che si verificassero quando, invece del fenolo, si aggiungesse alla poltiglia cancerosa del formolo, che esercita appunto una azione prevalente sulle tossine.

Riguardo all'azione che il formolo esercita sulle tossine batteriche devono ricordarsi i lavori di Löwenstein, di Eisler e Löwenstein, di Eisler e Silberstein e specialmente quelli più recenti di Ramon e della sua scuola. Per l'azione che il formolo stesso esercita sui virus vogliamo citare le comunicazioni fatte in questi ultimi anni dall'Altara e da Levaditi in collaborazione con Sanchis Bayarri.

La tecnica delle nostre ricerche è molto semplice e del tutto conforme a quella precedentemente usata nelle prove del fenolo. La proporzione del formolo da noi adoperata è del 2.5 ‰; quella stessa a un dipresso che si suole usare per svelenare il filtrato di coltura del tetano e trasformarlo in vaccino; la proporzione della poltiglia formolata è identica a quella normale non formolata, cioè una parte di poltiglia tumorale e tre di acqua salata formolata; il formolo da noi usato è la solita formalina del commercio al 40 ‰ purissima (Schering).

Le provette che contengono la poltiglia cancerosa formolata vengono conservate in ghiacciaia e dopo trascorso il tempo voluto tale poltiglia è iniettata sotto la pelle del dorso del topino nella dose di 0.5 cc. per sperimentarne il potere vaccinante.

Finalmente trascorso il tempo voluto dalla iniezione del vaccino, che andava da un termine minimo di 13 giorni ad un termine massimo di 64, ma che più di frequente oscillava dai 15 ai 25 giorni, s'iniettava nuovamente l'animale con poltiglia virulenta molto attiva, alla dose di 0.5 cc., per provare se la precedente iniezione di vaccino aveva sortito, ed a qual grado, l'effetto desiderato di immunizzare il topino oppure no. Per ragioni facilmente intuibili l'iniezione di prova era praticata in un punto assai lontano da quello del vaccino e colla stessa poltiglia virulenta si facevano controlli, tanto su culture aerobiche e anaerobiche per constatarne la purezza, quanto con iniezioni in animali normali per verificarne la virulenza.

Il numero degli esperimenti da noi praticati in queste ricerche fu di 24; ma prima di farne un esame particolareggiato dobbiamo procedere ad una epurazione di tali esperimenti eliminando quelli nei quali la morte prematura dell'animale non permette di giudicare con tutta sicurezza sulla efficacia della vaccinazione; inoltre è opportuno far conoscere i criteri ai quali ci siamo attenuti in alcuni casi dubbi per decidere se un dato esperimento appartenga ad una categoria piuttosto che ad un'altra. In questo processo di eliminazione devono essere compresi due esperimenti, in cui l'animale venne a morte dopo 9 e dopo 15 giorni dalla iniezione di prova, cioè prima che fosse trascorso il tempo necessario per poter dare un valore

alla mancanza del tumore da noi scrupolosamente osservata e pienamente confermata alla autopsia.

Eliminati questi due esperimenti per le ragioni dette, ne rimangono a computo 22 solamente.

Riguardo ai dati che dobbiamo tener presenti in certi casi, nei quali si può rimanere in dubbio se debbano ascriversi ai risultati negativi od ai risultati incompleti, è bene si esponga quali sono i criteri che abbiamo seguito per superare queste difficoltà. Naturalmente noi siamo stati un po' larghi nel giudicare sugli esperimenti da includere fra quelli che ebbero risultato negativo, per evitare l'errore di attribuire in ogni caso la lunghezza del periodo di incubazione o quella del decorso della malattia con conseguente ritardo della morte dell'animale ad un primissimo grado di immunità determinata dalla vaccinazione. Certo quando i 3 fattori, lunghezza del periodo di incubazione, andamento ed esito della malattia, concordano fra loro assai facile è il giudizio per decidere se un determinato caso appartenga alla categoria dei risultati negativi od a quella dei risultati incompleti; ma nei casi nei quali manca questo accordo, noi riteniamo di dover dare maggior valore alla durata del periodo di incubazione come quello che assai meno del decorso della malattia e dell'epoca della morte risente nella influenza del tutto estranea allo esperimento praticato. Per queste ragioni noi abbiamo compreso fra i casi a risultato negativo anche quelli che hanno avuto *eccezionalmente* un periodo di incubazione di 15 giorni ed una durata di 45; viceversa abbiamo ascritti ai risultati incompleti due esperimenti nei quali, nonostante un periodo di incubazione di 18-20 giorni, la morte dell'animale, nel primo caso, avvenne dopo 43 giorni, nel secondo il tempo della morte non poteva essere determinato, perchè il topino fu sacrificato dopo 41 giorni dalla iniezione di prova quando il tumore era ancora in ottime condizioni.

Fatte le due esclusioni e dati i necessari chiarimenti per l'assegnazione di un esperimento ad una categoria piuttosto che ad un'altra dei 24 esperimenti praticati ne rimangono a computo 22 così ripartiti:

Risultati negativi	N. 10	= 45.4 %
» incompleti	» 5	= 22.7 %
» completi	» 7	= 31.8 %.

I *risultati negativi* come già si disse in altro lavoro ⁽¹⁾, comprendono i casi in cui si è sviluppato il tumore con evoluzione ed esito eguali, a un dipresso, a quelli che si verificano nei controlli, cioè con una incubazione del tumore che non eccede i 10 giorni e che solo eccezionalmente arriva ai 15, colla morte dell'animale che di regola avviene dopo 25-35 giorni

(1) « Annali d'Igiene », anno 39, fasc. 12, dicembre 1929.

dall'innesto della poltiglia virulenta, in rari casi fino a 45 giorni. Noi abbiamo fra i casi appartenenti a questa categoria una incubazione del tumore di 4-4-5-6-8-10-10-10-12-15 giorni. La morte dell'animale causata dal tumore si verificò dopo 34-35-38-43-45 giorni dall'iniezione di prova; negli altri cinque casi non fu possibile precisare quando sarebbe avvenuto l'esito letale, perchè gli animali furono sacrificati dopo 13-14-14-21-27 giorni quando il tumore era in pieno sviluppo ed in condizioni da potersi usare per innesti consecutivi.

I *risultati incompleti* comprendono gli esperimenti in cui la vaccinazione praticata ha rallentato il decorso della malattia e ritardata la morte dell'animale. I 5 casi nei quali questo risultato ebbe a verificarsi presentarono un periodo di incubazione di 10-18-20-21-25 giorni e la morte dell'animale avvenne rispettivamente dopo 54-43-41-82-99 giorni, non potendo essere precisata nel terzo caso, con periodo di incubazione di 20 giorni per essere stato sacrificato il topino dopo 41 giorni, quando presentava il tumore ancora in buono stato di conservazione.

I *risultati completi* sono quelli in cui, per effetto della vaccinazione il tumore è definitivamente impedito nel suo sviluppo. I 7 casi nei quali si verificò questo esito felice dello esperimento riguardano anzitutto un animale che presentò, dopo l'iniezione virulenta, un piccolo nodettino alla parte iniettata, che presto si riassorbì ed il topino dimostrò possedere una solida immunità, tanto da resistere ad una seconda iniezione virulenta praticata dopo alcuni mesi dalla prima. Fuori di questo caso che, alla prima iniezione virulenta presentò una reazione neoplastica alla parte, gli altri 6 non ebbero mai nulla per quanto fossero scrupolosamente e ripetutamente osservati.

Adunque, da quanto è stato fin qui esposto, apparisce chiaro che sopra 22 esperimenti in cui fu usato vaccino formolato, 12 animali ne furono più o meno beneficamente influenzati, 10 sfuggirono interamente agli effetti immunizzanti della vaccinazione; quindi la proporzione dei beneficiati salì in questi esperimenti al 54.5 % degli animali trattati con vaccino formolato, mentre quella ottenuta precedentemente con vaccino fenolato fu del 96.1 %. Oltre a ciò è opportuno esaminare i risultati ottenuti anche in ordine ad una condizione variabile dell'esperimento, cioè in ordine al tempo col quale il formolo ha agito sulla poltiglia cancerosa e questo per meglio seguire gli effetti che dal formolo stesso derivano per la trasformazione della poltiglia cancerosa.

Ed in proposito si può facilmente arrivare alla conclusione interessantissima, che il valore immunizzante della poltiglia va man mano aumentando a misura che si prolunga sopra di essa l'azione del formolo. Infatti con vaccino formolato di 1-3 giorni si hanno, su 4 esperimenti, 3 risultati negativi ed 1 incompleto; con vaccino che va da 3 ai 7 giorni si osservano, su 4 esperimenti, 3 risultati incompleti ed 1 completo (quello del

nodettino dopo l'iniezione di prova); su 8 esperimenti con vaccino di 10 giorni si riscontrarono un risultato incompleto e 2 completi, finalmente con il vaccino di 15 giorni si contarono, su 6 esperimenti, 4 risultati completi.

Dunque nel vaccino più giovane predominano i risultati negativi ed appena 1 positivo ma incompleto; successivamente salgono a 3 i risultati incompleti e compare un risultato completo; in un tempo anche maggiore dell'azione del formolo, i risultati completi salgono a 2, mentre gli incompleti scendono ad 1, finalmente con vaccino di 15 giorni si hanno 4 risultati positivi e tutti completi.

Sembra quindi allo stato attuale della ricerca, che l'*optimum* del tempo necessario per trasformare la poltiglia cancerosa in un vaccino a mezzo del formolo sia di 15 giorni. Non si esclude, anzi riteniamo molto probabile in base ad alcune prove, che prolungando ancora l'azione del formolo sulla poltiglia tumorale possano ottenersi risultati anche migliori. I controlli fatti in buon numero morirono tutti per tumore nel tempo regolare indicato.

In ultimo venendo a considerare l'esito finale dell'esperimento, si trova anche in queste ricerche, come quelle precedenti del fenolo, che negli animali sopravvissuti, nei quali mancò lo sviluppo del tumore, alcuni morirono tardivamente senza che la morte fosse giustificata dal reperto anatomico e dall'esame batteriologico, che riuscirono sempre negativi.

Rimandiamo per la interpretazione di questo fatto a quanto è stato detto recentemente nel riferire i risultati ottenuti quando si usava vaccino fenolato.

Per altro è da rilevarsi il fatto interessantissimo che nella immunità antineoplastica completa la proporzione degli animali morti tardivamente è per il vaccino formolato assai minore di quella osservata quando fu adoperato vaccino fenolato. Infatti nei 7 animali immunizzati con un vaccino formolato e sopravvissuti all'esperimento, 6 vivevano ancora dopo lungo tempo, anche dopo 5 mesi, dalla iniezione di prova; uno solamente, che aveva avuto vaccino formolato di 15 giorni, morì, con reperto negativo dopo 54 giorni dalla iniezione della poltiglia virulenta. Invece sopra 19 topini vaccinati con poltiglia fenolata abbiamo trovato precedentemente che soltanto 7 sopravvissero e 12 morirono tardivamente. Quindi col vaccino formolato si ebbe negli animali, che mostrarono immunità antineoplastica completa, una sopravvivenza dell'85.7 %; mentre in quelli della stessa categoria, ma immunizzati con vaccino fenolato la sopravvivenza degli animali sopravvissuti fu del 36.8 %.

E poichè sulle cause di questa morte noi abbiamo in un precedente lavoro avanzata l'ipotesi che essa derivi da tossine contenute nella poltiglia cancerosa virulenta non sufficientemente neutralizzate dai prodotti della precedente iniezione vaccinante, e poichè il formolo una volta messo in contatto con certe tossine ha il potere bene accertato di annullarne gli effetti tossici e di trasformarle in prodotti vaccinanti, così se ne dovrebbe logi-

camente dedurre che nel nostro caso speciale il formolo stesso è capace di provocare nella poltiglia, oltre al potere antineoplastico, anche un potere neutralizzante delle tossine introdotte con la poltiglia virulenta della iniezione di prova. Questo potere antitossico della poltiglia formolata, che sarebbe assai superiore a quello che a parità di condizioni può esplicare il vaccino fenolato, giustificerebbe nel primo caso la minore proporzione di morti tardive negli animali con completa immunità antineoplastica, di fronte a quella degli animali in cui fu usato vaccino fenolato. In altre parole il vaccino fenolato provoca prevalentemente una immunità antineoplastica, mentre quello formolato provoca in modo prevalente una immunità antitossica, così che i due vaccini nella loro azione immunizzante si completano a vicenda, ed a questo riguardo possono essere anche utilmente sfruttati nella pratica per rendere la vaccino-profilassi del cancro più completa perciò più efficace.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica (Teoria dei Numeri). — *L'infinità dei numeri primi nelle forme quadratiche*. Nota di A. M. BEDARIDA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio F. SEVERI.

1. Non è molto noto come Dirichlet, oltre ad aver dimostrato il celebre teorema sopra le progressioni aritmetiche, abbia asserito ⁽²⁾ che: *Ogni forma quadratica binaria, propriamente primitiva, rappresenta infiniti numeri primi*. Ma, Dirichlet, si è limitato a darne la dimostrazione in un caso speciale. Si deve a H. Weber ⁽³⁾ la dimostrazione generale, la quale si fonda sopra quei principii di Aritmetica analitica scoperti ed elaborati da Dirichlet.

In questa mia Nota, io mi propongo di fare vedere come questo teorema valga anche per le forme quadratiche ad un numero qualunque n di variabili. E ciò risulterà, facilmente, ricorrendo alla rappresentazione di una forma quadratica binaria per mezzo di una forma quadratica ad n variabili, $n > 2$.

2. Sia:

$$(1) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,k}^n a_{ik} x_i x_k \quad (a_{ik} = a_{ki} \quad i \neq k),$$

(1) Nella seduta del 6 aprile 1930.

(2) WERKE, I, p. 499.

(3) «Math. Ann.», XX Bd., p. 301.

una forma quadratica ad n variabili, $n > 2$, propriamente primitiva⁽¹⁾. Se:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \quad ; \quad \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$$

sono due n^{te} di numeri, si ponga:

$$x_1 = \alpha_1 \lambda + \beta_1 \mu \quad , \quad x_2 = \alpha_2 \lambda + \beta_2 \mu, \dots, x_n = \alpha_n \lambda + \beta_n \mu.$$

Sostituendo in (1), si potrà scrivere:

$$(2) \quad f(\alpha_1 \lambda + \beta_1 \mu, \alpha_2 \lambda + \beta_2 \mu, \dots, \alpha_n \lambda + \beta_n \mu) = A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2$$

ove:

$$A = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad , \quad B = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \quad , \\ C = f(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n).$$

Come è noto, si dirà che la forma:

$$\varphi(\lambda, \mu) = A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2$$

è rappresentata dalla forma $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ con la rappresentazione:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{vmatrix}.$$

Si ha:

Una forma quadratica ad n variabili, $n > 2$, propriamente primitiva, rappresenta sempre delle forme quadratiche binarie propriamente primitive.

Invero, una forma quadratica ad n variabili, propriamente primitiva, rappresenta sempre dei numeri primi con un numero assegnato ad arbitrio⁽²⁾. Allora, scelti n numeri arbitrari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, si consideri il numero $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$: esisteranno altri n numeri $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, tali che il numero $f(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ risulti primo con $2f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Queste due ennuple di numeri genereranno una forma quadratica binaria, propriamente primitiva $\varphi(\lambda, \mu)$, rappresentata dalla forma considerata $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, con la relazione (2).

Ciò osservato, la (2), tenendo conto del teorema per le forme quadratiche binarie, ci rileva appunto che anche la forma $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ rappresenta infiniti numeri primi. Si ha dunque il teorema:

Ogni forma quadratica, ad un qualunque numero di variabili, propriamente primitiva, rappresenta infiniti numeri primi.

3. La questione dunque di vedere se una forma, propriamente primitiva, di un dato grado e di un certo numero di variabili, rappresenta nu-

(1) Tacitamente, s'intenderà che i coefficienti e le variabili delle forme qui considerate appartengono al corpo razionale.

(2) Cfr. BACHMANN, *Die Arithmetik der quadratischen formen*, p. 425.

meri primi e, nel caso affermativo, se sono infiniti oppure no, viene così portato alle forme cubiche⁽¹⁾. Per queste è facile, intanto, vedere che vi sono forme cubiche, propriamente primitive, che non rappresentano mai, numeri primi; che aumentando o diminuendo il numero delle variabili da una forma cubica che non rappresenta numeri primi, si può ottenerne un'altra che ne rappresenta. Nel caso di una forma cubica che rappresenti numeri primi, l'Analisi classica di Dirichlet, dovrà decidere se si tratta di un numero finito o di un numero infinito di numeri primi.

In un prossimo mio lavoro saranno trattate queste nuove ricerche.

Matematica (Fisica-matematica). — *Forma intrinseca delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi*. Nota di A. TONOLO, presentata⁽²⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

I. Mi riferisco alle mie Note precedenti: *Forma intrinseca delle equazioni dell'equilibrio dei mezzi elastici*. Una forma singolarmente espressiva assumono le equazioni (I) nel caso dei corpi elastici isotropi. Dalle (25) si ottiene, in virtù della (23),

$$(1) \quad \Phi^{\mu\nu} = (2B - A) \theta \frac{\partial \theta}{\partial \xi_{\mu\nu}} - B \frac{\partial J}{\partial \xi_{\mu\nu}}.$$

Dalle (24) si ricava:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi_{\mu\nu}} = a^{\mu\nu}, \quad \frac{\partial J}{\partial \xi_{\mu\nu}} = 2 \xi^{\mu\nu}.$$

Quindi, sostituendo nelle (1), abbiamo:

$$(2) \quad \Phi^{\mu\nu} = (2B - A) a^{\mu\nu} \theta - 2B \xi^{\mu\nu}.$$

E poichè, con referenza alle linee delle congruenze principali, sappiamo essere

$$\theta = \sum_i \varepsilon_i, \quad \xi^{\mu\nu} = \sum_i \varepsilon_i \lambda_i^\mu \lambda_i^\nu,$$

risulta:

$$(3) \quad \Phi^{\mu\nu} = (2B - A) a^{\mu\nu} \sum_i \varepsilon_i - 2B \sum_i \varepsilon_i \lambda_i^\mu \lambda_i^\nu.$$

(1) Una forma lineare ad n variabili, primitiva, rappresenta *tutti* i numeri primi, come risulta subito da risultati noti.

(2) Nella seduta del 2 febbraio 1930.

Surrogando nelle (28), in forza delle (19), si trae agevolmente:

$$(4) \quad \theta_{hk} = \delta_h^k \left\{ (2B - A) \sum_i^3 \varepsilon_i - 2B \varepsilon_h \right\},$$

ove

$$\delta_h^k = \begin{cases} 0 & \text{se } h \neq k \\ 1 & \text{se } h = k. \end{cases}$$

Ponendo le (4) nelle equazioni (I), si ottiene:

$$(5) \quad (2B - A) \sum_h^3 \frac{d\varepsilon_h}{d\sigma_j} - 2B \frac{d\varepsilon_j}{d\sigma_j} + \\ + \sum_h^3 \left\{ (2B - A) \sum_i^3 \varepsilon_i - 2B \varepsilon_j \right\} \gamma_{jhh} + \sum_h^3 \left\{ (2B - A) \sum_i^3 \varepsilon_i - 2B \varepsilon_h \right\} \gamma_{hjh} = X_j.$$

E ricordando che $\gamma_{jhh} + \gamma_{hjh} = 0$, si hanno le formule finali:

$$(III) \quad \left((2B - A) \sum_h^3 \frac{d\varepsilon_h}{d\sigma_j} - 2B \left\{ \frac{d\varepsilon_j}{d\sigma_j} + \sum_h^3 \gamma_{jhh} (\varepsilon_j - \varepsilon_h) \right\} \right) = X_j.$$

Queste sono le equazioni intrinseche dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi.

2. *Equazioni di Lamé.* — Cerchiamo dapprima il significato meccanico degli invarianti θ_{hk} definiti dalle (28) ⁽¹⁾. A questo scopo ritorniamo alle coordinate y^v . Fissiamo un punto del corpo, e tre elementi lineari spiccati da questo punto mutuamente ortogonali ds_h ($h = 1, 2, 3$): abbiamo, in queste variabili,

$$\lambda_{h|y} = \lambda_h^y = \frac{dy^y}{ds_h}.$$

Pertanto le quantità $\lambda_{h|y}$ si identificano con i coseni direttori dell'elemento ds_h . Allora, intendendo che le $\Phi^{y,v}$ siano le funzioni delle y^v definite al n.º 2 della Nota I, per formule note della meccanica dei mezzi continui, la funzione θ_{hh} definita dalle (28) nelle variabili y^v , ci dà la componente normale dello sforzo che si esercita sopra un elemento superficiale perpendicolare a ds_h , mentre le funzioni θ_{hk} ($k \neq h$) ci danno le componenti tangenziali di questo sforzo. Passiamo ora alle variabili x' . Per il carattere invariantivo delle θ_{hk} , il significato fisico di queste funzioni si conserva, onde avremo che fissato un elemento lineare ds_h di una linea della

(1) Cfr. T. LEVI-CIVITA, *Fondamenti di Meccanica relativistica*, Cap. I, § 4 (Nicola Zanichelli, Bologna).

congruenza $\lambda_{b|v}$, la θ_{bb} è la componente normale, e le θ_{bk} ($k \neq b$) sono le componenti tangenziali dello sforzo che si esercita sopra un elemento superficiale perpendicolare a ds_b .

Si supponga ora che le congruenze λ_v^v principali siano *normali*: potremo allora considerare nel corpo S un triplo sistema di superficie ortogonali, relativamente alle quali le linee principali ne costituiscono le traiettorie ortogonali. Assunte a superficie coordinate, la forma (11) diventa:

$$ds^2 = a_{vv} dx^v dx^v, \quad \text{dove } (1) \quad a_{vv} = \frac{1}{r_{ij}}$$

e quindi:

$$\lambda_v^v = \frac{1}{\sqrt{a_{vv}}}, \quad \lambda_b^v = 0 \quad (v \neq b),$$

$$\lambda_{v|v} = \sqrt{a_{vv}}, \quad \lambda_{b|v} = 0 \quad (v \neq b).$$

Inoltre, per la normalità delle congruenze λ_b^v , le γ_{hik} a tre indici diversi sono nulle, come sarebbe facile persuadersi nel caso nostro con calcolo diretto.

Facciamo le posizioni:

$$\frac{1}{r_{ij}} = \gamma_{ij}.$$

Allora, con ovvie considerazioni, si traggono dalle (I) le equazioni seguenti:

$$(III) \quad \frac{d\theta_{jj}}{d\sigma_j} + \frac{d\theta_{jj+1}}{d\sigma_{j+1}} + \frac{d\theta_{jj+2}}{d\sigma_{j+2}} + \frac{\theta_{jj} - \theta_{j+1j+1}}{r_{jj+1}} + \frac{\theta_{jj} - \theta_{j+2j+2}}{r_{jj+2}} + \theta_{j+1j} \left(\frac{2}{r_{j+1j}} + \frac{1}{r_{j+1j+2}} \right) + \theta_{j+2j} \left(\frac{2}{r_{j+2j}} + \frac{1}{r_{j+2j+1}} \right) = X_j$$

Queste equazioni, con notazioni diverse, sono di Lamé⁽¹⁾.

Infine, supponiamo isostatiche le superficie coordinate $x^v = \text{cost}$, e nulle le forze di massa. Allora le θ_{ij} , con $i \neq j$, sono tutte nulle, è $X_j = 0$. Posto $\theta_{jj} = \theta_j$, le (III) diventano le seguenti:

$$(IV) \quad \frac{d\theta_j}{d\sigma_j} + \frac{\theta_j - \theta_{j+1}}{r_{jj+1}} + \frac{\theta_j - \theta_{j+2}}{r_{jj+2}} = 0$$

che sono le classiche equazioni di Lamé⁽²⁾.

(1) G. LAMÉ, *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications*, quinzième leçon, § CXLVII.

(2) G. LAMÉ, *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications*, quinzième leçon, § CXLIX; E. CESÀRO, *Introduzione alla teoria matematica della elasticità*, parte III, cap. XXI.

Matematica. — *Sopra l'equazione funzionale $f(x)f'(x)=f[f(x)]$ collegata ad un problema geometrico.* Nota di G. BARBA, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Un problema di natura geometrica pel quale gli elementari procedimenti si sono dimostrati inefficaci (se si eccettuino casi ovvii), conduce, in una impostazione generale, ad una equazione funzionale il cui studio mi sembra interessante.

Il problema in se stesso è il seguente: *quali sono le curve simili alle proprie evolute?* La domanda vien naturale se si pensa che esempi di tali curve, com'è noto, ne esistono (cicloidi, ipocicloidi, epicicloidi, spirali logaritmiche): si spiega, di conseguenza, il desiderio di conoscere se, oltre le note, altre ve ne siano. Precisamente e più generalmente si può chiedere: *quale forma deve avere l'equazione intrinseca d'una curva affinché questa sia simile alla sua evoluta?*

Detta $\rho = f(x)$ l'equazione intrinseca d'una curva, k una costante (rapporto di similitudine), tenute presenti l'equazioni intrinseche dell'evoluta: $x_1 = \rho$, $\rho_1 = \rho d\rho/dx$, il problema si traduce, analiticamente, nell'equazione funzionale:

$$(1) \quad kf(x)f'(x) = f[kf(x)].$$

Lo studio completo di tale equazione (suscettibile, dal punto di vista formale, di generalizzazioni), in un primo momento, si presenta non semplice. Ho ricondotto il problema ad una equazione mista alle differenze e differenziale, che è risolvibile nelle ipotesi di analiticità, ritrovando — fra l'altro — così, tutte le curve note soddisfacenti al problema. Tale soluzione trovata è la più generale soluzione analitica e, se siamo nel campo di variabile complessa, è anche la sola: ma su ciò spero di poter ritornare in un secondo momento.

Passo ad esporre i procedimenti seguiti — che, più del problema geometrico in se stesso, possono giustificare il mio lavoro — occupandomi, in questa Nota, della risoluzione dell'equazione funzionale (1) indipendentemente dal problema geometrico che l'ha determinata.

In una seconda Nota tratterò, propriamente, della parte geometrica.

1. La (1) può scriversi:

$$(2) \quad kf(x) \cdot kf'(x) = kf[kf(x)].$$

(1) Nella seduta del 6 aprile 1930.

Chiamo g l'operatore funzionale kf e pongo:

$$(3) \quad \{ x = g_0, \quad g(x) = g_1, \quad g[g(x)] = g_2, \dots, g[g_n] = g_{n+1}. \}$$

La (2) diviene, in conseguenza:

$$(4) \quad g(x) g'(x) = g_2(x).$$

Mutando $x = g_0$ in $g(x) = g_1$ e tenendo presenti le (3):

$$g'[g(x)] g_2(x) = g_3(x)$$

che, per la (4), si può scrivere:

$$g'[g(x)] g'(x) g(x) = g_3(x).$$

È, intanto:

$$g'[g(x)] g'(x) = g'_2(x)$$

dunque:

$$g'_2(x) \cdot g(x) = g_3(x).$$

In modo analogo si trae:

$$(4') \quad g'_m(x) \cdot g(x) = g_{m+1}(x).$$

D'altra parte, differenziando g_m e tenendo conto della prima delle (3):

$$dg_m(x) = g'_m(x) dg_0$$

od anche, per la (4'):

$$g_1(x) dg_m(x) = g_{m+1}(x) dg_0.$$

Segue, da questa, la « proprietà fondamentale per le g avanti definite »:

$$(5) \quad \frac{dg_m(x)}{g_{m+1}(x)} = \frac{dg_n(x)}{g_{n+1}(x)}.$$

Ciò posto, diamo a questo rapporto (che non dipende da n) il valore:

$$\frac{dx}{g(x)} = \lambda(x) dx = d\Phi(x).$$

Mutiamo, in questa, $x = g_0$ in $g(x) = g_1$:

$$\frac{dg(x)}{g[g(x)]} = d\Phi[g(x)].$$

Per la (5), i primi membri di queste due ultime relazioni sono uguali, segue:

$$d\Phi(x) = d\Phi[g(x)]$$

e' dunque per c costante arbitraria (ma fissata):

$$\Phi(x) + c = \Phi[g(x)].$$

Ne segue, chiamando Φ_{-1} l'inversa di Φ :

$$\Phi_{-1}[\Phi(x) + c] = \Phi_{-1}[\Phi\{g(x)\}]$$

e poichè, ovviamente, il secondo membro conduce a $g(x)$:

$$(6) \quad g(x) = \Phi_{-1}[\Phi(x) + c].$$

D'altra parte, per la posizione fatta: $dx/g(x) = d\Phi(x)$ e per la (6) risulta:

$$\frac{dx}{\Phi_{-1}[\Phi(x) + c]} = d\Phi(x)$$

da cui:

$$\frac{dx}{d\Phi(x)} = \Phi_{-1}[\Phi(x) + c];$$

se, ora, si muta x in $\Phi_{-1}(x)$, notando che $\Phi[\Phi_{-1}(x)] = x$ e ponendo, infine, $\Phi_{-1}(x) = \Psi(x)$, risulta:

$$(7) \quad \frac{d\Psi(x)}{dx} = \Psi(x + c)$$

ch'è una equazione mista differenziale alle differenze finite. Se la Ψ è funzione di variabile complessa è chiaro che le sue singolarità devono essere tali da riprodursi, se pur mutate di tipo, per una traslazione di c . Segue che, se ammettiamo che si possa trovare un punto x nel quale il raggio di convergenza sia maggiore di c , sviluppando il 2° membro della (7) in serie di Taylor, per un assegnato per quanto arbitrario valore c , si può scrivere:

$$(8) \quad \Psi'(x) = \Psi(x) + c\Psi''(x) + \frac{c^2}{2!}\Psi'''(x) + \dots$$

che è una equazione differenziale d'ordine infinito, la cui soluzione generale è fornita da:

$$(9) \quad \Psi(x) = \sum a_n e^{\alpha_n x}$$

con a_n costanti arbitrarie e α_n radici dell'equazione:

$$(10) \quad \alpha = 1 + c\alpha + \frac{c^2}{2!}\alpha^2 + \dots$$

Ove una radice α , di questa, sia multipla d'ordine r , nella (9), al posto di a_n figureranno termini del tipo: $a_n + a'_n x + \dots + a_n^{(r-1)} x^{r-1}$. Deter-

minata la forma della $\Psi(x)$ è determinata quella di Φ_{-1} e quindi, attraverso Φ e g quella di f .

La (9) è dunque soluzione della (7) e pertanto, fissato un valore c , deve risultare:

$$\alpha_n e^{\alpha_n x} = e^{x_n(x+c)} = e^{\alpha_n c} \cdot e^{\alpha_n x}$$

e quindi, tra le α_n e c deve sussistere la relazione:

$$(9') \quad \alpha_n = e^{\alpha_n c}.$$

Se vi fosse una radice multipla $\alpha_n = \alpha$, dovrebbe aversi, simultaneamente:

$$\alpha - e^{\alpha c} = 0 \quad , \quad 1 - c e^{\alpha c} = 0$$

ossia:

$$1 = c\alpha$$

e dunque:

$$c = 1/e \quad , \quad \alpha = e.$$

Perciò, solo nel caso $c = 1/e$ si può avere una radice multipla (doppia): tutti gli altri casi danno sempre radici semplici.

La soluzione trovata, d'altro canto, ove manchi l'analiticità, è la sola, anche in campi più vasti.

Poniamo, ad esempio, che la Ψ sia rappresentabile sotto forma integrale:

$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) e^{xs} dg(s) \quad (\text{integrale di Stieltjes})$$

e che valga la derivabilità sotto il segno. Risulterà:

$$\frac{d\Psi}{dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} s \cdot h(s) \cdot e^{sx} dg(s).$$

D'altra parte:

$$\Psi(x+c) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) e^{xs} \cdot e^{cs} dg(s)$$

dunque:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(s) \cdot [s - e^{cs}] \cdot e^{xs} dg(s) = 0.$$

Condizione che può essere soddisfatta solo se $g(s)$ è costante a tratti, mentre, nei salti di discontinuità, nei punti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, si avrà:

$$\alpha_n - e^{\alpha_n c} = 0$$

relazione alla quale s'è, già, pervenuti.

Matematica. — *Sopra una classe di varietà cicliche.* Nota di P. CATTANEO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Il prof. Vitali, cercando ⁽²⁾ un esempio di superficie ciclica col Π_2 a tre dimensioni, ha trovata una di tali superficie espressa analiticamente in modo assai semplice, contenuta in un S_6 ed avente in ogni punto un cono geodetico circolare.

Generalizzando la rappresentazione analitica di tale superficie, si trova una classe numerabile di varietà che sono tutte cicliche, nel senso del Vitali. Ad ogni numero naturale $n > 1$ corrisponde una varietà ad n dimensioni appartenente ad un'ipersfera di un S_{2n+2} . In ogni punto P della varietà il Π_2 è un S_{n+1} ; i sistemi principali di normali hanno in comune una sola normale, coincidente con la retta che congiunge P col centro dell'ipersfera; il sistema delle rimanenti normali è costituito da un *qualsiasi* sistema cartesiano ortogonale dell'iperpiano che lo contiene. Il cono geodetico è poi una varietà ad n dimensioni, che, nel caso $n = 3$, è la proiezione da P di una *superficie romana di Steiner*.

Si avrebbe così una prova dell'opportunità dell'estensione ad ogni varietà della nozione di normale fatta dal Vitali dopo aver stabilito tale concetto per le sole superficie. La cosa è sotto un certo aspetto notevole, in quanto il Vitali, in un suo recente lavoro ⁽³⁾, incontra un'applicazione nella quale il caso della superficie si stacca completamente dal caso generale.

1. Indichiamo con φ_b, ψ_b [$b = 0, 1, 2, \dots, n$] dei parametri normali, a due a due ortogonali, e con u_1, u_2, \dots, u_n delle variabili.

Si ponga

$$\theta_0 = \varphi_0 \cdot \cos \sum_1^n u_i + \psi_0 \cdot \sin \sum_1^n u_i \quad ; \quad \theta_b = \varphi_b \cdot \cos u_b + \psi_b \cdot \sin u_b$$

[$b = 1, 2, \dots, n$].

Consideriamo la varietà ad n dimensioni che ha per determinante la

$$f = \sum_0^n \theta_i.$$

(1) Nella seduta del 6 aprile 1930.

(2) P. 266 delle *Lezioni di geometria nello spazio hilbertiano* [Bologna, Zanichelli, 1929], che saranno citate in seguito con (G. H.) ed alle quali ci riferiremo sempre per la nomenclatura e per le notazioni.

(3) G. VITALI, *Sulla evoluta (?) di una varietà*, « Annali di matematica ».

La indicheremo con V_n . Essa, manifestamente, è contenuta in un S_{2n+2} ed appartiene alla sua ipersfera di centro O e raggio $\sqrt{n+1}$.

2. Si ha subito

$$f_h = -\varphi_0 \cdot \sin \sum u_i + \psi_0 \cdot \cos \sum u_i - \varphi_h \cdot \sin u_h + \psi_h \cdot \cos u_h;$$

donde scende che

$$a_{h,k} = 2 \quad o \quad = 1 \quad \text{secondo che} \quad h = \quad o \quad \neq k.$$

Ricordando la posizione (1)

$$W_{h,k;p,q} = a_{h,k} \cdot a_{p,q} - \frac{1}{2} (a_{h,p} \cdot a_{k,q} + a_{h,q} \cdot a_{k,p}),$$

si ha poi

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{i,i;i,i} = 0, \quad W_{i,i;i,s} = 0, \quad W_{i,j;i,j} = -\frac{3}{2}, \\ W_{i,i;r,r} = 3, \quad W_{i,i;r,s} = 1, \quad W_{i,j;i,s} = -\frac{1}{2}, \quad W_{i,j;r,s} = 0. \end{array} \right.$$

3. Si ha inoltre

$$f_{hh} = -\theta_0 - \theta_h, \quad f_{hk} = -\theta_0$$

e si verifica facilmente che si ha sempre

$$\int_g f_{hk} \cdot f_l \cdot dl = 0;$$

donde si conclude che $f_{h,k} = f_{hk}$.

Dall'espressione di queste $f_{h,k}$ risulta che lo spazio Π_2 contiene gli $n+1$ parametri $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, che sono indipendenti. Inoltre le $f_{h,k}$ sono combinazioni lineari delle θ_i . Lo spazio Π_2 è dunque un S_{n+1} e la caratteristica del determinante $A^{(2)}$ è $n+1$.

Si trova tosto che le $A_{h,k;p,q}$ sono tutte eguali ad 1, tranne le $A_{h,h;h,h}$ che sono eguali a 2.

Dai risultati precedenti si ha poi (3):

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_{i,i;i,i} = 2, \\ \Delta_{i,i;r,r} = 1 - 3\rho, \\ \Delta_{i,i;i,s} = 1, \\ \Delta_{i,i;r,s} = 1 - \rho; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_{i,j;i,j} = 1 + \frac{3}{2}\rho, \\ \Delta_{i,j;i,s} = 1 + \frac{1}{2}\rho, \\ \Delta_{i,j;r,s} = 1, \end{array} \right.$$

(1) (G. H.) p. 254.

(2) (G. H.) p. 237.

(3) (G. H.) p. 257.

4. Consideriamo ora l'equazione

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} \Delta_{1,1;1,1} & \Delta_{1,1;1,2} & \cdots & \Delta_{1,1;n,n} \\ \Delta_{1,2;1,1} & \Delta_{1,2;1,2} & \cdots & \Delta_{1,2;n,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{n,n;1,1} & \Delta_{n,n;1,2} & \cdots & \Delta_{n,n;n,n} \end{vmatrix} = 0.$$

Moltiplichiamo per $\frac{1-n}{2}$ la riga (i, i) , aggiungendo poi ad essa le righe $(1, i), (2, i), \dots, (i-1, i), (i+1, i), \dots, (n, i)$.

Al posto di $\Delta_{i,i;i,i}$ viene allora $\frac{1-n}{2} \cdot 2 + (n-1) \cdot 1 = 0$;

$$\begin{aligned} \text{» » » } \Delta_{i,i;r,r} \text{ » » } & \frac{1-n}{2} (1-3\rho) + 1 + (n-2)(1-\rho) = \\ & = \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2} \rho; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{» » » } \Delta_{i,i;i,s} \text{ » » } & \frac{1-n}{2} \cdot 1 + \left(1 + \frac{3}{2}\rho\right) + (n-2)\left(1 + \frac{1}{2}\rho\right) = \\ & = \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2} \rho; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{» » » } \Delta_{i,i;r,s} \text{ » » } & \frac{1-n}{2} \cdot (1-\rho) + 2\left(1 + \frac{1}{2}\rho\right) + (n-3) \cdot 1 = \\ & = \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2} \rho. \end{aligned}$$

Eseguito tale procedimento su tutte le n righe corrispondenti ai posti (i, i) [$i = 1, 2, \dots, n$], i loro elementi diventano tutti divisibili per $\frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2} \rho$ e si può quindi concludere che l'equazione $\Delta(\rho) = 0$ ha n soluzioni eguali ad $\frac{1-n}{1+n}$.

Ritornando alla forma primitiva dell'equazione $\Delta(\rho) = 0$, addizioniamo invece alla riga $(1, 1)$ le righe $(2, 2), (3, 3), \dots, (n, n)$ ed alla riga $(1, 2)$ tutte le rimanenti.

Posto

$$\left\{ \begin{aligned} 2 + (n-1)(1-3\rho) &= (n+1) - 3(n-1)\rho = \alpha, \\ 1 + 1 + (n-2)(1-\rho) &= n - (n-2)\rho = \beta, \\ (n-1) \cdot 1 + \binom{n-1}{2}(1-\rho) &= \binom{n}{2} - \binom{n-1}{2}\rho = \gamma, \\ \left(1 + \frac{3}{2}\rho\right) + 2(n-2)\left(1 + \frac{1}{2}\rho\right) + \binom{n-2}{2} &= \binom{n}{2} + \frac{2n-1}{2}\rho = \delta, \end{aligned} \right.$$

le due prime righe di $\Delta(\rho)$ hanno allora $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \gamma \end{smallmatrix} \right.$ nelle colonne (r, r) , mentre hanno $\left\{ \begin{smallmatrix} \beta \\ \delta \end{smallmatrix} \right.$ nelle altre colonne. Il determinante $\Delta(\rho)$ è quindi nullo quando $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$, ossia quando $\alpha\delta = \beta\gamma$; donde si vede che l'equazione $\Delta(\rho) = 0$ ha le soluzioni $\frac{n}{n^2 - 1}$ ed $\frac{1 - n}{n + 1}$.

Essendo $n + 1$ la caratteristica di A , l'equazione $\Delta(\rho) = 0$ non può avere più di $n + 1$ radici diverse da zero. Oltre alla radice n -pla già trovata essa ha dunque soltanto la radice semplice $\frac{n}{n^2 - 1}$; donde risulta che il sistema di normali principali è costituito da una direzione d , corrispondente alla radice $\frac{n}{n^2 - 1}$, e da un sistema di n direzioni ortogonali a due a due, scelto comunque nell'iperpiano del Π_2 ortogonale alla d .

5. Per individuare la direzione d bisogna ⁽¹⁾ trovare dei $\lambda^{r,s}$ tali che sia

$$\sum_{rs} \Delta_{\rho} \Delta_{\rho}^{r,s; p, q} \lambda^{r,s} = 0,$$

dove si indica con Δ_{ρ} il valore di Δ quando $\rho = \frac{n}{n^2 - 1}$.

Per ragioni di simmetria le $\lambda^{r,s}$ possono avere due soli valori distinti: α , quando $r = s$; β , quando $r \neq s$. Tali valori devono essere tali che sia ⁽²⁾

$$\alpha \cdot \sum_r \Delta_{\rho} \Delta_{\rho}^{r,r; 1, 1} + 2\beta \cdot \sum_{rs} \Delta_{\rho} \Delta_{\rho}^{r,s; 1, 1} = 0,$$

cioè

$$\alpha \cdot \frac{n^2 - n + 1}{n + 1} + \beta n \cdot \frac{n^2 - n + 1}{n + 1} = 0$$

e quindi

$$\alpha + n\beta = 0;$$

sicchè possiamo prendere

$$\alpha = \lambda^{r,r} = -n \quad \text{e} \quad \beta = \lambda^{r,s} = 1.$$

Un parametro della normale considerata è

$$\sum_{rs} f_{r,s} \cdot \lambda^{r,s} = +n \cdot \sum_r (\theta_0 + \theta_r) - 2 \cdot \binom{n}{2} \cdot \theta_0 = n \cdot \sum_r \theta_r = nf;$$

(1) (G. H.) pp. 258 e 259.

(2) Col segno \sum' indichiamo che gli indici della sommatoria devono prendere solo valori distinti e che ogni loro combinazione va presa una volta soltanto.

donde si vede che la normale principale corrispondente a $\rho = \frac{n}{n^2 - 1}$ è data dalla retta che congiunge l'origine dello spazio hilbertiano col punto considerato sulla V_n .

Se indichiamo con X_0 il parametro normale di questa normale, si ha

$$X_0 = f: \sqrt{n+1}.$$

6. Per completare il sistema delle $n+1$ normali principali basta aggiungere alla normale d , ora considerata, altre n direzioni qualsiasi di Π_2 , ortogonali fra loro ed alla direzione di parametro X_0 .

Giova fissare l'attenzione su n direzioni i cui parametri normali abbiano la forma

$$X_i = \lambda f + \mu \theta_0 + \nu \theta_i \quad [i = 1, 2, \dots, n],$$

dove λ , μ e ν sono indipendenti da i .

Tenendo conto che questi parametri devono essere normali ed ortogonali fra loro e con X_0 , si ha tosto $\nu^2 = 1$. Preso $\nu = -1$, si ha poi

$$\lambda = \frac{1 + \sqrt{n+1}}{n\sqrt{n+1}} \quad \text{e} \quad \mu = -\frac{1 + \sqrt{n+1}}{n}.$$

Abbiamo insomma:

$$X_i = \frac{1 + \sqrt{n+1}}{n\sqrt{n+1}} \cdot f - \frac{1 + \sqrt{n+1}}{n} \cdot \theta_0 - \theta_i \quad [i = 1, 2, \dots, n].$$

7. Riferendoci al sistema cartesiano di parametri $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$, se si pone, al solito (1),

$$x_{r,s} = \int_g f_{r,s} \cdot X_i \cdot dt,$$

si trova:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{0,r} = \frac{-2}{\sqrt{n+1}}, \\ x_{0,s} = \frac{-1}{\sqrt{n+1}}; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{i,i} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1 + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}, \\ x_{r,r} = \frac{n-1 - \sqrt{n+1}}{n\sqrt{n+1}}, \\ x_{i,s} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}. \end{array} \right.$$

La punto-funzione determinante del cono geodetico della V_n nel punto f è (1)

$$f + \sum_i^n f_{hk} x_{h,k} \cdot \lambda_h \cdot \lambda_k.$$

D'altra parte, essendo

$$f_{h,k} = \sum_i^n x_{h,i} \cdot x_{k,i} \cdot X_i,$$

se si indicano con x_i [$i = 0, 1, 2, \dots, n$] le coordinate cartesiane di un punto del Π_2 rispetto al sistema considerato, per i punti del cono geodetico si ha

$$x_i = \sum_{hk}^n x_{h,i} \cdot \lambda_h \cdot \lambda_k \quad [i = 0, 1, 2, \dots, n];$$

dondè, ponendo $\sum_b^n \lambda_b^2 = S_1$ e $\sum_{hk}^n \lambda_h \cdot \lambda_k = S_2$, si ha

$$\left\{ \begin{aligned} x_0 &= \frac{-2}{\sqrt{n+1}} \cdot S_1 - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \cdot S_2 = \frac{-2}{\sqrt{n+1}} \cdot (S_1 + S_2), \\ x_r &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1 + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} \cdot \lambda_r^2 + \frac{n-1 - \sqrt{n+1}}{n\sqrt{n+1}} \cdot (S_1 - \lambda_r^2) + \\ &+ \frac{2}{\sqrt{n+1}} \cdot S_2 = \frac{n-1 - \sqrt{n+1}}{n\sqrt{n+1}} \cdot S_1 + \frac{2}{\sqrt{n+1}} \cdot S_2 + \lambda_r^2. \end{aligned} \right.$$

Posto $s = \sum_b^n x_b$, abbiamo di qui

$$s = \frac{n-1 - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} \cdot S_1 + \frac{2n}{\sqrt{n+1}} \cdot S_2 + S_1 = \frac{n-1}{\sqrt{n+1}} \cdot S_1 + \frac{2n}{\sqrt{n+1}} \cdot S_2,$$

$$s - x_0 = \sqrt{n+1} \cdot (S_1 + 2S_2) = \sqrt{n+1} \cdot \left(\sum_b^n \lambda_b \right)^2,$$

$$s + nx_0 = -\sqrt{n+1} \cdot S_1, \quad 2s + (n-1)x_0 = 2\sqrt{n+1} \cdot S_2,$$

$$\begin{aligned} x_r &= \frac{1 - n + \sqrt{n+1}}{n(n+1)} \cdot (s + nx_0) + \frac{2s + (n-1)x_0}{n+1} \cdot \lambda_r^2 = \\ &= \frac{1 + \sqrt{n+1}}{n\sqrt{n+1}} s + \frac{x_0}{\sqrt{n+1}} + \lambda_r^2. \end{aligned}$$

Eliminando le λ si ottiene infine, per il cono geodetico, l'equazione

$$\sqrt{s - x_0} = \sum_r^n \sqrt{\sqrt{n+1} \cdot x_r - \frac{1 + \sqrt{n+1}}{n} \cdot s - x_0}.$$

8. Per $n = 3$, liberando l'equazione dalle radici, si trova l'equazione

$$x_1^2 \cdot x_2^2 + x_2^2 \cdot x_3^2 + x_3^2 \cdot x_1^2 = -2 x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3,$$

dalla quale risulta tosto che il cono geodetico in un punto qualsiasi P della V_3 è la proiezione da P di una *superficie romana di Steiner*. Per convincersene basta dare ad x_0 un valore fisso.

Tale superficie ha triplo il punto $f + x_0 \cdot X_0$ ed ha doppie le parallele condotte da questo punto agli assi X_1, X_2, X_3 . Il cono ha dunque doppi i tre piani $X_0 X_1, X_0 X_2, X_0 X_3$, che s'incontrano nella retta tripla X_0 .

9. Sarebbe facile convincersi che la varietà ad $n + 1$ dimensioni definita dalla punto-funzione $\sum_{i=1}^n (\varphi_i \cdot \cos u_i + \psi_i \cdot \sin u_i)$ ha lo stesso tipo di ciclicità della V_n . In ogni suo punto il Π_2 è un S_{n+1} e coincide col cono geodetico.

Matematica. — *Lo sviluppo di $\sec^p x$ in serie di Maclaurin.*
Nota di I. J. SCHWATT, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

L'autore stabilì l'espressione di $\frac{d^n}{dx^n} \sec x \Big|_{x=0}^{(2)}$ e lo sviluppo di $\sec x$ per mezzo del teorema di Maclaurin ⁽²⁾, ricorrendo a procedimenti diversi da quelli che solitamente si incontrano nella letteratura matematica. Lo stesso può dirsi per il metodo che ha consentito all'autore di trovare il valore di $\frac{d^n}{dx^n} \sec^p x \Big|_{x=0}$ e lo sviluppo di $\sec^p x$ ⁽³⁾.

(1) Nella seduta del 16 marzo 1930.

(2) « Mathematische Zeitschrift », vol. 31, Heft 1, pp. 151-158.

(3) ELY, « American Journal of Mathematics », vol. 5, p. 339, ottiene, col metodo di induzione, per potenze dispari di p ,

$$\sec^p x = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \sum_{k=0}^{p'} S_{p'-k} E_{2n+2k}, \quad p' = 2p + 1,$$

dove S_n designa combinazione n ad n delle quantità $1^2, 3^2, 5^2, \dots, (p-n)^2$. Però non è data alcuna espressione di S_n . I valori delle E sono ricavati moltiplicando

$$\sec x = 1 + E_2 \frac{x^2}{2!} + E_4 \frac{x^4}{4!} + \dots$$

per lo sviluppo di $\cos x$.

SHOVELTON, « Quarterly Journal of Mathematics », vol. 46, pp. 220-243, deduce lo sviluppo di $\sec^p x$ dalla teoria delle differenze finite.

1. Troveremo in primo luogo $\frac{d^n}{dx^n} \sec^p x$ espresso per potenze di $\sec x$ e $\tan x$.

Da

$$(1) \quad \sec^p x = \frac{2^p e^{p i x}}{(e^{2 i x} + 1)^p}$$

segue, applicando la regola di Leibniz,

$$(2) \quad \frac{d^n}{dx^n} \sec^p x = 2^p \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} e^{p i x} \frac{d^k}{dx^k} \frac{1}{(e^{2 i x} + 1)^p}.$$

Ponendo in

$$(3) \quad \frac{d^k}{dx^k} y = \sum_{\alpha=1}^k \frac{(-1)^\alpha}{\alpha!} \sum_{\beta=1}^{\alpha} (-1)^\beta \binom{\alpha}{\beta} u^{\alpha-\beta} \frac{d^k}{dx^k} u^\beta \frac{d^\alpha}{d u^\alpha} y^{(1)},$$

$y = \frac{1}{(e^{2 i x} + 1)^p}$, e $u = e^{2 i x}$, si ha

$$(4) \quad \frac{d^k}{dx^k} \frac{1}{(e^{2 i x} + 1)^p} = \frac{(2i)^k}{(e^{2 i x} + 1)^p} \sum_{\alpha=0}^k \binom{p+\alpha-1}{\alpha} \frac{1}{2^\alpha} (N_2 \gamma + i N_2 \gamma + 1) \sum_{\beta=0}^{\alpha} (-1)^\beta \binom{\alpha}{\beta} \beta^k,$$

dove

$$(5) \quad \begin{aligned} N_2 \gamma &= \sum_{\gamma=0}^{\left[\frac{\alpha}{2}\right]} (-1)^\gamma \binom{\alpha}{2\gamma} \tan^{2\gamma} x, \quad \text{e} \quad N_2 \gamma + 1 = \\ &= \sum_{\gamma=0}^{\left[\frac{\alpha-1}{2}\right]} (-1)^\gamma \binom{\alpha}{2\gamma+1} \tan^{2\gamma+1} x. \end{aligned}$$

Risulta così

$$(6) \quad \begin{aligned} &\frac{d^n}{dx^n} \sec^p x = \\ &= p^n i^n \sec^p x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{2}{p}\right)^k \sum_{\alpha=0}^k \binom{p+\alpha-1}{\alpha} \frac{1}{2^\alpha} \sum_{\beta=0}^{\alpha} (-1)^\beta \binom{\alpha}{\beta} \beta^k (N_2 \gamma + i N_2 \gamma + 1), \end{aligned}$$

ciò che, badando a

$$(7) \quad \sum_{k=0}^n \sum_{\alpha=0}^k A_{k,\alpha} = \sum_{\alpha=0}^n \sum_{k=\alpha}^n A_{k,\alpha},$$

(1) Veggasi il volume dell'autore: *An Introduction to the operation with Series*, Ch. I (83).

può essere scritto

$$(8) \quad \frac{d^n}{dx^n} \sec^p x =$$

$$= p^n i^n \sec^p x \sum_{\alpha=0}^n \binom{p+\alpha-1}{\alpha} \frac{1}{2^\alpha} \sum_{\beta=0}^{\alpha} (-1)^\beta \binom{\alpha}{\beta} \sum_{k=\alpha}^n \binom{n}{k} \left(\frac{2\beta}{p}\right)^k (N_2 \gamma + i N_2 \gamma + 1).$$

Poichè,

$$\sum_{\beta=0}^{\alpha} (-1)^\beta \binom{\alpha}{\beta} \beta^k = 0, \quad \text{ogniquale volta } k < \alpha \quad (1),$$

si può senz'altro assumere, nella (8), lo zero come limite inferiore della sommatoria interna (relativa all'indice k).

Con ciò, in quanto

$$(9) \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{2\beta}{p}\right)^k = \frac{1}{p^n} (p + 2\beta)^n,$$

abbiamo la formula

$$(10) \quad \frac{d^n}{dx^n} \sec^p x = (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sec^p x \sum_{\alpha=0}^n \binom{p+\alpha-1}{\alpha} \frac{1}{2^{\alpha+1}} \sum_{\beta=0}^{\alpha} (-1)^\beta \binom{\alpha}{\beta} (p + 2\beta)^n [\{1 + (-1)^n\} N_2 \gamma - \{1 - (-1)^n\} N_2 \gamma + 1].$$

2. Per trovare lo sviluppo di $\sec^p x$ in serie di potenze di x , cominciamo col notare che $\frac{d^n}{dx^n} \sec^p x \Big|_{x=0} = 0$, per tutti i valori dispari dell'intero n . Passando ai valori pari, potremo scrivere nella (10) $2n$ al posto di n , e avremo lo sviluppo di Maclaurin

$$(11) \quad \sec^p x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \sum_{k=0}^{2n} \binom{p+k-1}{k} \frac{1}{2^k} \sum_{\alpha=0}^k (-1)^\alpha \binom{k}{\alpha} (p + 2\alpha)^{2n}.$$

Desidero terminare porgendo un cordiale ringraziamento al prof. T. Levi-Civita, che ebbe la cortesia di tradurre la presente nota dall'inglese.

(1) Da

$$(b) \quad (1 - e^x)^\alpha = \sum_{\beta=0}^{\alpha} (-1)^\beta \binom{\alpha}{\beta} e^{\beta x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{\beta=0}^{\alpha} (-1)^\beta \binom{\alpha}{\beta} \beta^k,$$

segue che

$$S = k! ((x^k)) (1 - e^x)^\alpha.$$

Ora

$$(1 - e^x)^\alpha = (-1)^\alpha x^\alpha \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots\right)^\alpha,$$

e siccome x^α è la potenza più bassa in (b), segue $S = 0$, per $k < \alpha$. $((x^k)) F(x)$ denota il coefficiente di x^k nello sviluppo di $F(x)$.

Meccanica. — *Un metodo generale di valutazione approssimata dai carichi critici per aste di tipo qualunque.* Nota di G. KRALL, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geodesia. — *Sulle correzioni topografiche nei rilievi eötvösiani.* Nota di A. BELLUGI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. A. ALESSIO.

I. — Sono stati recentemente messi in evidenza alcuni lavori eötvösiani del prof. Soler (1914-1916), per il richiamo di alcune nozioni fondamentali relative alle correzioni nei rilievi con la bilancia di Eötvös dal sig. G. Boaga ⁽²⁾; intorno a questi studi devo fare qualche osservazione.

Il sig. Boaga, riferendosi ad una mia Nota ⁽³⁾, esamina inoltre uno dei miei procedimenti di correzione topografica esposti (sviluppato poi altrove), per concludere, in un caso particolare, che le vecchie formole di Eötvös, ingombranti e vaevoli se mai in casi specialissimi, sono ancora da preferirsi a quelle desumibili dal mio procedimento. Scopo della presente Nota è ritornare brevemente per ulteriori chiarimenti, al principio preso in considerazione dal sig. Boaga.

II. — Osservo anzitutto che nella sua celebre « Relazione » al XV Congresso di Geodesia Internazionale (Budapest 1906) l'Eötvös pose già la seguente relazione per definire la perturbazione sotterranea:

$$(U_{xz})^{iv} = U_{xz} - (U_{xz})_t - (U_{xz})_n - (U_{xz})_k.$$

Per il significato dei simboli rimando alle (1) e (2) e alla Memoria del barone Eötvös.

La relazione precedente è incompleta, se non si dice esplicitamente, come non è stato detto, che:

$$(U_{xz})_t = \sum_i (U_{xz})_{ti}$$

la \sum dovendosi estendere anche alle correzioni topografiche invisibili, dell'immediato sottosuolo, e delle strutture regionali come ho esposto altrove.

(1) Nella seduta del 6 aprile 1930.

(2) G. BOAGA, *A proposito di semplici e rapidi procedimenti topografici.* « Rendiconti R. Acc. Lincei », dicembre 1929-VIII.

(3) A. BELLUGI, *Semplici e rapidi procedimenti di correzione topografica.* « Rendiconti R. Acc. Lincei », aprile 1929-VII.

Ora, tra le varie influenze perturbatrici i sigg. Soler e Boaga, oltre non considerare la $\sum_i (U_{xz})_i$, non accennate dall'Eötvös, trascurano anche la $(U_{xz})_n$, e tutto ciò implica mancate correzioni, con conseguenti ripercussioni nei valori finali di U_{xz} , tali che questi non possono più avere alcun significato ai fini della prospezione mineraria.

III. — Il sig. Boaga, dopo riassunto la mia (2), per il procedimento preso in considerazione, riprende il principio da me posto della χ indipendente da ρ e α , ma dopo aver dato la formola (3), ritorna a fare sviluppi in serie e relativi arresti nei termini di secondo grado in $\frac{\chi}{\rho}$, il che si-

gnifica non seguire più il principio, principio che ha uno sviluppo grafico-analitico molto semplice, diverso anche da quello grafico, ma affatto semplice, recentemente indicato altrove da Donald C. Barton.

Intanto ho posto χ indipendente da ρ e α e costante nel settore cilindrico, inquanto ho voluto appunto evitare le limitazioni inerenti agli arresti negli sviluppi in serie.

Seguendo gli sviluppi del sig. Boaga è naturale che si debba pervenire a formule il cui diritto di preferenza o meno rispetto a quelle di Eötvös è, perlomeno, da discutersi. Da discutersi ma, secondo me, un po' differentemente da come ha fatto il sig. Boaga.

Ad un valido giudizio comparativo nella scelta di varie formole si può pervenire discutendo i principi da cui esse derivano e non con verifiche casistiche.

Le formole di Eötvös valgono purchè valga una speciale assunzione di $\chi = f_1(\alpha, \rho)$, assunzione che ha il suo significato geometrico; quelle di Schweydar (importantissime), valgono purchè valga un'altra assunzione $\chi = f_2(\alpha, \rho)$, e così dicasi per le ormai innumeri altre formole di Nikiforoff, Numerof, Heiland, Barton, Haalk ecc.

Rilevati i significati geometrici delle χ si possono allora fare i confronti delle varie formole da applicarsi in dati casi e venire così a conclusioni valutative.

Se si volesse passare poi ai confronti empirici tra i diversi tipi di formole, anche qui non mi sembra che si possa seguire il metodo del sig. Boaga, ma, caso mai, il seguente: si calcoli, su una stazione, l'influenza di un corpo geometricamente semplice e poi si applichino, per quella stazione, tutte le formole di correzione che si vuole: fatte le differenze tra i valori ricavati dalle formole da quello ricavato direttamente, la più piccola di esse ci indica la formola da preferirsi.

Ora il principio della χ da me posto, e sviluppato convenientemente, come ho già fatto, implica (e qui è infine la sua ragione d'essere) la possibilità di *potersi adattare al terreno, a qualsiasi pendenza e accidentalità*, a differenza dei procedimenti analitici e grafici enunciati prima, quello di Eötvös incluso, che implicano, con le speciali assunzioni di $\chi = f(\alpha, \rho)$

posizioni da imporre inevitabilmente al terreno, con le note limitazioni di applicabilità.

Credo con ciò che non si possa fare a meno di concludere che le formole di Eötvös non possono preferirsi a quelle deducibili dal metodo da me indicato nella (2).

Dalle formole (2) della mia Nota (2) si passa facilmente alla (5), formola dei settori cilindrici, trascritta con l'additivo in più nel secondo termine dove va il solo radicale ad esponente -1 , a parte il coefficiente 3 che moltiplica A_1 (dovuto ad errore di trascrizione; la stessa formola esatta infatti appare in altre mie precedenti pubblicazioni, come, ad esempio, nei « Gerlands Beiträge zur Geophysik H. », 2/3; 1929, accennato nella mia Nota).

Osservo infine che permane una differenza tra la formola (5) data da me, e da altri autori, benchè con finalità diverse, e la (3) del sig. Boaga.

Fisica. — *Calcolo statistico dello spettro di un atomo ionizzato*⁽¹⁾.
Nota di E. SEGRÈ, presentata⁽²⁾ dal Socio O. M. CORBINO.

La nuova meccanica quantistica dà in teoria il modo di calcolare le proprietà di un atomo ed in particolare i suoi livelli energetici e le altre grandezze che interessano la spettroscopia, ma già nel caso di tre elettroni il problema matematico è estremamente complicato e nel caso di molti elettroni è praticamente irresolubile. Proprio però in questi casi, almeno come prima approssimazione si possono usare dei metodi statistici, i quali danno risultati che possono servire almeno per orientarsi, nel caso di spettri totalmente sconosciuti.

Scopo di questa Nota è appunto di far "vedere come, e fino a che punto, con soli metodi statistici si può costruire uno spettro di atomo ionizzato. I soli dati richiesti sono il numero atomico ed il grado di ionizzazione dell'atomo in questione. Si ottiene come risultato lo schema dei livelli energetici, la separazione di un doppietto e le correzioni di Rydberg.

Fermi ha svolto la teoria di questo metodo di calcolo di cui sono già state fatte applicazioni, nel caso di atomi neutri, da Rasetti, Gentile ed E. Majorana⁽³⁾. Ci limitiamo pertanto a ricordare brevemente come tutti gli elettroni meno quello luminoso siano considerati come un gas totalmente degenere, che obbedisce in virtù del principio di Pauli alla statistica di Fermi. Si può determinare così la densità del gas in funzione della distanza dal nucleo e quindi l'andamento del potenziale elettrico intorno al nucleo stesso. L'elettrone luminoso si suppone che si muova in questo

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 6 aprile 1930.

(3) V., per es., l'art. di FERMI in: « Falkenhagen, Quantentheorie und Chemie », Leipzig, 1928.

campo il quale è ovviamente eentrale. Di esso si possono calcolare i livelli energetici ecc. Si vede subito come in questo modo venigano trascurate molte azioni: p. es. la risonanza e la polarizzazione del resto atomico. I calcoli pertanto non possono essere che approssimati. Finora inoltre il metodo poteva solo essere applicato al caso di atomi neutri. Recentissimamente ⁽¹⁾ il Fermi è riuscito a stabilire il potenziale anche nel caso di atomi ionizzati. Essò è della forma

$$V = \frac{Ze}{r} \varphi^* \left(\frac{r}{\mu} \right) \quad \text{dove } \mu = \frac{3^{2/3} h^2}{2^{1/3} \pi^{4/3} m e^2 Z^{1/3}}$$

e soddisfa all'equazione

$$\frac{d^2 \varphi^*}{dx^2} = \frac{\varphi^{3/2}}{\sqrt{x}} \quad x = \frac{r}{\mu}$$

con le condizioni ai limiti per V

$$\lim_{r=0} rV = Ze \quad \frac{2^{9/2} \pi m^{3/2} e^{3/2}}{3 h^3} \int V^{3/2} d\tau = Z - \chi$$

in cui χ è il grado di ionizzazione.

La φ^* è stata calcolata numericamente.

Abbiamo considerato il caso del V quattro volte ionizzato, perchè essendo il suo numero atomico relativamente piccolo il grado di ionizzazione elevato si fa ancora più sentire. Inoltre di esso sono conosciuti empiricamente vari termini per cui è possibile un confronto coll'esperienza.

Calcolata la φ^* numericamente, abbiamo integrato, sempre numericamente l'equazione

$$\chi'' + \chi \left\{ \frac{1}{x} [1 + (\chi - 1) \varphi(x)] - \frac{l(l+1)}{x^2} \right\} = 0$$

per $l = 0, 1, 2$ che è equivalente all'equazione di Schrödinger per la parte radiale dell'autofunzione per i termini s, p, d , rispettivamente, e per quanto totale infinito. Per x piccolo ci siamo serviti di sviluppi in serie ed abbiamo approssimato φ^* con $1 - x$. Per x molto grande la soluzione è data da $xJ_1(2\sqrt{x})$ come per l'idrogeno. La differenza fra il numero di nodi dell'autofunzione dell'idrogeno e dell'autofunzione trovata, compresi fra 0 ed un valore di x abbastanza grande perchè le due autofunzioni abbiano lo stesso periodo, dà senz'altro la correzione di Rydberg. Naturalmente la parte frazionaria della differenza si calcola tenendo conto della fase delle due autofunzioni che si confrontano. Tale procedimento che era già stato applicato per i termini s e senz'altro estendibile anche ai termini p e d . Basta osservare che poichè nel caso dell'idrogeno l'autovalore è indipendente dal quanto azimutale, l'autofunzione a grande distanza dall'origine è la stessa per i termini aventi lo stesso quanto totale, indipendentemente

(1) FERMI, « Memorie R. Accademia d'Italia », in corso di stampa.

dal quanto azimutale. Pertanto le autofunzioni calcolate numericamente possono ancora essere confrontate con $xJ_1(2\sqrt{x})$, va da sè che bisogna, nel numero dei nodi, tener conto anche di quelli delle funzioni sferiche che compaiono nella ψ e cioè 1 per i termini p , due per i termini d .

Calcolate le correzioni di Rydberg, si passa al calcolo dell'autovalore effettivo del termine che ci interessa. Tale ulteriore calcolo sarebbe naturalmente superfluo se i termini fossero rigorosamente Rydberghiani, ma teoria ed esperienza mostrano concordi che tale condizione è lungi dall'es-

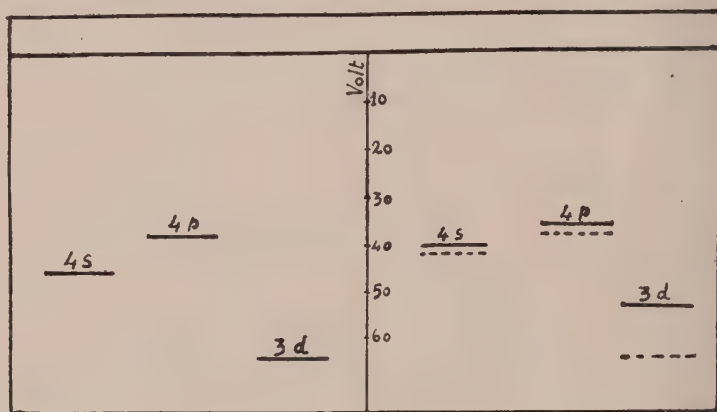


Fig. 1.

sere soddisfatta. L'autovalore effettivo si trova con qualche tentativo. La fig. 1 dà lo schema dei livelli energetici del V quattro volte ionizzato. A sinistra è lo schema sperimentale⁽¹⁾, a destra quello teorico. Le linee tratteggiate rappresentano il valore dei termini calcolati dalla correzione di Rydberg.

I risultati sono riassunti nella seguente tabelletta.

Termini	Correzione di Rydberg		Energia (Volt)	
	Osservata	Calcolata	Osservata	Calcolata
<i>s</i>	1.30	1.20	— 47.3	— 40.6
<i>p</i>	1.07	1.07	— 39.3	— 36.4
<i>d</i>	1.72	1.72	— 64.9	— 53.2

Come si vede l'accordo è abbastanza soddisfacente. Per i termini d si hanno scarti un po' rilevanti forse attribuibili alle azioni di risonanza trascurate. Si rileva anche il fatto che il termine fondamentale è un $3d$

(1) GROTRIAN, *Graphische Darstellung der Spektren*, ecc., p. 33, Springer Berlin.

mentre per il K che è analogo, è un $4s$. Passando dal K al Ti tre volte ionizzato ed al V quattro volte ionizzato, si nota appunto questo abbassamento del termine d più profondo in confronto di termini s ; di questo ci si può rendere conto col metodo statistico calcolando la posizione relativa dei termini s, p, d , pel 19° elettrone al variare del grado di ionizzazione ⁽¹⁾.

Infine per mezzo dell'autofunzione del termine $3p$ abbiamo calcolato la separazione del doppietto $3p_{1/2} \ 3p_{3/2}$ con la nota formula

$$\frac{3 \mu_0 h}{4 \pi m c} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} = \Delta E$$

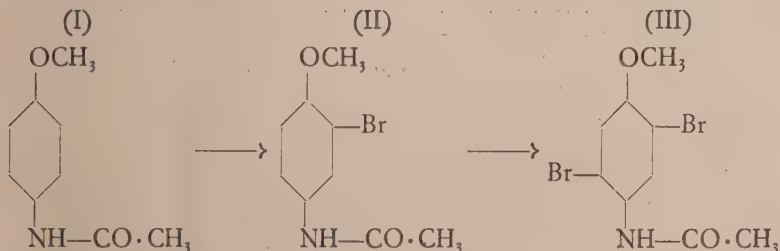
ed abbiamo trovato 1415 numeri d'onda contro 1270 osservati, ancora in ottimo accordo.

Con questo resta completato il calcolo statistico delle principali proprietà spettroscopiche del V ionizzato 4 volte e si vede come anche nel caso di atomi fortemente ionizzati il metodo statistico possa dare risultati soddisfacenti.

Chimica. — *Sulla 2-5-dibromo-anisidina* ⁽²⁾. Nota di G. BARGELLINI e A. GRIPPA, presentata ⁽³⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

In due Note precedenti ⁽⁴⁾ fu dimostrato che quando s'introducono atomi di alogeni nella molecola della fenacetina, il primo entra in posizione orto al gruppo ossi-alchilico ed il secondo, entrando in posizione para al primo, va ad occupare la posizione orto al gruppo —NH—CO—CH_3 .

Analogamente abbiamo potuto constatare che sottoponendo alla bromurazione l'acetil-p-anisidina (formula I) si forma prima l'acetil-2-bromo-anisidina (formula II) e poi l'acetil-2-5-dibromo-anisidina (formula III) che non era ancora conosciuta.



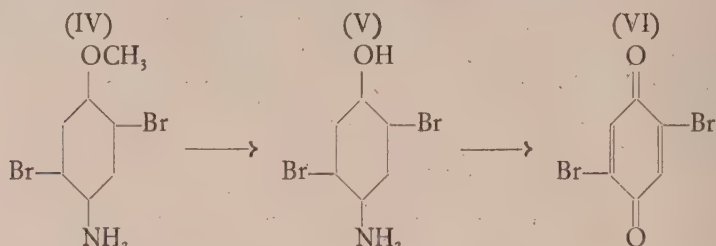
(1) V. GROTRIAN, loc. cit., p. 142.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(3) Nella seduta del 6 aprile 1930.

(4) BARGELLINI e MONTI, questi « Rendiconti », 1928 (2), p. 590; BARGELLINI e GRIPPA, questi « Rendiconti », 1930 (1), p. 489.

La costituzione della 2-5-dibromo-anisidina (formula IV) che dal suo acetil-derivato si può facilmente ottenere per saponificazione, fu dimostrata trasformandola nel corrispondente 2-5-dibromo-ammino-fenolo (formula V) che per ossidazione dà il 2-5-dibromo-chinone (formula VI).



L'affermazione di Bures e Nedelková⁽¹⁾ secondo i quali bromurando la acetil-p-anisidina si forma il 3-5-dibromo-derivato, è perciò da ritenersi ingiustificata.

Di questa nuova dibromo-anisidina sono stati preparati anche alcuni derivati che saranno descritti nella parte sperimentale, allo scopo di confrontarli con gli analoghi derivati che si possono ottenere dalle altre due dibromo-anisidine isomere, che sono già da molto tempo conosciute.

PARTE SPERIMENTALE.

Acetil-2-5-dibromo-anisidina (formula III). — Gr. 5 di acetil-p-anisidina (fusibile a 127°) si discioglie in 10 cc. di acido acetico ed alla soluzione raffreddata si aggiunge poco a poco agitando una soluzione di gr. 10 di bromo in 20 cc. di acido acetico. Dopo aver lasciato in riposo per qualche ora, si scalda per 20-30 minuti su bagnomaria per completare la reazione ed infine si versa in acqua. Il prodotto greggio della reazione si purifica facendolo cristallizzare dall'alcool bollente. Cristallini bianchi fusibili a $193-195^\circ$.

Trovato	Br %	49.29	N %	4.58
per $\text{C}_9\text{H}_9\text{O}_2\text{NBr}_2$	Calcolato	Br %	49.53	N % 4.33 .

È insolubile nell'acqua, solubile nell'alcool, nell'acido acetico e nel benzolo bollente.

Acetil-2-bromo-anisidina (formula II). — Facendo nello stesso modo la bromurazione dell'acetil-p-anisidina in soluzione acetica con la quantità di bromo calcolata per due atomi, si ha un prodotto fusibile a 111° che pre-

(1) BURES E NEDELKOVÁ, « C. B. », 1929 (1), p. 2639.

senta tutti i caratteri dell'acetil-2-bromo-anisidina che era stata ottenuta da Reverdin e Düring⁽¹⁾ partendo dal 2-bromo-4-nitro-anisolo.

Trovato Br % 32.32
per $C_9H_{10}O_2NBr$ Calcolato Br % 32.78.

2-5-dibromo-anisidina (formula IV). — Una soluzione di gr. 3 di dibromo-acetil-anisidina in 20 cc. di acido acetico con 20 cc. di acido cloridrico concentrato si riscalda all'ebollizione con refrigerante a ricadere per 3-4 ore. Per raffreddamento si deposita il *cloridrato* il quale, raccolto su filtro, si presenta come una massa di aghetti bianchi fusibili a 224-225°. Dal cloridrato si libera facilmente la base per trattamento con acqua ammoniacale. Si purifica facendola cristallizzare dall'alcool diluito. Lunghi aghi sottili intrecciati fra loro, fusibili a 92-94°.

Trovato Br % 56.52 N % 5.21
per $C_7H_7ONBr_2$ Calcolato Br % 56.93 N % 4.98.

È poco solubile nell'acqua, molto solubile nell'alcool, nell'acido acetico e nel benzolo. Si scioglie anche nell'etere di petrolio.

Aggiungendo una soluzione alcoolica satura di acido picrico alla soluzione alcoolica concentrata di dibromo-anisidina si ha il *picrato* in lunghi aghi gialli fusibili a 133-134°.

Benzoil-2-5-dibromo-anisidina. — Si prepara facendo reagire il cloruro di benzoile in quantità calcolata sulla dibromo-anisidina sciolta in benzolo. Si purifica facendolo cristallizzare dall'alcool bollente. Lunghi aghi sottili bianchi fusibili a 170-172°.

Trovato N % 3.86
per $C_{14}H_{11}O_2NBr_2$ Calcolato N % 3.63.

È facilmente solubile nell'alcool e nell'acido acetico, poco nel benzolo anche bollente.

1-metossi-2-5-dibromo-piperonal-anilina. — Una miscela di gr. 1 di piperonalio e gr. 2 di dibromo-anisidina con 10 cc. di alcool, si riscalda per 4-5 ore su bagnomaria con refrigerante a ricadere. Dopo raffreddamento si deposita il prodotto di condensazione che si purifica facendolo cristallizzare dall'alcool bollente. Aghetti di color giallo chiaro, fusibili a 171-172°.

Trovato N % 3.41
per $C_{15}H_{11}O_3NBr_2$ Calcolato N % 3.39.

(1) «Ber.», 32, p. 154 (1899).

Si scioglie nell'alcool e nell'acido acetico a caldo; è solubilissimo nel benzolo anche a freddo.

1-metossi-2-5-dibromo-2'-4'-dinitro-difenilammina. — Gr. 2 di dibromo-anisidina, insieme con gr. 1.4 di cloro-dinitro-benzolo, gr. 2 di acetato sodico e 10 cc. di alcool, si riscaldano su bagnomaria a ricadere per 5-6 ore. Il prodotto greggio della reazione che si deposita dopo raffreddamento, si purifica facendolo cristallizzare più volte dall'alcool bollente. Fonde decomponendosi fra 182° e 188°.

Trovato	N %	9.80
per $C_{13}H_9O_5N_3Br_2$	Calcolato	N % 9.40.

Si scioglie facilmente nell'alcool, nell'acido acetico e nel benzolo.

2-5-dibromo-4-ammino-fenolo. — Gr. 2.5 di dibromo-acetil-anisidina, si mescolano con 10 cc. di acido iodidrico ($d = 1.7$) e si fa bollire la miscela su bagno di sabbia in un palloncino con refrigerante a ricadere. Dopo 6 ore si getta in acqua contenente un po' di bisolfito sodico e si neutralizza infine con ammoniaca. Si deposita così una parte del dibromo-ammino-fenolo, mentre un'altra parte si può estrarre con etere dalle acque madri. Si purifica facendolo cristallizzare dal benzolo bollente. Fonde a 193-195°, come il 2-5-dibromo-4-ammino-fenolo descritto nella Nota precedente, dal quale per ossidazione con bicromato si forma il 2-5-dibromo-chinone, fusibile a 186-188°.

Chimica. — *3-5-dibromo-anisidina e 2-6-dibromo-anisidina*⁽¹⁾.
Nota di G. BARGELLINI e F. MADESANI, presentata⁽²⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

In una Nota precedente⁽³⁾ è stata descritta la preparazione della 2-5-dibromo-anisidina il cui acetil-derivato si forma sottoponendo alla bromurazione la acetil-p-anisidina. Siccome Bures e Nedelková⁽⁴⁾ avevano affermato di aver ottenuto invece in questa reazione la 3-5-dibromo-anisidina, abbiamo voluto ripreparare col metodo descritto da Wieland⁽⁵⁾ la vera 3-5-dibromo-anisidina, e preparare da questa qualche derivato per confrontarlo con gli analoghi derivati che si possono avere dalla 2-5-dibromo-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 6 aprile 1930.

(3) BARGELLINI e GRIPPA, Questi « Rendiconti », 1930 (1), p. 673.

(4) BURES e NEDELKOVÁ, « C. B. », 1929 (1), 2639.

(5) WIELAND, « Ber. », 43, 718, (1910).

anisidina. Abbiamo potuto così assicurarci che si tratta veramente di due sostanze differenti.

In questa occasione abbiamo voluto ripreparare anche la 2-6-dibromo-anisidina col metodo che era stato descritto da Robertson⁽¹⁾ ed esaminare le proprietà dei suoi derivati a confronto con quelli che si possono avere dai suoi isomeri.

Confrontando le proprietà delle tre dibromo-anisidine, risulta chiaramente che il composto ottenuto bromurando l'acetil-p-anisidina non è l'acetil-derivato della 3-5-dibromo-anisidina, ma è invece l'acetil-derivato della 2-5-dibromo-anisidina.

PARTE SPERIMENTALE.

3-5-dibromo-anisidina. — Si prepara aggiungendo a poco a poco una soluzione di gr. 13 di bromo in 25 cc. di acido acetico ad una soluzione di gr. 5 di p-anisidina in 50 cc. di acido acetico a temperatura ordinaria. Versando in acqua si separa la 3-5-dibromo-anisidina colorata in violaceo più o meno scuro. Si purifica facendola distillare in corrente di vapore e poi cristallizzandola da etere di petrolio. Aghetti incolori o leggermente violacei fusibili a 81-82°, come la 3-5-dibromo-anisidina che Wieland (loc. cit.) aveva ottenuta bromurando la p-anisidina in soluzione cloroformica.

Diversi tentativi che abbiamo fatto per condensare questa sostanza con aldeide benzoica, con piperonalio, con cloro-dinitro-benzolo ecc. sono rimasti infruttuosi, d'accordo con quanto era stato osservato per la 3-5-dicloro-fenetidina e per la 3-5-dibromo-fenetidina, a causa dell'impedimento sterico che i due atomi di bromo esercitano sul gruppo $-\text{NH}_2$.

Acetil-3-5-dibromo-anisidina. — Gr. 3.5 di dibromo-anisidina, si mescolano con 10 cc. di anidride acetica e si riscalda per 10-15 minuti a fiamma diretta in un palloncino con refrigerante a ricadere. Si getta poi in acqua, si filtra e si fa poi cristallizzare dall'acido acetico bollente. Cristallini bianchi fusibili a 225°.

	Trovato	Br % 48.89	N % 4.39
per $\text{C}_9\text{H}_9\text{O}_2\text{N Br}_2$	Calcolato	Br % 49.53	N % 4.33

È insolubile nell'acqua, poco solubile nel benzolo e nel cloroformio. Più facilmente si scioglie nell'alcool e nell'acido acetico.

Benzoil-3-5-dibromo-anisidina. — Si prepara facendo agire il cloruro di benzoile in quantità calcolata sulla dibromo-anisidina sciolta in benzolo. Si purifica facendolo cristallizzare dal benzolo bollente. Aghetti incolori o leggermente colorati in rosa. Fonde a 198°.

	Trovato	N % 3.60
per $\text{C}_{14}\text{H}_{11}\text{O}_2\text{N Br}_2$	Calcolato	N % 3.63

(1) ROBERTSON, « J. Chem. Soc. », 81, 1479 (1902).

Si scioglie a caldo nel benzolo, nell'alcool e nell'acido acetico: è poco o niente solubile nel solfuro di carbonio e nell'etere di petrolio.

2-6-dibromo-anisidina. — Si prepara prima il dibromo-p-nitro-fenolo col metodo indicato da Möhlau e Uhlmann⁽¹⁾ bromurando il p-nitro-fenolo in soluzione acetica con la quantità calcolata di bromo. Il dibromo-p-nitro-fenolo fusibile a 143° viene poi metilato nel modo indicato da Robertson (loc. cit.) sciogliendolo (gr. 16) in cc. 70 di alcool assoluto, aggiungendo gr. 10 di ossido d'argento e gr. 23 di ioduro di metile. Si riscalda a b. m. a ricadere per 3 ore, si filtra e si lava con alcool caldo l'ioduro d'argento che resta su filtro. La soluzione alcoolica viene poi concentrata ed il residuo si versa in acqua alcalina. Si deposita il dibromo-p-nitro-anisolo che si raccoglie, si lava, e si fa cristallizzare dall'alcool bollente. Aghetti bianchi fusibili a 122°, come avevano osservato Körner⁽²⁾, Loring Jackson e Fiske⁽³⁾ e Robertson.

Il dibromo-p-nitro-anisolo viene trasformato infine in 2-6-dibromo-anisidina, non con cloruro stannoso come fece Robertson, ma riscaldandolo in soluzione alcoolica con solfuro di sodio e solfo.

Dopo aver distillato l'alcool si fa distillare il prodotto, in corrente di vapore. Il liquido distillato si estrae con etere. Il residuo che rimane dopo distillazione dell'etere si fa cristallizzare dall'etere di petrolio. Si ha così la 2-6-dibromo-anisidina in laminette lucenti fusibili a 66°, come aveva indicato Robertson per la sua dibromo-anisidina e anche Loring Jackson e Fiske (loc. cit.). Anche facendo la riduzione in questo modo però la rendita lascia alquanto a desiderare.

Acetil-2-6-dibromo-anisidina. — Gr. 1 di dibromo-anisidina si scioglie in poco acido acetico diluito 1:3. Alla soluzione si aggiunge 1 cc. di anidride acetica e si agita fortemente. Dopo poco si separa l'acetil-derivato che, cristallizzato dall'acido acetico, si ottiene in forma di aghetti setacei fusibili a 206°, come aveva indicato Robertson.

Benzoil-2-6-dibromo-anisidina. — Si prepara facendo agire il cloruro di benzoile in quantità calcolata sulla dibromo-anisidina sciolta in benzolo. Si purifica facendolo cristallizzare dall'acido acetico diluito e poi dall'alcool. Aghetti bianchi splendenti fusibili a 182° come aveva indicato Robertson.

1-metossi-2-6-dibromo-piperonal-anilina. — Gr. 2 di dibromo-anisidina e gr. 1.2 di piperonalio scolti in benzolo si riscaldano su b. m. a ricadere per 5-6 ore. Si distilla poi il benzolo e il residuo si fa cristallizzare dall'acido acetico diluito e poi da alcool diluito. Scagliette giallognole fusibili a 143°.

per $C_{15}H_{11}O_3N Br_2$	Trovato	N % 3.38
	Calcolato	N % 3.39

(1) « Ann. », 289, 94 (1896).

(2) « Gazz. Chim. Ital. », 4, 390 (1874).

(3) « Ber. », 35, 1130 (1902).

È insolubile nell'acqua; si scioglie facilmente nell'alcool, nell'acido acetico, nel benzolo ed anche nel solfuro di carbonio e nel tetracloruro di carbonio.

1-metossi-2-6-dibromo-2'-4'-dinitro-difenilammina. — Gr. 1 di dibromo-anisidina con gr. 0,8 di cloro-dinitro-benzolo e gr. 1 di acetato sodico, sciolti in alcool, si riscaldano su b. m. a ricadere per 3-4 ore. Per raffreddamento si deposita il prodotto di condensazione in aghetti gialli. Si purifica facendolo cristallizzare dall'acido acetico bollente. Aghetti setacei gialli fusibili a 220°.

	Trovato	Br % 35.60	N % 9.70
per $C_{13}H_9O_5N_3$, Br ₂	Calcolato	Br % 35.80	N % 9.40

La sostanza è insolubile nell'acqua, si scioglie nell'alcool e nell'acido acetico a caldo; è solubilissima nel benzolo.

Chimica. — *La struttura cristallina dell'idrogeno solforato e dell'idrogeno seleniato* ⁽¹⁾. Nota I di G. NATTA, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. BRUNI.

La bassa temperatura di solidificazione e la difficoltà di cristallizzare in forme misurabili avevano impedito ai vecchi cristallografi di esaminare la massima parte dei composti binari dell'idrogeno e soprattutto i più semplici di essi. Solo per il ghiaccio, si hanno alcune vecchie incerte misure cristallografiche ⁽³⁾.

L'applicazione dei metodi röntgenografici con l'adozione di spettrografi, atti allo studio della struttura cristallina alle bassissime temperature dell'aria o dell'idrogeno liquido, può ora permettere, pure per i più volatili composti dell'idrogeno, uno studio che non manca di interesse per i numerosi problemi che si riconnettono alla intima struttura reticolare e per la determinazione delle dimensioni dell'atomo neutro e dell'ione idrogeno positivo. Valendomi appunto dei metodi basati nell'impiego dei raggi X ho intrapreso ora l'esame sistematico degli idruri degli elementi del 4°, 5°, 6°, 7° gruppo del sistema periodico, usando il metodo delle polveri, che ha potuto fornire per la maggior parte dei composti presi in esame dei risultati sicuri per la loro elevata simmetria.

Ben pochi idruri di metalloidi erano stati sinora esaminati coi raggi X. Nella recente letteratura si hanno soltanto alcuni lavori sul ghiaccio, che

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale del R. Politecnico di Milano.

(2) Nella seduta del 2 marzo 1930.

(3) NORDENSKIÖLD, «Pogg. Ann.», 114, p. 612 (1861); KENNGOTT, «N. Jahrb. f. Min.», 2, p. 184 (1866); P. GROTH, «Chemische Kristallographie», I, p. 66 (1906).

esigono una conferma perchè basati su di un numero limitato di misure sperimentali⁽¹⁾, sull'ammoniaca⁽²⁾, sull'acido cloridrico⁽³⁾, sul diborano⁽⁴⁾ e, per quanto riguarda gli idruri dei metalli, su quelli di litio⁽⁵⁾, di rame e di palladio, sebbene per questi due ultimi vi siano state alcune divergenze tra i diversi sperimentatori⁽⁶⁾.

Ho sinora potuto esaminare coi raggi X il ghiaccio, l'acqua ossigenata, l'idrogeno solforato, il seleniato, il tellurato, l'ammoniaca, l'idrogeno fosforato gassoso, l'arsenicale e l'antimoniato ed ho in corso l'esame di idruri di altri metalloidi. Tra quelli sinora presi in esame numerosi (H_2S , H_2Se , NH_3 , PH_3 , AsH_3) appaiono cristallizzare nel sistema cubico⁽⁷⁾. Mi limito ora a comunicare i risultati ottenuti dall'esame dell'idrogeno solforato e di quello seleniato, riservandomi di riferire prossimamente sull'esame degli altri idruri.

DISPOSITIVO SPERIMENTALE.

Data la bassa temperatura di solidificazione degli idruri presi in esame ho dovuto impiegare uno spettrografo speciale. Nella letteratura se ne trovano descritti diversi tipi per l'esame col metodo delle polveri a basse temperature, che furono adottati rispettivamente da F. Simon⁽⁸⁾, da H. Mark e E. Pohland⁽⁹⁾, da J. de Smedt e W. H. Keesom⁽¹⁰⁾ del Laboratorio di Leida.

Ho preferito però costruire un tipo di spettrografo, lievemente modificato rispetto ai tipi precedenti, che ritengo più pratico (vedi fig. 1), e di sufficiente precisione. Solo una piccola striscia della film avvolta all'esterno di un cilindro rigidamente fissato al robusto basamento della camera è esposta al raffreddamento per l'irradiazione del preparato o per contatto

(1) F. RINNE, « Berichte d. Sächs. Ges. d. Wiss. », Math.-nat. Kl., Leipzig, 69, p. 57 (1917); R. GROSS, « Centralbl. f. Min. », p. 201 (1919); A. ST. JOHN, « Proc. Nat. Ac. Sc. », 4, p. 193 (1918); D. M. DENNISON, « Phys. Rev. », 17, p. 20 (1921); W. H. BRAGG, « Proc. Phys. Soc. London », 34, p. 98 (1921); G. AMINOFF, « Geol. Fören. Stockholm Förh. », 43, p. 389 (1921); W. H. BARNES, « Proc. Royal Soc. London A. », 125, p. 670 (1929).

(2) H. MARK e E. POHLAND, « Zeitschr. f. Krist. », 61, p. 532 (1925); J. DE SMEDT, « Bull. Acad. Royal de Belgique, Cl. Sc. », 10, p. 655 (1925).

(3) F. SIMON e Cl. V. SIMSON, « Zeitschr. f. Phys. », 21, p. 168 (1924).

(4) H. MARK e E. POHLAND, « Zeitschr. f. Krist. », 62, p. 103 (1925).

(5) J. M. BIJVOET e A. KARSSSEN, « Proc. Amsterdam », 25, p. 27 (1922); « Rec. Trav. Chim. Pays-Bas », 42, p. 859 (1923).

(6) H. MÜLLER e A. J. BRADLEY, « Journ. Chem. Soc. », 76, p. 1669 (1926); A. QUILICO, « Rend. R. Acc. Lincei », 4, s. 6^a, p. 57 (1926); L. W. MACKEEHAN, « Phys. Rev. », 20, p. 424 (1922); 21, p. 334 (1923).

(7) G. NATTA, « Giorn. Chim. Ind. Appl. », 12, p. 37 (1930).

(8) F. SIMON, « Zeitschr. f. Phys. », 25, p. 160 (1924).

(9) H. MARK e E. POHLAND, « Zeitschr. f. Krist. », 61, p. 293 (1925).

(10) J. DE SMEDT e W. G. KEESOM, « Proc. Amsterdam », 27, p. 839 (1924); « Comm. Phys. Lab. Leiden », 178, p. 19 (1926).

coi gas freddi e secchi, eventualmente contenuti nell'interno della camera stessa, ed evita di contrarsi e di irrigidirsi. Il coperchio dello spettrografo, il dispositivo di allineamento dei raggi X ed il recipiente Dewar, al quale è fissato il preparato, sono guidati in posizioni esattamente centrate da giunti costituiti da coni smerigliati. Il preparato è fatto congelare, con un sistema analogo a quello adottato già da De Smedt e Keesom⁽¹⁾, al-

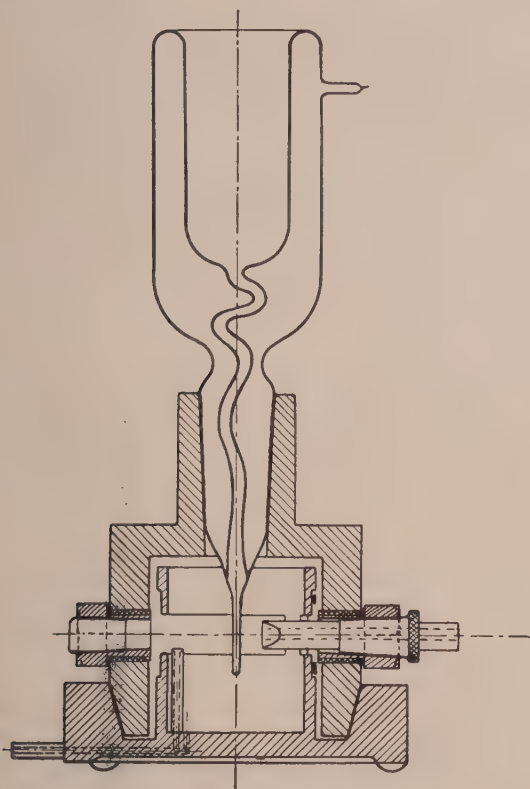


Fig. 1.

l'esterno di un capillare di vetro collegato, attraverso un tubetto spiraliforme attraversante la doppia parete di un vaso di Dewar, al recipiente interno di questo. Il raffreddamento del capillare si ottiene per mezzo di un liquido bollente a bassa temperatura che viene guidato sino all'estremità inferiore del capillare da un sottile filo di platino. L'asse di tale capillare viene posto durante la presa del fotogramma parallelamente all'asse della camera stessa. Con questo dispositivo si riesce a portare il preparato a quasi -40° usando

(1) J. DE SMEDT e W. H. KEESOM, loc. cit.

come liquido raffreddante l'ammoniaca liquida, a circa -170° con aria liquida. Si è potuto ad es. con tale camera fotografare facilmente l'etilene, pur solidificando questa soltanto a -162° .

La deposizione della sostanza in esame in sottile strato all'esterno del capillare di vetro si effettua, nel caso di sostanze liquide alla temperatura ordinaria, per rapida immersione del capillare nel liquido stesso, nel caso invece di sostanze alla temperatura ordinaria gaseose per condensazione, mantenendo il capillare raffreddato all'interno, in una speciale cameretta di vetro nella quale si fa giungere il gas da esaminarsi nella quantità necessaria per ottenere uno straterello solido dello spessore voluto. La deposizione del gas sul capillare si può anche effettuare nello stesso spettrografo che possiede sul basamento due tubetti, l'uno per l'evacuazione della camera, l'altro per l'introduzione del gas in esame.

Risultano in genere sufficienti per ottenere un buon fotogramma dai 10 ai 15 cc. di gas. Tale quantità si potrebbe ancora diminuire riducendo la lunghezza del capillare di vetro che nella camera, rappresentata in fig. 1, è di mm. 25 circa. In tal caso però si raggiunge una temperatura per il preparato un poco meno bassa.

Con questo dispositivo, se l'asse del preparato fosse portato a coincidere esattamente con quello della camera, il fascio di raggi X, che ha una larghezza di mm. 1 circa, verrebbe completamente assorbito dal preparato, avente un diametro di quasi mm. 2, e mancherebbero sul fotogramma le riflessioni corrispondenti agli angoli più piccoli. Non è possibile diminuire il diametro del preparato perchè riducendo il diametro interno del capillare si rende difficile la circolazione dell'aria liquida e quindi si compromette il raffreddamento della sostanza in esame. D'altro lato allargando il fascio dei raggi X si perde in nettezza delle linee e risulta maggiore l'annerimento diffuso del fotogramma.

Per evitare questi inconvenienti si è mantenuto l'asse del capillare parallelo all'asse della camera ma non esattamente coincidente con questo. Lo spostamento di pochi decimi di millimetro si è effettuato in direzione normale al piano di simmetria della camera e del fascio di raggi X. Si è utilizzato per la lettura la metà del fotogramma corrispondente alla parte della camera opposta alla direzione dello spostamento.

Con uno spostamento di 3-4 decimi di millimetro dell'asse del preparato nel modo suindicato si possono ottenere anche per preparati di mm. 1.5-2 di diametro fotogrammi molto più nitidi e più precisi di quanto si otterrebbe con gli stessi preparati se fossero posti in posizione esattamente centrata.

La precisione raggiungibile delle misure dei fotogrammi ottenuti con il dispositivo descritto si può ritenere corrisponda, nella valutazione della costante della cella, fatte le debite correzioni, ad un'approssimazione variante da 0.003 a 0.010 Å, a seconda dello spessore e dell'opacità del preparato.

ESAME COI RAGGI X DELL'IDROGENO SOLFORATO.

Dalla letteratura risulta che l'idrogeno solforato solidifica secondo le misure più recenti ⁽¹⁾ a circa -82.5 ma nulla si trova indicato riguardo alla sua struttura cristallina.

Coi dispositivo precedentemente descritto, facendo condensare sul capillare di vetro raffreddato con aria liquida dell'idrogeno solforato secco, ho ottenuto dei fotogrammi di una rara chiarezza, usando le radiazioni emesse con anticatodo di ferro, da un tubo Philips ad elettroni del tipo ad anticatodi intercambiabili.

In figura è riprodotta la microfotometria di un fotogramma ottenuta con un microfotometro di Kipp e Zonen. Oltre alle linee corrispondenti

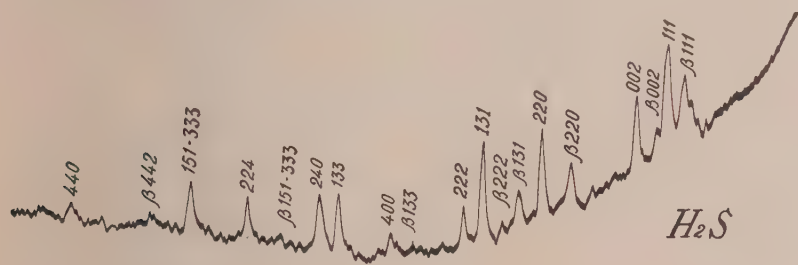


Fig. 2.

alle radiazioni K_{α} del ferro si osservano nella microfotometria molte linee corrispondenti alle radiazioni K_{β} .

Nella tabella a p. 684, sono raccolti i seni degli angoli e le intensità delle singole riflessioni, gli indici delle faccie, le distanze reticolari ed il lato della cella elementare, che si calcolano per quell'ordinamento del fotogramma nel sistema cubico che corrisponde alla cella elementare minima.

Risulta così il lato della cella elementare eguale a $5.778 \pm 0.003 \text{ \AA}$; il volume di $192.9 \times 10^{-24} \text{ cc}$. La densità dell'idrogeno solforato solido a -170° risulta, supponendo che la cella elementare contenga 4 molecole e che il peso dell'atomo di idrogeno sia $1.65 \cdot 10^{-24} \text{ gr.}$ eguale a 1.166. La densità dell'idrogeno solforato solido non era sinora nota. Quella allo stato liquido è stata determinata da Steele ⁽²⁾ e risulta 1.002 a -81.7° .

(1) E. BEKMANN, P. WAENTIG e N. NIESCHER, « Zeitschr. f. anorg. allg. Chemie », 67, p. 17 (1910); L. S. BAGSTER, « Journ. Chem. Soc. », 99, p. 1222 (1911); G. BAUME, « Journ. Chim. Phys. », 12, p. 206 (1924).

(2) B. STEELE, D. MC. INTOSCH e E. H. ARCHIBALD, « Zeitschr. f. Phys. Chem. », 65, p. 129 (1906).

H₂S — Fe/ant:

$\text{sen } \frac{\theta}{2}$	k	d	hkl	a	Intensità micro- foto- metrati	Intensità calcolata per struttura	
						ionica	non ionica
0.2673	β	3.269	111	5.663	—	—	—
0.2924	α	3.307	111	5.729	270	23970	18940
0.3048	β	2.876	002	5.752	—	—	—
0.3365	α	2.873	002	5.746	185	15652	9408
0.4305	β	2.036	220	5.760	—	—	—
0.4733	α	2.043	220	5.778	230	21980	21980
0.5037	β	1.740	131	5.774	—	—	—
0.5262	β	1.666	222	5.773	—	—	—
0.5546	α	1.742	131	5.779	260	37350	29515
0.5797	α	1.668	222	5.778	108	11985	7250
0.6616	β	1.325	133	5.778	—	—	—
0.6691	α	1.445	400	5.780	65	7777	7777
0.7295	α	1.325	133	5.778	165	28540	22550
0.7480	α	1.293	240	5.781	152	27800	16820
0.7876	β	1.112	$\left. \begin{matrix} 151 \\ 333 \end{matrix} \right\}$	5.778	—	—	—
0.8200	α	1.179	224	5.777	120	25390	25390
0.8698	α	1.112	$\left. \begin{matrix} 151 \\ 333 \end{matrix} \right\}$	5.778	140	$\left. \begin{matrix} 24770 \\ 7980 \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} 18900 \\ 6300 \end{matrix} \right\}$
0.9010	β	0.963	442	5.778	—	—	—
0.9472	α	1.021	440	5.774	55	11012	11012

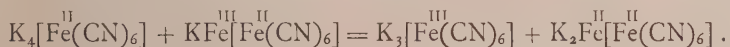
Nelle tre ultime colonne della tabella sono paragonate, per le riflessioni corrispondenti alla radiazione K α del ferro, le intensità microfotometrate e quelle calcolate per una struttura reticolare tipo blenda per le due ipotesi di struttura ionica e non ionica. L'accordo tra intensità sperimentale e calcolata è migliore per la prima ipotesi. La discussione completa del tipo di struttura dell'idrogeno solforato e di quello seleniato sarà esposta in una prossima Nota.

Chimica. — *Sulla riduzione del ferricianuro di argento mediante solfato ferroso* ⁽¹⁾. Nota di G. A. BARBIERI, presentata ⁽²⁾ dal Socio R. NASINI.

Dalle ricerche di Skraup ⁽³⁾, di J. Messner ⁽⁴⁾ e di K. A. Hofmann ⁽⁵⁾ sui bleu di Prussia e di Turnbull, risultò che alcuni prodotti che si ottengono facendo reagire i ferrocianuri coi sali ferrici sono identici a quelli che si ottengono facendo reagire i ferricianuri coi sali ferrosi. Per interpretare questo fatto il Messner suppose che i sali ferrici agissero come ossidanti sui ferrocianuri e che i bleu di Prussia fossero, come i bleu di Turnbull, ferricianuri ferrosi.

L'interpretazione opposta venne sostenuta da K. A. Hofmann. Secondo questo autore i sali ferrosi agirebbero da riducenti sui ferricianuri, e i bleu di Turnbull, come i bleu di Prussia, sarebbero ferrocianuri ferrici.

Per dimostrare la possibilità che i ferrocianuri vengano ossidati dai sali ferrici, Messner ricorda il metodo Williamson di preparazione del ferricianuro potassico, che consiste nel trattare il ferrocianuro potassico col così detto cianuro ferrico-potassico ⁽⁶⁾ (violetto di Williamson). L'ossidazione del ferrocianuro avviene secondo l'equazione:



K. A. Hoffmann per dimostrare che i bleu non possono essere sali ferrosi dell'acido ferricianidrico si basa sul fatto che essi non vengono ossidati dall'acqua ossigenata: analogamente però si potrebbe opporre, all'interpretazione che si tratti di sali ferrici dell'acido ferrocianidrico, il fatto che essi non reagiscono coi reattivi caratteristici dei sali ferrici: solfocianuri, acetilacetone, ecc.

È ben chiaro che il comportamento dei bleu con gli alcali non può portare alcun argomento in favore piuttosto dell'una che dell'altra interpretazione, perchè la formazione di ferrocianuro alcalino e idrossido ferrico è spiegabile tanto ammettendo che i bleu siano sali ferrici che l'alcali decompone, quanto ammettendo che siano sali ferrosi dell'acido ferricianidrico e

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio Chimico del R. Istit. Super. Agrario di Bologna.

(2) Nella seduta del 6 aprile 1930.

(3) « Ann. », 186, 387 (1877).

(4) « Z. Anorg. Chem. », 9, 126 (1895).

(5) « Ann. », 371, 1 (1904).

(6) « Ann. », 57, 232 (1846); H. MOISSAN, « Chimie Minerale », IV, 415.

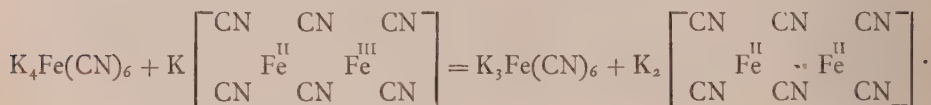
che alla decomposizione operata dall'alcali segua istantaneamente la riduzione del ferricianuro alcalino da parte dell'idrossido ferroso.

Recentemente, sulla struttura dei bleu di Prussia e di Turnbull, H. Reihlen⁽¹⁾ e L. Cambi⁽²⁾ hanno esposto una nuova interpretazione secondo la quale i bleu non sarebbero sali ferrosi nè sali ferrici, perchè in essi nè il ferro bivalente, nè il ferro trivalente si troverebbero nella sfera esterna, ma insieme farebbero parte di complessi a struttura polinucleare. Da questa interpretazione, che ha il vantaggio di spiegare la struttura di molti altri cianuri complessi e di dar ragione di molti fenomeni rimasti finora oscuri, il problema che ci interessa viene piuttosto superato che risolto.

Resta ancora da rispondere alla domanda se i sali ferrosi possano o no ridurre i ferricianuri. Reihlen si limita ad affermare che tale riduzione è « natürlich prinzipiell möglich ».

A mio parere le reazioni finora citate per dimostrare l'azione ossidante dell'ione ferrico sui ferrocianuri, o l'azione riducente dell'ione ferroso sui ferricianuri, sono reazioni che effettivamente avvengono fra ioni complessi.

Così la reazione di Williamson ricordata da Messner va intesa, alla luce della nuova interpretazione Reihlen-Cambi, come l'ossidazione dell'ione ferricianidrico per opera non di un ione ferrico, ma di un ione complesso polinucleare ferroso-ferrico, come è espresso dall'equazione:



Anche la reazione descritta nel 1921 da M. Hannik⁽³⁾ per dimostrare che i sali ferrosi possono ridurre i ferricianuri è probabilmente una reazione che avviene tra ioni complessi. La reazione descritta da M. Hannik è la seguente: 20 mmgr. di solfato ferroso in polvere vengono introdotti nella soluzione di gr. 10 di solfocianuro di ammonio in 10 cc. di acqua; poi al liquido incolore si aggiungono mmgr. 20 di $K_3Fe(CN)_6$ in sostanza; si produce subito una intensa colorazione rosso sangue dovuta alla formazione di solfocianuro ferrico. È verosimile che in presenza di un grande eccesso di solfocianuro alcalino il ferro bivalente entri a far parte di un anione complesso ferro-solfocianico⁽⁴⁾, probabilmente $[Fe^{\text{II}}(SCN)_6]^{4-}$ e che su questo ione e non sull'ione ferroso si esplichino l'azione dell'ione ferricianidrico con formazione di $[Fe^{\text{III}}(SCN)_6]^{3-}$.

(1) « Ann. », 451, 75 (1927).

(2) « Gazz. Chim. Ital. », 58, 57 (1928).

(3) « Chem. Weekblad », 18, 522-615 (1921); « Chem. Z. Blatt. », 1921, III, 1261; 1922, I, 117.

(4) A. Rosenheim ha isolato il composto $Na_4Fe(SCN)_6 \cdot 12 H_2O$. « Z. Anorg. Chem. », 27, 229 (1901).

Io ho pensato che per poter dimostrare sperimentalmente che l'ione ferroso agisce come riducente sull'ione ferricianidrico, si sarebbero dovute realizzare condizioni tali che l'ione ferrocianidrico e l'ione ferrico formatisi nella reazione non potessero ulteriormente reagire tra di loro. Un ferrocianuro che non reagisce coi sali ferrici è il ferrocianuro d'argento che è praticamente insolubile nell'acqua, specie in presenza di ioni d'argento. Era quindi prevedibile che, se l'ione ferroso poteva ridurre l'ione ferricianidrico, facendo reagire un sale ferroso — per esempio il solfato — sul ferricianuro d'argento, in presenza di un eccesso di solfato d'argento, si sarebbe dovuta produrre la seguente reazione:



L'esperienza ha confermato pienamente tale previsione. Aggiungendo ad una soluzione di ferrocianuro potassico dapprima un eccesso di solfato o nitrato d'argento, poi del solfato ferroso pure in eccesso, si osserva che il colore rosso aranciato del ferricianuro d'argento rapidamente si attenua e poi scompare; il precipitato diventa bianco niveo; nel liquido si riconosce la presenza di sale ferrico.

La reazione venne anche studiata sotto l'aspetto quantitativo, mettendo a reagire quantità note di sostanze e determinando l'eccesso di solfato ferroso con permanganato.

In un pallone tarato da 500 cc. si introdussero 100 cc. di una soluzione mol./30 di ferricianuro potassico; vi si aggiunsero 200 cc. di una soluzione N/10 di nitrato d'argento e cc. 50 di una soluzione mol./10 di solfato ferroso nettamente acida per acido solforico. Avvenuta la decolorazione del ferricianuro d'argento, si portò il liquido, che aveva in sospensione il precipitato bianco di ferrocianuro d'argento, a 500 cc.; si filtrò su filtro asciutto in un bicchiere asciutto; 250 cc. del filtrato consumarono cc. 8,4 di una soluzione N/10 di permanganato. Gr. 1,097 di ferricianuro potassico avevano dunque ossidato il sale ferroso contenuto in cc. 33,2 della soluzione N/10, pari a gr. 0,1871 di ferro bivalente. Da questi risultati si calcola che una molecola di ferricianuro viene ridotta da un atomo di ferro bivalente.

Resta dunque definitivamente accertato che in opportune condizioni gli ioni ferrosi anche in soluzione acida possono ridurre quantitativamente gli ioni ferricianidrici.

L'applicazione analitica di questa nuova reazione alla determinazione dei ferricianuri, è facilmente immaginabile.

È noto che il metodo più impiegato per il dosamento volumetrico dei ferricianuri consiste nella loro riduzione in soluzione alcalina con idrossido ferroso, e successiva titolazione del ferrocianuro formatosi mediante permanganato in soluzione acida. La riduzione del ferricianuro d'argento per mezzo

di solfato ferroso in soluzione acida permette di titolare i ferricianuri determinando con permanganato l'eccesso del solfato ferroso impiegato nella riduzione. Questo metodo, a differenza del precedente, è applicabile anche in presenza di ferrocianuri, cianuri, solfocianuri, cloruri, come è dimostrato dall'analisi che qui sotto riportiamo.

In un pallone da 250 cc. si introdussero 50 cc. di una soluzione mol./30 di ferricianuro potassico, 5 cc. di una soluzione N/10 di cloruro di sodio, 5 cc. di una soluzione N/10 di solfocianuro potassico, 5 cc. di una soluzione N/10 di cianuro potassico, 100 cc. di una soluzione N/10 di nitrato d'argento e infine 25 cc. di una soluzione N/10 di solfato ferroso acida per acido solforico. Si portò il liquido a 250 cc. e lo si filtrò su filtro asciutto; 100 cc. del filtrato consumarono cc. 3,35 di soluzione N/10 di permanganato. Da questi dati si calcola un consumo totale di solfato ferroso, da parte del ferricianuro, pari a quello contenuto in cc. 16,6 di soluzione mol./10, e quindi la presenza di una quantità di ferricianuro potassico pari a quella contenuta in cc. 16,6 di una soluzione mol./10 di ferricianuro, cioè gr. 0,5465 di $K_3Fe(CN)_6$. La quantità impiegata era stata di gr. 0,5485.

Chimica (biologica). — *Azione del lattice del « ficus carica » sulle proteine* ⁽¹⁾. Nota di S. VISCO, presentata ⁽²⁾ dal Socio N. PARAVANO.

L'affermazione fatta dal Bouchut⁽³⁾ fin dal 1880, che nel lattice del « ficus carica » sia contenuto un fermento capace di digerire le sostanze proteiche, non è rimasta isolata; Mussi⁽⁴⁾ prima, Buscaglione e Fermi⁽⁵⁾, poi, l'hanno pienamente confermata, ed hanno anche illustrata qualcuna delle particolarità di azione di esso.

Il fatto che più colpisce quando si fa agire il lattice su un idrosolo di proteina è lo speciale stato di fluidità che assume la sostanza in esame; ora spesso si è confusa questa modificazione chimico-fisica con un vero e proprio processo di digestione, senza cercare affatto di stabilire se, e fino a qual punto, la molecola proteica fosse stata scomposta. Nel 1926⁽⁶⁾ studiai accuratamente le modificazioni chimico-fisiche provocate dal lattice nelle

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Sassari.

(2) Nella seduta del 6 aprile 1930.

(3) BOUCHUT, « Comp. Rend. de l'Ac. des Scien. », 91-67, 1880, Parigi.

(4) MUSSI, *L'Orosi*, p. 264, novembre 1890, Firenze.

(5) BUSCAGLIONE e FERMI, *Contributo allo studio degli enzimi proteolitici e peptonizzanti dei vegetali*. « Annuario del R. Istituto Botanico di Roma », 7, 1898, Roma.

(6) VISCO, *Sulle modificazioni chimico-fisiche degli idrosoli di proteine provocate da alcuni latici vegetali*. Note I, II, III, IV. « Archivio di Scienze Biologiche », vol. IX, n. 1-2, 1926, Napoli.

soluzioni di proteine, e cercai anche io di risalire, attraverso alla interpretazione di esse, alla conoscenza del grado e della natura della scissione subita dalla molecola proteica, ma così non mi fu possibile risolvere il problema in maniera soddisfacente; e non potendo ottenere dai metodi della chimico-fisica più di quello che allora mi diedero, ho ripreso oggi lo studio della questione servendomi di metodi chimici.

Riferisco in questa Nota alcuni dei risultati con essi ottenuti.

Tecnica. — Le ricerche vengono tutte eseguite su albume di uovo sbattuto con acqua distillata e filtrato. Il filtrato, mediante aggiunta di altra acqua, si porta al volume voluto. Su un'aliquota delle soluzioni così approntate per la ricerca, si determina il contenuto in azoto col metodo di Kjeldahl; un'altra invece viene messa da parte per farle poi subire il trattamento analitico di cui dirò in seguito. Al restante della soluzione (sempre 250 cc. si aggiunge il lattice, e, di tempo in tempo, se ne prelevano dei campioni per trattarli nella maniera seguente:

Il campione prelevato ed al quale si aggiungono 5 gocce di una soluzione satura a temperatura ambiente ($12 \pm 3^\circ \text{C.}$) di cloruro di sodio, si tiene in bagnomaria bollente per 5', alla fine dei quali, vi si aggiungono 2 cc. di una soluzione al 10 % di acido tricloroacetico. Si lascia raffreddare, indi si filtra, si lava ripetutamente, con acqua, il precipitato rimasto sul filtro ed indi di esso si determina il contenuto in azoto col metodo di Kjeldahl. Il filtrato si tratta con solfato di ammonio, fino a semisaturazione o a saturazione completa, secondo, i casi, o prima in un modo e poi nell'altro; indi si filtra, si lava con soluzione opportunamente concentrata di solfato di ammonio, indi si raccoglie il precipitato volta a volta ottenuto e si porta in un becher ove viene trattato con idrato sodico fino a trasformazione completa del solfato di ammonio in solfato sodico. Scacciata completamente l'amoniaca, ed è questo il momento più delicato di tutto il procedimento, si porta il contenuto del becher in un pallone per ossidazione, e se ne determina l'azoto col metodo di Kjeldahl.

Si calcola per differenza l'azoto passato nell'ultimo filtrato.

Col procedimento sopra indicato si arriva a conoscere:

- a) L'azoto totale della soluzione di albume di uovo adoperata ogni volta per la ricerca;
- b) l'azoto della proteina coagulabile, con il calore e l'acido tricloroacetico, prima e dopo l'azione del lattice;
- c) l'azoto della sostanza proteica non coagulabile, ma precipitabile con solfato di ammonio aggiunto fino a semisaturazione della soluzione;
- d) l'azoto della sostanza proteica precipitabile con solfato di ammonio soltanto se aggiunto fino a saturazione della soluzione;
- e) l'azoto passato nell'ultimo filtrato come peptoni, polipeptidi e amminoacidi (calcolato per differenza).

Riassumo in una tabella quattro delle esperienze fatte.

N° della prova	Frazioni dell'azoto che si determinano sempre in 50 cc. della soluzione di albume d'uovo	1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a
		Lattice aggiunto gocce 5 gr.	Lattice aggiunto gocce 10 gr.	Lattice aggiunto gocce 15 gr.	Lattice aggiunto gocce 20 gr.
1	N totale	0.1599	0.1452	0.1425	0.1667
2	N coagulabile con il calore e l'acido tricloroacetico	0.1401	0.1281	0.1228	0.1469
3	N coagulabile dopo 5' di azione del lattice . .	0.0991	0.0763	0.0640	0.0680
4	N » » 15' » » . .	0.1001	0.0783	0.0665	—
5	N » » 30' » » . .	0.0988	0.0777	0.0660	0.0664
6	N » » 60' » » . .	0.1004	0.0742	0.0669	0.0699
<i>I filtrati delle prove sopra riportate si trattano con (NH₄)₂SO₄ fino a semisaturazione.</i>					
7	N precipitabile dal filtrato della prova n. 2 . .	0.0176	—	—	—
8	N » » » » 3 . .	0.0169	—	—	—
9	N » » » » 4 . .	0.0173	—	—	—
10	N » » » » 5 . .	0.0175	—	—	—
11	N » » » » 6 . .	—	—	—	—
<i>I filtrati provenienti dalle prove sopra elencate si saturano a caldo con (NH₄)₂SO₄.</i>					
12	N precipitabile nel filtrato della prova 2 ^a . .	—	0.0122	0.0116	0.0127
13	N » » » » 3 ^a . .	—	0.0420	0.0521	0.0605
14	N » » » » 4 ^a . .	—	0.0405	0.0520	—
15	N » » » » 5 ^a . .	—	0.0425	0.0520	0.0598
16	N » » » » 6 ^a . .	—	0.0423	0.0521	0.0600
17	N » » » » 7 ^a . .	—	—	—	—
18	N » » » » 8 ^a . .	0.0156	—	—	—
19	N » » » » 9 ^a . .	0.0157	—	—	—
20	N » » » » 10 ^a . .	0.0154	—	—	—
21	N » » » » 11 ^a . .	0.0155	—	—	—

Dai dati analitici riassunti si rileva che:

1°. Il lattice del « ficus carica » agisce sulle proteine costituenti l'albumine di uovo scindendole in composti più semplici.

2°. Il valore terminale di quest'azione si raggiunge quasi istantaneamente.

3°. Il quantitativo della proteina resa incoagulabile aumenta aumentando la quantità del lattice agente, ma non in maniera così cospicua come avviene nel caso di sostanze proteolitiche di natura enzimatica.

Nelle soluzioni di albumine di uovo, preparate nel modo anzidetto e trattate con il calore e l'acido tricloroacetico, si determina sempre una certa piccola quantità di azoto appartenente a sostanze non precipitabili mediante saturazione a caldo con solfato di ammonio delle soluzioni nelle quali esse si trovano disciolte; questa frazione aumenta leggermente nei campioni trattati prima con lattice, ma sull'aumento non esercitano un'influsso apprezzabile, nè la quantità del lattice aggiunto, nè la durata della sua azione; pertanto io penso che esso sia dovuto ad una pura e semplice azione dell'acido tricloroacetico sulle proteine dell'albumine di uovo, rese più labili dall'azione del lattice, piuttosto che ad un'azione peptonizzante, od anche più spinta, del lattice stesso.

Consequentemente ritengo di potere affermare che:

L'azione del lattice del « ficus carica » sulle proteine costituenti l'albumine dell'uovo di gallina, non va oltre la formazione di prodotti del tipo dei proteosi secondari.

Esaminerò in una prossima Nota se questa azione del lattice sia veramente dovuta ad un'enzima proteolitico in esso contenuto, o se non debba essere considerata di natura profondamente diversa.

Chimica. — *La struttura chimica e cristallina di alcuni nitriti complessi.* Nota di A. FERRARI e C. COLLA, presentata dal Socio G. BRUNI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *La struttura cristallina dell'idrogeno solforato e dell'idrogeno seleniato.* Nota di G. NATTA, presentata dal Socio G. BRUNI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geologia. — *Sulle più antiche formazioni del Monte S. Calogero e del Nadure presso Sciacca.* Nota di S. SORRENTINO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio A. MARTELLI.

Sulla geologia della regione di Sciacca, in provincia di Agrigento, si possono principalmente consultare i lavori del Baldacci ⁽²⁾ primo rilevatore della Carta geologica della Sicilia, del Di Stefano ⁽³⁾ e del Checchia-Rispoli ⁽⁴⁾. In questa Nota mi limito solo a segnalare l'esistenza del Trias superiore, da prima non conosciuto, al Monte S. Calogero, e del Titonico a Rocca Nadure, tutta, per lo addietro, riferita al Norico.

Il lato meridionale della montagna di S. Calogero, è delimitato da una parete abrupta, la quale lascia allo scoperto i terreni che costituiscono il monte stesso a causa della faglia già rilevata dal Baldacci e che l'ha distaccato dal resto della formazione.

Le conoscenze finora possedute sul Mesozoico di questa ultima propaggine dei monti di Sambuca Zabut e Caltabellotta, ricollegati al S. Calogero da una serie di piccoli rilievi collinosi, facevano considerare come terreno più antico visibile un calcare compatto a cefalopodi, incertamente riferito dal Baldacci al Titonico od alla sottostante zona ad *Aspidoceras Acanthicum*. Questo calcare a grossi strati, sarebbe venuto così a contatto, a causa della faglia, con le marne del Neocomiano, affioranti sull'altro labbro della frattura, in contrada Isabella.

I rilievi eseguiti in questa zona, per ricerche di petrolio, mi hanno fatto invece notare, a contatto col Neocomiano sulla linea di faglia, la esistenza di una formazione calcarea ancora più antica di quella Titonica.

Questo più antico terreno da me constatato giace al disotto del calcare Giurese superiore a cefalopodi, ed è ben visibile nelle sue testate, alle falde del S. Calogero venendo dalla contrada Carrozza, anche perchè in esso sono incise le due terrazze marine, alle quote circa di 150 e di 170 m. s. l. m., sui cui ripiani si distendono ancora ben visibili, i crostoni formatisi durante la subsidenza nel quaternario.

(1) Nella seduta del 6 aprile 1930.

(2) L. BALDACCI, *Descrizione geologica dell' Isola Sicilia*, Roma 1886.

(3) G. DI STEFANO, *Il Pliocene ed il Postpliocene di Sciacca; osservazioni stratigrafiche*, « Boll. R. Com. Geol. d'Italia », ser. 2^a, vol. X. Roma 1889.

(4) G. CHECCHIA-RISPOLI, *Eocene e Miocene di Sciacca*, « Rend. R. Acc. Lincei », Roma 1918.

Tale terreno risulta di un calcare dolomitico, compatto, biancastro, talora cristallino e con frequenti piccole litoclasti riempite di ossidi idrati di alluminio e ferro, risultanti dalla decomposizione del calcare stesso, pure frammisti a tracce residue di carbonati di calcio e di magnesio.

A rilevare l'andamento stratigrafico a reggi poggio, con poca inclinazione a settentrione, dei banchi costituenti le potenti balze inferiori del S. Calogero, si hanno due livelli fossiliferi ben evidenti e dello spessore di un paio di metri circa ciascuno. I fossili, abbondanti numericamente ma poveri di specie, sono di solito allo stato di modelli interni e ricoperti spesso da un leggero velo cristallino. Si tratta in maggioranza di lamellibranchi ed in parte pure di piccoli gasteropodi, dei quali però non sono riuscito ad avere campioni adatti nemmeno per una determinazione generica. I lamellibranchi invece, dato il loro maggiore sviluppo e la loro compattezza, si possono estrarre con una certa facilità, e, per la loro perfetta modellazione, presentano spesso i caratteri diagnostici occorrenti per una sicura determinazione specifica. Questi strati fossiliferi sono ben visibili per la esistenza di cave aperte presso le quote che corrispondono ai due citati terrazzamenti.

Il calcare dolomitico inciso dalla terrazza a quota 150, nella sua parte inferiore, viene a contatto, in conseguenza della menzionata faglia, con la marna calcarea biancastra a noduli e lenti di selce piromaca e con *Belemnites dilatatus*; *Belemnites isoscelis*; *Aptychus angulicostatus*; del Neocomiano (Baldacci). Il gradino soprastante invece a quota 170 circa, forma la base della scoscesa parete meridionale del monte S. Calogero. Il complesso di questo calcare dolomitico, ha uno spessore visibile di circa una quarantina di metri.

I modelli dei fossili, provenienti dai due differenti livelli, appartengono per lo più al *Megalodon Gumbeli* Stopp.; *Megalodon complanatus* Gumb.; ma non mancano altre specie, fra cui una confrontabile col *Megalodon* sp. descritto dal Tommasi a proposito della « Revisione fauna della dolomia principale di Lombardia ».

Tenendo presente anche le analogie che si riscontrano con il Norico, sicuramente rilevato cinque chilometri al nord di S. Calogero, a Rocca Nadure, non vi è motivo di non riferire questo tipo dolomitico, con ricca fauna di Megalodontidi, al Trias superiore.

Sopra questa formazione dolomitica, poggia il restante della serie del Mesozoico, ad incominciare dal calcare compatto bianco-grigiastro ad Ammoniti ed a *Pygope dhyphia*, che si presenta in un'alta parete a picco vivamente colorata in rosso, là dove le alterazioni atmosferiche furono più intense, fino al Cretaceo ed al Terziario.

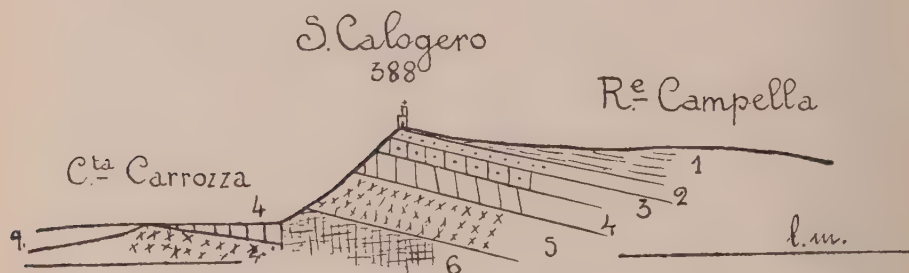
Una striscia di formazione terziaria separa il complesso Norico di contrada Matarazzaro, Rocca Ficuzza e Caltabellotta, dalla conica rocca dolomitica del Nadure, che sorge, come ho accennato, a cinque chilometri al

nord del S. Calogero, e ch'è da questo separata a mezzo dei valloni Carabollace e Portolana.

Dalla massa del colle riferito finora interamente al Norico e quindi alla Dolomia principale, bisognerà distaccarne la parte superiore, scoperta lungo la parete orientale, che a guisa di bastione cinge questo lato del Nadure, essendo riferibile al Titonico, per essere costituita da un calcare

Sezione del Monte S. Calogero

scala 1: 50000



1. Miocene med.; 2. Eocene med.; 3. Turoniano; 4. Neocomiano;
5. Titonico; 6. Trias super.

compatto, bianco e rosso, riccamente ammonitifero e con numerosi esemplari di *Pygope dhyphia*.

Come è facile rilevare da questa Nota, tanto il S. Calogero, quanto il Nadure, presentano nelle loro formazioni più antiche, una sicura analogia. E poichè al disopra della Dolomia principale del Nadure si ha il Titonico, anche il calcare dolomitico con *Megalodon Gumbeli*, che al S. Calogero ho costatato al disotto del Titonico fossilifero, deve verosimilmente sincronizzare con la parte superiore della Dolomia.

Mineralogia (Petrografia Applicata). — *Studio di un fenomeno che presenta la pietra di Aurisina adoperata per rivestimenti murari.*
Nota di L. MADDALENA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio F. MILLOSEVICH.

La guerra vittoriosa che ha portato il nostro confine politico orientale a coincidere con quello geografico ed etnico, ha restituito in seno alla Madre Patria la Cava Romana di Nabresina (Cava Aurisina), nota con tal nome perchè i Romani avevano riconosciuto i pregi di questo materiale e lo avevano largamente impiegato nelle monumentali costruzioni di Aquileia.

I frammenti architettonici di epoca romana del Museo di S. Giusto ed i capitelli trovati nelle rovine di Aquileia presentano ancora gli spigoli vivi e dimostrano i magnifici requisiti di durezza di questo materiale.

I tecnici dell'ex Impero Austro-Ungarico scelsero la pietra di Nabresina come la migliore per le costruzioni monumentali delle due capitali.

Era naturale che dopo il compimento dell'unità nazionale essa venisse largamente usata nel Regno: essa venne scelta, tra l'altro, per la costruzione della monumentale facciata della nuova stazione di Milano.

Il calcare di Nabresina venne classificato dall'Artini come: « una specie di arenaria calcare, ad elementi mezzani, talora anche grossetti, costituiti da detrito di conchiglie a struttura cristallina, saldamente cementati da una massa pure calcare, la quale al microscopio, in sezione sottile, si mostra estremamente pura, sottile e compattissima ».

In alcuni livelli si notano frammenti di conchiglie che si possono riconoscere come appartenenti alla famiglia delle Rudiste, permettendo quindi di riferire la roccia al cretaceo superiore. Le sezioni di questi fossili spiccano come una elegante macchiatura fiorita, a disegni capricciosi e svariati, sulla superficie levigata, tanto che questa varietà fiorita, suscettibile di bella lucidatura, può essere adoperata come ottimo materiale da decorazione.

Da numerose esperienze eseguite nei laboratori della R. Scuola di Ingegneria di Padova risulta che il carico di rottura per schiacciamento varia da un minimo di 1150 kg. per cmq. fino ad un massimo di 1867 kg. per cmq. Il carico di rottura alla tensione è compreso tra 64 e 89 kg. cmq. con un rapporto di 1:20 rispetto alla compressione. Perfetta la resistenza a 40 alternazioni di gelo e disgelo.

Dati gli ottimi requisiti costruttivi di questa pietra ed i buoni risultati avuti in tante costruzioni all'estero, dall'Africa del Sud all'Inghilterra, in climi diversissimi e meno favorevoli del nostro per la buona conservazione

(1) Nella seduta del 6 aprile 1930.

dei monumenti, ha destato viva sorpresa un fenomeno lamentato dai nostri costruttori che impiegarono questo materiale per rivestimenti murari.

Dopo 20 o 30 giorni dalla messa in opera dei rivestimenti appaiono qua e là delle macchie giallastre, rubiginose; esse vanno gradualmente aumentando sia di intensità che di dimensioni (raggiungono anche 15-20 cm.), presentandosi sovente con aspetto zonato; durano per un certo tempo ai massimi raggiunti quindi cominciano ad impallidire fin quasi a scomparire. La durata dell'andamento descritto varia notevolmente a seconda della esposizione della facciata; si svolge in pochi mesi per quelle rivolte a mezzogiorno, può durare qualche anno per quelle rivolte a settentrione.

Dato il colore delle macchie si è subito pensato che esse derivassero dalla nota reazione della pirite, abbastanza frequente in questo come in ogni calcare organogeno, coll'ossigeno in presenza di acqua. Ma il modo come si presenta il fenomeno è tale che questa reazione non è sufficiente a spiegarne i caratteri.

D'altra parte le macchie non appaiono finchè il materiale non viene messo in opera, anche dopo essere rimasto per molti mesi nei cantieri, esposto all'azione degli agenti atmosferici.

Un accurato esame delle cave ha permesso di constatare che i cristallini di pirite sono abbastanza diffusi ed abbondano specialmente nei piani ove predomina la varietà fiorita, più ricca di avanzi di fossili, però nessuna macchia, del tipo di quelle descritte, si nota sulle pareti scoperte da pochi mesi, o da qualche anno, o da tempo immemorabile.

Ma se esaminiamo attentamente, con una lente a forte ingrandimento, le superficie delle pietre rimaste a lungo in cantiere o le pareti delle cave, notiamo che i cristallini di pirite sono già in parte o totalmente alterati e cioè divenuti di color bruno rossiccio, con una aureola giallo ocracea al contorno; tutto l'insieme però è così piccolo che sfugge all'occhio nudo e non dà luogo ad inconveniente alcuno.

Non può essere dunque la semplice alterazione delle piriti superficiali che determina il fenomeno delle macchie.

Un'altra osservazione ha messo sulla buona strada per interpretare l'origine del fenomeno: la superficie delle pietre, di aspetto uniformemente chiaro prima della messa in opera, diventa poi, dopo poco tempo, assai disuguale, a zone oscure e chiare, come in conseguenza di un diverso assorbimento di umidità; inoltre si notano spesso delle efflorescenze bianche che gli operai chiamano salnitro.

Queste osservazioni hanno fatto pensare alla opportunità di esaminare il potere di imbibizione, ossia il grado di porosità della pietra di Aurisina.

Dal certificato n. 1825, in data 31 ottobre 1926 rilasciato dalla Regia Scuola di Ingegneria di Padova alla Società « Cava Romana di Nabresina », risulta che il coefficiente di imbibizione riferito al volume fu per due campioni di 0.027 e di 0.029.

Qualora si consideri che secondo l'Artini (Vedi: *Le Roccie*, 2ª ediz., p. 711) tale coefficiente ha i seguenti valori per alcuni materiali tipici:

Marmo di Carrara = 0.001; granito = 0.006; arenaria macigno = 0.015

si comprende come la pietra di Aurisina presenti una porosità alquanto elevata, tanto più tenendo presente che si tratta di un materiale che deriva da cementazione naturale di avanzi di conchiglie e perciò la sua cementazione non può essere uniforme.

Infatti un accurato esame con lente a forte ingrandimento permette di riconoscere qua e là delle piccole cavità miarolitiche tappezzate di cristallini di calcite.

Consideriamo ora la pietra, avente un alto e non uniforme grado di porosità, messa in opera come rivestimento, tenendo presente che lo spazio tra il rivestimento e la muratura, generalmente cementizia, è spesso considerevole e variabile per il diverso spessore dei conci messi in opera, questo spazio viene riempito con malta di cemento molto liquida e per la sigillatura dei giunti si usa in generale cemento a rapida presa. Abbiamo pertanto una quantità notevole di umidità chiusa tra la muratura e la pietra e tale umidità dovrà eliminarsi attraverso la pietra stessa che essendo notevolmente porosa, certo più porosa della retrostante struttura massiccia di calcestruzzo, costituisce la via più facile.

Ora ci sembra assai semplice il pensare che questa umidità, che attraversa la pietra, costituisca il veicolo che trasporta gli ossidi di ferro provenienti dall'alterazione delle piriti che si trovano sparse in tutta la massa e che essa ha incontrate nel suo cammino; inoltre l'acqua della miscela cementizia possiede dei requisiti chimici (leggera alcalinità dovuta alla presenza di calce libera) che possono facilitare la trasformazione del solfuro di ferro in ossido.

Chimicamente il fenomeno potrebbe spiegarsi nel seguente modo: il solfato ferroso proveniente dalla ossidazione del solfuro, in presenza dell'acqua leggermente alcalina, reagisce con la calce producendo solfato di calcio e idrossido di ferro allo stato colloidale (idrosol) che facilmente viene trasportato dall'umidità alla superficie esterna della pietra, ove si fissa per evaporazione dell'acqua (come idrogel), ma può venire dilavato per l'azione meccanica delle forti piogge.

Questa ipotesi spiega il fatto, a tutta prima incongruente, che le pietre in cava ed in cantiere si macchiano solo in modo inapprezzabile per l'alterazione delle poche piriti superficiali, mentre qualche tempo dopo la posa in opera cominciano ad apparire sulla superficie di alcune di esse le macchie zonate, per l'accumularsi graduale del prodotto di alterazione delle piriti sparse in tutta la massa. L'ipotesi spiega anche l'aspetto assai disuguale a zone chiare ed oscure che presentano i rivestimenti e che vi permangono a lungo nelle facciate rivolte a nord, nonchè le efflorescenze bianche che dovrebbero riferirsi a calce libera proveniente dal cemento, come si osserva

in tutte le opere miste di cemento e muratura, efflorescenze che scompaiono dopo forti piogge. I diversi toni di tinta rivelano il diverso grado di porosità della pietra e permangono anch'esse più o meno a lungo a seconda dell'esposizione della facciata, fino a quando tutta l'umidità interna della malta cementizia sia stata eliminata: solo allora la pietra assume una tinta grigia uniforme che costituisce la patina caratteristica di questo materiale.

Per dare una pratica dimostrazione dell'attendibilità di questa ipotesi dal punto di vista della porosità della roccia, si è voluto fare un esperimento usando il metodo suggerito dall'Hirschwald per studiare il diverso grado di porosità dei materiali da costruzione. In un blocco di pietra dello spessore di 30 cm. venne praticato un piccolo scavo di 2 cm. di profondità ed in esso venne versata una soluzione acquosa di nigrosina rinnovandola ogni volta che veniva prosciugata.

Dopo varie settimane cominciò ad apparire una prima macchia sulla faccia opposta del blocco, alla distanza di 28 cm. ed essa andò man mano allargandosi fino a superare il diametro di 20 cm. ed assumendo un aspetto zonato.

Il fenomeno delle macchie sulle pietre di Aurisina dopo la loro messa in opera era già empiricamente conosciuto da qualche tempo, senza però che le cause ne fossero state indagate. I costruttori della Venezia Giulia sanno che per mettere in opera questa pietra non si deve usare il cemento, ma bensì la malta normale di calce grassa, come nelle costruzioni di Vienna e Budapest nelle quali l'inconveniente deplorato non si è mai verificato. Per questo si era anche pensato che le macchie derivassero da ossidi di ferro contenuti nel cemento, ma ciò si può escludere con certezza.

Sta il fatto che usando la calce grassa le macchie non appaiono. Questo non toglie attendibilità all'ipotesi esposta; infatti non è difficile trovare la spiegazione di tale apparente contraddizione qualora si consideri che l'umidità della malta normale di calce grassa, a differenza di quella della malta cementizia, è fortemente alcalina per eccesso di calce e perciò, per note leggi di chimica, l'idrossido di ferro che si forma nella accennata reazione del solfato ferroso coll'ossido di calcio, non può assumere lo stato di idrosol, ma precipita allo stato fioccoso.

Si comprende come l'idrossido di ferro in uno stato di estrema suddivisione, così da potersi quasi considerare come una soluzione, possa attraversare i sottili pori della pietra e giungere alla superficie esterna, mentre allo stato di precipitato fioccoso, ne sarà trattenuto come da un filtro ed all'esterno non potranno apparire le macchie di ruggine.

Il fenomeno descritto e spiegato non diminuisce i pregi della pietra di Aurisina, perchè, anche non volendo adoperare la calce grassa, recenti esperienze hanno già dimostrato che usando cementi a rapida presa ed impasti il più asciutti possibile e ritardando la profilatura dei giunti fino a presa avvenuta, per lasciare aperta la più facile via di uscita alla umidità delle malte cementizie, non si verifica più l'inconveniente deplorato.

Mineralogia. — *Bianchite, nuovo minerale.* Nota di C. ANDREATTA, presentata dal Socio G. DAL PIAZ.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia. — *L'origine e l'evoluzione della partenogenesi nell'Artemia salina diploide di Sète (Cette)*⁽¹⁾. Nota di C. ARTOM, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Nelle mie ricerche sulla biologia dell'*Artemia salina* di varie località sono venuto alla conclusione che le due specie biologiche da me istituite (*diploide* amfigonica - *tetraploide* partenogenetica) dovessero essere tra loro geneticamente collegate. Avevo conseguentemente tra l'altro previsto l'esistenza di un'*Artemia diploide* partenogenetica che avrebbe dovuto costituire una delle tappe intercalate nel cammino evolutivo della specie: dalla condizione primitiva della amfigonia *diploide*, sino a quella definitiva della partenogenesi *tetraploide*. Come ho già riferito in due Note preliminari⁽³⁾⁽⁴⁾, le previsioni fatte si sono avverate. Infatti a Sète (saline di Villeroy) l'*Artemia salina* è *diploide (a 42 cromosomi)* ed è *indefinitamente partenogenetica*.

La maturazione dell'uovo dell'*Artemia* di Sète presenta inoltre un interesse del tutto particolare, offrendo un tipico esempio del come la specie acquisisce la partenogenesi e del modo con cui il fenomeno della partenogenesi sia suscettibile di una successiva evoluzione, sino a raggiungere una fase terminale caratterizzata dal tetraploidismo, quale si osserva tra le *Artemie* partenogenetiche di molte località. Credo opportuno riepilogare il frutto di quanto ho sino ad oggi osservato al riguardo.

1°. Tra le uova dell'*Artemia* di Sète esistono anzitutto uova a partenogenesi primitiva, con evidenti reminiscenze di una condizione amfigonica in via di completa scomparsa, partenogenesi a carattere *automittico*, vale a dire con fusione di due nuclei *aploidi* derivati dal II fuso di maturazione. Nelle vescicole germinative di tali uova (piastre equatoriali del I fuso di maturazione) si osservano 21 cromosomi a tetrade, vale a dire in numero ridotto. Ciascuna tetrade risulta costituita di 4 granuli di sostanza cromatica di forma

(1) Dall'Istituto di Zoologia dell'Università di Pavia.

(2) Nella seduta del 6 aprile 1930.

(3) C. ARTOM, *Il diploidismo dell'Artemia salina di Cete*, « Boll. Soc. It. di Biol. Sper. », vol. IV, fasc. 7, 1929.

(4) C. ARTOM, *Osservazioni preliminari sulla maturazione dell'uovo e sui primi stadii di sviluppo dell'Artemia salina di Cete*, « Boll. Soc. med. chirurgica di Pavia », 1929, fasc. V, Pavia, Tipografia Cooperativa.

ovale (fig. 1). Ciascuna tetrade è poi in modo molto evidente scomponibile in due diadi. L'interpretazione di tali tetradi, date le fasi sinaptiche assai dimostrative che si osservano durante il periodo di crescita dell'oocito, è assai facile: ciascuna di esse è il risultato della copulazione tra due cromosomi accostatisi parallelamente. Avvengono in definitiva in queste uova dell'*Artemia* di Sète gli stessi fenomeni che si osservano nell'*Artemia* di Cagliari, quei fenomeni cioè che dovrebbero preludere ad un atto fecondativo. Le tetradi in tali uova sono bene evidenti nelle piastre equatoriali del I fuso di maturazione viste cioè di fronte: ma esse sono ancora più evidenti viste di profilo nello stesso I fuso (fig. 2). Questa I divisione di maturazione è da interpretarsi come una divisione *eterotipica* che separa i cromosomi diacinetici; nel I globulo polare e nella vescicola germinativa rimangono 21 cromosomi a diade, cioè bivalenti. Giunta a questo stadio, dopo avere emesso il I globulo polare, la vescicola germinativa può disporsi a formare e a emettere anche il II globulo polare. In tal caso la vescicola germinativa rimane in condizione aploide, l'uovo non è a mio credere idoneo allo sviluppo partenogenetico, ma potrebbe invece essere fecondato. La formazione e l'emissione del II globulo polare non è però frequente. Il più delle volte il II fuso subisce una rotazione di 90 gradi, in modo tale che il suo asse risulta tangenziale alla superficie dell'uovo; e in tali condizioni viene trascinato più o meno nell'interno dell'uovo e poi successivamente, con una divisione da interpretarsi come *omeotipica*, vengono formati, o vicino alla periferia, o nell'interno dell'uovo, due nuclei *aploidi* di cui uno ha il significato di II globulo polare. Questi due nuclei emigrati che sieno al centro dell'uovo, si fondono (*automissi*) e dalla loro unione risulta il numero *diploide* di cromosomi.

La vescicola germinativa con le 21 diadi può per altro non dar luogo ad alcun fuso ed entrare senz'altro in fase di riposo: i 21 cromosomi bivalenti si disgiungono nei loro componenti e si ha in tal modo un nucleo di segmentazione in condizione *diploide*, anche senza che sia intervenuto l'*automissi*.

2°. Uova a netta partenogenesi *diploide*. — In casi abbastanza frequenti si nota nelle uova dell'*Artemia* di Sète che le piastre equatoriali del I fuso di maturazione non contengono 21 tetradi, ma contengono invece 42 cromosomi a diade (fig. 3). Queste 42 diadi possono interpretarsi in due modi. O esse sono il risultato di una dissociazione dei cromosomi diacinetici delle 21 tetradi. Oppure tali uova non hanno mai subita la riduzione del numero dei cromosomi e quindi non si sono mai formate le tetradi in numero ridotto. Io propendo per la I interpretazione, in quanto che a me sembrano assolutamente costanti i fenomeni sinaptici durante il periodo di accrescimento dell'ovocito; e il fenomeno della sinapsi deve condurre le uova al numero *aploide* di cromosomi. Tratterebbesi secondo il mio modo di vedere di quel processo di deconiugazione dei cromosomi diacinetici

illustrato da V. Baehr nell'*Aphis palmarum* ⁽¹⁾. Se invece, come potrebbe anche essere, un certo numero di uova dell'*Artemia* di Sète non riduce il numero dei cromosomi, ed è quindi costantemente, anche nelle fasi di accrescimento, in condizione *diploide*, si avrebbe una concordanza completa con quanto ha osservato recentemente Thomsen ⁽²⁾ in due specie di Coccidi in cui si notano in ciascuna specie due razze, cioè due gruppi di individui: gli uni a partenogenesi *automitica*, gli altri invece a partenogenesi nettamente *diploide*. A Sète coesisterebbero due simili razze di *Artemia*. Comunque sia, nel caso delle uova a partenogenesi *diploide*, le 42 diadi non tardano a mettersi in fuso (fig. 4), che risulta naturalmente di dimensioni molto più grandi del fuso a 21 tetradi. La divisione dei cromosomi è nettamente *omeotipica*; essa separa parti omologhe di cromosomi; sotto questo punto di vista essa corrisponde ad una II divisione; mentre nel caso della messa a fuso delle 21 tetradi, la I divisione ha netto carattere *eterotipico*. Intervenuta la formazione del I ed unico globulo polare esso viene senz'altro emesso. Ho avuta poi la singolare fortuna di poter numerare tutti i 42 cromosomi sia nel globulo, sia nella vescicola germinativa. Questa, in condizione in tal modo *diploide*, emigra rapidamente nel centro dell'uovo e subito si inizia lo sviluppo partenogenetico.

3°. Uova con tendenza al poliploidismo. — Avviene di osservare qualche volta che il I globulo polare a 21 diadi (nel caso cioè delle uova destinate alla partenogenesi *automitica*) dia luogo a due nuclei in condizione *aploide* che rimangono alla periferia dell'uovo, quasi si direbbe ancora inglobati nella massa dei granuli di vitello. Questi due nuclei possono entrare nell'uovo, entrare in una fase di riposo, ed accostarsi alla vescicola germinativa a 21 diade, oramai però anch'essa entrata in fase di riposo. Avviene in tal caso di osservare tre nuclei accostati: uno più grande perchè in condizione *diploide*, gli altri due più piccoli, perchè derivati dalla divisione del I globulo e quindi in condizione *aploide*. Altre volte e non già alla periferia, ma trascinati nel centro dell'uovo ho osservato anche 4 nuclei in riposo perfettamente eguali nelle dimensioni e che io interpreto in condizione *aploide*; due di tali nuclei deriverebbero dal I globulo polare, gli altri due deriverebbero dal II fuso di divisione da parte della vescicola germinativa.

Perchè la tendenza alla fusione di questi nuclei non faccia pervenire l'*Artemia* di Sète alla condizione tetraploide, è questione che sfugge per ora alle mie indagini. Per quanto sino ad ora a Sète io abbia constatato esclusivamente il *diploidismo*, non è da escludere per altro che qualche raro stipite *tetraploide* partenogenetico possa anche a Sète sussistere accanto alle

(1) V. B. DE BAEHR, *Recherches sur la maturation des oeufs parthenogenetiques*, «La Cellule», t. 30, 1920.

(2) MATHIAS THOMSEN, *Studien über die Parthenogenese bei einigen Cocciden und Aleuriden*, «Zellf. u. mikrosk. Anat.», vol. 5, fasc. 1-2, 1927.

normali generazioni di Artemie *diploidi*. Certo si è che io propendo fortemente in seguito a queste mie osservazioni, a far dipendere l'insorgere del tetraploidismo delle Artemie di altre località a fusioni nucleari tra vescicola germinativa in condizione *diploide* e i nuclei *aploidi* derivati dalla divisione del I globulo polare ⁽¹⁾.

Le numerose mie osservazioni sulla biologia dell'Artemia salina mi permettono oramai di giungere alle seguenti conclusioni di carattere generale:

1. L'Artemia salina (come avevo previsto ⁽²⁾) può acquisire la partenogenesi indefinita anche rimanendo in condizione *diploide* (Sète). Sussiste però il fatto che nella maggior parte dei casi tra le Artemie *diploidi* i maschi sono abbondanti, mentre sono per lo più completamente mancanti tra le Artemie *tetraploidi*. È da presumere quindi che quasi sempre al diploidismo corrisponda l'amfigonia, e che invece ai tetraploidismo corrisponda la partenogenesi indefinita. Trattasi però di una correlazione per nulla obbligatoria, non quindi necessariamente legata al fenomeno della duplicazione dei cromosomi.

2. L'Artemia salina diffusa nelle zone temperate di tutto il nostro emisfero, è una grande specie collettiva scomponibile in parecchi *biotipi* ciascuno dei quali, per il fatto di possedere caratteristiche genetiche ed anche somatiche proprie e bene spiccate, può considerarsi una vera e propria specie biologica.

3. L'insorgere di questi *biotipi* pare del tutto indipendente dalle condizioni d'ambiente. Lo dimostra tra l'altro il fatto che nella stessa località e nella stessa stagione possono coesistere individui di cui le uova, pure essendo identiche come assetto cromosomico, non maturano però in modo uniforme.

4. La specie tende dall'amfigonia *diploide* alla partenogenesi *tetraploide*. Ed intercalate tra queste due condizioni (l'una iniziale, l'altra terminale) stanno i vari *biotipi*, i quali rappresenterebbero in tal modo altrettante tappe del cammino evolutivo della specie. Il *biotipo* primitivo è per esempio rappresentato a Cagliari, dove la condizione anfigonica *diploide* ($x + x$) deve considerarsi assolutamente prevalente. Ma a Cagliari stessa ho potuto dimo-

(1) A. BRAUER, avrebbe come è noto osservato in qualche raro caso, nell'Artemia di Capodistria la formazione e la fusione del 2° globulo polare colla vescicola germinativa. Io non sono affatto alieno (in seguito alle osservazioni fatte sull'Artemia di Sète) dall'ammettere la possibilità di fusione tra globulo polare e vescicola germinativa. Solo che io rimango molto dubbioso circa la possibilità della formazione di un 2° globulo da parte dell'uovo dell'Artemia di Capodistria. Forse la fusione osservata da Brauer è tra vescicola germinativa tetraploide e 1° globulo polare pure in condizione tetraploide; in tal caso si avrebbe una spiegazione ragionevole dei nuclei octoploidi (168 cromosomi) osservati talvolta da Brauer nelle primissime segmentazioni di qualche raro uovo.

(2) C. ARTOM, *Nuovi fatti e nuovi problemi sulla Biologia e sulla sistematica del genere Artemia*, « R. Accademia Lincei Cl. Sc. Fis. mat. e naturali », vol. 29, 1920.

strare la possibilità dell'insorgere del biotipo *diploide* partenogenetico ($2x$)⁽¹⁾. A Sète sono rappresentati per lo meno tre diversi biotipi, l'uno è quello amfigonico *diploide* ($x + x$) in via di estinzione completa, un secondo abbastanza frequente a partenogenesi automittica, e un terzo a netta partenogenesi *diploide* ($2x$), forse il più frequente.

5. Il biotipo terminale *tetraploide* partenogenetico ($4x$) come è noto, molto diffuso in tutto il mondo, deve con ogni probabilità la sua origine a processi di fusione tra vescicola germinativa in condizione *diploide* e nuclei derivati dalla divisione del I globulo polare. Nell'*Artemia* di Sète osservansi tali tipi di fusioni nucleare, che però pare non conducano alla realizzazione del biotipo *tetraploide*, avendo io costantemente rilevato che tale *Artemia* è in condizione *diploide* ($2x$).

Sulla possibilità dell'esistenza di un biotipo *tetraploide amfigonico* ($2x + 2x$) si può ipotizzare, ma allo stato attuale delle nostre conoscenze, poco di positivo si può concludere al riguardo⁽²⁾.

6. In poche altre specie zoologiche (dei generi *Solenobia*, *Triconiscus*, *Daphnia*, *Cypris*) sono state in questi ultimi tempi dimostrate condizioni analoghe a quelle rilevate nell'*Artemia*. In nessuna però delle specie suddette si può osservare così come nell'*Artemia* salina, non solo l'insorgere, ma altresì l'evolversi della partenogenesi, attraverso molteplici biotipi, ciascuno geneticamente bene definito.

(1) C. ARTOM, *Analisi comparativa della sostanza cromatica nelle mitosi di maturazione... ecc.*, «Zellforschung», VII Band., 2º Heft., 1911.

(2) C. ARTOM, *Il Tetraploidismo dei maschi dell'Artemia di Odessa ecc.*, «R. Accad. Cl. Sc. Fis. mat. e naturali», vol. 32. fasc. 12; vol. 33, fasc. 1, 1924.



Fig. 1. - Piastra equatoriale del I fuso di maturazione con 21 tetradi.



Fig. 2. - I fuso di maturazione con 21 tetradi.

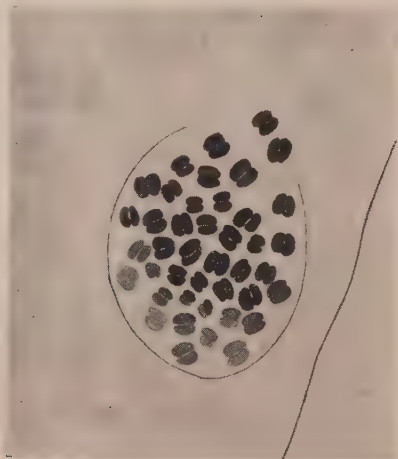


Fig. 3. - Piastra equatoriale del I fuso di maturazione con 42 diadi.

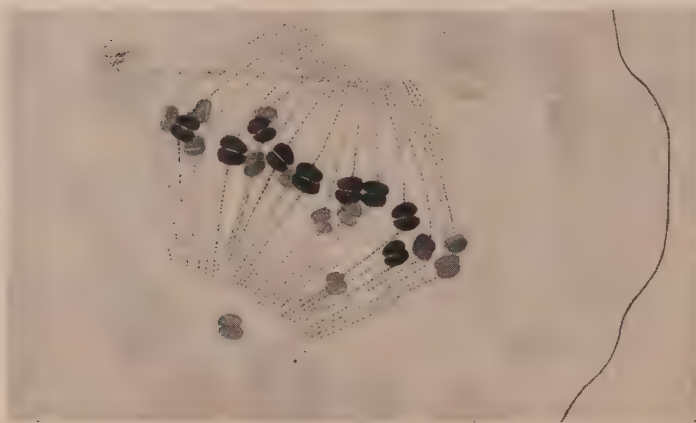


Fig. 4. - I uso di maturazione con 42 diadi.

Embriologia (sperimentale). — *Ricerche sulla radiosensibilità nello sviluppo delle ova d'Anfibi. - II. Alterazioni specifiche e malformazioni secondarie da radiosuscettibilità differenziale in « Rana esculenta »* ⁽¹⁾. Nota di P. PASQUINI e G. MELDOLESI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Continuando l'esposizione, iniziata in una Nota precedente ⁽³⁾, dei risultati ottenuti sottoponendo all'irradiazione (con *radon*) le ova di *Rana esculenta* in vari stadi del loro sviluppo, veniamo ora a considerare, e più da vicino, alcuni fenomeni, accennati nell'impostazione del problema, riguardanti, sia quantitativamente che qualitativamente, le malformazioni che si riscontrano negli embrioni irradiati. Tali malformazioni, rinvenute nei processi fondamentali della organogenesi e che sono in stretta relazione con la cosiddetta *Radiumkrankheit* (r. k.) degli embrioni sottoposti all'esperimento, si manifestano in quegli organi più elettivamente colpiti dall'azione lesiva sulle cellule (che è principalmente una cromatolisi) che è della stessa natura di quella riscontrata, nelle larve di *Rana fusca*, da O. Hertwig ⁽⁴⁾ irradiando le ova e gli spermî ed operando poi la fecondazione.

L'alterazione della struttura di tali organi, per i fenomeni di degenerazione cellulare che in essi si determinano, è localizzata, più particolarmente, al territorio nervoso ove compare già con dosi minime di 2-3 mch., negli stadi irradiati delle fasi di gastrula (IV e V).

Le malformazioni, causate dalle radiazioni (*radon*) della organogenesi, che vanno dalla spina bifida o dalla asintaxia blastoporale o midollare, alla idrocefalia, idropisia, riduzione del cervello (fin'anche anencefalia), all'inibizione di vari gradi nel differenziamento degli organi di senso cefalici e che risultano determinate da un'azione generale inibitrice o acceleratrice dello sviluppo ⁽⁵⁾, sono, in gran parte della stessa natura di quelle ottenute sottoponendo

(1) Ricerche compiute nell'Istituto di Zoologia della R. Università di Roma, nelle quali il Dr. Gastone Meldolesi ha collaborato per la parte radiologica.

(2) Nella seduta del 6 aprile 1930.

(3) P. PASQUINI e G. MELDOLESI, *Ricerche sulla radiosensibilità nello sviluppo delle ova d'Anfibi. - I. Radiosuscettibilità differenziale dei vari stadi embrionali (Anuri)*. « Rend.R. Acc. Naz. Lincei », vol. X, ser. 6^a, 2° sem., fasc. 5-6, settembre 1929.

(4) O. HERTWIG, *Die Radiumkrankheit tierischer Keimzellen* « Arch. f. mikr. Anat. », Bd. 77. 1911.

(5) P. PASQUINI, *Intorno ad alcuni fenomeni della radiosuscettibilità differenziale nelle ova di Rana esculenta e sull'origine di alcune malformazioni*. « Archivio Zoologico » (in corso di stampa nel volume di onoranze a D. Rosa).

le ova ad altri agenti. Lo stesso non può applicarsi alle alterazioni che si producono nel differenziamento degli organi e che rientrano nel quadro patologico definito da Hertwig (1911) come *Radiumkrankheit* degli embrioni, cioè alterazione delle cellule che, entrate in fase di necrobiosi, degenerano e poi si disfanno andando a raccogliersi in lacune dei tessuti differenziati o addirittura riempiendo la cavità ependimale, quella dei ventricoli cerebrali, del calice ottico, ecc.

Per potere più chiaramente stabilire il grado delle malformazioni e alterazioni corrispondenti a vari gradi d'intensità delle radiazioni, abbiamo creduto opportuno di raggruppare, in questa Nota, le varie dosi sperimentate, in tre categorie: le *minime*, le *medie* e le *massime*, le prime corrispondenti



Fig. 1. — Larva di 7 mm. con idrope ed inibizione del territorio oculare (da disegno alla cam. lucida, in xilolo).

alla dose I (da 2 a 3 mch.), le seconde comprese fra la IV e V dose (17-18 mch.), le massime corrispondenti alla dose VIII (35 mch.).

Per dosi minime d'irradiazione (lotti 3, 7, 10, 14), l'azione biologica delle radiazioni, si manifesta sulle *morule giovani* con inibizioni di vario grado in tutta la regione cefalica, generalizzate agli organi olfattori, fusi insieme, al territorio oculare ridotto. Per quanto non si notino, in tutto il cervello, le alterazioni cellulari comuni e ben note, il territorio ottico risulta sempre essere stato più o meno gravemente colpito: talora è infatti rappresentato dal solo occhio di un lato e questo è invariabilmente spostato ventralmente, piccolo, ridotto e privo di lente, ma normalmente differenziato nei costituenti del calice; in altri casi l'inibizione interessa tutti e due gli occhi, uno essendo ridotto, l'altro appena riconoscibile come una masserella cellulare più o meno estesa, senza struttura, costituita di neuroblasti retinici frammisti a cellule di pigmento.

Le alterazioni cellulari della r. k. sono tuttavia rarissime, quasi impercettibili o addirittura insignificanti, anche per tutta l'estensione del midollo spinale. Le variazioni individuali sono sempre poco accentuate e si limitano a spostamenti della parete cerebrale ed a una più sensibile necrobiosi cel-

lulare sebbene anche questo fenomeno si manifesti sempre in grado appena rilevabile.

Un leggero aumento della stessa dose sulle morule giovani accentua soltanto le alterazioni della istogenesi, rimanendo immutate le condizioni di anomalie degli organi.

Le morule giovani, sottoposte alla dose minima considerata, si sviluppano in larve che non palesano alterazioni della istogenesi (o queste sono trascurabili),

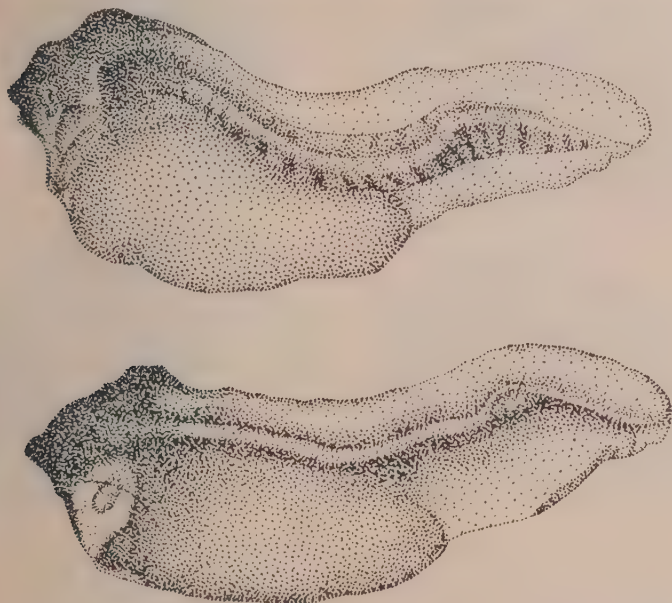


Fig. 2. — Larve di 4 mm. ad un grado massimo d'inibizione della regione cefalica (da disegni alla cam. lucida del materiale fissato; in xilolo).

mentre spiccano specifici fenomeni inibitori, evidenti nella regione del capo delle larve.

Le fasi IV e V di gastrula all'inizio e della formazione del solco fal-ciforme dorsale, risentono notevolmente dell'irradiazione anche se questa agisce in piccola dose (2-3 mch.) dando luogo ad embrioni profondamente malformati. Le larve risultano prive degli organi olfattori, del cervello anteriore alla corda o questo appare profondamente ridotto a piccoli territori cellulari simili a vescichette senza alcuna traccia di differenziamento delle fibre. Al livello delle otocisti l'inibizione cessa, ma si riscontra un abnorme rigonfiamento del mielencefalo le cui pareti hanno tuttavia una struttura quasi normale.

Rarissime sono infatti, in questa regione del tubo nervoso, come del resto negli altri organi, le alterazioni cellulari: che sono rese evidenti soltanto

dalla presenza, nella cavità del mielencefalo e del midollo spinale, di poche cellule di sfaldamento delle pareti.

Poichè la r. k., in questo caso, non si presenta in grado più elevato di quello verificato nel caso delle morule si può dedurre che: *le alterazioni cel-*

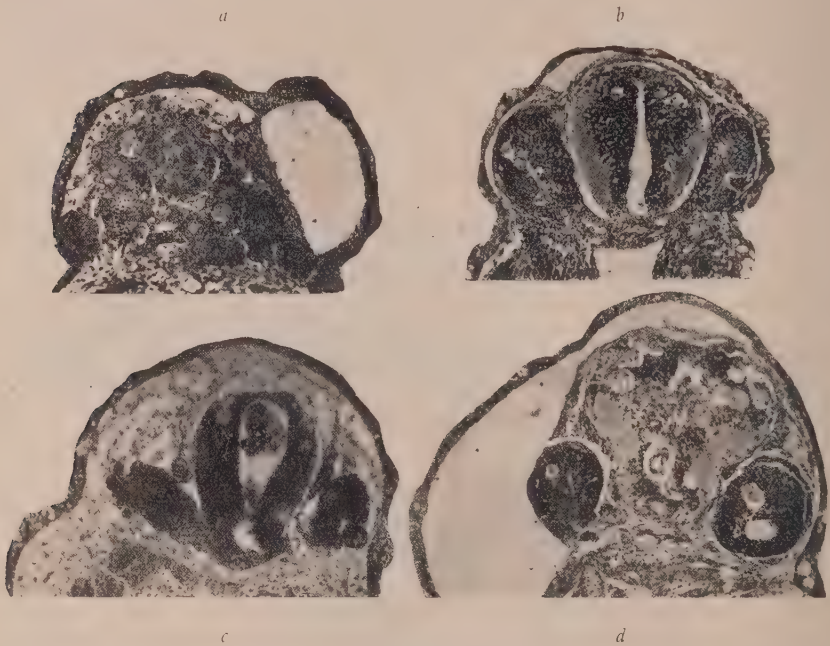


Fig. 3. - Sezioni trasversali interessanti la regione cefalica di vari embrioni derivati da blastule o gastrule sottoposte alle radiazioni: *a*, alterazioni diffuse del cervello, con sua inibizione parziale; *b*, lieve r. k. della parete cerebrale e degli occhi; *c*, inibizione di un calice ottico e sfaldamento della parete cerebrale, con invasione di cellule necrobiotiche nel ventricolo; *d*, alterazione grave del differenziamento istologico con r. k. diffusa dell'encefalo e degli occhi. (Ingrand. $\times 50$ circa).

lulari nel differenziamento istologico dipendono dalla dose di irradiazione, mentre le deviazioni delle normali morfogenesi degli organi dipendono, prevalentemente, dallo stadio irradiato, e questa conclusione trova la sua conferma nei risultati degli esperimenti eseguiti sulle fasi di sviluppo IX e X.

La fase IX (tappo vitellino ridottissimo) è *radioresistente* a questa dose minima ed infatti l'organogenesi appare normale, sia nel capo, nel tronco e nella coda delle larve che non presentano neppure traccia di alterazioni cellulari da radio. È importante notare come lo sviluppo ulteriore dell'ova, eccettuato un lieve rallentamento nell'accrescimento degli embrioni, non risente di questa dose che agisce sulle ova *al termine del processo di gastrulazione.*

Nella fase X (insorgenza della piastra midollare) a rotazione compiuta, le ova non sono affatto radiosensibili e le larve, tutte normali (eccetto edemi superficiali) non subiscono effetto alcuno nel differenziamento istologico: *la radioresistenza è aumentata rispetto alla fase precedente.*

Consideriamo un 2° gruppo di larve sviluppate da ova sottoposte alle radiazioni di dose medie, cioè comprese fra la IV e la V dose considerate (17-18 mch.). Sono inclusi in questa serie i lotti: 4, 8, 13, 17, 20.

L'azione delle radiazioni ha un effetto notevole nella 2ª fase di morula (v. nota prec.) con un'azione generalizzata consistente in alterazioni della organogenesi ed istogenesi. Si manifestano nelle larve effetti d'inibizione estesissimi con degenerazione delle cellule degli organi adesivi, fusione degli organi olfattori, riduzione degli occhi, sviluppo abnorme unilaterale dei somiti, necrobiosi delle cellule della parete encefalica che dà luogo al suo sfaldamento con conseguente invasione dei ventricoli da parte di cellule degenerate che si ritrovano anche nella cavità endimale, derivate dalle zone di necrosi del midollo.

Paragonando questo risultato con quelli ottenuti irradiando la stessa fase di sviluppo con una dose circa 8 volte minore, risulta sussistere *una netta relazione d'interdipendenza fra deviazioni e inibizioni della normale organogenesi e le alterazioni del differenziamento istologico.*

Infatti anche con dose minima fatta agire sulle fasi di sviluppo IV e V, si è giunti a provocare specifiche e gravi anomalie nel differenziamento degli organi fino alla loro assoluta inibizione (anencefalia), senza rilevabili alterazioni cellulari: al contrario, dosi notevolmente maggiori su una fase di sviluppo assai più precoce, hanno determinato alterazioni cellulari imponenti tipiche del r. k., alle quali successivamente, come effetto secondario, hanno corrisposto le gravi alterazioni descritte per i singoli organi cefalici.

Le fasi IV e V (gastrula all'inizio del solco falciforme dorsale) sottoposte a questa dose media (17-18 mch.) si comportano in modo tale da rendere evidente un'estensione dell'azione delle radiazioni ai diversi territori del germe.

Prevalentemente, e come sempre, le malformazioni si localizzano alla regione cefalica, con l'assenza, riduzione o fusione degli organi olfattori, con il mancato differenziamento delle vescicole cerebrali, con fenomeni diffusi di necrobiosi delle cellule della parete cerebrale. Notevoli anche: l'invasione della cavità ventricolare da parte di cellule di sfaldamento ed i vari gradi di riduzione del territorio oculare, dall'anofthalmia al differenziamento di abbozzi oculari residui e atrofici. Si riscontrano anche in queste larve, con la maggiore frequenza, i casi di idropisia mentre la r. k. è diffusa anche al mesenchima sebbene la presenza di cellule di sfaldamento, sia sempre prevalentemente rilevabile nel cervello e nel midollo spinale.

Si ha cioè, per questa dose, su tali fasi di sviluppo, *una minore elettività d'azione*, in quanto le stesse o analoghe malformazioni della organogenesi

si accompagnano a generali alterazioni della istogenesi le quali culminano con la degenerazione completa di interi territori cellulari.

A queste dosi medie gli stadi di tappo vitellino ridotto (fase IX) i quali per dosi minime si manifestano decisamente radioresistenti, reagiscono nel modo seguente: risultato comune è la riduzione uni-, o bilaterale degli occhi ed il loro costante spostamento in sede mediana, ma la radiosuscettibilità di questi stadi, è manifestata, prevalentemente dalle profonde alterazioni cellulari della parete encefalica che di conseguenza si sfalda come anche lo

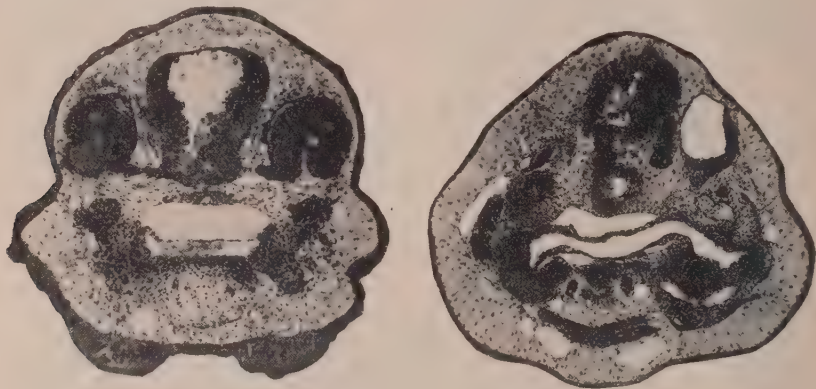


Fig. 4. — Sezioni trasversali di larve irradiate: *a sinistra*, i diffusi effetti della r. k. nel cervello e nel calice ottico; *a destra*, al livello della otocisti si nota la zona fortemente inibita del cervello sovrastante la corda (ingrand. $\times 50$ circa).

stesso midollo spinale. *L'effetto delle radiazioni è, in questo caso, diretto sulle cellule derivate dai territori colpiti dall'irradiazione.*

È interessante a questo proposito notare il comportamento di altri lotti di ova sottoposte a dosi minori (11 mch.) e maggiori (25 mch.) della dose media considerata.

La dose 11 mch. per le morule giovanissime (1^a fase) può già provocare un'alta mortalità: si ripetono le stesse malformazioni derivate dalla dose media che consistono principalmente in alterazioni della struttura del tubo neurale per tutta la sua estensione, fino alla riduzione delle sue pareti ad un budello epiteliale ripieno di cellule di sfaldamento, nella inibizione e alterazione strutturale degli occhi privi di cristallino; nella riduzione delle otocisti ora suddivise o assenti del tutto, ora presente, soltanto, quella di un lato. In casi più gravi si giunge all'anoftalmia, ai cervelli massicci con struttura atipica e frequenti zone di degenerazione cellulare: *mai si verifica però l'assenza assoluta del cervello precordale.*

Gli stadi del solco falciforme dorsale esteso quasi interamente intorno al tappo vitellino, sottoposti alla stessa dose di 11 mch. sono *radiosensibili* e notevolmente, ma ad una distanza maggiore dell'irradiazione che gli stadi

precedenti; le malformazioni non sono di carattere inibitorio, bensì secondarie negli organi colpiti da r. k.

Dosi maggiori, di 25-26 mch. sugli stadi di solco falciforme dorsale all'inizio, sul medesimo esteso intorno al tappo, sulla fase di tappo vitellino ridottissimo, influenzano gravemente il differenziamento istologico inibendo l'organogenesi degli organi adesivi, di quelli olfattori, dell'encefalo: l'azione della dose è più generalizzata sulle larve irradiate nella fase iniziale della gastrulazione, che appaiono tutte difettose sia per il mancato sviluppo di organi (occhi, org. olfattori e cervello precordale) che per la presenza di zone di disfacimento diffuse dal rombencefalo fino a tutto il midollo spinale.

Quanto più avanzato è il processo della gastrulazione tanto più si manifesta, a questa dose, l'assoluta elettività delle radiazioni per il territorio nervoso.

Le dosi massime considerate (da 30 a 40 mch.) hanno fornito risultati di particolare interesse nello stadio iniziale del solco falciforme dorsale. La r. k. raggiunge il suo grado massimo e le cellule di sfaldamento si rinvencono abbondantissime sia negli aggruppamenti massicci e disordinati di neuroblasti cerebrali, sia nella sostanza delle fibre, sia nel territorio oculare nonché nelle otocisti quando queste formazioni sono individuabili. Le cellule necrobiotiche del tubo neurale si estendono per tutto il midollo spinale fino alla zona più caudale di esso e soprattutto sono sensibili gli edemi epiteliali talora notevolissimi nella regione anteriore ridotta delle larve, pressochè acefale.

*
* *

In base ai risultati che siamo venuti esponendo si può ora dedurre come, per alcuni stadi, le alterazioni dello sviluppo non aumentino in relazione diretta con l'aumentare dell'intensità dell'irradiazione. Essendosi posti nelle condizioni di esperimento le più rigorose per ottenere le irradiazioni più uniformi si può concludere che: *gli effetti di una determinata dose di radiazioni, non aumentano rigorosamente, in tutti gli stadi di esperimento, in proporzione all'aumentare della dose.* Esistono stadi che reagiscono maggiormente a dosi di piccola intensità, ed in proporzioni minori ad azioni più energiche, mentre altri, per essere radiosuscettibili, debbono essere colpiti da una dose di irradiazione che oltrepassi una certa soglia.

Si deve anche notare che dal momento nel quale agisce sulle ova l'irradiazione al manifestarsi delle prime alterazioni intercorre in genere un periodo di tempo (*latenza*) che varia in relazione allo stadio di sviluppo dell'ovo, alle condizioni di ambiente (temperatura), al grado d'intensità dell'irradiazione.

Questi esperimenti dimostrano, in secondo luogo, che le alterazioni specifiche del territorio nervoso, corrispondono, e prevalentemente, sia con difetti della istogenesi che della morfogenesi, al modo di formazione del territorio presuntivo d'origine, la cui determinazione si compie fra il principio e il

termine della gastrulazione ed è appunto in questo periodo che si possono provocare, con l'irradiazione, i più diffusi effetti della r. k. Ciò è in pieno accordo con i risultati degli esperimenti noti sulla revocabilità del differenziamento del territorio presuntivo della piastra midollare all'inizio della gastrulazione in confronto con la sua irrevocabilità al termine del processo.

Si dimostra infine che mentre l'azione della radioemanazione è specifica sulle cellule che costituiscono il germe, essa è dello stesso valore di quella di altri agenti (sali, centrif., raggi ultrav.) nei riguardi dell'inibizioni di sviluppo e come tale ha un tempo caratteristico di latenza di azione: esistono perciò per quanto si riferisce alla radiosensibilità delle ova di *Rana*:

1) una reazione differenziale, ormai ben precisata, delle ova alle varie dosi nei vari stadi;

2) malformazioni primarie specifiche corrispondenti alla r. k. degli embrioni;

3) malformazioni secondarie nella organogenesi derivate dalla r. k. dei territori presuntivi degli abbozzi degli organi.

4) inibizioni nello sviluppo di certi organi indipendenti dalle alterazioni del differenziamento istologico.

Botanica. — *La cultura fisiologica migliora il metabolismo delle piante senza alterare il terreno.* Nota di N. A. BARBIERI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. E. CARANO.

In alcune pubblicazioni anteriori ⁽²⁾ io ho già mostrato che la cultura minerale si divide in cultura omogenea e in cultura eterogenea.

Nella cultura minerale omogenea si forniscono alle piante, in modo completo, diretto e localizzato dei fertilizzanti, cioè un miscuglio di sali solubili (cloruri, solfati neutri, fosfati alcalini) e di sali insolubili (fosfato tricalcico e trimagnesico) quali esistono preformati nelle piante, e secondo una dose per ettaro uguale alla percentuale di tutti i sali contenuti nella raccolta.

Nella cultura minerale eterogenea si spargono alla superficie di un ettaro delle materie minerali, o concimi chimici, non contenuti nella composizione della pianta (perfosfato, scorie, cianamide, sali bruti di potassio, leucite, cloruro e solfato d'ammonio etc.) e ad una dose di gran lunga superiore a quel quantitativo minerale contenuto nella raccolta.

(1) Nella seduta del 7 aprile 1930.

(2) *Minéralisation complète, directe et localisée ou culture physiologique*, « Bulletin de la Société d'Horticulture de France », mars 1925; *La culture physiologique*, « Actes du 15^e Congrès International d'Agriculture », Roma 1927, vol. IV, pp. 408-416; *La cultura fisiologica*, « Rendiconti Accademia dei Lincei », vol. VII, giugno 1928 e vol. VIII, dicembre 1928.

Il meccanismo d'azione dei fertilizzanti e dei concimi minerali chimici semplici o composti differisce profondamente.

I fertilizzanti costituiscono la nutrizione minerale dei vegetali però solo come complemento della nutrizione di base o nutrizione organica. I concimi chimici invece, come è noto, macerano e mobilizzano le riserve umiche, di cui solo una parte viene utilizzata dalle piante, mentre la massima parte si elimina con le acque. Le terre, dopo un certo periodo di tempo, divengono esauste e sterili.

Una pianta, l'Orchidea « Cattleya » delicata di sua natura, e di cultura difficile ha confermato i principi della cultura fisiologica ⁽¹⁾. Molte Orchidee esotiche vivono allo stato naturale sugli alberi (Colombia, Indie etc.) ma nelle serre sono coltivate ad una temperatura costante, non già in terreno fertile, ma in un composto di Polypodium e di Sphagnum, composto racchiuso in vasi appropriati. Le Orchidee muoiono al contatto anche debolissimo di qualsiasi concime chimico. Le Orchidee non si possono innaffiare nemmeno con le acque sorgive per il calcare o altri sali estranei alla composizione delle stesse che le acque sorgive possono contenere. Le Orchidee si debbono innaffiare esclusivamente, e a periodi determinati, con le acque piovane, raccolte in speciali serbatoi nell'interno delle serre. Le acque piovane con la temperatura costante delle serre (20 a 35 centigradi) creano un ambiente caldo-umido favorevole alla vita delle Orchidee.

Nelle serre « du Château de Ferrières (Seine et Marne, France) » per lo spazio di dieci anni (1919-1929) a cominciare dai piccoli semi si sono coltivate cento (100) Cattleya testimoni, innaffiate periodicamente con acqua piovana, e cento (100) altre Cattleya fertilizzate, le quali venivano periodicamente innaffiate con acqua piovana addizionata del 3 per mille dello speciale fertilizzante per Orchidee da me stabilito in seguito all'analisi di queste piante.

Le Cattleya coltivate nelle serre, cominciano a produrre i fiori verso il sesto anno di cultura. I fiori dei due lotti di Orchidee sono stati contati separatamente, ed i risultati ottenuti sono i seguenti.

1926:	100 Cattleya testimoni	produzione fiori	39
	100 Cattleya fertilizzate	»	98
1927:	100 Cattleya testimoni	»	90
	100 Cattleya fertilizzate	»	172
1928:	100 Cattleya testimoni	»	115
	100 Cattleya fertilizzate	»	187
1929:	100 Cattleya testimoni	»	101
	100 Cattleya fertilizzate	»	176

(1) BARBIERI N. A., *La culture physiologique des orchidées*, « Bulletin de la Société Nationale d'Horticulture de France », juin 1929; *The physiological Cultivation of Orchids*, *Organic Fixation of Nitrogen by means of Algae*, « The Orchid Review », vol. XXXVIII, pp. 35-48, 1930.

Così per lo spazio di 48 mesi le cento *Cattleya* testimoni hanno prodotto 345 fiori, mentre le cento *Cattleya* fertilizzate hanno prodotto 633 fiori⁽¹⁾.

Conviene osservare che il polipodio e lo sfagno nel fornire alle Orchidee l'alimento organico necessario al loro sviluppo non potevano certo esercitare un'azione qualsiasi sui sali solubili (cloruri, solfati neutri, fosfati alcalini) e sui sali insolubili (fosfato tricalcico e trimagnesico) contenuti nel fertilizzante impiegato. Se si può ammettere che sali solubili od insolubili incorporati col suolo possano subire una parziale o totale trasformazione in



Fig. 1. — Mais coltivato a Scafati (prov. Salerno).
A destra: pianta fertilizzata. *A sinistra*: pianta testimone.

contatto dei componenti minerali del terreno, tale trasformazione si deve escludere per il composto di polipodio e di sfagno. Le *Cattleya* (radici, steli, bulbi, foglie, fiori) il polipodio e lo sfagno contengono proporzioni definite dei sali indicati. Ne segue che l'assorbimento dei sali solubili ed insolubili del fertilizzante suddetto ha dovuto operarsi direttamente ma con meccanismo diverso. I sali solubili, veicolo normale d'assorbimento delle sostanze organiche, sono passati nelle Orchidee insieme con il lento e continuo assorbimento dei principi organici, forniti dalle trasformazioni operate dalle radici delle Orchidee nello stagno e nel polipodio.

(1) In seguito a tali risultati nelle serre «du château de Ferrieres» il fertilizzante per orchidee è stato applicato alla cultura di quindicimila piante di *Cattleya*.

La chimica considera come sali insolubili quelli che non si sciolgono in acqua, ma un sale insolubile in acqua può divenire solubile in un veicolo fisiologico appropriato. Le patate contengono tracce minime di sali insolubili, mentre le leguminose ne sono largamente provviste. Se si circondano di sali insolubili (fosfato tricalcico e trimagnesico) dei tuberi di patate, compiuto il ciclo vegetativo, questi fosfati si ritrovano integralmente attorno ai tuberi esausti delle patate. Però se gli stessi fosfati si pongono attorno ai semi delle fave, ceci, piselli, ecc. compiuto il ciclo vegetativo, nessuna traccia dei detti fosfati si rincontra attorno alle piante suddette.



Fig. 2. — Mais coltivato a Scafati.

A destra: spiga di pianta fertilizzata. *A sinistra:* spiga di pianta testimone.

Probabilmente come le leguminose elaborano la legumina, si appropriano dei fosfati.

Quindi i sali solubili agiscono nella prima fase vegetativa, formano attorno i semi o alle piantine una zona di nutrizione speciale che permette la rapida formazione delle radici. Le piantine si nutrono subito con le radici e conservano per qualche tempo quasi intatte le riserve dei cotiledoni. I sali insolubili agiscono di preferenza verso l'ultima fase vegetativa e passano nei tessuti vegetali quando le piante elaborano principî determinati: legumina (leguminose), glutine (grano) e così di seguito.

Lo sviluppo radicale considerevole provocato dall'uso dei fertilizzanti fisiologici (fig. 1) produce delle modificazioni profonde nella parte aerea delle piante. Le foglie sono più larghe, più lucide, più verdi; gli steli più robusti. La fioritura si mostra più abbondante seguita da semi più nume-

rosi (fig. 2) più uniformi e ben nutriti, con peso specifico spesso più elevato (grano) e con involucri più tenui (cariossidi del grano). Tutta la pianta offre un rigoglio di vegetazione molto accentuato (fig. 3). I principî elaborati dalle piante sono modificati, aumenta la fecola, l'amido, il glutine,



Fig. 3. — Pianta di fava fertilizzata (prov. Campobasso).

aumenta lo zucchero, il profumo. Diminuiscono però gli alcoloidi e i glucosidi (tabacco). L'aumento della produzione (frutta) spesso è dovuto ai principî biologici (residuo secco) non all'acqua.

In breve: i fertilizzanti fisiologici migliorano il metabolismo delle piante; le piante meglio nutrite danno prodotti più elevati e di qualità superiore.

Riporto qui sotto alcuni quadri dimostrativi che provano l'aumento di alcune sostanze e la diminuzione di altre sostanze (glucoside-tabacco).

I. Aumento di fecola.

1920: Remy (Seine et Oise, France):

5 are coltivate a patate	senza concimi	fecola	18.40 %
5 " "	con concimi	"	18.40 %
5 " "	con fertilizzante	"	19.20 %.

II. Barbabietola da zucchero, aumento di zucchero.

1921: Domaine de Noisiel (Seine et Marne, France):

Barbabietole testimoni	zucchero	18.40 %
" fertilizzate	"	19.05 %.

1921: Domaine d'Armainvilliers (Seine et Marne, France):

Barbabietole testimoni	zucchero	11.10 %
" fertilizzate	"	12.25 %.

1922: Sucrerie Say (Pont. d'Ardres-Pas de Calais, France):

Barbabietole testimoni	zucchero	17.90 %
" fertilizzate	"	18.90 %.

1923: Vilmorin (Massy-Palaiseau-Seine et Oise, France):

Barbabietole testimoni	zucchero	15.50 %
" fertilizzate	"	16.70 %.

1929: Vilmorin (Id.):

Barbabietole coltivate con i concimi chimici all'ettaro	zucchero Kg.	7956
" fertilizzate	"	"
	"	11849

Coltivazione del tabacco.

1925: Istituto di Scafati (pr. Salerno) ⁽¹⁾:

Sigari toscani, tabacco Kentucky testimoni nicotina 3.61 %.

" " " "	coltivato con sol-	
	fato d'ammonio	" 4.48 %
" " " "	fertilizzato	" 2.88 %.

1926: Kentucky coltivato con solfato d'Ammonio nicotina 8.11 %.

" fertilizzato " 5.19 %.

Erzegovina gigante testimone " 1.87 %.

" fertilizzato " 1.36 %.

Coltivazione del Pomodoro, Scafati: "

Residuo secco di 200 pomodori testimoni gr. 0.58 per pomodoro

" " 200 " fertilizzati " 0.85 "

(1) Il dosaggio della nicotina è stato effettuato nel modo seguente: a) 5 grammi di tabacco sono distillati in una corrente di vapore previa addizione di ossido di magnesio; b) il distillato è raccolto in una soluzione 1 per mille di acido cloridrico; c) in una parte aliquota del distillato si precipita il silicotungstato di nicotina; d) il precipitato raccolto, seccato, incenerito, moltiplicato per 0.1139 dà la ricchezza di nicotina. Conviene osservare (« Rendiconti Accademia dei Lincei », vol. VII, maggio 1928) che io ho già dimostrato che la nicotina è un prodotto di sdoppiamento della Tabacina, o principio tossico del tabacco.

Botanica (Fisiologia vegetale). — *Radiazione ed accrescimento nei vegetali (piante in sviluppo sotto schermo di piombo)*. Nota di V. RIVERA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio P. R. PIROTTA.

Abbiamo precedentemente riferito sopra prove di germinazione di semi di piante terrestri sotto schermo di acqua ⁽²⁾ e ne abbiamo dedotto innanzi tutto la incapacità eccitatrice, sulla divisione cellulare, della radiazione penetrante, cosmica o ultra γ di Millikan e successivamente il potere rallentatore della crescita che a questa radiazione deve attribuirsi.

La felicità del metodo negativo di sperimentazione, quello schermante, ci ha indotto ad applicarlo ad altri esperimenti, per mezzo dei quali potessimo renderci conto della influenza sull'accrescimento delle piante di una parte più o meno grande della radiazione a corta onda in genere, cioè di quella parte della gamma delle radiazioni invisibili conosciute, caratterizzate dall'avere la λ inferiore a quella delle onde violette.

Uno schermo di piombo, dello spessore di cent. 15 a 16 fu costruito appositamente, fondendo circa tredici quintali di piombo in pani, nello stesso locale dove poi furono eseguite le prove, in modo da avere un blocco solo di questo metallo, senza alcuna benchè minima soluzione di continuità. Entro questo grande blocco e nel centro di esso era delimitata una piccola camera delle dimensioni di cent. $15 \times 15 \times 35$, che poteva essere chiusa ermeticamente, facendo scendere su di essa apposito apparecchio di chiusura in piombo massiccio, del quale una porzione occupava parte dello spazio della cameretta ed altra porzione restava al di fuori, a completare, con il suo estremo superiore slargato, la chiusura ermetica della cameretta stessa: sicchè le dimensioni di questa, ad apparecchio chiuso, si riduceva a cent. $15 \times 15 \times 15$.

Si è in tal modo potuto disporre di una cameretta di germinazione di semi, dalla quale fossero escluse tutte le radiazioni della gamma conosciuta, meno una parte di quella penetrante, e cioè quella che riesce a raggiungere la profondità di circa m. 1.50 sotto acqua.

Veniva cioè in tal modo esclusa dalla cameretta di germinazione tutta la radiazione conosciuta, meno i raggi calorifici, i raggi gamma e la radiazione cosmica: di questa però era ridotta l'intensità, così come era, ed in maggior misura, ridotta l'intensità della radiazione gamma che fosse stata presente nell'ambiente.

(1) Nella seduta del 6 aprile 1930.

(2) V. «Rend. R. Acc. Lincei», vol. XI, 6^a, 1^o sem., fasc. 5, marzo 1930; v. pure ivi fasc. 6 aprile 1930.

Si disposero altri due schermi, uno di controllo, in legno, e l'altro di sottile lamina di piombo (mm. 1.5), tutti delimitanti camerette di germinazione delle stesse dimensioni e tutti ricoperti internamente ed esternamente di carta nera. Si disponeva cioè di tre schermi capaci di intercettare quantità sempre maggiori della energia radiante presente nell'ambiente, oltre, s'intende, quella luminosa.

I risultati delle numerosissime prove furono tutti concordanti e portarono a riconoscere che lo sviluppo dei germogli aerei di piantine all'inizio dello sviluppo (frumento, orzo, veccia e medica) dopo alcuni giorni di esposizione, era nei due casi di schermatura con piombo e con legno costantemente e spiccatamente differente, fino a raggiungere, per qualche specie vegetale, il triplo dell'allungamento dei germogli nelle piante cresciute sotto schermo di cm. 15 di piombo, di quello che non fosse sotto schermo di legno; valori intermedi avevano in alcuni casi (veccia) i germogli cresciuti sotto lo schermo di piombo dello spessore di mm. 1.5, mentre in altri casi tale differenza tra i due schermi di piombo era appena apprezzabile, avendosi un piccolo vantaggio sullo sviluppo talora per le piante allevate nello schermo di piombo grosso (orzo) o invece talora per quelle allevate in piombo sottile (frumento). Sicchè oltre una sensibilità per la *quantità* di radiazione, ad onda corta, può essere ammessa una sensibilità, che varia da specie a specie, per le varie radiazioni di questo tipo, cioè per la *qualità*, come sarà meglio messo in evidenza successivamente.

Queste prove ci rivelano in ogni modo la grande sensibilità che piante in accrescimento hanno e dimostrano, oltrechè per la radiazione luminosa, come si sa, anche per la radiazione oscura, e precisamente per tutti i raggi a più corta lunghezza d'onda del violetto, da $\lambda = 3800 \text{ \AA}$, a $\lambda = 0.0004 \text{ \AA}$: infatti una riduzione più o meno notevole di questa radiazione è risentita sull'accrescimento, che aumenta, rivelandoci, in tal modo, la funzione rallentatrice della crescita, che tutta la gamma ad onde corte delle radiazioni dell'ambiente ha complessivamente sopra germogli all'inizio dello sviluppo.

Non ritengo sia da considerare, tra i fattori determinanti le differenze rilevate, la *radiazione secondaria*, che può ammettersi esista all'interno degli schermi di piombo, anche perchè le prove condotte sotto schermo d'acqua (v. Nota precedente), nel complesso, hanno dato risultati concordanti con quelli qui esposti.

I risultati numerici di questa serie di prove insieme con quelli di altre serie saranno pubblicati in un lavoro a parte, ma intanto possiamo comunicare che da essi può dedursi, che la azione tipica, nei riguardi dell'accrescimento di vegetali terrestri, delle radiazioni poste ai due estremi di quelle dello spettro luminoso, si addimosta nel complesso *eccitativa* della moltiplicazione cellulare da parte delle radiazioni a λ più lunga di quelle rosse cioè dalle infrarosse (otto ottave) alle herziane (ventidue ottave) e *depressiva* dell'accrescimento da parte delle radiazioni più corte di quelle violette e cioè

dalle ultraviolette, ai raggi X, a quelli gamma e, finalmente, alla radiazione cosmica o ultra- γ .

Quasi al centro di queste radiazioni, e cioè tra la vasta gamma deprimente e l'altra vasta gamma eccitante, è situata l'ottava luminosa, tendente essa stessa ottava, nelle sue radiazioni di confine, alla depressione ed alla esaltazione della crescita, ma più particolarmente influente sopra la sintesi del carbonio in prevalenza con le sue radiazioni a più lunga λ e forse sopra i fenomeni riproduttivi in prevalenza con i raggi a più corta λ .

Sicché la gamma della radiazione conosciuta influisce ad un tempo sulla moltiplicazione cellulare positivamente e negativamente e cioè esaltandola, con trenta ottave della radiazione a più lunga λ , e deprimendola con le ventiquattro ottave della radiazione più penetrante.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio MARCHIAFAVA presenta anche a nome della Signora Golgi, presente alla seduta, il quarto volume delle Opere di CAMILLO GOLGI, pubblicate a cura della vedova, e ne illustra ampiamente il contenuto con le seguenti parole:

« Ho l'onore di fare omaggio all'Accademia a nome della Signora Lina Aletti Golgi del IV volume delle « Opera omnia » del suo diletto e rimpianto consorte, nostro venerato ed amato Socio Camillo Golgi, del quale, in quest'aula, udimmo la commemorazione, che ne fece il Socio Benedetto Morpurgo.

« Questo volume, preceduto da altri tre volumi usciti nell'occasione del 25^{mo} anno del suo insegnamento e delle nozze d'oro, stampato, dopo la sua morte per cura degli egregi e affezionati allievi professori Veratti e i due Sala, per le cui spese contribuì nella maggior parte la vedova, come omaggio di affetto e di rimpianto, contiene una serie di memorie, frutto del lavoro continuato da Camillo Golgi, dopo la pubblicazione di quei primi volumi, con fervore di ricercatore geniale e appassionato, nel laboratorio di Patologia generale della gloriosa Università di Pavia, del quale fu per tanti anni il benemerito direttore, fino agli ultimi giorni della sua vita, che si chiuse nel gennaio 1926.

« Sono dieci le memorie raccolte in questo volume intorno a vari argomenti di biologia.

« Quattro riguardano gli studi sulla fine struttura del sistema nervoso, i cui risultati, per la originalità e l'alto significato, gli avevano già data la rinomanza e il premio Nöbel. E sono: 1. *La dottrina del Neurone, teorie e fatti* (questa memoria fu letta da Camillo Golgi a Stoccolma quando gli fu conferito il premio Nöbel); 2. *Per la facile e pronta dimostrazione dell'apparato reticolare interno delle cellule nervose*; 3. *Sulla struttura delle cellule nervose della corteccia cerebrale*; 4. *Evoluzione delle dottrine e delle conoscenze intorno al substrato anatomico delle funzioni psichiche e sensorie*. In questa ultima memoria si trova un lucido riassunto delle ricerche sulla minuta struttura dei centri nervosi eseguiti con metodi originali di tecnica fondati sulla reazione del nitrato d'argento, i cui risultati, a volerli soltanto enumerare sono: i due tipi di cellule nervose con vario significato funzionale di moto e di senso; tutte fornite di un prolungamento con vario modo di comportarsi; la mirabile rete nervosa diffusa in tutti gli strati della sostanza grigia sulla quale si è tanto discusso; la struttura intima delle cellule nervose, che sono gli organi centrali delle attività specifiche - sensorie, motorie, psichiche - connesse fra loro da complicatissime reti di fibrille. Da questa intima connessione fra le cellule nervose della varie provincie dei centri nervosi, mosse la critica di Camillo Golgi alla rigida dottrina del neurone e alla dottrina delle nettamente delimitate localizzazioni cerebrali. Se si pensa alla gran mole di ricerche promosse in Italia e all'estero dell'opere di Golgi sul sistema nervoso e all'ardore dei dibattiti suscitati intorno ai problemi teoretici connessi ai reperti morfologici di lui e da essi derivati, si può ben affermare che l'opera di Golgi è stata tra le più feconde che le scienze morfologiche annoverino nell'ultimo secolo.

« Una memoria è dedicata ad una minuta particolarità di struttura dell'epitelio della mucosa gastrica ed intestinale di alcuni vertebrati. La particolarità messa in evidenza consiste nella presenza di un tenue apparato reticolare entro le cellule epiteliali della mucosa gastrica e corrispondenti fossette, nelle cellule adelomorfe delle glandole gastriche, nell'epitelio dei villi intestinali e delle glandole della mucosa. Di questo reticolo si osservano modificazioni nella forma e cambiamenti della sede in rapporto alla funzione specifica di alcune delle cellule epiteliali, che è la metamorfosi mucosa.

« Due memorie riguardano alcune particolarità di struttura dei globuli rossi dell'uomo e degli animali, le quali sono messe in evidenza da un'adatta tecnica e consistono nella presenza nei globuli rossi dell'uomo e degli animali di un corpo nucleoido e di un centrosoma.

« Una memoria rivela la struttura e la biologia dei così detti globuli o piastrine del tuorlo. Il quale negli uccelli, nei rettili, negli anfibi, nei pesci veniva considerato come materiale amorfo, non organizzato, destinato a fornire materiale di nutrizione al nuovo essere. Ora dalle ricerche di Camillo Golgi viene dimostrato che i globuli del tuorlo sono elementi forniti di

tutte le proprietà degli organismi viventi, non esclusa l'attività formativa, con struttura mitocondriche e con il centrosoma.

« Dal campo morfologico si allontana una memoria entrando in quello dell'Igiene sociale, perchè si occupa della profilassi della Malaria, alla cui etiologia hanno contribuito a dare viva luce le ricerche di Camillo Golgi. In questa memoria si tratta propriamente della “bonifica umana nelle regioni risicole”. Dopo avere esaminato con serena critica i vari metodi di profilassi e pur riconoscendo la importanza della difesa meccanica e della profilassi chimica, esalta la grande efficacia della bonifica umana, che consiste nella cura intensiva, radicale dei portatori di germi malarici, specialmente nella stagione interepidemică, perchè nella sopravveniente stagione epidemica le nuove generazioni di anofeli non si possano infettare e quindi non trasmettano la malaria ai sani.

« Ricordo da ultimo il discorso di Camillo Golgi, tenuto in una solenne adunanza del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere: “La moderna evoluzione delle dottrine e delle conoscenze sulla vita” onde si manifesta l'altezza dell'ingegno, la sapiente e vasta coltura, l'acume del giudizio critico. In questo discorso Camillo Golgi, limitando le sue considerazioni al campo da lui profondamente studiato, da lui posseduto, sul quale egli poteva ben dire: “*posui vestigia princeps*” ritiene che le conquiste intorno la fine organizzazione del sistema nervoso, senza la pretesa di essere il ponte sull'abisso fra materia organizzata e pensiero, possano avviare ad una spiegazione possibile, sopra il fondamento anatomico, del meccanismo di alcune fra le principali manifestazioni della specifica attività del sistema nervoso. E da ciò e da altre considerazioni, come per fatto personale, trae argomento per opporsi con grande vivacità all'opinione, da qualche ricercatore espressa, che di fronte ai grandi e meravigliosi progressi della Fisico-chimica applicata agli esseri viventi, si possa dare l'ostracismo all'indirizzo morfologico come ormai sorpassato. Se la spiegazione dei fenomeni vitali è precipuo privilegio della Fisico-chimica, questa spiegazione non può disgiungersi dai fatti strutturali. E Camillo Golgi nell'esprimere la sua convinzione della grande importanza dell'indirizzo morfologico è lieto di aver per alleato il nostro Socio il biologo Giulio Fano, il quale nel suo libro “Cuore e Cervello” afferma, come sintesi del suo pensiero, che “le manifestazioni della vita dipendono non soltanto da una determinata compagine chimica, ma anche da una particolare struttura anatomica, l'una e l'altra così intimamente immedesimate che l'estrazione dei composti chimici, implica quasi sempre la distruzione della materia organizzata”.

« E qui mi fermo per non uscire dai limiti della presentazione di un libro.

« Con questo volume il quale, con la stessa veste tipografica, va a raggiungere i tre fratelli, che lo hanno preceduto, si trovano raccolte le “opera omnia” di Camillo Golgi, monumento veramente “*aere perennius*” che trasmette alla posterità genuine scoperte scientifiche e onde gli studiosi delle

scienze biologiche trarranno insegnamento, ispirazione e incitamento a seguire le orme del Maestro insigne, di cui l'Italia si onora ».

Il Presidente ringrazia vivamente il Socio MARCHIAFAVA per le alte parole dette sull'opera di C. GOLGI e coglie l'occasione per manifestare il plauso dell'Accademia alla Signora Golgi che volle, con la pubblicazione delle *Opera omnia* del Grande Maestro scomparso, rendere l'estremo tributo d'affetto alla Sua memoria.

Il Socio MILLOSEVICH, presenta a nome del Socio DAINELLI, il « X volume della Spedizione italiana de Filippi », a cura di R. PAMPANINI e D. VINCIGUERRA, relativo alla fauna e alla flora del Caracorùm, Himàlaya e Turchestàn cinese.

Il Corrispondente GUIDI presenta un suo opuscolo dal titolo: « Calcolo approssimato di una soletta rettangolare incastrata al perimetro e sollecitata da un carico concentrato nel mezzo ».

L'Accademico Segretario PARRAVANO presenta le opere giunte in dono segnalando gli « Atti del Congresso internazionale dei Matematici » di Bologna (1928), « Cours de Mécanique » di P. PAINLEVÉ, « Das Arteriensystem der Japaner » di BUNTARO ADACHI.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci: ARMELLINI, CARANO, CORBINO, LEVI-CIVITA, MILLOSEVICH, PARRAVANO, PIROTTA, SEVERI, VOLTERRA.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 6 aprile 1930

- ADACHI B. — Das Arteriensystem der Japaner. Band. I-II. Kyoto, 1928. 4°, pp. I-XIII, 1-440; I-IX, 1-353.
- ATTI del Congresso internazionale dei matematici. Bologna 3-10 settembre 1928 (VI). Tomo II. Bologna, 1930. 8°, pp. 1-365.
- BAGLIONI S. — Angelo Ruffini e la sua opera. (Estr. dalla Rivista « Fisiologia e Medicina ». Anno I, n. 1). Roma, 1930. 8°, pp. 1-16.
- RIER M. — Due nuovi Pseudoscorpioni della Tunisia. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXIV, pp. 95-98). Portici, 1930. 8°.
- CESÀRO G. — Sur les directions d'extinction d'un ensemble de deux lames cristallines parallèles, placées, en lumière monochromatique, entre un polariseur fixe et un analyseur mobile. Conditions nécessaires pour qu'il existe des positions d'extinction - Triangle sphérique fictif duquel ces relations peuvent être déduites. (Extrait des Bulletins de l'Académie Royale de Belgique » Classe des Sciences, Série V, t. XV, pp. 367-391). Bruxelles, 1929. 8°.
- BOULENGER G. A. — Batraciens et reptiles (Voyage zoologique d'Henri Gadeau de Kerville en Asie Mineure), avril-mai 1912. Tome II, pp. 135-144. Paris, 1928. 8°.
- CONTE V. — Esperimenti di lotta contro la mosca delle olive per mezzo di sostanze attrattive. (Estr. dagli « Annali del R. Istituto Superiore Agrario di Portici ». Vol. III, 1929, pp. 308-320). Modena, 1930. 8°.
- DOBELL C. — Researches on the Intestinal Protozoa of Monkeys and Man. III The Action of Emetine on natural amoebic Infections in Macaques. (From « Parasitology ». Vol. XXI, pp. 446-468). Cambridge, 1929. 8°.
- ENCICLOPEDIA italiana di scienze, lettere ed arti dell'Istituto Treccani. Vol. V. Milano, 1930. 4°, pp. 1-XIX, 1-999.
- FAGNANO J. — Para la navegacion aerea de Magallanes. Estudio del Observatorio Meteorologico Salesiano. Magallanes, 1929. 8°, senza pagin.
- FAVARO G. A. e TAFFARA L. — L'attività del sole nell'anno 1929. Statistica delle macchie e facole solari. Le macchie solari più notevoli. Le protuberanze solari. Altezza della cromosfera. Tavola: Andamento dell'attività solare dal 1877 al 1929. (R. Osservatorio Astrofisico di Catania). Catania, 1930. 8°, pp. 1-15.
- GOLGI C. — Opera omnia Vol. IV. Scritti su argomenti vari (1903-1925), con 7 tavole. Milano, 1929. 4°, pp. 1259-1563.
- GUIDI L. — Calcolo approssimato di una soletta rettangolare incastrata al perimetro e sollecitata da un carico concentrato nel mezzo. (Estr. dagli « Annali dei Lavori Pubblici », 1930). Roma, 1930. 8°, pp. 1-6.
- KOLLMANN M. — Mammifères. (Voyage zoologique d'Henri Gadeau de Kerville en Asie-Mineure (avril-mai 1912). Tome II, pp. 145-150. Paris, 1928. 8°.
- LANDAU E. — Ueber den Millouxschen Satz. (Aus den « Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen ». Mathematisch-Physikalische Klasse, 1930. Göttingen, 1930. 8°, pp. 1-9.
- LECAT M. — Anwendung des Azeotropismus auf die qualitative organische Analyse. (Sonderdr. aus « Zeitschrift für physi-

- kalische Chemie». Bd. 146, Heft. 314. Ss. 231-244). Leipzig, 1930. 8°.
- LECAT M. — Application de l'Azéotropisme à l'analyse chimique fonctionnelle. (Extr. des « Bulletins de l'Académie royale de Belgique ». Classe des Sciences. T. XV, pp. 1075-1091). Bruxelles, 1930. 8°.
- LECAT M. — Azeotropismus in binären Systemen, bestehend aus einem Alkohol, gemischt mit einem Amin, einem Nitroderivate, einem Aether (Oxyd), oder Wasser (Sonderabd. « Zeitschrift für anorganische und allgemeine Chemie ». Band. 186, Ss. 119-140). Leipzig, 1930. 8°.
- LEJAY P. — L'observatoire de Zi-Ka-Wei. Paris, 1928. 4°.
- LUYTEN W. J. — The Grootfontein Meteor. (Reprint. from « Popular Astronomy ». Vol. XXXVIII, n. 1). S. l., 1930. 8°, pp. 1-5.
- PAINLEVÉ P. — Cours de Méchanique. Tome I. Paris, 1930. 8°, pp. I-VI, 1-664.
- PASSERINI N. — Sopra la Cuscuta pentagona Engel. volg. Cuscuta grossa. (Estr. dal « Bollettino del R. Istituto Superiore Agrario di Pisa ». Vol. V). Pisa, 1929. 8°, pp. 1-8.
- PASSERINI N. — Sopra le temperature minime a differenti piccole altezze sul suolo. (Estr. dal « Bollettino del R. Istituto Superiore Agrario di Pisa ». Vol. V, 1929). Pisa, 1930. 8°, pp. 1-58.
- PASSERINI N. — Sulla disseminazione della Posidonia oceanica Del. (Estr. dal « Bollettino del R. Istituto Superiore Agrario di Pisa ». Vol. V). Pisa, 1929. 8°, pp. 1-4.
- PASSERINI N. — Sperimenti sulla piantagione « a capovolto » delle talee di vite e sulla influenza di alcune mutilazioni sopra la emissione delle radici. (Estr. dal « Bollettino del R. Istituto Superiore Agrario di Pisa ». Vol. V). Pisa, 1929. 8°, pp. 1-7.
- PASSERINI N. e GALLI P. — Sperimenti intorno l'azione del cloruro sodico contenuto nell'acqua di irrigazione su di alcune piante coltivate. (Estr. dal « Bollettino del R. Istituto superiore Agrario di Pisa », 1927). Pisa, 1927. 8°, pp. 1-86.
- PELLEGRIN J. — Poissons (Voyage zoologique d'Henri Gadeau de Kerville en Asie Mineure (avril-mai 1912). Tome II, pp. 1-134) et Note complémentaire. Paris, 1928. 8°.
- PLATANIA G. — Ciro Chistoni. Commemorazione. (Estr. dal « Bollettino della Società dei Naturalisti di Napoli ». Anno XLII, 1928, pp. 113-121). Napoli, 1929. 8°.
- PLATANIA G. — Gli aloni osservati nel 1928 in Napoli. (Estr. dal « Bollettino della Società dei Naturalisti in Napoli ». Anno XLIII, 1929, pp. 72-74). Napoli, 1930. 8°.
- PLATANIA G. — Il lago di Averno e gli altri laghi Flegrei. (Estr. dal « Bollettino della Società dei Naturalisti in Napoli ». Anno XLIII, 1929, pp. 134-136). Napoli, 1930. 8°.
- PLATANIA G. — La trasparenza del mare da alta quota. (Estr. dal « Bollettino della Società dei Naturalisti in Napoli ». Anno XLIII, pp. 75-77). Napoli, 1930. 8°.
- RAMPANINI R. e VINCIGUERRA D. — Raccolte di piante e di animali. (Spedizione italiana De Filippi nell'Himalaia, Caracorum e Turchestan Cinese 1913-1914. Serie II, Vol. X). Bologna, 1930. 4°, pp. I-VII, 1-314.
- RANZI S. — L'accrescimento dell'embrione dei Cefalopodi (Ricerche sugli scambi tra ova ed ambiente). (Sonderdr. aus « Wilhelm Roux Archiv für Entwicklungsmechanik der Organismen ». Band 121, Heft III, Ss. 345-365). Berlin, 1930. 8°.
- REINHARD H. J. — Notes on the Muxoid Flies of the Genera *Opelousia* and *Opsodexia* with the Description of three new Species. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXVI). Washington, 1929. 8°, pp. 1-9.
- RICCHELLA A. — Esperimento d'attrazione d'insetti e specialmente di « *Dacus oleae* » eseguito nel 1929 nel comune di Ascea (Salerno). (Estr. dagli « Annali del R. Istituto Superiore Agrario di Portici ». Serie III, Vol. III, pp. 321-334). Modena, 1930. 8°.

- SILVESTRI F. — Descrizione di due nuovi Pauropodi (Myriapoda) di Giava. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXII, pp. 227-231). Spoleto, 1930. 8°.
- SILVESTRI F. — Descrizione di un nuovo genere di Japygidae (Thysaniura) del Perù. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXIII, pp. 231-236). Spoleto, 1930. 8°.
- TAFFARA L. — Il pianeta Giove nell'opposizione 1928-29. (Estr. dalle « Memorie della Società Astronomica Italiana ». Vol. IV). Milano, 1929. 8°, pp. 1-31.
- TAFFARA L. — La fotografia delle stelle nel R. Osservatorio astrofisico di Catania. (Estr. da « Catania, Rivista del Comune ». Anno I, n. 3. 1929). Catania, 1929. 4°, pp. 1-7.
- TAFFARA L. — L'andamento dell'attività solare dal 1877 al 1928. (Estr. dalle « Memorie della Società astronomica Italiana ». Vol. IV). Milano, 1929. 8°, pp. 1-7.
- VARETON E. — L'Istituto Sperimentale di Batteriologia industriale Mezzadrolì di Bologna. (Estr. da « Zymologica, Chimica dei Colloidi e degli Zuccheri ». Anno IV, 1929). Bologna, 1920. 8°, pp. 1-19.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 27 aprile 1930 (anno VIII)

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Tensori isotropi.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. U. CISOSSI.

1. COMPONENTI CARTESIANE DI UNO STESSO TENSORE RIFERITO A DUE SISTEMI DIVERSI. — Sieno: $T_{i_1 \dots i_m}$ le componenti cartesiane di uno stesso tensore m^{plo} \mathbf{T} rispetto ad una terna di assi ortogonali $(O; y_1, y_2, y_3)$ e $\bar{T}_{j_1 \dots j_m}$ le componenti dello stesso tensore rispetto ad un'altra terna ortogonale $(\bar{O}; \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3)$.

Si hanno le relazioni ⁽²⁾

$$(1) \quad \begin{cases} \bar{T}_{j_1 \dots j_m} = T_{i_1 \dots i_m} \alpha_{i_1 j_1} \dots \alpha_{i_m j_m}, \\ T_{i_1 \dots i_m} = \bar{T}_{j_1 \dots j_m} \alpha_{i_1 j_1} \dots \alpha_{i_m j_m}, \end{cases}$$

designando α_{ij} il coseno dell'angolo che l'asse y_i forma coll'asse \bar{y}_j :

$$(2) \quad \alpha_{ij} = \cos(y_i, \bar{y}_j).$$

2. ISOTROPIA. — Diremo che il tensore \mathbf{T} è *isotropo* quando le sue componenti cartesiane sono invariantive di fronte a qualsiasi cambiamento di assi di riferimento; precisamente se

$$\bar{T}_{i_1 \dots i_m} = T_{i_1 \dots i_m}.$$

(1) Presentata nella seduta del 27 aprile 1930.

(2) CISOSSI, *Lezioni di calcolo tensoriale*, Milano (1928), Tamburini; n. 7 e le formule (3) e (5) del n. 5. Seguendo l'uso, ormai generalmente adottato, qui si sopprimono, sottintendendole, le sommatorie che dovrebbero comparire nei secondi membri.

Notevoli esempi di tensori isotropi ci sono offerti:

dal *tensore fondamentale* o *unitario* δ , doppio simmetrico, le cui componenti cartesiane sono definite nel seguente modo ⁽¹⁾:

$$(3) \quad \delta_{ik} = 0 \text{ per } i \neq k, \quad \delta_{kk} = 1;$$

e dal tensore triplo emisimmetrico ϵ , le cui componenti cartesiane sono così definite ⁽²⁾:

$$(4) \quad \epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{se gli indici non sono tutti distinti,} \\ (-1)^c, & \text{essendo } c \text{ pari o dispari insieme alla classe di } \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Un tensore di ordine zero (di un'unica coordinata) ⁽³⁾ si può includere tra i tensori isotropi. Un tensore di primo ordine (o vettore) non può mai essere isotropo tranne il caso, ovviamente privo di interesse, di un vettore nullo.

3. — OPERAZIONI. — Dalla definizione di isotropia scendono immediatamente le seguenti proprietà relative alla somma, al prodotto, e alla composizione di tensori isotropi ⁽⁴⁾: *La somma di tensori isotropi è un tensore isotropo; il prodotto di tensori isotropi è un tensore isotropo; il tensore composto mediante tensori isotropi è esso pure isotropo.*

In particolare, è isotropo qualunque tensore doppio $T = A\delta$ di componenti cartesiane

$$(5) \quad T_{ik} = A\delta_{ik},$$

qualunque sia A . Infatti esso può considerarsi prodotto del tensore di ordine zero A e del tensore fondamentale.

Così pure è isotropo il tensore triplo emisimmetrico $T = B\epsilon$ di componenti [n. 2]

$$(6) \quad T_{ijk} = B\epsilon_{ijk},$$

qualunque sia B .

Si rilevi che mentre δ e ϵ oltre che isotropi sono altresì tensori costanti ⁽⁵⁾, non sono necessariamente costanti i tensori isotropi definiti mediante le componenti (5) e (6), anzi non lo sono affatto se A e B (anziché costanti) sono funzioni del posto.

È manifesto che, mediante le potenze, i prodotti e le composizioni, dai due tensori isotropi δ e ϵ si possono ottenere dei tensori isotropi di qualsiasi ordine.

(1) Loc. cit., n. 8.

(2) Loc. cit., n. 9.

(3) Loc. cit., n. 7.

(4) Loc. cit., cap. II.

(5) CISOTTI, *Sul concetto di tensore costante in varietà euclidee*, questi « Rendiconti », vol. VII (1° sem. 1928), p. 269.

4. POTENZE DEL TENSORE FONDAMENTALE. — La potenza p^{ma} del tensore fondamentale σ è un tensore di ordine $2p$ che ha per componenti cartesiane ⁽¹⁾

$$\delta_{i_1 k_1} \dots \delta_{i_p k_p},$$

cioè, per le (3), l'unità quando $i_1 = k_1, \dots, i_p = k_p$ e lo zero in tutti gli altri casi. Ne segue che non soltanto tale tensore è isotropo ma lo sono pure i tensori $(2p)^{pli}$ di componenti

$$(7) \quad T_{i_1 k_1 \dots i_p k_p} = C \delta_{i_1 k_1} \dots \delta_{i_p k_p},$$

qualunque sia C .

5. POTENZE DEL TENSORE ϵ . — Anche la potenza q^{ma} del tensore ϵ è un tensore isotropo $(3q)^{plo}$ di componenti cartesiane

$$(8) \quad \epsilon_{i_1 j_1 k_1} \dots \epsilon_{i_q j_q k_q} = \begin{cases} 0, & \text{se gli indici } i, j, k \text{ di almeno una terna non sono distinti,} \\ (-1)^{c_1 + \dots + c_q} & \text{se } c_r \text{ è pari o dispari insieme alla classe di } \begin{pmatrix} i_r & j_r & k_r \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Pertanto sono isotropi tutti i tensori $(3q)^{pli}$ di componenti

$$(9) \quad T_{i_1 j_1 k_1 \dots i_q j_q k_q} = D \epsilon_{i_1 j_1 k_1} \dots \epsilon_{i_q j_q k_q},$$

qualunque sia D .

6. TENSORI ISOTROPI OTTENUTI PER COMPOSIZIONE. — Dalla composizione di una potenza di σ con una potenza di ϵ , mediante saturazione di un conveniente numero di indici comuni delle rispettive componenti, si possono ottenere dei tensori isotropi di qualsiasi ordine. Daremo qualche esempio di interesse meccanico e fisico.

7. TENSORE IDROMECCANICO DELLE PRESSIONI. — È isotropo il tensore Φ degli sforzi ⁽²⁾ che caratterizza lo stato di tensione di un sistema continuo, quando si tratta di fluidi naturali in riposo, oppure anche in movimento, purchè perfetti. Infatti si hanno in tal caso, designando p la pressione, le seguenti espressioni per le componenti cartesiane di Φ :

$$\Phi_{ik} = p \delta_{ik},$$

che rientrano nel tipo (5).

8. TENSORE DI ELASTICITÀ. — È noto che, per le deformazioni infinitesime dei solidi elastici le sei componenti $\Phi_{ik} = \Phi_{ki}$ del tensore degli sforzi (caratteristiche degli sforzi) sono funzioni lineari e omogenee delle sei componenti $\xi_{jh} = \xi_{hj}$ del tensore ξ di deformazione (caratteristiche di deformazione):

$$(10) \quad \Phi_{ik} = c_{ik, jh} \xi_{jh},$$

(1) Loc. cit., n. 12.

(2) Loc. cit., n. 20.

dove i coefficienti $c_{ik,jh}$ sono legati dalle relazioni

$$c_{ik,jh} = c_{ki,jh} = c_{ik,hj},$$

e si possono interpretare come componenti cartesiane di un tensore quadruplo che ho denominato *tensore di elasticità* ⁽¹⁾.

Questo tensore è manifestamente isotropo [n. 3] se si assume

$$(11) \quad c_{ik,jh} = A\delta_{ik} \cdot \delta_{jh} + B\delta_{ij} \cdot \delta_{kh}.$$

È interessante rilevare che, per queste, da (10) si ottiene:

$$(10') \quad \Phi_{ik} = A\delta_{ik} \Theta + B\xi_{ik},$$

essendo $\Theta = \xi_{hh}$ il coefficiente di dilatazione cubica.

Si riconoscono nelle (10') le classiche relazioni che legano gli sforzi alle deformazioni nei mezzi elastici isotropi.

9. RIFERIMENTO A COORDINATE GENERALI. — Se ci si riferisce a coordinate generali x_1, x_2, x_3 , è noto ⁽²⁾ che

$$(12) \quad a_{ik} = \frac{\partial y_{i\mu}}{\partial x_i} \frac{\partial y_{k\mu}}{\partial x_k} \quad \text{e} \quad a^{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial y_{i\mu}} \frac{\partial x_k}{\partial y_{k\mu}}$$

sono rispettivamente le coordinate covarianti e quelle contravarianti del tensore fondamentale δ , essendo

$$ds^2 = a_{ik} dx^i dx^k$$

l'espressione del quadrato dell'elemento lineare nelle coordinate generali.

Rappresentando $a = |a_{ik}|$ il discriminante della forma, il tensore ϵ in coordinate generali ha per componenti covarianti e per componenti contravarianti ⁽³⁾ rispettivamente

$$(13) \quad \epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, \\ (-1)^c \sqrt{a}, \end{cases} \quad \epsilon^{ijk} = \begin{cases} 0, \\ \frac{(-1)^c}{\sqrt{a}}, \end{cases}$$

valendo, in entrambi i casi, lo zero se i, j, k non sono tutti distinti ed essendo c pari o dispari insieme alla classe della sostituzione $\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Corrispondentemente i tensori isotropi di componenti cartesiane (5), riferiti alle coordinate generali hanno per componenti, covarianti e contravarianti:

$$(14) \quad T_{ik} = Aa_{ik}, \quad T^{ik} = Aa^{ik};$$

(1) Loc. cit., n. 28.

(2) Loc. cit., n. 33, formule (1) e (3).

(3) Loc. cit., n. 41.

e i tensori isotropi di componenti cartesiane (6) avranno per componenti covarianti e rispettivamente contravarianti:

$$(15) \quad T_{ijk} = B\epsilon_{ijk}, \quad T^{ijk} = B\epsilon^{ijk},$$

tenute presenti le (13).

Analoghe ovvie espressioni si ottengono per le componenti covarianti o contravarianti delle potenze dei tensori δ [n. 4] e ϵ [n. 5] e si comprende come si possano attribuire forma covariante oppure contravariante, oppure anche mista, alle componenti dei tensori isotropi ottenuti per composizione [n. 6].

Mi limiterò ad accennare che, in coordinate generali, il tensore isotropo degli sforzi del caso idromeccanico [n. 7] ha per componenti, rispettivamente covarianti e contravarianti:

$$\Phi_{ik} = pa_{ik}, \quad \Phi^{ik} = pa^{ik};$$

e il tensore elastico nel caso della isotropia [n. 8] ha per componenti covarianti

$$c_{ik,jh} = Aa_{ik}a_{jh} + Ba_{ij}a_{kh},$$

e per componenti contravarianti

$$c^{ik,jh} = Aa^{ik}a^{jh} + Ba^{ij}a^{kh}.$$

È manifesta la estendibilità dei concetti svolti a varietà non euclidee e a un numero qualunque di dimensioni.

Fisica. — *Un circuito a due valvole emittente treni d'onda discontinui.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. M. LA ROSA e L. SESTA.

In un circuito a due valvole il quale si presenta a prima vista come un dispositivo Mazzotto, accoppiato con un amplificatore a resistenza, così come è rappresentato dall'unito schema (fig. 1) abbiamo notato certe modalità di funzionamento che meritano di essere segnalate.

Nel modo ordinario di connessione fra il secondario S e la griglia 1 si hanno le note oscillazioni a frequenza musicale, variabili con la corrente di accensione del filamento, con la tensione di placca e con le costanti del trasformatore.

La frequenza delle oscillazioni si dimostrò indipendente dalla capacità del condensatore di accoppiamento C, che fu fatta variare da 0.001 fino a parecchi microfarad ed indipendente dalla resistenza R, finchè essa restava superiore a 15000 ohm. Con resistenze più piccole, invece, il suono

(1) Presentata nella seduta del 6 aprile 1930.

montava al decrescere di R , e tanto più rapidamente quanto più piccola diventava la R , nel tempo stesso che diveniva più debole, finchè per $R < 500$ ohm le oscillazioni non s'innescavano più. Anzi con valori di R compresi fra 5 mila e 15 mila ohm (a secondo dei valori della capacità C) si presentavano spesso interessanti irregolarità, dovute o alla produzione contemporanea di *due* suoni di differente frequenza, oppure consistenti nel passaggio ad un differente regime, costituito da una rapida successione di

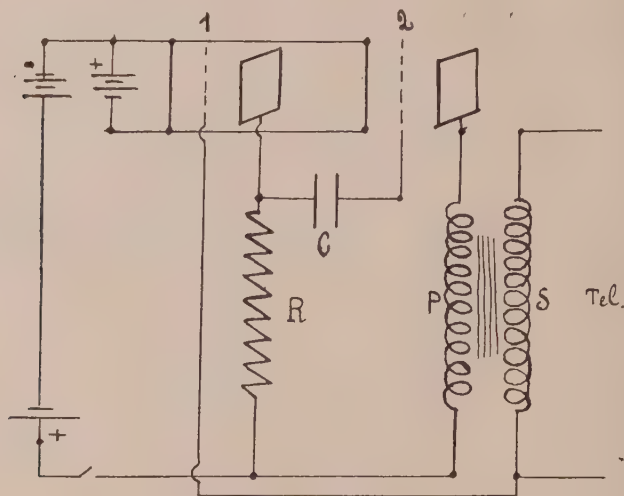


Fig. 1.

bruschi colpetti, che al telefono, derivato agli estremi del secondario, davano la sensazione di un rapido martellamento.

In complesso, nelle condizioni descritte, si poteva pensare che il circuito funzionasse proprio come lo schema Mazzotto favorito dall'accoppiamento con un amplificatore nel qual caso nulla di nuovo e di notevole esso ci avrebbe appreso.

Invertendo però il verso delle connessioni del secondario con la griglia dell'amplificatore e con il filamento, — nel qual caso lo schema Mazzotto non presenta più le oscillazioni, nè alcun altro fenomeno — si presentava nel caso nostro un tipo di « emissione discontinua » assai interessante che richiama alla mente il tipo di radiazione ammesso oggi per gli atomi ⁽¹⁾.

Si tratta dell'emissione regolarissima di brevi treni d'onda, ad intervalli di tempo costanti e facilmente regolabili.

(1) È superfluo avvertire che ci riferiamo solo ad un'analogia di apparenze, che non ha nulla a che fare con il meccanismo profondo dei fenomeni.

Al telefono altoparlante inserito agli estremi del secondario tale emissione discontinua produce curiosi effetti, come di voci di animali (il pigolio di uccelli, il canto di certi uccelli notturni, belati, ecc.).

Il fattore più importante che interviene nella determinazione dell'intervallo di tempo che decorre fra due emissioni è la capacità C del condensatore che serve all'accoppiamento delle due valvole.

Facendo crescere questa capacità a partire da 0.001 mF tale intervallo, assai breve dapprima, va regolarmente crescendo, fino a raggiungere la durata di *alcuni minuti primi* (con capacità dell'ordine di 1 mF). I valori di questi intervalli dipendono, inoltre, dalla corrente di accensione, I , del filamento, ed in misura più debole della resistenza R .

Questa come anche la I ed il potenziale di placca, influiscono — come per il regime Mazzotto — sul periodo delle oscillazioni emesse e sulla durata totale di un singolo treno; sicchè è possibile per mezzo di queste grandezze cambiare il suono e regolarne la durata.

Un mezzo efficace di regolare la frequenza del suono emesso e di allungarne la durata di emissione abbiamo trovato nella inserzione di un altro condensatore (dell'ordine di 10^3 mF) fra la placca ed il filamento della 2^a valvola, o anche agli estremi del primario del trasformatore⁽¹⁾. Avvalendoci di tutti questi mezzi, ci è stato possibile di allungare la durata dell'emissione e di accorciare quella delle pause fino a renderle uguali, o anche a rendere quelle più grandi, di queste. Ma ciò facendo il regime discontinuo descritto va diventando sempre meno stabile e finisce per tramutarsi in un nuovo regime di oscillazioni persistenti, che si distingue da quello ottenuto con i collegamenti del tipo Mazzotto, per il fatto di dare origine a frequenze alquanto più alte, corrispondenti a sibili acutissimi, o addirittura a oscillazioni ultra-udibili).

Per chiarire meglio le modalità e la genesi del fenomeno discontinuo osservato, ci siamo serviti di un oscillografo catodico Western, con l'aiuto del quale potemmo per prima cosa dimostrare che nel circuito di placca della 2^a valvola durante le pause, non si ha traccia di corrente, nè variabile, nè continua, che essa perciò si stabilisce e si spegne nella fase di emissione del suono.

Facendo agire sull'altra coppia di elettrodi dell'oscillografo una tensione alternata ausiliaria di opportuna frequenza, abbiamo potuto osservare che tale fase di emissione consta di parecchie oscillazioni, le quali, particolare importante, sono prive di smorzamento. Durante queste oscillazioni la corrente di placca è rigorosamente unilaterale, se manca la capacità derivata tra filamento e placca, e può invertirsi quando questa è inserita, tenendo le oscillazioni a divenire sempre meno dissimetriche (rispetto alla corrente O) a misura che questa capacità si fa crescere.

(1) La presenza di questo condensatore modifica il regime in un modo che ci riserviamo di studiare in seguito.

Connettendo opportunamente l'oscillografo con la griglia della seconda valvola, abbiamo osservato che il potenziale di questa alla chiusura del circuito assume un valore negativo assai rilevante: dopo di che esso comincia a decrescere lentamente (in valore assoluto) fino a raggiungere un certo valore critico di pochi volt inferiore allo zero; toccato il quale torna indietro di scatto, non al valore grande iniziale ma ad uno minore (sempre in valore assoluto), raggiunto il quale comincia di nuovo a diminuire lentamente sino al valore critico, per tornare di scatto a questo valore ultimamente

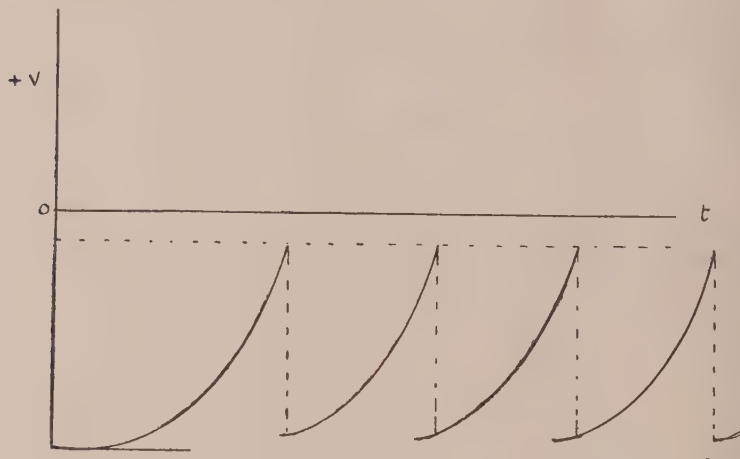


Fig. 2.

detto, e così di seguito (fig. 2). Evidentemente, è questo potenziale negativo della griglia che blocca la seconda valvola finché è superiore (in valore assoluto) ad un certo limite che dà origine al fenomeno intermittente in parola.

L'esame particolareggiato delle correnti e delle tensioni nei vari rami dello schema, necessario per la completa conoscenza del fenomeno si è presentato piuttosto difficile — malgrado il prezioso ausilio dell'oscillografo catodico — per la estrema fugacia delle apparenze da osservare, ed il loro raro ripetersi nel tempo. Nè abbiamo potuto avvalerci della registrazione fotografica, perchè impossibile ci riesci il mantenere ferme le figure di composizione (colla tensione alternativa ausiliaria) a causa della difficoltà di trovare i rapporti convenienti e *costanti* delle frequenze.

Un'altra difficoltà non lieve abbiamo incontrato nel fare agire contemporaneamente due parti diverse dello schema sull'oscillografo e comporre fra loro i due spostamenti.

Si presentano allora delle reazioni fra il circuito dell'oscillografo ed il nostro schema, che danno quasi sempre luogo alla scomparsa del regime intermittente e alla produzione di oscillazioni persistenti.

Ad ogni modo nuovi tentativi sono in corso e speriamo di raccogliere presto elementi sufficienti alla completa spiegazione dell'interessante fenomeno.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra l'equazione funzionale $f(x) \cdot f'(x) = f[f(x)]$ collegata ad un problema geometrico.* Nota II di G. BARBA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una precedente Nota dallo stesso titolo ⁽²⁾ ho stabilito che il problema di determinare quale forma debba avere l'equazione intrinseca d'una curva affinchè questa riesca simile alla propria evoluta, si traduce, analiticamente, nell'equazione funzionale:

$$(1) \quad kf(x)f'(x) = f[kf(x)]$$

e ricondotta questa ad una equazione mista, alle differenze-differenziale:

$$\Psi'(x) = \Psi(x + c)$$

ho determinato la più generale soluzione analitica della (1). Passo, in questa, ad esaminare la soluzione ottenuta in rapporto al problema geometrico iniziale.

Mi riferirò alla prima Nota con l'indicazione: (N. I).

1. Data la natura del problema che ha condotto alla (1) è necessario esaminare i valori di α pei quali, in corrispondenza, si ottengono curve reali, per un prefissato valore di c . Osserviamo, adunque, che affinchè le curve siano reali è necessario che le α , se complesse, figurino in coppie coniugate. Posto, pertanto:

$$\alpha = \mu + i\nu$$

per la (9') (N. I) deve risultare:

$$(1') \quad \begin{cases} \mu + i\nu = e^{(\mu + i\nu)c} \\ \mu - i\nu = e^{(\mu - i\nu)c} \end{cases}$$

Segue, da queste:

$$\frac{\mu + i\nu}{\mu - i\nu} = e^{2\nu ci}$$

e poichè il modulo del primo membro è unitario, necessariamente il prodotto νc dev'essere reale: dev'essere, cioè, c reale.

(1) Nella seduta del 6 aprile 1930.

(2) Questi « Rendiconti », fasc. n. 7, p. 655.

Esaminiamo, ora, i due casi possibili: $v = 0$, $v = \infty$.

1° caso): $v = 0$ (c reale, qualunque).

Per (1) è: $\mu = e^{\mu c}$, od anche:

$$c = \frac{\lg \mu}{\mu}.$$

Con referenza ad un sistema ortogonale d'assi c, μ , il diagramma della funzione $\frac{\lg \mu}{\mu}$ presenta il seguente andamento: tangente in $(0, -\infty)$ all'asse c , cresce tagliando l'asse μ nel punto uno; cresce, ancora, fino a raggiungere un massimo nel punto $\mu = e$, indi decresce fino ad essere tangente nel punto $(0, \infty)$ all'asse μ .

Si conclude, dall'esame del grafico, che per un valore $0 \leq c \leq \frac{1}{e}$ si hanno uno o due valori per μ (due coincidenti per $c = \frac{1}{e}$, per $c < 0$, un solo valore per μ).

Ne segue che, per un determinato $0 < c \leq \frac{1}{e}$ si hanno, in corrispondenza, le curve definite, attraverso i procedimenti indicati, da:

$$\Psi(x) = Ae^{\alpha_1 x} + Be^{\alpha_2 x}$$

Posto $e^{\alpha_1 x} = \chi$, l'equazione trinomia:

$$B\chi^\beta + A\chi = \Phi_{-1}(x) \quad (\beta = \alpha_2/\alpha_1)$$

determina le χ .

Se, p. es., per una particolare scelta di c , risulta $\beta = 2$, la precedente equazione diviene:

$$\Phi_{-1}(x) = A\chi + B\chi^2$$

da cui:

$$e^{\alpha_1 x} = [\pm \sqrt{A^2 + 4B\Phi_{-1}(x)} - A] / 2B.$$

Segue:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\alpha_1} \lg [\sqrt{A^2 + 4Bx} - A] - \lg 2B.$$

Per $c = \frac{1}{e}$, come s'è visto, risulta $\alpha = c$, quindi, denotando a e b costanti arbitrarie, risulta per Ψ l'espressione, non invertibile, però, per via ordinaria:

$$\Psi(x) = (a + bx) e^{\frac{x}{e}}.$$

2° caso): $v \neq 0$ (c , reale qualunque).
Il prodotto delle (1) offre, in tal caso:

$$\mu^2 + v^2 = e^{2\mu c}$$

ossia:

$$v = \sqrt{e^{2\mu c} - \mu^2}.$$

Distinguiamo, anche qui, due sottocasi:

a): $\mu = 0$. Per le (1):

$$iv = e^{ivc}$$

ossia:

$$iv = \cos vc + i \sin vc.$$

Dovrà essere, dunque:

$$\cos vc = 0, \quad \sin vc = v$$

ossia, per la 1ª: $vc = \lambda_0 \frac{\pi}{2}$ (λ_0 dispari) e per la 2ª: $v = \pm 1$, $c = \lambda_0 \frac{\pi}{2}$.

b) $\mu \neq 0$. Dovrà essere, per la realtà della v : $e^{2\mu c} > \mu^2$, ossia:

$$(2) \quad (e^{\mu c} - \mu)(e^{\mu c} + \mu) > 0.$$

Distinguiamo a secondo che c è maggiore o minore di zero.

1° caso): $c > 0$. Esaminiamo per quali valori di μ la (2) è soddisfatta. A tal uopo studieremo, separatamente, i due casi $\mu > 0$ e $\mu < 0$.

a'): $\mu > 0$. Perchè la (2) sia soddisfatta i valori di μ (positivi) devono essere tali che risulti:

$$(3) \quad e^{\mu c} - \mu > 0.$$

Riferiamoci al sistema ortogonale d'assi: y e μ . La bisettrice dell'angolo formato dalle direzioni positive dei due assi, incontra, in generale, in due punti la curva logaritmica $y = e^{\mu c}$. Eccettuati, dunque, i valori di μ compresi nell'intervallo (estremi esclusi, il superiore potendo anche essere l'∞) aventi per estremi i due valori di μ pei quali corrispondono uguali ordinate per le due linee: $y = e^{\mu c}$, $y = \mu$, pei rimanenti valori di μ (positivi, sempre) la (3) e quindi anche la (2) è soddisfatta.

Gli estremi dell'intervallo anzidetto, interdetto dalla (2) ai valori positivi di μ , sono le radici dell'equazione: $c = (\lg \mu)/\mu$ studiata in precedenza, equazione che ammette, appunto, due valori per μ quando $0 < c < \frac{1}{e}$.

Per $c = 1/e$ si ottiene la radice doppia: $\mu = e$ che risulta, così, l'ascissa del punto di tangenza delle due linee: ne segue che la (2) è verificata per quei valori di μ (positivi) diversi da e . Per $c > 1/e$ alcun valore reale verifica la $c = (\lg \mu)/\mu$, dunque la (2) è soddisfatta da qualsiasi μ , positivo.

$b')$: $\mu < 0$. La (2) sarà soddisfatta per quei valori negativi di μ i cui opposti soddisfano la:

$$(4) \quad e^{-\mu c} - \mu > 0.$$

Ora, la differenza delle ordinate della logaritmica $y = e^{-\mu c}$ e della bisettrice $y = \mu$ corrispondenti ad un medesimo valore positivo μ è positiva quando μ varia nell'intervallo (estremi esclusi): $(0, \mu_0)$, dove μ_0 è radice di: $-c = (\lg \mu)/\mu$. Dunque, in corrispondenza, la (2) è soddisfatta per μ nell'intervallo: $(-\mu_0, 0)$.

2° caso): $c < 0$.

$a'')$: $\mu > 0$. Dev'essere, per la realtà di v :

$$e^{-\mu c} - \mu > 0.$$

Per quanto in $b')$, allora, μ deve variare nell'intervallo (estremi esclusi): $(0, \mu_0)$ con μ_0 radice di: $-c = (\lg \mu)/\mu$.

$b'')$: $\mu < 0$. La (2) sarà soddisfatta da tutti quei valori negativi di μ i cui opposti verificano la:

$$e^{\mu c} - \mu > 0$$

e dunque, in sostanza, a meno del segno, si rientra nel caso già trattato: $a')$.

Riassumiamo: per la realtà di v , se:

A) $c > 0$.

I) μ dev'essere compreso in $(-\mu_0, 0)$, con μ_0 radice di: $-c = (\lg \mu)/\mu$.

II) μ può avere qualunque valore positivo, se $c > \frac{1}{e}$.

III) μ può avere qualsiasi valore positivo, eccettuato il valore $\frac{1}{e}$, se

$$c = \frac{1}{e}.$$

IV) μ dev'essere compreso in (μ_1, μ_2) , con μ_1, μ_2 radici di $c = (\lg \mu)/\mu$

$$\text{per ogni prefissato } 0 < c < \frac{1}{e}.$$

B) $c < 0$.

I) μ compreso in $(0, \mu_0)$.

II) μ può avere qualunque valore negativo, se $c < -\frac{1}{e}$.

III) μ può avere qualsiasi valore negativo, eccettuato il valore $c = -\frac{1}{e}$,

$$\text{se } c = -\frac{1}{e}.$$

IV) μ dev'essere compreso in $(-\mu_2, -\mu_1)$ per ogni prefissato

$$-\frac{1}{e} < c < 0.$$

In sostanza, raccogliendo quanto nelle precedenti discussioni, risulta che, per la realtà delle curve soluzioni del problema geometrico iniziale, si possono presentare i seguenti casi:

C) $\alpha = \mu$ (reale), con $\mu = e^{\mu c}$.

Sottocasi: C₁) $0 < c < \frac{1}{e}$: due valori per μ .

C₂) $c = \frac{1}{e}$: un valore per μ [radice doppia della $c = (\lg \mu)/\mu$].

C₃) $c < 0$: un valore per μ .

D) $\alpha = i\nu$, con $\nu = \pm 1$, se $c = \lambda_0 \frac{\pi}{2}$ (λ_0 dispari).

E) $\alpha = \mu + i\nu$, con $\nu = \sqrt{e^{2\mu c} - \mu^2}$ e μ soddisfacente alle limitazioni anzi imposte.

In conseguenza le curve reali simili alle proprie evolute si ottengono, con i procedimenti dati, invertendo le funzioni:

$$F) \quad \Psi(x) = Ae^{\alpha_1 x} + Be^{\alpha_2 x}$$

$$G) \quad \Psi(x) = Ae^{ix} + Be^{-ix}$$

$$H) \quad \Psi(x) = e^{\mu x} \left[A \sin x \sqrt{e^{2\mu c} - \mu^2} + B \cos x \sqrt{e^{2\mu c} - \mu^2} \right]$$

(con α_1, α_2 reali; A, B costanti arbitrarie e μ definito come innanzi s'è detto), ecc.

2. Controlliamo, infine, che nella (9) (N. I), sono comprese quelle soluzioni che dan luogo ai già noti esempi di curve soddisfacenti al problema.

a) Supponiamo tutte le a_n nulle ad eccezione di una. La (9) (N. I), diviene:

$$\Psi(x) = ae^{\alpha x}$$

od anche, per la posizione fatta in (N. I):

$$\Phi_{-1}(x) = ae^{\alpha x}$$

ed invertendo:

$$\Phi(x) = \frac{\lg x - \lg a}{\alpha}$$

e dunque

$$\frac{dx}{g(x)} = \frac{dx}{\alpha x}.$$

Segue:

$$g(x) = \alpha x$$

od, ancora:

$$kf(x) = \alpha x$$

ed infine:

$$\rho = f(x) = \frac{\alpha}{k} x = k_0 x$$

e ritroviamo, così, le spirali logaritmiche.

b) Diamo a c il valore $\frac{\pi}{2}$.

Per la (9) (N. I):

$$\alpha = e^{\alpha c}$$

e si hanno, così, per α i due valori $\pm i$, come risulta subito dalle relazioni d'Eulero, in conformità alle conclusioni cui s'è pervenuti al n. 2. Ne segue, quale soluzione della (7) (N. I):

$$\Psi(x) = ae^{ix} + be^{-ix}.$$

In particolare, per a e b complessi coniugati:

$$\Psi(x) = a_0 \sin(x + \gamma)$$

con a_0 e γ costanti arbitrarie. Dunque:

$$\Phi_{-1}(x) = a_0 \sin(x + \gamma).$$

Invertendo:

$$\Phi(x) = \arcsen \frac{x}{a_0} - \gamma.$$

Risulta, allora:

$$\frac{dx}{g(x)} = \frac{dx}{\sqrt{a_0^2 - x^2}}$$

e dunque:

$$f(x) = \frac{1}{k} \sqrt{a_0^2 - x^2}.$$

Si ritrovano, così, le epicicloidali e le ipocicloidali. In particolare, per $k = 1$, si ritrovano le cicloidali.

Matematica. — *Proprietà caratteristiche dell'operazione infinitesimale nel gruppo delle derivazioni.* Nota di F. SBRANA, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. GIORGI.

1. In una Nota, pubblicata recentemente in questi « Rendiconti » ⁽²⁾, mi sono occupato dell'operazione definita dal simbolo $\log \Delta$, (in cui $\Delta = \frac{\partial}{\partial t}$, t essendo una variabile reale), ed ho ottenuto per tale operazione la cosiddetta *valutazione fondamentale*, nel caso in cui l'operando sia una funzione reale $V(t)$, integrabile in ogni intervallo finito, e coincidente, per ogni t , con la derivata del proprio integrale. Il risultato conseguito è espresso dalla relazione

$$(1) \quad \log \Delta V(t) = \Delta \int_{-\infty}^t V(\tau) \log \frac{1}{t-\tau} d\tau + E V(t),$$

in cui

$$E = \int_0^{\infty} e^{-x} \log x dx = -0,577215664 \dots$$

Sempre riferendomi alla valutazione (1), mi propongo ora di stabilire due proprietà notevoli dell'operazione indicata, che si possono enunciare nel modo che segue: 1°) la *derivata funzionale* (nel senso di Pincherle) di $\log \Delta$ coincide con $\frac{1}{\Delta}$; 2°) l'operazione $\log \Delta$ costituisce l'operazione infinitesimale nel gruppo delle derivazioni, in quanto si ha

$$(2) \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Delta^s - 1}{s} V(t) = \log \Delta V(t) \quad (3).$$

2. Il Pincherle definisce come derivata funzionale di un operatore (simbolo di operazione) $f(\Delta)$, lineare e normale, il nuovo operatore, $f'(\Delta)$, che verifica la condizione

$$(3) \quad f'(\Delta) V(t) = f(\Delta) [t V(t)] - t f(\Delta) V(t) \quad (4).$$

(1) Nella seduta del 27 aprile 1930.

(2) F. SBRANA, *Sull'operazione infinitesimale nel gruppo delle derivazioni*. Presentata nella seduta del 2 febbraio 1930. Questi « Rendiconti », volume presente, pp. 364-368.

(3) Per lo studio dell'operazione $\log \Delta$, nel campo delle funzioni analitiche, si vedano i lavori (citati nella mia Nota precedente) di S. Pincherle, a cui appunto è dovuta l'introduzione dell'operazione stessa.

(4) La (3) discende, come caso particolare, da una formula che ebbi occasione di stabilire in una Nota in corso di stampa negli « Atti del Congresso Internazionale dei Matematici a Bologna » (1928); cfr. anche: F. SBRANA, *Sopra un notevole gruppo di ope-*

Si tratta dunque di provare che

$$(4) \quad \log \Delta [t V(t)] - t \log \Delta V(t) = \frac{1}{\Delta} V(t),$$

intendendo che l'operazione $\log \Delta$ sia valutata secondo la (1), e che per $\frac{1}{\Delta}$ si assuma la valutazione fondamentale. È da notare, che per poter applicare la (1) alle funzioni $V(t)$, e $t V(t)$, si richiede che queste siano definite in forma tale, da assicurare la convergenza dell'integrale a 2° membro della (1). Basta per questo che esista un numero $\alpha > 0$, per cui si abbia

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |t|^{\alpha+2} \log |t| V(t) = 0,$$

$|t|$ essendo il valore assoluto di t . D'altra parte, si verifica di solito nelle applicazioni che $V(t)$ è identicamente nulla, per $t < t_0$, ove t_0 sia un valore fisso e finito di t .

Con una qualunque di queste due ipotesi, si ottiene

$$\log \Delta [t V(t)] = \Delta \int_{-\infty}^t \tau V(\tau) \log \frac{1}{t-\tau} d\tau + E t V(t),$$

$$t \log \Delta V(t) = t \Delta \int_{-\infty}^t V(\tau) \log \frac{1}{t-\tau} d\tau + E t V(t);$$

ed essendo, identicamente,

$$t \Delta \int_{-\infty}^t V(\tau) \log \frac{1}{t-\tau} d\tau = \Delta \int_{-\infty}^t t V(\tau) \log \frac{1}{t-\tau} d\tau - \int_{-\infty}^t V(\tau) \log \frac{1}{t-\tau} d\tau,$$

il 1° membro della (4) diviene:

$$\int_{-\infty}^t V(\tau) \log \frac{1}{t-\tau} d\tau - \Delta \int_{-\infty}^t (t-\tau) V(\tau) \log \frac{1}{t-\tau} d\tau.$$

Per eseguire la derivazione indicata, si osservi che la funzione sotto il segno (nel 2° integrale) tende a zero per $\tau \rightarrow t$. Si ha quindi

$$\Delta \int_{-\infty}^t (t-\tau) V(\tau) \log \frac{1}{t-\tau} d\tau = \int_{-\infty}^t V(\tau) \log \frac{1}{t-\tau} d\tau - \int_{-\infty}^t V(\tau) d\tau.$$

ratori funzionali, questi « Rendiconti », vol. VIII, serie 6ª, 2° sem. 1928, pp. 351-355 (6). Si tratta della relazione

$$(1) \quad f(\Delta) [\Phi(t) V(t)] = \Phi \left(\frac{\partial}{\partial \Delta} + t \right) f(\Delta) V(t),$$

valida quando $\Phi(\omega)$ sia olomorfa (per ω complesso), in un intorno dell'origine. Ponendo nella (1) $\Phi(t) = t$, si ottiene senz'altro la (3) del testo.

Si trova in tal modo che il 1° membro della (4) si identifica con l'integrale

$$\int_{-\infty}^t V(\tau) d\tau,$$

e la (4) stessa risulta così dimostrata.

Allo stesso risultato si perverrebbe, interpretando opportunamente l'uguaglianza:

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{\log(\Delta + b) - \log \Delta}{b} V(t) = \frac{1}{\Delta} V(t).$$

3. Rimane ora da stabilire la relazione (2), in cui s'intende che per $\log \Delta$ e per Δ^s siano assunte le rispettive valutazioni fondamentali.

Supposto dapprima

$$0 < s < 1,$$

si ha intanto

$$\Delta^s V(t) = \frac{\Delta}{\Gamma(1-s)} \int_{-\infty}^t V(\tau) (t-\tau)^{-s} d\tau \quad (1),$$

e quindi

$$\frac{\Delta^s - 1}{s} V(t) = \frac{1}{s} \left\{ \frac{\Delta}{\Gamma(1-s)} \int_{-\infty}^t V(\tau) (t-\tau)^{-s} d\tau - V(t) \right\}.$$

Il 2° membro si presenta, per $s \rightarrow 0$, come una forma indeterminata, alla quale è applicabile la regola di L'Hôpital, poichè la funzione entro parentesi si annulla per $s = 0$. Risulta così

$$(5) \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Delta^s - 1}{s} V(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{\Delta}{\Gamma(1-s)} \int_{-\infty}^t V(\tau) (t-\tau)^{-s} d\tau \right\}.$$

Eseguito la derivazione rapporto ad s , il 2° membro diviene:

$$(6) \quad \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta}{\Gamma(1-s)} \int_{-\infty}^t V(\tau) (t-\tau)^{-s} \log \frac{1}{t-\tau} d\tau + \right. \\ \left. + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\Gamma(1-s)} \right) \Delta \int_{-\infty}^t V(\tau) (t-\tau)^{-s} d\tau \right\}.$$

D'altra parte si ha

$$\Gamma(1-s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{-s} dx,$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\Gamma(1-s)} \right) = \frac{1}{[\Gamma(1-s)]^2} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{-s} \log x dx,$$

(1) Cfr., p. es., G. GIORGI, op. cit. nella Nota precedente, § 9.

e per conseguenza

$$\lim_{s \rightarrow 0} \Gamma(1-s) = 1,$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\Gamma(1-s)} \right) = \int_0^t e^{-x} \log x \, dx = E.$$

Con ciò il limite (6), [che coincide col 2° membro della (5)], si riduce a

$$\Delta \int_{-\infty}^t V(\tau) \log \frac{1}{t-\tau} d\tau + E V(t);$$

e dalla (5) si trae

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Delta^s - 1}{s} V(t) = \Delta \int_{-\infty}^t V(\tau) \log \frac{1}{t-\tau} d\tau + E V(t).$$

Supponendo poi $s < 0$, si perviene allo stesso risultato, con un procedimento analogo, valendosi della formula

$$\Delta^s V(t) = \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_{-\infty}^t V(\tau) (t-\tau)^{-s-1} d\tau = \frac{\Delta}{\Gamma(-s+1)} \int_{-\infty}^t V(\tau) (t-s)^{-s} d\tau, \\ (s < 0).$$

Si trova così che volendo definire mediante la (2) l'operazione $\log \Delta$, sussiste per questa la (1); inversamente, l'operazione definita dalla (1) verifica la condizione (2), e per conseguenza costituisce l'operazione infinitesimale per il gruppo delle derivazioni.

Matematica. — *Un teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale.* Nota di R. CACCIOPOLI, presentata dal Corrispondente G. SCORZA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Un metodo generale di valutazione approssimata dei carichi critici per aste di tipo qualunque.* Nota di G. KRALL, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una Nota precedente ⁽²⁾, abbiamo assegnato una formola compendiosa per il calcolo del primo carico critico di un'asta semplicemente appoggiata agli estremi, sollecitata di punta da uno sforzo assiale costante.

Ci siamo posti allora, come si vede, in condizioni di estrema semplicità per essere possibilmente chiari ed anche perchè importava, non tanto d'arrivare a risultati di qualche generalità, quanto di dimostrare l'applicabilità di un metodo.

Or non sembra proprio inopportuno riprendere la questione, contemplando condizioni di vincolo più generali e condizioni di carico assiale non più costante, ma variabile secondo una legge qualunque.

Mirando a tali intenti prendiamo anche ora, naturalmente, le mosse dall'equazione specifica del problema

$$(1) \quad \frac{d^2}{d\xi^2} \left(j(\xi) \frac{d^2 w}{d\xi^2} \right) + \lambda^2 \frac{d}{d\xi} \left(\Pi(\xi) \frac{dw}{d\xi} \right) = 0,$$

nella quale, come precedentemente, si designa con w lo spostamento normale all'asse (rettilineo in condizioni naturali) di un punto qualunque di coordinata $x = \xi L$, L essendo la lunghezza dell'asta, e ξ variabile tra 0 ed 1. Ed infine, ove sia E il modulo d'elasticità del materiale, $J = J_0 j(\xi)$ il momento d'inerzia della sezione trasversale generica, $j = j(\xi)$ designando un fattore numerico funzione del posto, $\Pi(\xi) = P \cdot p(\xi)$ lo sforzo assiale, variabile come il fattore numerico $p = p(\xi)$, si ha per il parametro λ^2

$$\lambda^2 = \frac{P \cdot L^2}{E J_0}.$$

Come condizioni limiti, in conformità con le quali dovremo ricercare i valori di λ^2 (e quindi di P) per cui si hanno soluzioni della (1) (*instabili*, donde la locuzione di carico critico attribuita a detti valori di P), noi consideriamo quelle omogene del tipo: $w = 0$, $\frac{d^2 w}{d\xi^2} + n \frac{dw}{d\xi} = 0$ agli estremi, $\xi = 0$ e $\xi = 1$. Le quali, con riferimento ad appoggi, fissi per

(1) Nella seduta del 6 aprile 1930.

(2) G. KRALL, *Intorno ai carichi di punta per aste a momento d'inerzia variabile con discontinuità*, questi « Rendiconti », fascicolo 6°, p. 564.

rispetto agli spostamenti, sono del tipo più generale. Si ha precisamente, per $n = 0$ l'appoggio libero, per $n = \infty$ l'incastro, e per valori intermedi, l'appoggio elastico rispetto alle rotazioni.

Ciò posto, introduciamo la funzione di Green $G = G(\xi, \eta)$ relativa all'operatore differenziale di IV ordine, lineare ed autoaggiunto

$$L[] = \frac{d^2}{d\xi^2} \left(j(\xi) \frac{d^2}{d\xi^2} \right).$$

Tale funzione com'è noto, soddisfa: *a*) alle condizioni limiti, *b*) alla equazione $L[G] = 0$ nell'intervallo $0 \leq \xi \leq 1$ salvo nella coincidenza $\xi = \eta$, dove ha una discontinuità nella derivata terza, tale che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{d^3 G(\xi + \varepsilon, \xi)}{d\xi^3} - \frac{d^3 G(\xi - \varepsilon, \xi)}{d\xi^3} \right] = - \frac{1}{j(\xi)}.$$

Per queste proprietà, la (1) si può anche scrivere nella forma integro-differenziale, molto utile come vedremo,

$$w(\xi) = -\lambda^2 \int_0^1 G(\xi, \eta) \frac{d}{d\eta} \left(p(\eta) \frac{dw(\eta)}{d\eta} \right) d\eta.$$

Ovvero anche, integrando per parti,

$$w(\xi) = \lambda^2 \int_0^1 p(\eta) \frac{\partial G(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{dw(\eta)}{d\eta} d\eta - \left[\lambda^2 G(\xi, \eta) p(\eta) \frac{dw}{d\eta} \right]_0^1.$$

Annullandosi il termine agli estremi, per esser $G(\xi, 0) = G(\xi, 1) = 0$, oppure $\frac{dw}{d\eta} = 0$, una derivazione rispetto a ξ , ove si ponga

$$\frac{dw(\xi)}{d\xi} = \omega(\xi) \quad , \quad \frac{dw(\eta)}{d\eta} = \omega(\eta) \quad , \quad \frac{\partial^2 G(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} = \Omega(\xi, \eta),$$

porge

$$\omega(\xi) = \lambda^2 \int_0^1 p(\eta) \Omega(\xi, \eta) \omega(\eta) d\eta.$$

È questa un'equazione integrale omogenea del tipo di Fredholm, a nucleo $p(\eta) \cdot \Omega(\xi, \eta)$ — polare —, simmetrico *definito* e *positivo*. Il che risulta, premesso che sia $p = p(\eta) \geq 0$, dall'esser soddisfatta, per ogni funzione arbitraria $v = v(\xi)$, in tutto il campo continua o continua a tratti, la relazione

$$\int_0^1 \int_0^1 \Omega(\xi, \eta) v(\xi) v(\eta) d\xi d\eta > 0,$$

come si può dimostrare senza notevole difficoltà sfruttando il carattere positivo definito della $G(\xi, \eta)$.

Possiamo perciò asserire che, tutti gli autovalori di tale equazione saranno reali, positivi ed ordinabili in serie non decrescente, e che si avrà l'identità già sfruttata in analoghe circostanze

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} = \int_0^1 p(\eta) \Omega(\eta, \eta) d\eta.$$

Relativamente a codesti autovalori rileveremo alcune proprietà, importanti pei nostri intendimenti, di cui la dimostrazione che omettiamo, è facilmente perseguibile sugli schemi del calcolo delle variazioni⁽¹⁾.

Brevemente, codeste proprietà si riassumono dicendo che: α) se cresce la p , calano, o quanto meno non crescono, gli autovalori λ_i^2 e viceversa; β) se cresce la j gli autovalori crescono o quanto meno non calano e viceversa; γ) se nelle condizioni limiti $w = 0$, $\frac{d^2 w}{d\xi^2} + n \frac{dw}{d\xi} = 0$, n cresce da un valore nullo all'infinito, tutti gli autovalori crescono pur essi in modo monotono.

Talchè, dunque, ove si indichino con $\bar{\Omega}$ e $\bar{\lambda}_i^2$ gli autovalori per un sistema di cui sieno $\bar{p} \leq p$, $\bar{j} \geq j$, $\bar{n} > n$ le caratteristiche, avendosi per quanto sopra $\lambda_i^2 \leq \bar{\lambda}_i^2$, potremo scrivere a meno dell'errore $\sum_{i=2}^{\infty} (\lambda_i^{-2} - \bar{\lambda}_i^{-2})$, la relazione

$$(2) \quad \frac{1}{\lambda_1^2} \approx \frac{1}{\bar{\lambda}_1^2} + \int_0^1 \{ p(\eta) \Omega(\eta, \eta) - \bar{p}(\eta) \bar{\Omega}(\eta, \eta) \} d\eta$$

la quale, ove per le suddette \bar{p} , \bar{j} , \bar{n} si tratti di un problema più semplice, per cui $\bar{\lambda}_1^2$ sia facilmente determinabile, si traduce in una formola approssimata non spregevole.

Ora, per quanto si possa evitare il calcolo dei nuclei Ω e $\bar{\Omega}$ per derivazione delle originarie G e \bar{G} , ove si pensi al loro significato meccanico, può essere comunque desiderabile di ricondursi ad una forma più esplicita, che metta in evidenza la j e rispettivamente la \bar{j} .

All'uopo rileviamo che, se si pone $m(\xi, \xi') = j(\xi') \cdot \frac{\partial^2 G(\xi, \xi')}{\partial \xi'^2}$, si ha, per le proprietà rilevate cui soddisfa la G ,

$$\frac{\partial^2 G(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} = \Omega(\xi, \eta) = \int_0^1 \frac{\frac{\partial m(\xi, \xi')}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial m(\eta, \xi')}{\partial \eta}}{j(\xi')} d\xi'.$$

(1) Cfr. p. es. R. COURANT e D. HILBERT, *Methoden der Mathematischen Physik*, I Bd., cap. VI. Springer, Berlin, 1924.

Del che, evitando ogni calcolo, del resto perseguibile con facilità, si può darsi ragione quando si scriva Ω in funzione del lavoro di deformazione, tenendo presente che, $\frac{\partial m(\xi, \xi')}{\partial \xi}$ dà il momento flettente in ξ' provocato da un momento unitario in ξ .

Si avrà quindi, indicando con \bar{m} i momenti, senz'altro valutabili, corrispondenti ad un valore \bar{n} di n nelle condizioni limiti,

$$\frac{1}{\lambda_1^2} = \frac{1}{\bar{\lambda}_1^2} + \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \frac{p(\xi)}{j(\xi')} \left[\frac{\partial m(\xi, \xi')}{\partial \xi} \right]^2 - \frac{\bar{p}(\xi)}{\bar{j}(\xi')} \left[\frac{\partial \bar{m}(\xi, \xi')}{\partial \xi} \right]^2 \right\} d\xi d\xi'.$$

Sotto questo aspetto, che rende esplicita la $j = j(\xi)$, il calcolo non implica certo difficoltà, quando sia condotto ai lumi della statica, che ordinariamente ricorre nella pratica.

A titolo d'esempio poniamo $p = \bar{p} = 1$, $n = \bar{n} = 0$. Trattandosi allora d'una trave semplicemente appoggiata, si ha $m(\xi, \xi') = \bar{m}(\xi, \xi') = = \xi(1 - \xi')$ per $\xi' \geq \xi$ e $= \xi'(1 - \xi)$ per $\xi' \leq \xi$. Dunque $\left[\frac{dm(\xi, \xi')}{d\xi} \right]^2 = \xi'^2$ per $\xi' \leq \xi$ e $= (1 - \xi')^2$ per $\xi' \geq \xi$.

L'integrazione rispetto a ξ porge quindi

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[\frac{dm(\xi, \xi')}{d\xi} \right]^2 d\xi &= \int_0^{\xi'} \xi'^2 d\xi + \int_{\xi'}^1 (1 - \xi')^2 d\xi = \\ &= \xi'^2 \xi + (1 - \xi')^2 (1 - \xi) = \xi' (1 - \xi') = m(\xi', \xi'). \end{aligned}$$

La (2) si scrive in conformità

$$\frac{1}{\lambda_1^2} = \frac{1}{\bar{\lambda}_1^2} + \int_0^1 m(\xi', \xi') \left(\frac{1}{j(\xi')} - \frac{1}{\bar{j}(\xi')} \right) d\xi',$$

che è l'espressione assegnata nella Nota precedente.

Chimica. — *La struttura cristallina dell'idrogeno solforato e dell'idrogeno seleniato*⁽¹⁾. Nota II di G. NATTA, presentata⁽²⁾ dal Socio G. BRUNI.

ESAME COI RAGGI X DELL'IDROGENO SELENIATO.

L'idrogeno seleniato solidifica a circa -66° ⁽³⁾. Nulla è indicato nella letteratura riguardo alla sua densità allo stato solido ed alla sua struttura cristallina.

Con lo stesso dispositivo, impiegato per l'esame coi raggi X col metodo delle polveri dell'acido solfidrico⁽⁴⁾, ho esaminato ora l'idrogeno seleniato. Quest'ultimo, ottenuto allo stato gassoso per reazione del seleniuro di alluminio « Kahlbaum » con acqua, dopo essere stato preessicato su cloruro di calcio fu fatto solidificare in sottile velo sul capillare, raffreddato con aria liquida, del recipiente di Dewar collegato allo spettrografo. Alla temperatura dell'esperienza l'idrogeno seleniato è molto stabile ed anche dopo qualche ora di esposizione ai raggi X, pur essendo a contatto con l'aria, non ha subito alcuna decomposizione. Ho utilizzato per il calcolo un fotogramma ottenuto con le radiazioni di un anticatodo di rame di un tubo Philips ad elettroni. I valori ottenuti sono raccolti nella tabella allegata.

Tutte le linee del fotogramma dell'idrogeno seleniato si ordinano, analogamente a quelle dell'idrogeno solforato, per una struttura cubica, e l'ordinamento della tabella è quello che corrisponde alla cella elementare minima. Come lato della cella assumiamo, per la correzione da applicarsi per l'opacità del preparato, il valore limite medio dei valori sperimentali per angoli di riflessione tendenti a 180° .

Risulta così per l'idrogeno seleniato solido a -170° un lato della cella elementare di $6.020 \pm 0.004 \text{ \AA}$, un volume della cella di $218.2 \cdot 10^{-24} \text{ cc}$. La densità a -170° , ammettendo che la cella contenga 4 molecole H_2Se , risulta 2.456.

Non era sinora nota la densità dell'idrogeno seleniato allo stato solido. Quella allo stato liquido sarebbe, secondo De Forcrand e Fonzés-Diacon⁽⁵⁾, 2.12 alla temperatura di ebollizione (-42°).

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale del R. Politecnico di Milano.

(2) Nella seduta del 6 aprile 1930.

(3) Secondo OSZEWSKI (« Bull. Internat. Acad. Kracovie », febbraio 1890) la temperatura di solidificazione dell' H_2Se è -68° ; secondo DE FORCRAND e FONZÉS-DIACON è -64° (« Compt. rend. », 134, p. 171; « Ann. Chim. Phys. », 7, 26, p. 247).

(4) G. NATTA, *La struttura cristallina dell'idrogeno solforato e dell'idrogeno seleniato*. Nota I (in corso di pubblicazione), « Rend. Accad. Naz. Lincei », 1930.

(5) DE FORCRAND e FONZÉS-DIACON, loc. cit.

Idrogeno seleniato — Cu/ant:

$\text{sen} \frac{\theta}{2}$	K	d	hkl	a	Inten- sità osser- vata	Intensità calcolata per una struttura:	
						ionica	non ionica
0.2080	β	3.338	111	5.780	d	—	—
0.2264	α	3.401	111	5.890	mf	959	855
0.2603	α	2.958	002	5.916	m	622	492
0.3312	β	2.097	202	5.935	d	—	—
0.3679	α	2.093	202	5.925	mf	879	879
0.3882	β	1.790	113	5.940	d	—	—
0.4068	β	1.708	222	5.922	dd	—	—
0.4278	α	1.800	113	5.968	ff	1493	1332
0.4475	α	1.721	222	5.962	m	479	379
0.5163	α	1.492	400	0.968	d	310	310
0.5607	α	1.374	133	5.987	f	1141	1017
0.5750	α	1.339	240	5.988	f	1114	880
0.6293	α	1.224	224	5.995	f	1017	1017
0.6670	α	1.154	333	5.996	f	319	284
			115	5.996		957	854
0.7255	α	1.061	440	6.000	d	440	417
0.7597	α	1.014	351	6.000	f	1684	1502
0.7700	α	1.000	600	6.000	m	207	164
			442	6.000		830	655
0.8100	α	0.9505	260	6.008	d	787	787
0.8392	α	0.9175	335	6.017	d	760	677
0.8490	α	0.9071	226	6.018	d	751	594
0.9137	α	0.8413	551	6.020	d	698	622
			117	6.020		698	622

DISCUSSIONE SUL TIPO DI STRUTTURA.

Nella tabella precedente ed in quella pubblicata nella Nota I⁽¹⁾ si osserva che tutte le linee presenti nei fotogrammi corrispondono a faccìe aventi indici o tutti pari o tutti dispari. Dato il piccolissimo potere dispersivo per i raggi X degli atomi di idrogeno, si può a priori ritenere che la loro

(1) G. NATTA, loc. cit.

posizione influisca ben poco sull'intensità delle singole riflessioni dipendente prevalentemente dalla posizione degli atomi di solfo o di selenio. Per la mancanza di riflessioni corrispondenti a faccie ad indici misti si può ritenere che le posizioni degli atomi del metalloide corrispondano ad un reticolo tipo faccie centrate.

Rimane da stabilire la posizione degli atomi di idrogeno. Quattro sono i tipi di struttura sinora noti per composti cubici del tipo AB_2 aventi celle contenenti 4 molecole⁽¹⁾ e precisamente il tipo fluorite, quello carburo di calcio, il tipo pirite e quello molto simile a quest'ultimo dell'anidride carbonica e dell'ossido di azoto solidi.

Le posizioni degli atomi nelle celle elementari dei composti dei tipi su indicati sono definite dalle seguenti coordinate:

Tipo Fluorite (Gruppo spaziale: O_h5):

$$A = (0 \ 0 \ 0, \ 0 \ 1/2 \ 1/2, \ 1/2 \ 0 \ 1/2, \ 1/2 \ 1/2 \ 0)$$

$$B = \pm (1/4 \ 1/4 \ 1/4, \ 1/4 \ 3/4 \ 3/4, \ 3/4 \ 1/4 \ 3/4, \ 3/4 \ 3/4 \ 1/4)$$

Tipo Pirite (Gruppo spaziale T_h6):

$$A = (0 \ 0 \ 0, \ 0 \ 1/2 \ 1/2, \ 1/2 \ 0 \ 1/2, \ 1/2 \ 1/2 \ 0)$$

$$B = \pm (u \ u \ u, \ 1/2 + u \ 1/2 - u \ u, \ 1/2 - u \ u \ 1/2 + u, \\ u \ 1/2 + u \ 1/2 - u)$$

Tipo CaC_2 (Gruppo spaziale: O_h4):

$$A = (1/4 \ 1/4 \ 1/4, \ 1/4 \ 3/4 \ 3/4, \ 3/4 \ 1/4 \ 3/4, \ 3/4 \ 3/4 \ 1/4)$$

$$B = (u \ u \ u, \ u \bar{u} \ \bar{u}, \ \bar{u} \ u \ \bar{u}, \ \bar{u} \ \bar{u} \ u)$$

$$(1/2 - u \ 1/2 - u \ 1/2 - u, \ 1/2 - u \ 1/2 + u \ 1/2 + u, \\ 1/2 + u \ 1/2 - u \ 1/2 + u, \ 1/2 + u \ 1/2 + u \ 1/2 - u).$$

Il tipo CO_2 non differisce da quello della pirite che per il valore del parametro, che risulta all'incirca eguale ad $1/2 - u_1$, chiamando con u_1 quello che si calcola dalla posizione dello zolfo nella pirite.

Il calcolo del fattore di struttura risulta nel caso dell'idrogeno seleniato ben poco utile per la determinazione del tipo di struttura, per l'elevato numero atomico del selenio rispetto all'idrogeno. Per quanto riguarda la posizione degli atomi del metalloide i quattro tipi precedentemente indicati si equivalgono, in quanto corrisponde per tutti i tre tipi su indicati ad un reticolo tipo faccie centrate. Possiamo però valerci, per individuare la struttura

(1) « Zeitschr. f. Krist. », Strukturbericht 1913-1926, p. 148.

più probabile, delle relazioni di isomorfismo e di morfotropia, che sono in diretta dipendenza con le dimensioni o con la polarizzabilità degli atomi o degli ioni costitutivi del reticolo.

Il tipo di struttura della fluorite, che possiede i numeri di coordinazione 8 e 4, si presenta prevalentemente per quei composti di formula AB_2 , nei quali B ha diametro minore di A. Goldschmidt difatti osserva che prevale per rapporti tra il raggio di A e quello di B compresi tra i seguenti limiti: $0.73 < \frac{RA}{RB} < 4.45$ ⁽¹⁾.

Si ritrova perciò la struttura fluorite nel solfuro di litio ed in quello di sodio e per il piccolo diametro atomico dell'idrogeno si può prevedere che debba presentarsi pure per l'idrogeno solforato.

Secondo il Goldschmidt le strutture tipo CO_2 , CaC_2 e FeS_2 si devono ritenere strutture non ioniche ma reticoli di molecole. Pur non condividendo interamente le ipotesi di Goldschmidt, in quanto ritengo che uno stesso tipo di struttura pur presentandosi in certi casi per composti non ionici possa presentarsi in altri casi per composti ionici, ciò non di meno ritengo che i tipi su indicati corrispondano prevalentemente a quei composti del tipo AB_2 nei quali esistano dei legami (quali la valenza) tra i due atomi B. Difatti gli atomi di carbonio del carburo di calcio come quelli di solfo della pirite sono raggruppati in gruppi di 2 atomi tra loro vicinissimi, tanto che questi tipi di struttura si possono ricondurre al tipo cloruro di sodio attribuendo al radicale C_2 od a quello S_2 la posizione media dei due atomi di carbonio o di zolfo vicini.

Difficilmente perciò si potrebbe supporre che il tipo di struttura della pirite e del carburo di calcio possano presentarsi per composti AB_2 , nei quali B sia un metallo monovalente. Il tipo di struttura della fluorite appare perciò come il più probabile sia per l'idrogeno solforato che per quello seleniato.

È interessante osservare la grande analogia che sussiste nelle dimensioni della cella elementare tra idrogeno solforato e solfuro di litio. Secondo Claassen ⁽²⁾ quest'ultimo presenta la struttura della fluorite ed una cella avente, alla temperatura ordinaria, un lato di 5.70 \AA , che è soltanto lievemente inferiore a quello dell'idrogeno solforato ($a = 5.78 \text{ \AA}$ a -170°). Tenendo conto della contrazione termica i volumi molecolari dell'idrogeno solforato e del solfuro di litio allo stato solido risultano praticamente identici.

L'ipotesi che i due idruri qui studiati posseggano una struttura tipo fluorite viene confermata dall'esame delle intensità delle linee dei fotogrammi.

(1) V. M. GOLDSCHMIDT, *Geochemische Verteilungsgesetze der Elemente*, «Norske Vid. Akad. Oslo», VIII (1927).

(2) A. CLAASSEN, «Rec. d. Trav. Chim. Pays-Bas», 44, p. 790 (1925).

Tutti i dati, come meglio si può osservare dalla figura, concordano perciò nell'attribuire all'idrogeno solforato una struttura ionica.

Per l'idrogeno seleniato le intensità calcolate secondo le due ipotesi sono poco diverse per il maggiore numero atomico del selenio. Si ha però un accordo leggermente migliore per la struttura ionica. Ad es. la linea 240 ha intensità intermedia e vicinissima a quelle delle 131 e 224, mentre per una struttura non ionica dovrebbe essere più debole. La 222 per una struttura non ionica dovrebbe possedere un'intensità pressapoco eguale a quella della 400, mentre nei fotogrammi è notevolmente più forte.

Anche le analogie nelle dimensioni reticolari dimostrano che l'idrogeno seleniato ha una struttura ionica come quello solforato. Infatti dalle celle di detti composti si calcola una differenza tra i raggi del selenio e dello zolfo di 0.12 \AA , solo di poco inferiore a quella (0.17 \AA) che si ha secondo Goldschmidt⁽¹⁾ tra gli ioni negativi selenio e zolfo bivalenti.

RIASSUNTO.

I. — Sono stati esaminati coi raggi X, col metodo delle polveri e con uno speciale spettrografo adatto per basse temperature, l'idrogeno solforato e quello seleniato solidi.

II. — L'idrogeno solforato possiede a -170° una cella elementare cubica, avente un lato di $5.778 \pm 0.003 \text{ \AA}$ ed un volume di $192.8 \cdot 10^{-24} \text{ cc.}$, contenente 4 molecole H_2S . La densità calcolata risulta 1.166.

III. — L'idrogeno seleniato possiede a -170° una cella cubica, avente un lato di $6.020 \pm 0.005 \text{ \AA}$, un volume di $218.2 \cdot 10^{-24} \text{ cc.}$, contenente pure 4 molecole. La densità calcolata risulta 2.456.

IV. — Tanto l'idrogeno solforato quanto quello seleniato posseggono analogo reticolo tipo fluorite (gruppo spaziale: O_h5). È prevedibile che esista tra questi due composti, date le analogie nella struttura e nelle dimensioni reticolari, un perfetto isomorfismo.

5. — Dal calcolo delle intensità delle linee dei fotogrammi dell'idrogeno solforato e di quello seleniato si ha un migliore accordo con le intensità sperimentali supponendo per i due composti una struttura ionica.

(1) V. M. GOLDSCHMIDT, *Geochemische Verteilungsgesetze der Elemente*, « Norske Vid. Akad. Oslo », VII (1926).

Chimica (Cristallografia chimica). — *La struttura chimica e cristallina di alcuni nitriti complessi*⁽¹⁾. Nota di A. FERRARI e C. COLLA, presentata⁽²⁾ dal Socio G. BRUNI.

Come abbiamo comunicato alla Sezione Lombarda della Società di Chimica⁽³⁾ lo studio della struttura cristallina di alcuni nitriti complessi, che servono come reazioni di riconoscimento per via microchimica di alcuni elementi, ha messo in evidenza un esempio di isomorfismo inatteso ed interessante.

I nitriti tripli di potassio, piombo, rame, e di potassio, piombo, nichelio sono, per la loro forma cristallina cubica facilmente riconoscibile al microscopio, usati per identificare questi elementi. Il nitrito triplo di piombo, potassio e rame, è stato preparato trattando nei rapporti voluti acetato di rame e acetato di piombo, con eccesso di nitrito di potassio in soluzione leggermente acetica. Il prodotto che si ottiene costituisce una polvere cristallina nera⁽⁴⁾ che all'analisi ci ha dato:

	Calcolato per $K_2PbCu(NO_2)_6$	Trovato
potassio	12.51	12.75
rame	10.17	9.98
piombo	33.14	32.78
NO_2	44.16	44.36

In modo analogo si prepara il nitrito triplo di potassio, piombo e nichelio che si presenta di colore giallo bruno⁽⁵⁾. L'analisi di questo prodotto ci ha dato:

	Calcolato per $K_2PbNi(NO_2)_6$	Trovato
potassio	12.61	12.94
nichelio	9.46	9.06
piombo	33.41	32.89
NO_2	44.51	44.25

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale e Chimica-fisica della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 6 aprile 1930.

(3) Il 26 marzo 1930. Vedi «Giorn. Chim. Ind. Appl.», 12 (1930), 142.

(4) PRZIBYLLA, «Z. anorg. Chem.» 15 (1897), 429.

(5) PRZIBYLLA, loc. cit., p. 432.

TABELLA I.

K ₂ PbNi(NO ₂) ₆		K ₂ PbCo(NO ₂) ₆		K ₂ PbCu(NO ₂) ₆		h ₁ h ₂ h ₃	Costante <i>a</i> per		
$d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}$	Intensità	$d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}$	Intensità	$d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}$	Intensità		K ₂ PbNi(NO ₂) ₆	K ₂ PbCo(NO ₂) ₆	K ₂ PbCu(NO ₂) ₆
3.134	d	3.105	d	3.135	d	311	10.40	10.30	10.40
2.591	dd	2.592	d	2.603	d	400 (β)	10.36	10.36	10.41
2.591	f	2.590	f	2.605	f	400	10.36	10.36	10.42
2.403	d	—	—	—	—	331	10.48	—	—
2.348	f	2.323	f	2.337	f	420	10.51	10.39	10.46
2.145	f	2.122	f	2.143	f	422	10.51	10.40	10.50
2.028	dd	2.008	dd	2.013	dd	511-333	10.54	10.43	10.47
1.846	d	1.830	d	1.855	d	440	10.45	10.36	10.50
1.786	d	—	—	—	—	531	10.565	—	—
1.756	d	1.734	d	1.756	d	600	10.53	10.40	10.53
1.670	m	1.650	m	1.660	m	620	10.57	10.43	10.50
1.611	d	—	—	1.610	dd	533	10.565	—	10.56
1.595	dd	1.574	dd	1.588	dd	622	10.575	10.44	10.53
1.558	dd	1.532	dd	1.550	dd	631	10.57	10.40	10.51
1.522	dd	1.495	dd	1.516	dd	444	10.54	10.36	10.50
1.483	dd	—	—	—	—	551	10.58	—	—
1.465	dd	—	—	—	—	640	10.57	—	—
1.415	ff	1.391	ff	1.411	ff	642	10.59	10.41	10.55
1.379	md	1.356	md	1.360	d	731	10.598	10.42	10.45
1.310	d	1.303	d	1.318	dd	800	10.48	10.42	10.55
1.285	d	1.265	d	1.279	d	733	10.52	10.36	10.46
1.248	m	1.228	m	1.245	m	822-660	10.59	10.43	10.56
1.224	dd	1.205	dd	—	—	750	10.53	10.36	—
1.216	dd	1.192	dd	1.211	dd	555	10.54	10.33	10.49
1.183	m	1.165	m	1.175	m	840	10.58	10.42	10.51
1.156	dd	1.142	dd	1.153	dd	753	10.54	10.40	10.50
1.130	m	1.111	m	1.128	m	664	10.60	10.43	10.58
1.112	d	1.093	d	1.107	dd	754-851	10.54	10.365	10.50
1.084	d	1.074	d	1.080	d	844	10.62	10.52	10.58
1.062	dd	1.049	dd	—	—	932	10.50	10.42	10.47
1.042	f	1.023	f	1.040	f	771	10.57	10.44	—
						10.00-860	10.42	10.23	10.40
						10.20-862	10.62	10.44	10.61

Mescolando una soluzione di nitrato di piombo con nitrato di cobalto ed un eccesso di nitrito di potassio precipita un nitrito triplo di potassio, piombo e cobalto bruno scuro che analizzato come i precedenti diede:

	Calcolato per $K_2PbCo(NO_2)_6$	Trovato
potassio	12.60	13.65
cobalto	9.50	9.17
piombo	33.39	33.09
NO_2	44.49	45.06

Questo composto preparato solo di recente da Cuttica e Paciello⁽¹⁾ è interessante, perchè è uno dei pochi complessi conosciuti del cobalto bivalente. La struttura monometrica di questi nitriti tripli è stata confermata dall'esame röntgenografico.

Il calcolo dei fotogrammi di Deybe di questi tre composti è riassunto nella tabella I.

Le costanti che si deducono da questa tabella sono:

$K_2PbNi(NO_2)_6$	$a = 10.55 \pm 0.02 \text{ \AA}$
$K_2PbCo(NO_2)_6$	$a = 10.40 \pm 0.02 \text{ »}$
$K_2PbCu(NO_2)_6$	$a = 10.52 \pm 0.02 \text{ »}$

La densità sperimentale del nitrito triplo di potassio, piombo e nichelio è 3.34 da cui si deduce che nella cella elementare sono contenute $3.81 \sim 4$ molecole.

Con questo numero di molecole si calcolano le densità:

$$K_2PbNi(NO_2)_6 = 3.50 \quad K_2PbCo(NO_2)_6 = 3.66 \quad K_2PbCu(NO_2)_6 = 3.56$$

Il perfetto isomorfismo dei tre nitriti tripli precedenti non ha nulla di singolare, perchè è noto che il nichelio e il cobalto sono strettamente isomorfogeni o vicarianti e che il rame bivalente pur essendolo assai meno ha una tendenza a questo comportamento essendo il suo diametro vicino a quello del cobalto e del nichelio.

Il risultato meno facilmente prevedibile e più interessante al quale siamo giunti nello studio di questi nitriti tripli è la grande analogia della loro forma cristallina col cobaltinitrito potassico.

Il cobaltinitrito è stato preparato trattando un sale di cobalto in soluzione acetica con un eccesso di nitrito potassico ed ha dato all'analisi i seguenti risultati:

$$\text{cobalto} = 12.47 \quad \text{potassio} = 25.21 \quad NO_2 = 57.36 \quad H_2O = 4.96$$

(1) « Gazz. Chim. Ital. », 52, 1, 141; 53, 1, 185-189.

mentre quelli calcolati per $K_3Co(NO_2)_6 \cdot 1 \frac{1}{2} H_2O$ sono:

cobalto = 12.30 potassio = 24.47 $NO_2 = 57.59$ $H_2O = 5.35$.

Il fotogramma del cobaltinitrito potassico calcolato nella tabella II dimostra infatti che esso presenta una struttura cubica dello stesso tipo dei nitriti tripli precedenti.

TABELLA II.

$d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}$	Intensità	$h_1 h_2 h_3$	a	$d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}$	Intensità	$h_1 h_2 h_3$	a
2.970	d	—	—	1.516	d	631	10.28
2.561	d	400 (β)	10.25	1.439	dd	640	10.37
2.560	f	400	10.24	1.380	ff	642	10.325
2.307	f	420	10.32	1.292	d	800	10.34
2.098	f	422	10.28	1.217	m	822	10.33
1.982	dd	511-333	10.30	1.156	m	840	10.34
1.816	d	440	10.27	1.115	m	941-556	10.34
1.748	dd	531	10.34			761	—
1.634	m	620	10.33	1.018	f	10.00-860	10.18
						10.20-862	10.39

Dalla tabella II si ricava che la cella elementare del cobaltinitrito potassico è un cubo di lato $10.32 \pm 0.02 \text{ \AA}$ contenente quattro molecole.

La relazione di struttura cristallina fra questo composto e i nitriti tripli è quindi strettissima. La formola comunemente ammessa pel cobaltinitrito potassico è: $2K_3Co(NO_2)_6 \cdot 3H_2O^{(1)}$. Per spiegare il suo isomorfismo coi nitriti tripli si deve ammettere innanzi tutto che le molecole d'acqua costituiscano dell'acqua di impregnazione (zeolitica) non direttamente legata alla molecola principale. Conseguentemente il rapporto di due molecole di cobaltinitrito per tre d'acqua si deve intendere come il limite di saturazione dei vuoti del reticolo da parte dell'acqua. Questo spiega perchè diversi autori hanno trovato nel cobaltinitrito quantità d'acqua talvolta assai inferiori, mentre non si hanno analisi con percentuali d'acqua superiori⁽²⁾.

L'isomorfismo del cobaltinitrito coi nitriti tripli rivela inoltre nel modo più sicuro la struttura di questi ultimi. Essendo indiscussa nel cobaltinitrito l'esistenza di un ione $Co(NO_2)_6'''$, l'analogia della forma cristallina

(1) « Gmelin-Kraut's. Handbuch an. Chem. », V. 1º, 7. ediz., p. 518.

(2) « Gmelin-Kraut's », loc. cit.

porta ad ammettere nei nitriti tripli l'esistenza di un ione $\text{Cu}(\text{NO}_2)_6'''$, oppure di un ione $\text{Pb}(\text{NO}_2)_6'''$ e conseguentemente di due K' e un Pb'' o di due K' e un Cu'' . L'analogia di formola chimica richiesta dall'isomorfismo del cobaltinitrito coi nitriti tripli si può spiegare con due ipotesi:



A favore della prima ipotesi sta il fatto che un sale di piombo, in presenza di una forte quantità di nitrito, dà un liquido giallo nel quale il piombo non precipita con ioni Cl' e Br' nelle condizioni in cui una soluzione senza nitrito separa cloruro o bromuro di piombo. Questo potrebbe derivare dalla presenza del piombo sotto forma di anione complesso; però anche senza questa ammissione la diminuzione del grado di dissociazione derivante dalla presenza del nitrito, sale di un acido debole, dà ragione di questo fatto. A favore della seconda ipotesi sta la maggiore tendenza a formare complessi del cobalto, del nichelio e del rame rispetto al piombo. Anche le considerazioni dei raggi ionici stanno a favore della seconda spiegazione. L'isomorfismo dei nitriti tripli con il cobaltinitrito, che è tra i più perfetti essendo lo scarto tra gli spigoli delle due celle poco superiore all'1 %, si spiega perfettamente con l'ammissione della sostituzione del potassio col piombo essendo secondo Goldschmidt il raggio dell'ione $\text{K}' = 1.33 \text{ \AA}$; quello dell'ione $\text{Pb}'' = 1.32 \text{ \AA}$. La sostituzione di un ione K' con un Cu'' , con un Ni'' o con un Co'' dovrebbe portare invece una variazione assai più grande della costante reticolare essendo il raggio di questi ioni bivalenti rispettivamente di 0.75 \AA ; 0.80 \AA ; 0.83 \AA . Nell'ione complesso $\text{Me}(\text{NO}_2)_6'''$ si avrà allora la sostituzione di un Co''' con Cu'' , Ni'' o Co'' che differiscono dal cobalto trivalente assai meno di un $\text{Pb}''^{(1)}$ comunque è facile ammettere che la sostituzione nell'ione complesso dell'atomo metallico che ne costituisce il centro con altro di raggio alquanto diverso non ne vari notevolmente la grandezza, essendo l'anione un aggregato a sè che per la sua complessità poco risente della variazione di grandezza del solo atomo centrale. Appare quindi dimostrato che la struttura dei nitriti tripli considerati debba considerarsi:



come era stato ammesso da alcuni autori.

La determinazione delle posizioni degli atomi sarà forse oggetto di una ulteriore pubblicazione come pure l'esame di altri composti di questo tipo,

(1) Il raggio del Co''' non è noto con esattezza, ma è certo più piccolo di quello del Cu'' , Ni'' , e Co'' e quindi assai minore del raggio del Pb'' che come abbiamo visto è più grande dei tre precedenti con bivalenti.

per ora già la conoscenza delle costanti geometriche della cella elementare, rilevano importanti cognizioni dal punto di vista chimico, quale la mancanza di acqua nel cobaltinitrito e la sostituzione di atomi a valenza diversa senza alterazione della forma cristallina.

Riassumendo: Si dimostra che i nitriti tripli del potassio e del piombo, rispettivamente col rame, col nichel e col cobalto sono monometrici e contengono nella cella elementare quattro molecole. Le costanti e le densità calcolate sono:

$K_2PbNi(NO_2)_6$	$a = 10.55 \text{ \AA}$	densità 3.50
$K_2PbCo(NO_2)_6$	$a = 10.49 \text{ »}$	» 3.66
$K_2PbCu(NO_2)_6$	$a = 10.52 \text{ »}$	» 3.56.

Si dimostra che anche il reticolo del cobaltinitrito potassico è cubico dello stesso tipo dei precedenti e con dimensioni assai simili $a = 10.32 \text{ \AA}$. La densità calcolata è 2.73.

Dalla grande analogia di queste celle si deduce che il cobaltinitrito potassico non ha acqua di cristallizzazione come si è ritenuto fino ad oggi. L'acqua che si ritrova nell'analisi deve essere ritenuta acqua di impregnazione del reticolo, non legata alla molecola principale.

Si dimostra che i nitriti tripli considerati contengono un ione $Me(NO_2)_6^{'''}$ dove Me è con grande probabilità il rame, il nichelio, il cobalto.

Mineralogia. — *Bianchite, nuovo minerale* ⁽¹⁾. Nota di C. ANDREATTA, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. DAL PIAZ.

Da parecchio tempo mi sto occupando di ricerche su alcuni solfati idrati naturali e in modo particolare sul loro comportamento a temperature diverse e già in una prima Nota ho trattato della Pickeringite da me raccolta nella miniera di Canezza in Valle del Fersina (Trentino) ⁽³⁾.

Mentre cercavo di raccogliere e di procurarmi nuovo materiale per la continuazione di tali studi, ho potuto avere a disposizione per gentile offerta del laureando Sergio Morgante, vari prodotti di alterazione della miniera di Raibl, da lui portati nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Padova. Il signor Morgante aveva raccolto, assieme al dottor Anelli, questo materiale in un'escursione fatta alla regione delle miniere di Raibl (Predil), allo scopo di ricerche sul terreno e raccolta di campioni per uno studio petrografico sui porfidi di Riofreddo (Kaltwasser).

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Padova.

(2) Nella seduta del 6 aprile 1930.

(3) ANDREATTA CIRO, *Pickeringite di Canezza (Trentino)*. « Studi Trentini di Scienze Naturali », Trento, 1930, fasc. 1°.

Fra i materiali in questione, assieme ai comuni prodotti di alterazione dei giacimenti a solfuri misti, ho notato, su goslarite, tracce di un minerale bianco, che per alcuni caratteri, nettamente distinti da quelli degli altri prodotti che lo accompagnano, ha attratto particolarmente la mia attenzione.

Simile in apparenza alla goslarite, il minerale si differenziava da questa e dai vetrioli analoghi, per essere quasi uniassico. Da saggi qualitativi è risultato trattarsi di un solfato di ferro e zinco. Per la scarsità del materiale a disposizione, mi sono recato a Raibl, assieme al sig. Morgante, per nuove ricerche, che ci permisero di raccogliere nuova goslarite (che sta studiando Morgante), e sufficiente quantità del minerale in questione.

Da uno studio più completo è risultato trattarsi di una *nuova specie* dei solfati idrati naturali, alla quale, in omaggio al mio Maestro prof. Angelo Bianchi, propongo sia dato il nome di *bianchite*.

La bianchite proviene da una grotta artificiale della miniera di Raibl, e precisamente dal sistema di scavi chiamato della *Witriolwand*. La mineralizzazione utile di Raibl è in relazione a tre principali sistemi di faglie chiamati: *Abendblatt e Morgenblatt, Aloisiblatt, Strugglische System*. È in quest'ultimo, e precisamente nella zona mineralizzata prossima alla superficie, sul versante orientale del Piccolo Monte del Re (Klein Königsberg), che si trova la Witriolwand. Gli scavi che si raggruppano sotto questo nome sono dati da una serie numerosa di grotte aperte anticamente col metodo delle caverne e poi abbandonate. In una di queste grotte, dove la mineralizzazione è abbastanza rilevante e dove abbondano sulle pareti i prodotti di alterazione dei minerali utili, ad una altitudine di circa 1000 metri, fu raccolta da noi, nella recente escursione, la bianchite.

Essa si trova in piccole masse concrezionate o in croste bianchiccie, minutamente cristalline, sulle pareti e sul pavimento della caverna, assieme a *limonite* in croste pulverolenti, e ad altri idrossidi di ferro zinco e piombo. Spesso è accompagnata da altri comuni solfati idrati, quali, *melanterite* più o meno zincifera, in eleganti stalattiti di un bel color verde, o in incrostazioni cristalline, *gesso* in ciuffetti di esili cristalli, *goslarite, idronzincite*, ecc..

La bianchite pura, costituisce, sulle croste, delle masserelle bianche che al microscopio si risolvono in un minuto aggregato uniforme. Con l'ausilio del microscopio fu scelto accuratamente il materiale di cui mi sono servito per tutte le determinazioni. Alla superficie degli aggregati, qualche volta, si osserva una sottile patina giallognola, dovuta ad un velo di ossidazione del ferro ferroso e a tracce di sostanza amorfa ocracea. Nella bianchite si trovano poi sempre inclusi rari e microscopici cristallini di gesso. La bianchite è solubile facilmente in acqua fredda, cosicchè operando rapidamente, con una minima quantità di acqua, filtrando e lavando immediatamente, il poco gesso presente viene sciolto solo in minima parte, come lo dimostrano le tracce di calcio trovate.

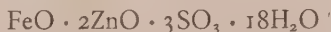
L'analisi (I) eseguita su una porzione di materiale puro, completamente bianco, poco frantumato e lasciato per un breve periodo di tempo (24 ore) all'aria ambiente non troppo secca ed a circa 15-18°, ha dato i seguenti risultati:

	I	II	Rapporti molecolari		III
FeO.	8,84	8,94	0,1245	1,00	8,99
Fe ₂ O ₃	—	—	—	—	—
CaO.	tracce	—	—	—	—
ZnO.	20,01	20,22	0,2485	1,99	20,37
MgO.	tracce	—	—	—	—
SO ₃	30,13	30,47	0,3805	3,05	30,06
H ₂ O.	39,92	40,37	2,2409	18,01	40,58
Residuo insolubile .	1,02	—	—	—	—
	99,93	100,00			100,00

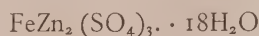
Il ferro è stato determinato ponderalmente come Fe₂O₃, e per titolazione con permanganato di potassio, ottenendo nei due casi la stessa percentuale. Ciò rivela che il materiale scelto non ha subito processo di ossidazione. L'acqua, ottenuta per determinazione diretta, concorda con la percentuale ottenuta per differenza di peso fra la perdita totale a 1000°, corretta per l'ossidazione del ferro ferroso, e la percentuale dell'SO₃ pesata.

Il residuo insolubile, all'osservazione microscopica, risulta costituito in massima parte da granuletti amorfi, opachi, di color rossastro, probabilmente composti di ocra, e da piccoli cristallini di gesso, in quantità minima.

Dai quozienti molecolari si ottiene con approssimazione veramente notevole la composizione chimica:



da cui si ricava la formula della bianchite:



cioè



La composizione chimica trovata è praticamente eguale a quella calcolata in basa a tale formula, come si vede dal confronto delle percentuali teoriche (III), con quelle (II) ottenute dall'analisi, dedotto il residuo insolubile e riportato a cento.

Per controllare la costanza di composizione del minerale ho eseguito un'altra analisi completa (A), su altro materiale di seconda scelta, e varie determinazioni ripetute su differenti porzioni di sostanza, che non appariva così pura come quella della prima analisi. La media di queste determinazioni, abbastanza concordanti, è riportata nella colonna B.

	A	Rapporti molecolari		B	Rapporti molecolari	
FeO.	8,62	0,1200	0,97	8,60	0,1197	} 1,00 (FeO)
Fe ₂ O ₃	—	—	—	0,07	0,0004	
CaO.	tracce	—	—	tracce	—	—
ZnO.	20,15	0,2476	2,00	19,88	0,2443	2,02
MgO	tracce	—	—	tracce	—	—
SO ₃	30,11	0,3760	3,04	30,62	0,3824	3,17
H ₂ O.	40,24	2,2336	18,04	39,59	2,1975	18,23
Residuo insolubile .	1,10	—	—	1,21	—	—
	100,22			99,97		

Anche i risultati di queste due analisi confermano in modo più che soddisfacente la formula $\text{FeZn}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 18\text{H}_2\text{O}$ già data, e provano una notevole costanza di composizione del materiale.

Le variazioni più sensibili si notano nelle percentuali di acqua, poichè il minerale risente notevolmente della tensione di vapor acqueo dell'ambiente in cui si trova. È questa la ragione per la quale il materiale d'analisi, fu lasciato sempre qualche tempo in frammenti grossolani, all'aria, in condizioni d'ambiente il più possibile costanti.

I caratteri ottici della bianchite sono i seguenti:

Indici di rifrazione per la linea D (luce del Na)

$$N_p = 1,4652, N_m = 1,4942, N_g = 1,4946$$

doppia rifrazione notevole: $N_g - N_p = 0,0294$

Angolo degli assi ottici variabile ma sempre piccolo, con un massimo misurato nell'aria, prossimo a $2E = 18^\circ$, da cui si ricava $2V = 10^\circ$; il valore dell'angolo vero degli assi ottici, calcolato in base agli indici di rifrazione, con la nota formula, è $2V = 13^\circ 26'$. Dispersione debole: $\rho > v$.

Segno ottico del minerale negativo.

Quanto al sistema di cristallizzazione del nuovo minerale, mancando cristalli distinti, non è possibile una esatta determinazione. Al microscopio però l'osservazione di una leggera dispersione fa ritenere probabile l'appar-

tenenza al *sistema monoclino*. Una conferma si è avuta dal Röntgenogramma ottenuto sulla polvere del minerale dal dott. Ferrari, per il gentile interessamento del chiar. prof. G. R. Levi della R. Università di Milano. Ad entambi rivolgo i miei più vivi ringraziamenti.

Infatti il « Debye » della polvere di bianchite è risultato quasi perfettamente eguale a quello ottenuto dalla polvere di una miscela isomorfa di $\text{FeSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$ e $\text{ZnSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$, da me preparata, sicuramente monoclina. Mi limito per ora a questo solo cenno in proposito, poichè sull'argomento in questione mi propongo di ritornare dopo una serie di ricerche sintetiche.

Ho già accennato come il minerale risenta molto, per quanto riguarda il suo contenuto in acqua, della tensione di vapore dell'ambiente.

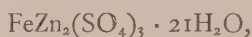
Ho voluto perciò analizzare il minerale dopo averlo grossolanamente frantumato ed esposto per un certo periodo di tempo (due-tre giorni) in un ambiente saturo di umidità. I risultati ottenuti sono riportati nello specchio che segue:

FeO	8,16	0,1136	}	0,1144	1,00 (FeO)	8,42
Fe ₂ O ₃	0,06	0,0004				—
CaO	tracce	—	—	—	—	—
ZnO	18,39	—	—	0,2260	1,98	19,08
SO ₃	28,35	—	—	0,3541	3,09	28,15
MgO	—	—	—	—	—	—
H ₂ O	43,56	—	—	2,4179	21,16	44,35
Resid. insol.	1,29	—	—	—	—	—
	<hr/>					<hr/>
	99,81					100,00

da cui la composizione:

$$\text{FeO} : \text{ZnO} : \text{SO}_3 : \text{H}_2\text{O} = 1 : 2 : 3 : 21,$$

che ci dà la formula



che ho usato per calcolare i valori dell'ultima colonna.

In essiccatore a cloruro di calcio, la bianchite perde circa due terzi della sua acqua totale in pochi giorni, mentre dopo tale periodo la perdita in peso diventa piccolissima, fino a farsi quasi insignificante. Questo è evidente dalla tabella sotto riportata.

Tempo	Perdita in peso
dopo 24 ore	12,86 %
» 100 »	25,51 %
» 144 »	26,47 %
» 184 »	26,54 %
» 208 »	26,58 %

Per queste osservazioni, come per le seguenti, mi sono servito di materiale accuratamente scelto, proveniente dalle stesse porzioni sulle quali ho eseguito le analisi, e poco frantumato. La grossezza dei granuli ha scarsa influenza sull'andamento della disidratazione del minerale, di modo che è possibile studiare la perdita di acqua con un preparato a piccoli frammenti, senza polvere finissima, evitando così l'assorbimento di umidità da parte di questa, che come è noto è proporzionale alla superficie totale dei granuli, a parità di volume.

La *disidratazione*, per riscaldamento in forno elettrico, eseguita su diverse porzioni di sostanza portate alle varie temperature, in lenta corrente di aria ambiente, risulta evidente dai dati che seguono.

Temperatura	% H ₂ O perduta		Temperatura	% H ₂ O perduta	
	I	II		I	II
essic. 18°	26,58	—	190°	33,39	33,02
50°	31,68	—	200°	—	33,88
60°	31,80	—	210°	—	34,16
85°	31,95	—	245°	—	37,20
105°	32,07	—	260°	39,70	—
150°	32,65	—	290°	39,88	39,43
160°	—	32,68	310°	39,93	39,47
170°	32,81	—			

La sostanza col riscaldamento diventa leggermente giallognola per ossidazione parziale del ferro ferroso. I piccoli errori di perdita di peso, dovuti all'ossidazione, sono già stati corretti nei dati della tabella sopra riportata. Per fare questo ho determinato il ferro ferroso per titolazione su porzioni dello stesso materiale, usato per studiare la disidratazione, portate, assieme a questo, a varie temperature.

Ho ottenuto così:

a 160° dopo 20 ore di riscaldamento il minerale contiene ancora 6,90 % FeO.
a 170° » 50 » » » » » » 5,70 % »
a 280° » 20 » » » » » » 6,61 % »

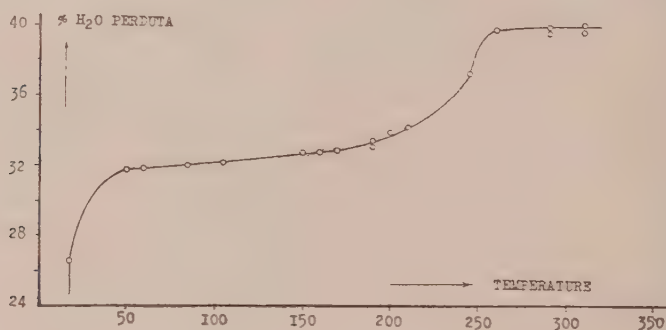
su un totale di FeO che varia fra 8,60 e 8,90 %.

Come si vede l'ossidazione del ferroso è lenta e gli errori che si riflettono sulle determinazioni indirette dell'acqua, sono di piccola entità, e non è quindi necessario, per stabilire la curva di disidratazione, operare in ambiente particolare non ossidante.

Dal complesso delle osservazioni fatte sull'andamento della disidratazione e dalla curva disegnata, si deduce:

1° In essiccatore a cloruro di calcio, a temperatura di 15–18°, il minerale perde circa due terzi dell'acqua totale, tendendo alla composizione $\text{FeSO}_4 \cdot 2\text{ZnSO}_4 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$, alla quale corrisponde un contenuto in acqua di di 13,18 %, teorico (determinato sperimentalmente 13,45 %).

2° A temperatura crescente, fra i 18° e i 50° si osserva una disidratazione rapida e ancora notevole (5 % di acqua circa) mentre al di sopra di questa temperatura la perdita di peso è lenta e piccolissima fino a poco oltre i 200°, determinando un nettissimo gradino nella curva. A questo flesso corrisponde, verso i 50°, una trasformazione del minerale, che al microscopio appare come un aggregato a minutissima struttura fibroso-raggiata, nel quale non è più possibile ritrovare i caratteri ottici determinati per la



bianchite. Non sembra esservi alcun rapporto fra questa trasformazione e la ossidazione del ferro ferroso, perchè quest'ultima a 50–60° è appena iniziata ed è limitata esclusivamente ad un velo superficiale sottilissimo dei granuli. Ho pure osservato che il minerale, riscaldato verso i 100° per qualche ora, presenta leggera reazione acida, un po' più distinta di quella che si può osservare nel minerale originario (che ha reazione acida debolissima).

Si può quindi ammettere la formazione di un nuovo idrato, stabile fra i 50° ed i 200° circa. Operando in ambiente non ossidante, per otto ore di riscaldamento a 150° si ottiene un solfato idrato di composizione prossima a $\text{FeSO}_4 \cdot 2\text{ZnSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$. A questo corrisponde teoricamente un contenuto di acqua di 7,05 %; sperimentalmente ho ottenuto 6,84 % di acqua residua. E dalle determinazioni fatte in corrente d'aria, come si ricava dalla tabella soprariportata, si hanno le seguenti percentuali di acqua residua: dopo riscaldamento a 150°, 7,28 % e a 170°, 7,12 %; e con altra porzione di polvere: a 160°, 6,79 % H₂O.

3° A temperatura superiore a 210° la disidratazione riprende in modo rapido fino a circa 260°, ed è quasi completa a questa temperatura. Le ultime tracce di acqua vengono eliminate fra 260 e 310°, prima che si inizi la perdita dell'SO₃.

La bianchite riassorbe con relativa facilità l'acqua perduta per riscaldamento a 50–60°, e il riassorbimento si osserva, per quanto con maggior lentezza, anche dopo prolungato riscaldamento a 170°. Infatti la sostanza per esposizione all'aria ambiente, dopo riscaldamenti successivi fra 50 e 170° per la durata complessiva di 48 ore, riassorbe in due giorni metà dell'acqua perduta, e continua poi più lentamente a riprendere il resto dell'acqua.

Da tutto quanto ho esposto finora si deduce che il minerale di Raibl da me studiato, per il quale ho proposto il nome di bianchite, è un minerale nuovo, e risulta ben definito sia per la composizione chimica, sia per le proprietà ottiche, sia per il comportamento che presenta alle varie temperature.

Nè altro composto analogo è noto in natura fra i solfati idrati di due metalli bivalenti.

La composizione chimica e i caratteri ottici indicherebbero un sale doppio o una miscela isomorfa riferibile ai solfati esaidrati di metalli bivalenti.

Sono noti infatti come prodotti sintetici: il solfato di zinco esaidrato, monoclino, otticamente negativo e con angolo degli assi ottici piccolissimo ($0^\circ - 3^\circ$)⁽¹⁾, e gli analoghi solfati esaidrati di Mg, Ni, Co pure monoclino, negativi, con angolo degli assi ottici sempre piccolo e dispersione $\rho > v$. Il corrispondente solfato di ferro non è stato ancora ottenuto con sicurezza.

L'approssimazione costante al rapporto $\text{ZnO} : \text{FeO} = 2 : 1$ trovata nel minerale di Raibl e la mancanza di fenomeni di zonatura, fanno ritenere più probabile trattarsi di un sale doppio piuttosto che di una miscela isomorfa dei due solfati.

Dall'analisi del minerale, lasciato in ambiente saturo di vapore d'acqua, fino a raggiungere l'equilibrio, si ottiene, come si è visto, la proporzione: $\text{FeO} : \text{ZnO} : \text{SO}_3 : \text{H}_2\text{O} = 1 : 2 : 3 : 21$. Anche un sale doppio di tale composizione non è noto; si potrebbe pensare ad un termine della serie di miscele isomorfe dei due solfati eptaidrati, *goslarite* $\text{ZnSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$ e *melanterite* $\text{FeSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$.

Sono state trovate melanteriti zincifere con un massimo di 8,92% ZnO ⁽²⁾, e goslariti ferri-ferre con un massimo di 6,41% FeO ⁽³⁾.

(1) CH. DE MARIGNAC, « Arc. Sc. Phys. Nat. », XIV, p. 234, Genève, 1855. M. G. WYROUBOFF, *Sur quelques sulfates de la série magnésienne*, « Bull. Soc. Fran. Minéral. », XII, 5°, p. 366, Paris, 1889. L'A. dà: 2H (rosso) = $3^\circ 40'$; 2H (bianco) = 3° ; 2H (verde) = $1^\circ 50'$; 2H (bleu) = 0° . Vedi anche P. GROTH, *Chemische Krystallographie*, II, p. 422 e seg.

(2) L. MICHEL, *Sur une Mélanterite Zincifère du Laurium en Grèce*, « Bull. Soc. Fran. Minéral. », XVI, p. 204, Paris, 1893. Più tardi questo composto è stato chiamato *sommairite* (vedi L. J. SPENCER, *A list of new mineral names*, « Mineralogical Magazine », XIV, p. 410, London, 1907).

(3) A. FRENZEL, (« Neues Jahrbuch für Miner. » ecc., p. 675, 1875) trovò a Freiberg una goslarite bruna cristallizzata contenente il 6,41% FeO , e piccole quantità di CuO .

Retgers ha determinato sperimentalmente ⁽¹⁾ per i due vetrioli i seguenti limiti di miscibilità:

serie rombica (della goslarite): da 0 % a 10,87 % di $\text{FeSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$
serie monoclina (della melanterite): da 0 % a 74,89 % di $\text{ZnSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$.

Ho preparato cristalli di miscela della serie monoclina, di composizione media molto prossima a quella del minerale lasciato in ambiente saturo di umidità ⁽²⁾.

La seguente tabella indica chiaramente la differenza notevole di proprietà ottiche, fra la bianchite e la miscela isomorfa sopradetta, che ha caratteri prossimi a quelli della melanterite alla cui serie appartiene:

		bianchite	miscela isomorfa
Angolo assi ottici	2 V (Na)	10° — 13° 26'	78° 48'
Indici di rifrazione	Np	1,4652	1,4709
	Nm	1,4942	1,4785
	Ng	1,4946	1,4867
Carattere ottico		negativo	positivo

Non si conoscono sali doppi dei vetrioli di ferro e zinco; fu invece osservata da Hollmann ⁽³⁾ la formazione di due sali doppi fra solfato di zinco eptaidrato e solfato di magnesio eptaidrato, rispettivamente nella proporzione 1:1 e 1:2.

Collocando su un vetrino porta-oggetti alcuni granuli di bianchite, a contatto con una goccia d'acqua, si può seguire, al microscopio, il fenomeno della soluzione del minerale e della ricristallizzazione.

I cristalli che ne derivano sono monoclini, con l'abito caratteristico dei cristalli di miscela isomorfa della serie della melanterite; presentano segno ottico positivo e angolo degli assi ottici prossimo a 90°, allungamento negativo, piano degli assi ottici secondo l'allungamento, estinzione inclinata della direzione Np sull'allungamento con un massimo di 33°; caratteri cioè che corrispondono a quelli della miscela isomorfa sopra ricordata.

e MgO. La *ferrogoslarite* (H. A. WHEELER « American Journ. of Sciences », vol. 41, p. 161, 1891) contiene solo il 4,9 % $\text{FeSO}_4 = 2,32\%$ FeO .

(1) J. W. RETGERS, *Beiträge zur Kenntniss des Isomorphismus*, X, « Zeitschrift f. Physikalische Chemie », vol. 15, p. 561, Leipzig, 1894.

(2) L'analisi dei cristalli misti ottenuti ha dato: $\text{FeO} = 8,84\%$; $\text{ZnO} = 18,68\%$; $\text{SO}_3 = 28,27\%$; $\text{H}_2\text{O} = 44,83\%$ = 100,10 %, cioè: $\text{FeSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O} : \text{ZnSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O} = 1 : 1,997$.

(3) R. HOLLMANN, *Die Doppelsalze von Magnesiumsulfat und Zinksulfat*, « Zeitschr. f. Phys. Chemie », vol. 40, p. 577 (1902), recensione in « Zeitschr. f. Kryst. u. Min. », vol. 31, p. 429 (1904); ID., *Ueber die Dampfspannung von Mischkrystallen einiger isomorpher Salzhhydrate*, « Zeitschr. f. Phys. Chemie », vol. 37, p. 193 (1901), recensione in « Zeitschr. f. Kryst. und Min. », vol. 37, p. 523 (1903).

Mi riservo di riprendere presto in esame l'argomento, avendo già iniziato una serie di ricerche sintetiche, non solo per integrare lo studio morfologico della bianchite, ma anche per stabilire se si tratti di un sale doppio piuttosto che di una miscela isomorfa e per determinare le condizioni di genesi del minerale.

Geofisica mineraria. — *Sulle caratteristiche fisiche della pianura marginale appenninica modenese.* Nota di A. BELLUIGI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. P. VINASSA.

1. Presuppongo note le conclusioni a cui sono giunto in un mio studio ⁽²⁾ sulle caratteristiche fisiche fondamentali della pianura padana.

Prendo in esame, qui, la pianura tra il F. Secchia (Castellarano, Rubiera) e il F. Panaro (Vignola Spilamberto, Castelfranco Emilia), zona a sud della via Emilia fino al raccordo con le prime colline appenniniche.

Le isogamme di gravità, dedotte utilizzando dati di osservazione con variometri di gravità Schweydar, corrono, quasi parallelamente, da sud-est a nord-ovest, delimitando un'ampia sinclinale gravifica che dalla linea Sassuolo-Vignola rimonta dolcemente verso Modena-Castelfranco-Emilia.

Le isodiname della componente verticale del magnetismo terrestre, tracciate in seguito ad osservazioni con variometri magnetici Schmidt, a nord della linea Sassuolo-Vignola, risultano anch'esse, in generale, piuttosto regolari, con andamento medio normale o quasi al meridiano magnetico di Modena.

Ad un incremento della gravità da Sassuolo a Modena di circa $15 \cdot 10^{-3}$ C. G. S., corrisponde un incremento della componente verticale del magnetismo terrestre di circa $150 \cdot 10^{-5}$ C. G. S.

Dai dati magnetici e gravimetrici così ottenuti, considerando il particolare aspetto dei rilievi, mi propongo di risalire alle caratteristiche fisiche di interdipendenza tra suscettività magnetica e densità delle masse profonde che provocano le influenze osservate.

2. Suddivido la regione in esame in tante zone, mediante 7 rette normali al meridiano magnetico di Modena, equidistanti m. 3750.

La n. 1 passa km. 1 a sud di Vignola; la n. 2 passa tra Vignola e Spilamberto; la n. 3 all'altezza di Spilamberto; la n. 4, 1 km. a sud di Modena; la n. 7 a Rubiera.

Su ognuna di queste rette sono distribuite stazioni cötvössiane e magnetiche, come risulta dalla seguente tabella:

(1) Nella seduta del 27 aprile 1930.

(2) A. BELLUIGI, *Caratteristiche fisiche fondamentali della pianura padana*, « Rendic. R. Acc. Lincei », giugno 1929.

$U_{x\zeta}$, $U_{y\zeta}$, U_{Δ} , U_{xy} , sono note grandezze misurate in unità Eötvös ($1,10^{-9}$ C. G. S.), Z in γ ($1,10^{-5}$ C. G. S.), tutte riferite ad un sistema di assi rettangolari che ha come direzione positiva di x il nord magnetico, y positivo l'est magnetico, ζ positivo il Nadir.

3. Dall'andamento delle isogamme si desume che le masse profonde perturbanti hanno una giacitura 40° ovest dal meridiano magnetico (M.m.), (\sim nord-ovest, sud-est) e sono molto estese in tutte le direzioni.

Posto allora che le perturbazioni gravimetriche e magnetiche siano dovute alla stessa causa, assunto un nuovo sistema di assi di riferimento x' , y' , ζ' , y' , 40° ovest del M. m.; x' , 50° est dal M. m., indicato con $U_{x\zeta'}$, $U_{xx'}$, α' , β' , γ' , rispettivamente le componenti eötvössiane e i coefficienti di magnetizzazione delle rocce profonde, secondo il sistema di assi (x', y', ζ') , il disturbo magnetico ⁽¹⁾ teorico risulta:

$$(1) \quad 66.7 (\sigma - \sigma_0) \Delta\zeta = 1^9 (\alpha' U'_{x\zeta} - \gamma' U'_{xx})$$

dove:

$$U'_{x\zeta} = U_{x\zeta} \sin 40^\circ + U_{y\zeta} \cos 40^\circ$$

$$U'_{xx} = U_{\Delta} \cos 80^\circ + 2 U_{x\zeta} \sin 80^\circ$$

$$\alpha' = \alpha \sin 40^\circ + \beta \cos 40^\circ = 0.128 (\pi - \pi_0)$$

$$\gamma' = \gamma = 0.400 (\pi - \pi_0)$$

$(\sigma - \sigma_0)$, $(\pi - \pi_0)$ indicano, rispettivamente, densità relativa e suscettività magnetica relativa.

$\beta = 0$ perchè l'azimut della direzione di magnetizzazione delle masse si suppone nella direzione del M. m., il che implica la causa di magnetizzazione nell'azione induttiva del campo terrestre.

È superfluo osservare che qui, come in altri casi analoghi, si trascura il fattore di smagnetizzazione, reazione del magnetismo indotto sul campo inducente.

La (1) si può scrivere:

$$(2) \quad 66.7 (\sigma - \sigma_0) \Delta\zeta = (\pi - \pi_0) (0.082 U_{x\zeta} + 0.098 U_{y\zeta} - 0.068 U_{\Delta} - 0.784 U_{xy}).$$

Assunti i valori medi (vedi tabella):

$$U_{x\zeta} = + 9.6 U \cdot E \quad U_{\Delta} = - 11.7 U \cdot E$$

$$(3) \quad U_{y\zeta} = + 7.3 U \cdot E \quad U_{xy} = + 11.6 U \cdot E$$

$$\Delta\zeta = - 10 \gamma$$

(1) A. BELLUIGI, *Sulla correzione topografico-magnetica*. « Atti della Pont. Acc. delle Scienze Nuovi Lincei », maggio 1929.

la (2) diventa:

$$(4) \quad (\sigma - \sigma_0) \cdot 10^3 = + (\pi - \pi_0) 10^5.$$

La valutazione di $\Delta\chi$ (anomalia locale in anomalia regionale) è per eccesso: non si potrebbe escludere $\Delta\chi \sim 1.10^7$; il coefficiente di $(\sigma - \sigma_0)$ oscillerebbe allora da 10^2 a 10^3 .

Osservo inoltre che $U_\Delta < 0$, costantemente; U_{xy} ha, presso a poco, lo stesso valore assoluto di U_Δ .

Dati i valori tabellari di U_{xz} , U_{yz} , χ posto $\sigma - \sigma_0 > 0$, $\pi - \pi_0 > 0$ e viceversa.

Se la densità della massa profonda è perciò maggiore di quella delle masse di copertura, la suscettività magnetica di quella risulta pure maggiore della suscettività magnetica delle rocce di copertura. Osservando inoltre la (4) da cui si desume non solo il segno di $(\pi - \pi_0)$ ma il suo ordine di grandezza, si può avanzare l'idea, tenuto conto della geologia delle colline del modenese, che le masse profonde perturbanti siano gessi o minerali della serie gessoso-solfifera così caratterizzati in generale (1):

$$\pi \cdot 10^5 \sim 0 - 10; \pi_0 = 40.10^{-5}; \pi_{\min} (\text{rocce diamagnetiche}) = -1.10^{-5} \text{ C. G. S.}$$

$$\sigma \sim 2.17 - 2.31 < 2; \sigma_0 = 1.82 - 2.00.$$

Questa conclusione è in accordo con ciò che ha fatto già rilevare il collega E. Fossa-Mancini (2), e, incidentalmente, ne potrebbe costituire una dimostrazione sperimentale.

(1) H. HAALCK, *Die gravimetrischen Verfahren u. s. w.*, p. 172, «Sammlung geoph. Mainka», 1929; *Die magnetischen Verfahren u. s. w.*, p. 98, «Sammlung geoph. Mainka», Berlin, 1927.

(2) E. FOSSA-MANCINI, *Rapporti tra gessi miocenici e anomalie negative della gravità nell'Italia peninsulare e nella Sicilia*, «Atti Soc. Toscana di Scienze Naturali», vol. XXXIV, n. 2, 1925.

N. P.

BIBLIOTHECA
MUSEO
N. 100

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 4 maggio 1930 (Anno VIII)

Presidenza del sen. prof. A. GARBASSO

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Chimica. — *Origini della Stereochimica.* Nota ⁽¹⁾ del Socio
E. PATERNÒ.

Debbo ancora una volta, per quanto brevemente, occuparmi di questo argomento, sul quale ho presentato già due Note all'Accademia nelle tornate del 4 dicembre 1892 e del 1° dicembre 1907, ed ho pubblicato alcuni notevoli documenti nella « Gazzetta Chimica Italiana » del 1913. Credevo così che l'argomento fosse chiarito, ma il prof. Giuseppe Oddo nel suo poderoso *Trattato di Chimica organica*, che ha visto la luce in questi ultimi giorni, ha scritto: « Nel 1869 Paternò attribul all'atomo di carbonio la « figura di un tetraedro ritenendo possibili tre bibromoetani. In questa ipotesi « gli sfuggì che a ciò occorreva che i quattro atomi o radicali legati allo stesso « atomo di carbonio fossero **disuguali** ». Tutto questo periodo è per lo meno inesatto. Premetterò che il mio lavoro del 1869 è un lavoro sostanzialmente sperimentale, e che di chimica nello spazio trattasi incidentalmente e senza pretesa. Nel mio lavoro provai sperimentalmente che i due composti isomeri C_2HCl_3 , ottenuti uno dal Regnault, l'altro da Hübner non esistevano, e che in tal modo il solo caso allora conosciuto e che, con la formola di struttura del tempo, non poteva spiegarsi senza ammettere che le quattro valenze dell'atomo del carbonio avessero valori differenti, veniva a sparire. Ma poichè allora erano stati descritti tre isomeri $C_2H_4Br_2$, che secondo il Boutlerow, sempre con le formole di struttura del tempo, non potevano spiegarsi senza la diseguaglianza delle quattro valenze dell'atomo del carbonio,

(1) Presentata nella seduta del 4 maggio 1930.

osservai che questi tre isomeri avrebbero potuto spiegarsi senza rinunciare alla identità funzionale delle quattro valenze del carbonio, ricorrendo alla formola di struttura non più nel piano, ma *nello spazio*. Il mio pensiero di allora era quello soltanto di provare che le quattro valenze dell'atomo del carbonio erano eguali e credo di esservi riuscito.

Nel periodo dell'Oddo è detto inoltre, che io ritenni la *possibilità* della esistenza dei tre dibromoetileni, ma ciò non è esatto, perchè non soltanto allora non ho messo in dubbio la loro esistenza, ma poco dopo lo provai sperimentalmente. Dirò ancora che l'Oddo afferma che io attribuii all'atomo del carbonio *la forma di un tetraedro regolare*, mentre non ho mai sognato nè allora nè dopo di occuparmi *della forma degli atomi*. Le forme degli infinitamente piccoli e degli infinitamente grandi sono argomenti che sfuggono all'osservazione ed alla misura.

Finalmente osserverò che nel mio ordine di idee a me non *sfuggì* nulla, e non poteva sfuggirmi l'idea dell'atomo di carbonio *asimmetrico*, nata cinque anni dopo per spiegare le isomerie ottiche, per opera di Van't Hoff e di Lebel e che è stata tanto feconda. La mia parte è stata molto modesta: si limita soltanto all'avere per primo, più di 68 anni or sono, tentato di spiegare talune isomerie con formole di struttura nello spazio, anzichè nel piano. Il tempo mi ha dato ragione.

Io giudico che il mio contributo sia stato di poco valore; ma farlo assurgere ad una ipotesi sulla forma dell'atomo, o giudicarlo deficiente al fine che mi proponevo, sono due apprezzamenti egualmente esagerati.

Queste osservazioni non diminuiscono certamente il merito dell'Oddo, il quale ha dato all'Italia, un *Trattato di Chimica organica* d'incontrastato valore e frutto di lungo studio.

Chimica. — *I solfati doppi dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini. XIII. Solfati di praseodimio e ammonio* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ del Socio F. ZAMBONINI e di SILVIA RESTAINO.

Cominciamo, con la presente Nota, a dare conto dei risultati ai quali siamo pervenuti con i nostri studi sui solfati doppi del praseodimio e dei metalli alcalini, nonchè di quelli che il solfato di praseodimio forma col solfato di ammonio e col solfato talloso.

Le nostre indagini sono state in gran parte rese possibili dalla liberalità del Prof. Luigi Rolla, che ha cortesemente messo a nostra disposizione

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Napoli. Per i lavori precedenti, si vedano le Note pubblicate in questi « Rendiconti » a partire dal secondo semestre 1924.

(2) Presentata nella seduta del 4 maggio 1930.

il praseodimio necessario. Ci è grato rinnovare al Prof. Rolla i ringraziamenti più sentiti per il concorso prezioso dato ai nostri studi.

C. v. Scheele⁽¹⁾ ha descritto, molti anni fa, il solfato doppio di praseodimio e ammonio ottoidrato $\text{Pr}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot (\text{NH}_4)_2\text{SO}_4 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$ o 1 — 1 — 8, ottenuto in cristalli abbastanza grandi, stabili all'aria, i quali non perdono acqua sull'acido solforico, ma si disidratano completamente a 170°. Il peso specifico a 16°2 è, secondo v. Scheele, 2.531–2.532.

I risultati da noi ottenuti con i metodi già più volte descritti, alla temperatura di 25°, sono riuniti nella seguente tabella.

TABELLA I.

Numero della esperienza	Composizione della fase liquida				Composizione del corpo di fondo					Costituenti il corpo di fondo
	$\text{Pr}_2(\text{SO}_4)_3$	$(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$	H_2O	$\frac{(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4}{\text{H}_2\text{O}}$	Pr	SO_4	NH_4	H_2O	$\frac{\text{Pr}_2(\text{SO}_4)_3}{(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4}$	
1	0.11	43.12	56.77	0.75	21.69	63.46	14.85	—	0.77	1 — 5 + $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$
2	0.30	40.13	59.57	0.67	22.45	62.90	14.65	—	0.83	1 — 5
3	0.66	35.63	63.71	0.55	23.09	62.81	14.10	—	0.86	
4	0.65	33.38	65.97	0.50	26.60	56.80	11.02	5.58	1.32	1 — 5 + 1 — 1 — 8
5	0.66	32.40	66.94	0.49	30.10	56.40	6.35	6.85	2.59	
6	0.60	32.43	66.97	0.48	32.50	46.87	5.48	15.15	3.50	
7	0.67	19.88	79.45	0.25	33.36	45.60	4.38	16.66	4.27	
8	0.69	14.91	84.40	0.18	33.28	45.80	4.45	16.47	4.16	1 — 1 — 8
9	0.68	7.07	92.25	0.08	33.48	45.48	4.25	16.79	4.38	
10	3.52	0.98	95.50	0.01	33.26	45.75	4.41	16.58	4.16	
11	3.55	0.53	95.92	0.005	33.38	45.80	4.16	16.66	4.21	1 — 1 — 8 + $\text{Pr}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$
12	8.24	0.50	91.26	0.005	37.60	42.47	1.51	18.42	13.75	

Composizione teorica dei composti ottenuti.

	Pr	SO_4	NH_4	H_2O
$\text{Pr}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 5(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$	22.71	62.75	14.54	—
$\text{Pr}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot (\text{NH}_4)_2\text{SO}_4 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$	33.30	45.41	4.26	17.03

Con i dati della Tabella I si è costruita la Fig. 1.

Dalla Tabella e dalla Fig. 1 si scorge chiaramente che, alla temperatura di 25°, nella parte del sistema ternario da noi studiata, si formano

(1) « Z. anorg. Ch. », 18, 359 (1898).

i composti 1—5 e 1—1—8, che sono precisamente i due tipi comuni nei solfati doppi dei metalli del gruppo del cerio e dell'ammonio.

Il composto 1—5 è stabile, puro, in contatto con soluzioni che contengono da 63 % a 56 % $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ e da 0.2 a 0.6 % $\text{Pr}_2(\text{SO}_4)_3$: 1—1—8 ha, invece, un campo di esistenza molto più esteso, essendo stabile in presenza di soluzioni che contengono da 0.5 % $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ e 3.5 % $\text{Pr}_2(\text{SO}_4)_3$ fino a 32 % $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ e 0.6 % $\text{Pr}_2(\text{SO}_4)_3$.

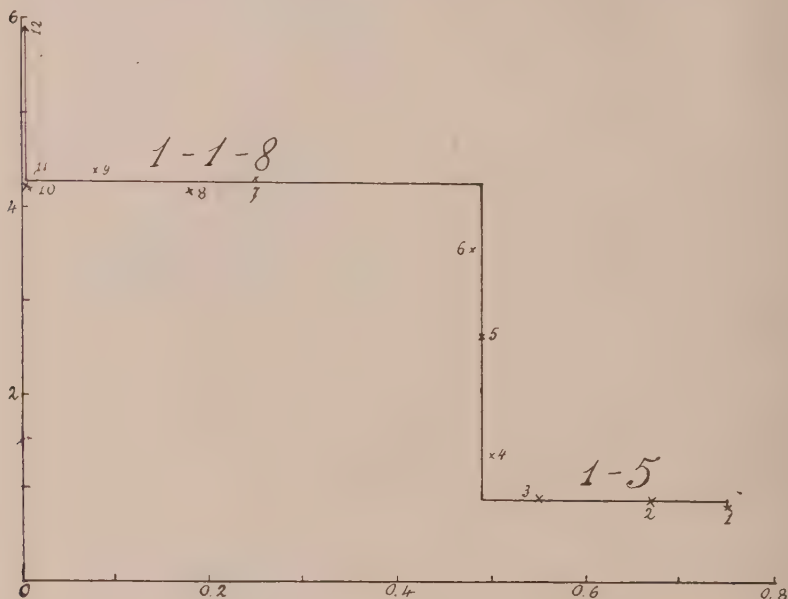


Fig. 1.

Nelle nostre esperienze la precipitazione del praseodimio non è stata mai completa, nemmeno in presenza di un fortissimo eccesso di solfato di ammonio.

Nelle esperienze di solubilità, 1—5 e 1—1—8 si sono ottenuti sotto forma di polveri dall'aspetto nettamente cristallino, di colore verde chiaro.

Il sale 1—5 al microscopio è risultato costituito da piccoli cristallini, ad habitus prismatico o tabulare, di solito più o meno allungati, mentre in alcune esperienze i cristallini apparivano tozzi, essendo molto ridotta la estensione della zona di allungamento degli altri.

Nei cristallini tabulari sulla faccia più estesa si ha estinzione parallela all'allungamento. Da questa faccia esce inclinata la bisettrice di un grande angolo degli assi ottici: il piano di questi ultimi è parallelo alla direzione di allungamento. Per quanto si può dedurre dalle poche osservazioni fatte,

i cristalli del composto 1 — 5 sono monoclini, con ben sviluppata la zona $\{010\}$, parallelamente all'asse della quale i cristalli sono sovente un po' allungati, pur non mancando, tuttavia, quelli nei quali questa zona è ridotta. Di forme terminali sono ben riconoscibili due prismi, uno dei quali ha le faccie tautozonali col pinacoide che è comunemente più esteso degli altri nella zona $\{010\}$. Il piano degli assi ottici è perpendicolare a $\{010\}$.

Nei cristalli del composto 1 — 1 — 8 è evidente l'influenza della composizione della soluzione sull'habitus. Infatti, i cristalli che costituiscono la polvere separatasi nell'esperienza 10^a sono in gran prevalenza schiacciati secondo $\{010\}$ ed allungati in vario grado nella direzione dell'asse a : non ne mancano di quelli che su $\{010\}$ presentano presso a poco ugualmente estesi i due spigoli $\{001\}$ e $\{100\}$. Nell'esperienza 8^a si sono avuti cristalli formanti esili tavolette secondo $\{100\}$ o dei prismi vicinali a questo pinacoide: prevalevano quelli allungati secondo c , mentre erano più rari, ma, generalmente, più grandi, quelli quasi ugualmente estesi nelle direzioni c e b .

Nel deposito cristallino della esperienza 7^a i cristalli sono tutti tabulari come i precedenti, ma dominano i tipi con $\{010\}$ poco esteso.

In tutti i cristalli microscopici esaminati il prisma $\{0kl\}$ ben sviluppato, generalmente, anzi, il solo presente, era $\{011\}$.

Per ottenere nitidi cristalli del composto 1 — 1 — 8 si fecero evaporare lentamente delle soluzioni, le quali per gr. 0.6 di $\text{Pr}_2(\text{SO}_4)_3$ contenevano quantità di solfato di ammonio variabili fra gr. 0.5 e gr. 3.5.

Non si ebbe mai a constatare la formazione di un altro composto, non solo, ma, indipendentemente dalla quantità di solfato di ammonio presente, il primo deposito fu sempre costituito da grandi cristalli, mentre il secondo risultò costantemente di cristallini molto minuti.

I grandi cristalli raggiunsero fino a 5 mm. nella loro maggiore dimensione, ma, come tanto spesso accade nel composto 1 — 1 — 8, erano, per lo più, poco ben conformati, sia a causa di combinazione oscillatoria nella zona $\{001\}$, sia di associazioni imperfettamente parallele di vari cristallini, che possono finire col costituire degli aggregati a rosetta.

L'habitus è abbastanza vario: si va da cristalli molto allungati nella direzione dell'asse verticale, ad altri nei quali si ha all'incirca uguale estensione nelle due direzioni c e b . I primi, a loro volta, possono presentare $\{010\}$ abbastanza esteso ovvero ridotto a faccette strettissime, o, in qualche caso raro, addirittura mancanti. Nei secondi, $\{010\}$ è sempre molto subordinato, e possono distinguersi due casi, a seconda che nella direzione dell'asse a i cristalli sono pochissimo estesi ovvero raggiungono una estensione maggiore.

Non si è mai osservato il pinacoide $\{100\}$, e nella zona $\{001\}$ il prisma $\{110\}$ si è sempre trovato accompagnato da numerosi altri prismi $\{hko\}$ con $h > k$, talvolta ben determinabili, con faccie piane, più spesso,

però, striate più o meno profondamente. È notevole che, in molti cristalli, $\{110\}$ ha offerto faccie lisce e splendenti, che hanno permesso buone misure.

Nella zona $[100]$ si sono rinvenuti i due prismi $\{011\}$ e $\{012\}$, dei quali il primo è generalmente il più esteso, fino a far ridurre $\{012\}$ a faccette molto esili. In taluni cristalli, al contrario, $\{012\}$ era molto più esteso, ed una volta si è trovato questo prisma solo, senza $\{011\}$.

Nel maggior numero dei cristalli, le faccie dei due prismi $\{011\}$ e $\{012\}$ sono fortemente striate parallelamente all'asse a ed anche in combinazione oscillatoria. Sono, però, anche frequenti i cristalli nei quali le faccie dei due prismi in questione, sono, invece piane e regolari, ma presentano, allora, costante il fatto di essere spezzate in due faccette, spesso di estensione poco diversa, e che danno ciascuna una nitida e bellissima immagine. L'angolo che formano le due faccette fra loro non è costante, così come varia, anche nello stesso cristallo, la loro inclinazione su (010) . In un cristallo, per esempio, si è misurato:

$$\begin{array}{ll}
 (010) : (okl) & = 48^{\circ} 15' \\
 : (ok_1 l_1) & = 51 \ 5 \\
 : (ok\bar{l}) & = 45 \ 38 \\
 : (ok_1 \bar{l}_1) & = 47 \ 53 \\
 (0\bar{1}0) : (o\bar{k}l) & = 45 \ 33 \\
 : (o\bar{k}_1 l_1) & = 48 \ 55 \\
 : (o\bar{k}\bar{l}) & = 48 \ 15 \\
 : (o\bar{k}_1 \bar{l}_1) & = 51 \ 9 \\
 (okl) : (ok_1 l_1) & = 2^{\circ} 50' \\
 (okl) : (ok_1 \bar{l}_1) & = 2^{\circ} 15' \\
 (o\bar{k}l) : (o\bar{k}_1 l_1) & = 3^{\circ} 22' \\
 (o\bar{k}l) : (o\bar{k}_1 \bar{l}_1) & = 2^{\circ} 54'
 \end{array}$$

(okl) e $(ok_1 l_1)$ sono rispettivamente parallele a $(o\bar{k}l)$ e a $(o\bar{k}_1 \bar{l}_1)$, così come (okl) è parallela a $(o\bar{k}\bar{l})$, ma è evidente che (okl) e $(ok_1 l_1)$ sono inclinate su (010) diversamente da quel che $(o\bar{k}l)$ e $(o\bar{k}_1 \bar{l}_1)$ lo sono su $(0\bar{1}0)$, come se i cristalli fossero triclini. Ora, siccome le proprietà ottiche non permettono in nessun modo di considerare i cristalli in questione altrimenti che come monoclini, non resta che ritenere che le faccie dei prismi $\{okl\}$ sieno sostituiti da vicinali a posizione oscillante.

Valori vicinissimi a quelli indicati si sono avuti in altri cristalli. In complesso, per le faccie riferibili a $\{011\}$, si è trovato che esse fanno con la più vicina del pinacoide $\{010\}$, angoli che possono dividersi essenzialmente in tre gruppi, a seconda, cioè, che sono prossimi a $45^{\circ} 30'$, ovvero a $48^{\circ} 15'$ o $48^{\circ} 55'$ o, infine, a 51° circa.

Anche le faccette di $\{012\}$ sono generalmente doppie, ma in un cristallo, particolarmente ben confermato, se ne è trovata una unica. Dagli angoli

$$(010) : (110) = 70^\circ 48'$$

$$(010) : (012) = 69^\circ 19'$$

$$(110) : (012) = 75^\circ 48'$$

si sono calcolate le costanti

$$a : b : c = 0.3510 : 1 : 0.9265$$

$$\beta = 97^\circ 14'$$

le quali si accordano bene con quelle dei solfati doppi ottoidrati di lantanio e ammonio, di cerio e ammonio, di didimio e ammonio, determinate per i due primi da E. H. Kraus e da Morton per l'ultimo.

È da notare, però, che le costanti da noi calcolate conducono, per tutte le faccie $\{okl\}$ che dovrebbero corrispondere a $\{011\}$, a dei simboli complicati, perchè il valore teorico di $(010) : (011)$ risulta di $47^\circ 25'$, mentre i valori misurati oscillano tra $45^\circ 28'$ e $51^\circ 9'$.

Nella zona $[001]$, oltre $\{110\}$, si è osservato molto spesso il prisma $\{510\}$, di rado un altro prisma riferibile a $\{210\}$: per diverse faccette di $\{hko\}$ si avrebbero simboli complicati, e variabili da faccetta a faccetta, sinchè si tratta certamente di vicinali.

$$(010) : (510) = 85^\circ 49' - 86^\circ 3' \quad \text{Media } 85^\circ 55' \text{ mis.} \quad 86^\circ 1' \text{ calc.}$$

$$(010) : (210) \quad \quad \quad 79^\circ 51' \text{ »} \quad 80^\circ 7\frac{1}{2}' \text{ »}$$

Su (010) una direzione di massima estinzione forma, per la luce bianca, un angolo di 24° con a nell'angolo ottuso formato dai due spigoli $[001]$ e $[100]$. L'orientazione ottica è quella solita riscontrata nei cristalli $1 - 1 - 8$.

Geologia. — *La inesistenza della «nappe de l'Embrunais» in territorio italiano, indicata, a sud del M. Bianco, in una carta geologica da Léon Moret* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ del Corrisp. S. FRANCHI.

La *nappe*, o meglio, zona eocenica dell'*Embrunais* di Emile Haug, si estende dai pressi dell'Argentera, nell'alta Valle della Stura di Cuneo, attraverso l'*Embrunais* e a tutto il versante occidentale delle Alpi francesi, fin presso il Colle della Seigne; attraverso il quale vari geologi francesi vorrebbero che essa penetrasse largamente in Italia. Ciò in contrasto colle idee da me sempre sostenute, anche con qualche Nota nei « Rendiconti » di questa Accademia, alcuni anni or sono.

Nella seduta del 1° dicembre dello scorso anno io ho presentato una Nota per discutere l'età di una belemnite da me trovata nel 1890, in un elemento di breccia poligenica, proprio nella bassura del Colle della Seigne, (2512 m.), a sud del M. Bianco.

Oggetto della Nota era la discussione della posizione di quel fossile; se in un deposito originario di età corrispondente a quella da esso indicata, ovvero in un deposito eocenico, nel quale esso sarebbe stato trasportato per fluitazione, secondo una ipotesi di H. Schoeller ⁽³⁾.

Nella Nota io esposi numerosi e validissimi argomenti contrari a tale ipotesi, ma ne omisi uno di grande importanza, anzi perentorio, quello di numerose belemniti, che, colla revisione delle mie note di campagna del 1890, potei ben ricordare di aver trovato in quell'anno in varie località, molto a levante del Colle della Seigne, entro a calcescisti bigi, a nord della bella e grande zona di calcescisti neri del Colle di Julia, attraversata, con direzione est-ovest e pendenza sud, da una zona, potente 100 m. circa, di calcescisti neri, ricordanti quelli di certe regioni di Giurese dell'Ubaye e dei dintorni di Aisone e di Vinadio (la terra nera delle guardie forestali).

Precisando meglio, la regione dove trovai le belemniti nel 1890, è quella dei dintorni di *Châlets de l'Arpe Vieille*, della cantina della Visaille e dell'*Arpe Hognan*, e la falda montuosa prevalentemente costituita da calcescisti bigi e da scisti carniolici, con intercalazioni di quarziti più o meno cristalline o tabulari, estendentesi fino al basso del contrafforte.

(1) Professore all'Università di Grenoble.

(2) Presentata nella seduta del 4 maggio 1930.

(3) H. SCHOELLER, *La nappe de l'Embrunais, au Nord de l'Isère*. - « Bull. des services de la Carte géologique de la France et des topographies sauterraines » n. 175, t. XXX, 1929.

Bastava certamente la citazione esatta di questi giacimenti fossiliferi, per dimostrare che tutta la zona compresa fra di essi ed il Colle della Seigne è giurese, tagliando così la testa al toro, nella mia discussione col sig. Schoeller: la ormai famosa belemnite era certamente giurese, al pari di quelle anteriormente trovate nello stesso Colle, da Carpentier e da B. Studer, come giuresi erano i calcescisti e le breccie a sud ed a levante del Colle della Seigne.

Ma la erronea strada, sulla quale si era messo, non senza qualche cosciente titubanza, H. Schoeller, era già stata battuta, senza esitazione dal prof. Léon Moret, dell'Università di Grenoble, con la pubblicazione, fatta nel 1928, di una carta geologica al 200.000 « della Savoia e delle regioni limitrofe » accompagnata da una notizia esplicativa, una cartina tettonica ed una tavola di profili.

Pur non avendo io ricevuta la carta in grande scala, ma solo la notizia esplicativa, di cui ringrazio vivamente l'autore, la carta tettonica è stata sufficiente, per me che avevo esplorato minutamente la Valle della Allée Blanches, corrente ai piedi del M. Bianco, e quella del Piccolo S. Bernardo, per convincermi in quale incomprensibile ed enorme errore sia caduto L. Moret, nell'attribuire, come fece, alla *nappe du Flysch de l'Embrunais* la grande ed estesissima zona, da lui distinta, nella sua cartina tettonica, con punteggiato nero, fra le masse del M. Bianco, coi relativi involuppi cristallini, e la zona permo-carbonifera, ivi segnata in nero fitto.

Ora io posso affermare, con tutta sicurezza, che la *nappe di Eocene*, indicata nella carta di L. Moret, estesa a tutta la lunghezza del massiccio del M. Bianco, non esiste come tale, e che al posto di essa, invece di Eocene si sviluppano vari terreni fossiliferi, senza però alcuna traccia di fossile eocenico.

Per non ripetermi io rinvio il lettore alle precedenti note stampate: una nei « Rendiconti » dell'Accademia (p. 617 dell'anno 1929) e l'altra nel « Bollettino della Società geologica italiana » (seduta del 23 marzo 1930).

Queste letture, insieme alla visione attenta delle carte geologiche italiane della regione di cui si discute, carte che i colleghi di Francia hanno avuta talora la bontà di elogiare nei loro scritti, e delle carte eccellenti e ben note, anteriori a quelle italiane, convinceranno tutti i colleghi della giustezza delle conclusioni da me precedentemente tratte, nella Nota citata della Società geologica, e della convenienza per i giovani geologi (sia lecito ai vecchi di dare ai giovani qualche amichevole consiglio) di non abbandonare alla leggera i buoni metodi antichi, della ricerca diligentemente controllata, di quello che è possibile vedere, per correre dietro ad ipotesi, siano pure attraenti, le quali sono talora, come nel caso attuale, più o meno prontamente confutabili.

Come mai poté il prof. Léon Moret mettere nella sua carta in una sola ed ipotetica zona carreggiata di Eocene, tante e diverse zone litologiche fossilifere di Lias e di Giurese con facies diverse (*schistés lustrés* e terreni

a facies ordinaria), come il Giurese attorniante il Mont Chétif, e le falde del Mont Fréty e gli sviluppi nei due versanti della valle Ferret; nonchè un Trias altamente cristallino, con dolomie ad Encrinus, gessi, e scisti e porfidi del Permiano? E dove, per colmo, non havvi traccia di fossile eocenico?

La cosa non può essere spiegata, se spiegazione si voglia dare, che con l'assoluta insufficienza, per non dire mancanza, di studio, di quella così interessante regione, da parte di L. Moret.

Certo l'esempio attuale di una ipotesi a prima vista inaccettabile, sarà uno dei più istruttivi esempi dopo quelli riguardanti la inesistenza, da me dimostrata, delle grandi falde del *Grand Saint Bernard* e del *Mont Rose*, e dopo la cocente questione dei grès d'Annot, da me combattuta vittoriosamente, contro alcuni dei più eminenti geologi d'oltr'alpe, i quali, spero, non me ne vorranno.

Amicus Plato, sed magis amica veritas.

Mineralogia (Cristallografia). — *Sulla identità di struttura cristallina della cancrinite del Monte Somma con quella di Mias.* Nota ⁽¹⁾ del Socio F. ZAMBONINI e di A. FERRARI ⁽²⁾.

Come è noto, nel 1860 C. F. Rammelsberg ⁽³⁾ ha pubblicato delle analisi di un minerale del Monte Somma, che A. Scacchi gli aveva inviato come davyna. Il materiale analizzato dal Rammelsberg era così friabile, che si riduceva facilmente in polvere, e l'aspetto era quello di un minerale inizialmente duro, trasparente, ma successivamente alterato.

Si comprende, perciò, come il minerale analizzato dal Rammelsberg sia stato considerato generalmente come una nefelina alterata: E. Dana ⁽⁴⁾, però, ne notò le somiglianze con la cancrinite e ritenne che "the existence of a cancrinite-like mineral (al Vesuvio) can hardly be doubted".

Uno di noi ⁽⁵⁾ fu, di accordo con Dana, della opinione che il minerale

(1) Presentata nella seduta del 4 maggio 1930.

(2) Nel 1927 noi abbiamo iniziato una serie di ricerche röntgenografiche, tendenti a definire le relazioni effettivamente esistenti fra i vari minerali del gruppo nefelina. Le difficoltà incontrate nel trarre conclusioni precise in alcuni casi, il che ci ha costretto a ripetere le esperienze, hanno fatto ritardare la pubblicazione dei risultati ottenuti. È accaduto, così, che B. Gossner e F. Mussnug hanno reso note, in due lavori (Z. Kryst. 52-60; 187-201; 73 (1930)) le conclusioni alle quali sono giunti, rendendo, perciò, inutili buona parte delle nostre ricerche.

Ci limitiamo, perciò, a pubblicare succintamente le indagini che ci hanno permesso di stabilire in modo indubbio la identità della cancrinite del Monte Somma con quella di Mias.

(3) «Pogg. Ann.», 109, 583 (1860).

(4) *System of Mineralogy*, 9 Ed., p. 429.

(5) F. ZAMBONINI, *Mineralogia Vesuviana*, 1910, p. 201.

studiato da Rammelsberg fosse effettivamente affine alla cancrinite: il minerale del Monte Somma si differenziava dalle varietà tipiche di Mias, del Langesund, di Lichtfield, ecc., per contenere un poco di calcio in più e di acqua in meno.

Che si trattasse di una esatta intuizione, fu dimostrato poco dopo dalle ulteriori ricerche del più anziano di noi, il quale ⁽¹⁾ poté studiare dei nitidi cristalli, che permisero anche per la prima volta il calcolo esatto delle costanti cristallografiche della cancrinite, fino allora determinate con grande incertezza ⁽²⁾. La rifrangenza e la forte birifrangenza concordavano perfettamente con le osservazioni eseguite nella cancrinite: l'analisi chimica svelava, però, delle differenze, in confronto con le analisi note della cancrinite. Soprattutto notevoli erano il tenore in calcio più elevato e quello, invece, molto più basso del normale, dell'acqua.

I risultati ottenuti nel minerale del Monte Somma ebbero una conferma molto gradita dalle osservazioni di R. Brauns e di J. Uhlig ⁽³⁾, che studiarono accuratamente un minerale pressochè identico a quello e rinvenuto al lago di Laach.

Anche Brauns e Uhlig riferirono alla cancrinite il loro minerale.

G. Cesaro ⁽⁴⁾, fondandosi su certe sue considerazioni intorno alla formula della cancrinite, ritenne di poter concludere che il minerale del Monte Somma analizzato dal Rammelsberg, e che era sostanzialmente identico, salvo la maggiore friabilità, a quello studiato da uno di noi e riferito alla cancrinite, non poteva affatto riferirsi a quest'ultimo minerale, che secondo il Cesaro non esiste al Monte Somma. Il Cesaro fu di avviso che il minerale di Rammelsberg fosse da considerarsi come una microsommite alterata.

Uno di noi ⁽⁵⁾ mostrò facilmente l'arbitrarietà delle illazioni del Cesaro, che in tutto il suo lavoro, scritto nel periodo del suo esilio dal Belgio, non aveva tenuto presenti le pubblicazioni sull'argomento posteriori al Dana ed alla *Mineralogia Vesuviana*.

È, per altro, indiscutibile, che la composizione chimica della cancrinite del Monte Somma presentava, come abbiamo detto, delle notevoli differenze rispetto a quella delle cancriniti tipiche, e notevole era, poi, la presenza nella prima di cloro (0.54 %), rinvenuto in seguito anche in quella del lago di Laach, quantunque in proporzione minore (0.19 %) da J. Uhlig:

(1) F. ZAMBONINI, *Appendice alla Mineralogia vesuviana*. «Atti R. Accad. Scienze Fis. e Mat. di Napoli» (2*), 15, n. 12, p. 31 (1912).

(2) Le misure di A. E. Törnebohm e di W. C. Brögger nella cancrinite di Elfdalen e di Barkevik erano appena approssimative, oscillando entro diversi gradi, e potevano solo servire per stabilire che la bipiramide osservata corrispondeva a quella della davyna-microsommite le cui faccie formano con la base un angolo di circa 25°.

(3) «Neues Jahrbuch für. Min. Geol. u. s. w.». Beil. Band. 35, 119 e 723 (1913).

(4) «Rivista di min. e crist. ital.», 48, 65 (1916).

(5) F. ZAMBONINI, «Rivista di min. e crist. ital.», 49 (1917).

il cloro veniva a costituire una evidente parentela con la serie davynamicrosommite, mentre quell'elemento non risulta mai constatato nella cancrinite tipica delle rocce eruttive antiche.

Per quel che riguarda il tenore più scarso in acqua della cancrinite del Monte Somma rispetto a quella tipica, è certo che non ha valore.

Già da molti anni è stato dimostrato, che l'acqua della cancrinite non può considerarsi come appartenente alla costituzione del minerale, e che è possibile eliminarla, almeno in gran parte, senza che la trasparenza e la omogeneità dei cristalli ne risultino minimamente turbate⁽¹⁾. Questa osservazione fu confermata da J. Uhlig⁽²⁾. Ulteriori esperienze eseguite da uno di noi (F. Z.) alcuni anni fa, e che non sono state ancora mai pubblicate, hanno permesso di accertare, che l'eliminazione anche di gran parte dell'acqua contenuta nella cancrinite di Mias, negli Urali, non modifica che in modo appena sensibile la birifrangenza. Una laminetta di sfaldatura secondo il prisma $\{10\bar{1}0\}$, dello spessore di 0.092 mm., riscaldata per un'ora a 375° in corrente di aria umida, non presentò la minima differenza rispetto alle condizioni primitive per quanto si riferisce alla limpidezza, alla vivacità dei colori di polarizzazione, ecc.: la birifrangenza, misurata con un compensatore di Babinet, non mostrò una variazione apprezzabile. Altrettanto si notò dopo un riscaldamento ulteriore di un'ora a 420°, sempre in corrente di aria umida. La laminetta fu, allora, arroventata su una lampada Bunsen a completo tiraggio, in un piccolo crogiolino di porcellana, per mezz'ora. La laminetta divenne torbida, evidentemente per la perdita parziale di CO_2 , ma nelle areole sufficientemente trasparenti, fu possibile constatare ancora una forte birifrangenza negativa, alquanto minore di quella iniziale (la diminuzione raggiunse soltanto 0.006).

Tuttavia, appariva desiderabile il poter mostrare che, effettivamente, la concordanza nelle proprietà ottiche tra le cancrinit classiche e quelle del Monte Somma e del Lago di Laach era accompagnata da una identità fondamentale di struttura cristallina, in modo da eliminare ogni dubbio intorno all'appartenenza ad un unico minerale delle cancrinit finora note, ad onta del loro diverso contenuto in acqua.

Mediante un nitido cristallino di cancrinite del Monte Somma si sono ottenuti i risultati seguenti:

(1) F. ZAMBONINI, *Contributo allo studio dei silicati idrati*. « Atti R. Acc. Scienze Fis. e Mat. di Napoli » (2^a) 14 n. 1, p. 48 (1908).

(2) Loc. cit., p. 737.

TABELLA I.

a) *Cristallo rotante di cancrinite del M. Somma secondo la (10.0) anticatodo di ferro.*

N°	$\frac{\theta}{2}$	Intensità	$\text{sen } \frac{\theta}{2}$	K	$d = \frac{\lambda}{2 \text{ sen } \frac{\theta}{2}}$	$h_1 h_2 \cdot h_3$	a
1	13.8	m	0.2383	β	3.675	30.0	12.72
2	15.2	f	0.2622	α	3.685	30.0	12.75
3	18.5	m	0.3172	β	2.750	40.0	12.70
4	20.5	f	0.3505	α	2.758	40.0	12.73
5	23.7	d	0.4023	α	2.405	14.0	12.75
6	26.0	md	0.4385	α	2.205	50.0	12.73

Si hanno ancora altre linee, che sono molto sfumate, sicchè il tenerne conto renderebbe minore l'esattezza della costante calcolata: sono state, perciò, trascurate.

Da questi valori si deduce $a_0 = 12.73 \text{ \AA}$.

TABELLA II.

b) *Cancrinite del M. Somma. Cristallo rotante secondo la {00.1} anticatodo Ni.*

N°	$\frac{\theta}{2}$	Intensità	$\text{sen } \frac{\theta}{2}$	K	$d = \frac{\lambda}{2 \text{ sen } \frac{\theta}{2}}$	$h_1 h_2 \cdot h_3$	c
1	17.0	m	0.2920	β	2.560	00.2	5.120
2	19.0	ff	0.3620	α	2.540	00.2	5.080
3	26.4	dd	0.445	β	1.680	00.3	5.042
4	29.5	m	0.4925	α	1.680	00.3	5.042
5	36.0	md	0.5880	β	1.273	00.4	5.092
6	40.5	mf	0.6500	α	1.275	00.4	5.100
7	75.7	m	0.9690	α	0.853	00.6	5.118

Si ha, perciò, $c_0 = 5.10 \text{ \AA}$. Il rapporto parametrico fondamentale è, quindi, $a:c = 1:0.401$. Questo valore è molto prossimo a quello calcolato

in base alle misure goniometriche nei cristalli di cancrinite del Monte Somma e del lago di Laach. Si ha, infatti:

$$\begin{aligned} a : c &= 1 : 0.4088 && \text{Monte Somma (F. Zambonini)} \\ &= 1 : 0.4052 && \text{Lago di Laach (Brauns).} \end{aligned}$$

Questi valori sono certamente più esatti di quelli dedotti röntgenograficamente.

I risultati da noi ottenuti nella cancrinite del Monte Somma sono vicinissimi ai valori trovati da B. Gossner e F. Mussgnug nelle cancrinite tipica di Mias. I due studiosi tedeschi danno, infatti, $a_0 = 12.60 \text{ \AA}$ e $c_0 = 5.18 \text{ \AA}$, dei numeri, cioè, vicinissimi a quelli che ha fornito a noi la varietà del Monte Somma. Dai parametri reticolari segue, per la cancrinite di Mias, $a : c = 1 : 0.411$, ossia delle costanti molto prossime a quelle trovate goniometricamente per i cristalli del Monte Somma e del Lago di Laach.

A Gossner e a Mussgnug sono sfuggite completamente le ricerche cristallografiche di Zambonini e quelle un poco posteriori di Brauns: ricordano soltanto le misure di Brögger, che per l'angolo $(10\bar{1}0) : (10\bar{1}1)$ ottenne valori oscillanti fra 60° e 66° . I valori sperimentali di Zambonini e di Brauns sono, invece, molto esatti. Piccole differenze tra i cristalli del Monte Somma, del lago di Laach e di Mias devono senza dubbio esistere, non solo per le diverse condizioni di giacitura, e, quindi di formazione, ma anche per le differenze esistenti nella composizione chimica.

L'identità di struttura della cancrinite del Monte Somma con quella di Mias era stata stabilita da noi già molto prima che vedesse la luce il lavoro di Gossner e Mussgnug.

Noi eseguiamo un fotogramma di Debye con anticatodo di cobalto della cancrinite di Mias: se ne è ricavato un valore di a_0 molto prossimo a quello trovato da Gossner e Mussgnug. Abbiamo, inoltre, eseguito i fotogrammi di Laue per la $(10\bar{1}0)$ delle due varietà del Monte Somma e di Mias: essi sono perfettamente sovrapponibili e presentano punti che si corrispondono anche nelle intensità.

Assumendo per le dimensioni della cella della cancrinite i valori

$$a_0 = 12.73 \text{ \AA} \quad \text{e} \quad c_0 = 5.10 \text{ \AA}$$

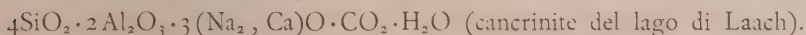
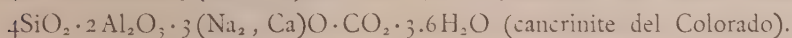
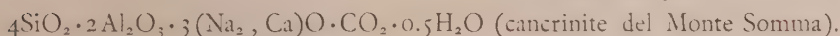
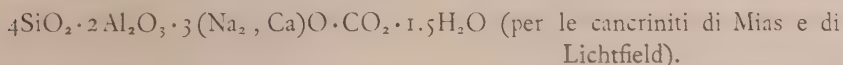
il volume della cella risulterà uguale a 715.7 \AA^3 .

Questo risultato ci permette alcune importanti conclusioni circa la formula chimica della cancrinite.

Molteplici sono le formule proposte per questo minerale, da quando si è riconosciuto il carbonio come un suo costituente essenziale. Discussioni approfondite in proposito si trovano in due lavori di uno di noi, abbastanza antichi, ormai, ma che hanno tuttavia, fin da allora, stabilito quanto era possibile dedurre dalle sole analisi chimiche.

Un risultato importante, per quanto si riferisce alle cancriniti, si trova nel secondo dei lavori di uno di noi ora ricordati⁽¹⁾, ed è che nelle cancriniti spesso oltre al silicato $(\text{Na}_2, \text{Ca}) \text{Al}_2\text{Si}_2\text{O}_8$ ed al carbonato $(\text{Na}_2, \text{Ca}) \text{CO}_3$, si trova un eccesso di silicio e di alluminio. Nella maggior parte delle cancriniti si ha, perciò, uno di quei composti che devono ammettersi nella nefelina per spiegare il di più in silicio rispetto alla formula $\text{Na}_2\text{Al}_2\text{Si}_2\text{O}_8$, e che non possono dedursi, come è stato dimostrato nel lavoro citato di uno di noi, dalle analisi. È, tuttavia, verosimile, che si tratti del composto $\text{NaAlSi}_3\text{O}_8$. Quanto all'eccesso di alluminio, le analisi, al solito, permettono varie interpretazioni, ma può ritenersi probabile, che si trovi sotto forma di Al_2SiO_5 .

Se si prescinde dall'alluminio e dal silicio in più, si può, con sufficiente approssimazione, rappresentare la composizione delle cancriniti con le formule seguenti:



È facile vedere, però, che la formula $2(\text{Na}_2, \text{Ca})\text{Al}_2\text{Si}_2\text{O}_8 \cdot (\text{Na}_2, \text{Ca})\text{CO}_3 \cdot n\text{H}_2\text{O}$ non va d'accordo con i risultati röntgenografici, perchè dalla formula

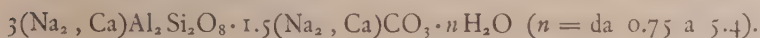
$$d = \frac{M \times 1.66 \cdot 10^{-24}}{715.7 \cdot 10^{-8}}$$

si ha che, per avere d dell'ordine di grandezza di 2.4, che è la densità approssimativa delle cancriniti, occorre che M abbia un valore prossimo a 1000. Ora, la formula su indicata della cancrinite dà $M =$ circa 700, assumendo $1.5\text{H}_2\text{O}$ ed il sodio in prevalenza sul calcio, come effettivamente si verifica di fatto. Con $M = 700$ si ottiene $d = 1.62$ e con un peso molecolare doppio $d = 3.25$, cioè in un caso e nell'altro la densità calcolata verrebbe ad essere del tutto diversa da quella trovata sperimentalmente.

Risultati in accordo con l'esperienza si hanno, invece, se si assume un peso molecolare uguale a $3/2$ di quello risultante dalle formule sopra riferite. La formula della cancrinite risulta, allora, la seguente:



Questa formula si può scrivere:



(1) F. ZAMBONINI, « Atti R. Acc. Scienze Fis. e Mat. di Napoli », XVI (2^a) n. 2 (1914); « Zeitsch. f. Kryst. », 55, 132 (1915).

Il risultato al quale siamo pervenuti è in accordo con le esperienze sintetiche di W. Eitel ⁽¹⁾.

Questo autore è riuscito a dimostrare, studiando il sistema $\text{Na}_2\text{Al}_2\text{Si}_2\text{O}_8$ — CaCO_3 , l'esistenza di un composto $3\text{Na}_2\text{Al}_2\text{Si}_2\text{O}_8 \cdot \text{CaCO}_3$, che appartiene sicuramente alle cancriniti, come risulta dalla sua elevata birifrangenza negativa ($\omega - \varepsilon = 0.031$), ed ha potuto anche preparare dei cristalli misti, pure sicuramente di tipo cancrinitico, con $\omega - \varepsilon = 0.020$, ai quali ha assegnato la formula $3\text{Na}_2\text{Al}_2\text{Si}_2\text{O}_8 \cdot (\text{Na}_2, \text{Ca})\text{CO}_3$.

È evidente, perciò, che il composto $3(\text{Na}_2, \text{Ca})\text{Al}_2\text{Si}_2\text{O}_8 \cdot (\text{Na}_2, \text{Ca})\text{CO}_3$ rappresenta il costituente essenziale delle cancriniti naturali, nelle quali, però, come risulta da quanto abbiamo detto, si ha un eccesso di carbonati, evidentemente allo stato di soluzione solida, ed una quantità variabile di acqua.

Gossner e Mussnug sono pervenuti a risultati analoghi ai nostri. Fondandosi, come noi, sulle esperienze sintetiche di Eitel, hanno assunto, quale composto fondamentale della cancrinite, $3\text{NaAlSiO}_4 \cdot \text{CaCO}_3$, notando, però, che non è possibile ricondurre le analisi a quella formula, perchè rimane un eccesso di « nefelina » e, poi, l'acqua.

Noi abbiamo mostrato, invece, come sia possibile ricondurre le recenti e migliori analisi di cancrinite alla formula:



con un leggero eccesso di carbonati e, poi, una quantità variabile di acqua.

Quanto allo spiegare la presenza di un eccesso di carbonati, possono ricordarsi le nostre esperienze sulla struttura cristallina dell'ortofosfato di piombo e della piromorfite ⁽²⁾. Noi abbiamo, infatti, trovato che i due composti $\text{Pb}_3(\text{PO}_4)_2$ e $3\text{Pb}_3(\text{PO}_4)_2 \cdot \text{PbCl}_2$ possiedono struttura cristallina vicinissima, e che il cloruro di piombo sembra come riempire gli spazi che rimangono tra i costituenti del fosfato. Si comprende, perciò, la possibilità di trovare quantità variabili di alogenuro, come effettivamente ha trovato uno di noi ⁽³⁾ nell'apatite sintetica preparata secondo Forchhammer e che contiene meno cloro della cloroapatite normale, e come si possano sostituire all'alogenuro di piombo altri composti, per esempio il cromato ⁽⁴⁾. Nel nostro caso, a seconda del rapporto $\text{Na}_2 : \text{Ca}$ nel silicato e nel carbonato, potranno aversi quantità diverse di quest'ultimo nella struttura.

Certo è che la cancrinite non ha una composizione costante, come è stato messo in evidenza da uno di noi fin dal 1908 ed è stato sempre meglio confermato dalle ricerche ulteriori.

(1) *Ueber die Synthese der Feldspatvertreter*. Preisschriften der Fürstlich Jablonowskischen Gesellsch. zu Leipzig, 1925, p. 221.

(2) F. ZAMBONINI e A. FERRARI, « Rend. R. Accad. Lincei » (6^a) 7. 1^o sem., 283 (1929).

(3) F. ZAMBONINI, « Rivista di min. e crist. ital. », 45, 103 (1916).

(4) G. CAROBBI, « Bollettino Società Nat. di Napoli », 41, 103 (1929).

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Il significato del principio della media aritmetica* ⁽¹⁾. Nota di GIULIO BEMPORAD, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. CASTELNUOVO.

Mi sono occupato, in alcune Note precedenti, del principio della media aritmetica, basandolo su postulati il cui concetto è assai diverso da quello a cui si ispirano le dimostrazioni e le discussioni esposte da altri. Nella concezione comune il principio scaturisce dal quesito seguente: Si dispone di n misure indipendenti di una stessa grandezza, le quali sono affette da errori di misura, e i cui risultati non coincidono perciò in un unico valore. È possibile, e come, ricavare il « valore vero » della grandezza misurata, sulla base di questi valori errati? A parte il fatto che il « valore vero » bene spesso non esiste o non si saprebbe come definirlo, il quesito così posto è assurdo. Tuttavia l'esperienza dimostra che, se le osservazioni sono in numero grandissimo, esiste un valore determinato intorno al quale si addensano i risultati delle misure eseguite, e questo valore può essere calcolato prendendo la media aritmetica di tutti i valori, e può anche essere chiamato valore vero. In questo ha però parte essenziale l'ipotesi che le misure siano in numero grandissimo. Se le misure sono in numero limitato, le indagini fatte, in particolar modo, dal Pizzetti, dimostrano che non si può in alcun modo estendere a questo caso il procedimento, sulla base di considerazioni analoghe. Quel valore che noi ricaviamo formando la media, o la media pesata quando ne sia il caso, non ha alcun significato rispetto al valore vero, e si può giungere fino a dire che per una conoscenza sicura dell'entità della grandezza misurata, misure in numero insufficiente sono *del tutto inutili*.

Io parto da un ordine di idee assai diverso. Un numero limitato qualsiasi di misure costituisce un materiale d'osservazione sempre suscettibile di essere aumentato e completato con altre misure, fino magari a perve-

(1) La presente Nota ha lo scopo di riassumere e, in taluni punti, di completare e chiarire quanto in sostanza trovasi già esposto nelle mie Note precedenti di cui è fatto cenno nel testo. Tali mie Note hanno dato luogo ad una interpretazione inesatta da parte del prof. TORTORICI (v. questi « Rendiconti », vol. X, fasc. 9°), ciò che mi ha condotto a tornare sull'argomento, non per portare trasformazioni concettuali alla dimostrazione, ma per darne una redazione che valga a dirimere ogni possibilità di equivoco.

(2) Nella seduta del 4 maggio 1930.

nire a quel numero di misure grandissimo che si richiede perchè possa trarsene con sicurezza il cosiddetto valore vero. Già una sola misura ci dà un primo valore provvisorio, che da solo non presenta utilità alcuna, ma che messo insieme con altri valori analogamente ricavati porterà un suo contributo alla conoscenza della grandezza misurata. È, ora, possibile trarre anche da un sistema di *più* misure *un valore* che abbia significato analogo, e che da sè solo rappresenti e riassume tutto il contributo che alla conoscenza del valore vero può portare il complesso delle misure attualmente disponibili? Questo valore io lo ho indicato con la locuzione « risultato complessivo delle misure » con lo scopo di mettere in evidenza il significato della ricerca e di evitare ogni confusione che potesse sorgere dall'uso delle parole « valore conveniente » o « valore plausibile ».

È evidente che il risultato complessivo, dovendo riassumere tutto ciò che altrimenti dovrebbe essere ricavato dalle singole misure da cui esso deriva, deve soddisfare alla condizione seguente: Se ognuna delle quantità X_1, X_2, \dots è il risultato complessivo di una serie di misure, formando un'unica serie di valori da tutte le singole serie, il risultato complessivo di questa deve potersi ricavare con operazioni eseguite sulle X . Come primo postulato fondamentale io assumo che tali operazioni siano le stesse che si dovrebbero eseguire se le X fossero risultati di misure dirette (beninteso non eseguite nelle stesse condizioni e nello stesso modo delle misure singole da cui ciascuna di esse è stata ricavata). Questo postulato non è affatto arbitrario. Esso risponde al concetto che il modo col quale si usa il risultato complessivo di più misure debba essere identico al modo col quale si usa il risultato diretto di una misura, che risultato di una misura e risultato di più misure debbano essere enti dello stesso genere.

Per dare a questo postulato una conveniente forma matematica occorre rilevare che la necessità di considerare insieme quantità come le X risultanti ciascuna da misure in numero in generale diverso, e anche quantità cosiffatte insieme con risultati diretti di misura, obbliga, almeno in un primo tempo, a prescindere completamente dall'ipotesi che le misure abbiano la stessa attendibilità per essere ottenute nello stesso modo e nelle stesse condizioni. D'altra parte non è certo possibile ammettere che il risultato complessivo debba ricavarsi nello stesso modo sia che tale condizione sia soddisfatta sia in caso diverso. È logico pensare sin da principio che il risultato complessivo non potrà essere dato da una funzione $f(x_1, x_2, \dots)$ di esse, perfettamente determinata in modo indipendente da ogni ipotesi sul modo con cui le x sono state ricavate. Indicherò con $Rc(x_1, x_2, \dots, x_n)$ il risultato complessivo delle n misure x_1, x_2, \dots, x_n avvertendo espressamente che questo simbolo non deve affatto intendersi come simbolo di funzione. Rc sarà bensì dato in ogni caso da una funzione delle x , ma da una funzione diversa da caso a caso. Assumo come ulteriori postulati che

in ogni caso la corrispondente funzione f debba soddisfare alle condizioni

$$(I) \quad \begin{cases} h + f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1 + h, x_2 + h, \dots, x_n + h) \\ h \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(hx_1, hx_2, \dots, hx_n) \end{cases}$$

qualunque sia h . Queste stabiliscono l'indipendenza del risultato complessivo dalla unità di misura e dallo zero.

Abbiamo allora: Se x_1, x_2, \dots, x_n sono n misure, distribuiamo questi numeri in k gruppi, in modo arbitrario, sia per quanto riguarda il numero dei gruppi, sia per quanto riguarda il numero delle misure che si pongono in ciascun gruppo, sia infine per quanto riguarda l'ordine in cui le x vengono considerate. Si deve avere sempre:

$$Rc(x_1, x_2, \dots, x_n) = Rc(X_1, X_2, \dots, X_k)$$

in cui

$$X_1 = Rc(x_1, x_2, \dots, x_{h_1})$$

$$X_2 = Rc(x_{h_1+1}, x_{h_1+2}, \dots, x_{h_2}) \quad (h_1 + h_2 + \dots + h_k = n)$$

.....

e in cui Rc è dato ogni volta da una funzione (volta a volta diversa) che soddisfa alle condizioni (I).

Questo complesso di condizioni risponde concettualmente alle considerazioni precedenti, ma è analiticamente sovrabbondante. Volendo enunciare i postulati in modo che essi contengano soltanto ciò che è matematicamente necessario, basta dire:

I. Il risultato complessivo di n misure si ottiene formando da prima il risultato complessivo di due di esse, indi il risultato complessivo corrispondente al valore così ottenuto e ad una terza misura, e così di seguito fino all'esaurimento di tutte le misure: il risultato finale è indipendente dall'ordine in cui si sono considerate le misure.

II, III. Il risultato di due misure x, y è dato da una funzione $f(x, y)$ che soddisfa alle condizioni

$$(I') \quad \begin{cases} f(x + h, y + h) = h + f(x, y) \\ f(hx, hy) = h \cdot f(x, y) \end{cases}$$

A posteriori si verificherà poi che queste condizioni conducono alla conclusione che il risultato complessivo di n misure soddisfa alle (I) e che, se si raggruppano le misure in modo arbitrario anzichè nel modo particolare indicato dall'enunciato I, si ottiene sempre lo stesso risultato.

Dalle (1') risulta subito che il risultato complessivo di due misure ha la forma

$$(2) \quad \frac{ax + by}{a + b}.$$

Nelle mie Note precedenti ho dimostrato questo ammettendo che il risultato complessivo debba essere una funzione continua e derivabile, trasformando le (1) nel semplice sistema di equazioni a derivate parziali a cui in tale ipotesi esse equivalgono, e integrando. La (2) si può tuttavia dimostrare anche direttamente, senza alcuna ipotesi sulla continuità e derivabilità della f .

Posto

$$f(x, y) = x + \varphi(x, y)$$

le (1') danno per φ le condizioni

$$(3) \quad \varphi(x + h, y + h) = \varphi(x, y)$$

$$(4) \quad \varphi(hx, hy) = h\varphi(x, y).$$

La (3) esprime che φ non si altera aumentando di una stessa quantità le x, y , ossia che essa è funzione solo della differenza $z = x - y$. Indicando con $\theta(z)$ questa funzione, la (4) dà

$$\theta(hz) = h\theta(z),$$

e quindi

$$h \cdot \theta(z) = z \cdot \theta(h)$$

$$\frac{\theta(z)}{z} = \frac{\theta(h)}{h} = \text{cost.}$$

La funzione $\theta(z)$ è dunque il prodotto della variabile per una costante arbitraria k , e quindi

$$f(x, y) = x + k(x - y)$$

che equivale alla (2).

Il risultato complessivo di due misure è dunque una combinazione lineare dei risultati singoli con coefficienti aventi per somma 1, o, brevemente, una loro *media pesata* ⁽¹⁾.

Se ora $f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ è una media pesata delle x_1, x_2, \dots, x_{n-1} la

$$(5) \quad \frac{af_{n-1} + bx_n}{a + b}$$

(1) È appena necessario, ma forse non inutile, avvertire che qui media pesata sta solo a indicare la *forma* della funzione: con questa parola non si fa alcun uso nè, per il momento, si introduce il concetto di *peso*.

risulta a sua volta una media pesata delle x_1, x_2, \dots, x_n , nella quale i pesi delle x_1, x_2, \dots, x_{n-1} risultano identici a quelli con cui le quantità stesse figurano in f_{n-1} . Ne segue che con le operazioni successive indicate nel primo postulato si perviene in ogni caso a una funzione della forma

$$(A) \quad \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

con coefficienti che risultano dipendenti ciascuno dalla misura a cui è applicato, ma non dall'ordine con cui le x vengono successivamente considerate.

Nel caso particolare che le x siano egualmente attendibili per essere ottenute in condizioni identiche, è naturale di ammettere come ulteriore postulato il seguente:

IV. Se le misure sono egualmente attendibili, il loro risultato complessivo è una loro funzione simmetrica.

Questo postulato, nel caso in cui è applicabile, determina i coefficienti a_i giacchè la (A) diviene simmetrica allora ed allora soltanto che le a_i siano eguali fra loro, nel qual caso si riduce alla media semplice.

Abbiamo come conclusione: « Il risultato complessivo di n misure è una loro combinazione lineare con coefficienti aventi per somma 1 ». Chiamando media pesata un tal tipo di funzione e pesi i coefficienti a_i che compaiono nella (A), esaminiamo il significato di questi coefficienti, e perveniamo così dalla definizione puramente formale al concetto di peso.

Abbiamo intanto: 1. Per il postulato IV osservazioni fatte nelle stesse condizioni e perciò egualmente attendibili hanno pesi eguali. 2. Se x_1, x_2, \dots, x_n sono ciascuna il risultato di una serie di misure in numero rispettivamente di k_1, k_2, \dots, k_n e se tutte le $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ misure sono fatte nelle stesse condizioni, il loro risultato complessivo è dato da

$$\frac{\sum a_i x_i}{\sum a_i}, \quad \text{con } a_i = k_i$$

giacchè esso deve coincidere col risultato complessivo calcolato sulle misure dirette: ossia il peso del risultato di k misure di peso 1 è eguale a k .

3. Più generalmente, come analogamente si vede, se x_1, x_2, \dots, x_n sono n misure indipendenti i cui pesi siano stati comunque determinati, il peso del loro risultato complessivo riesce parimenti determinato ed eguale alla somma dei pesi delle x .

I pesi coi quali le misure dovranno essere combinate per formare il risultato complessivo appaiono perciò come numeri da determinarsi sul fondamento delle condizioni nelle quali le varie misure sono state eseguite o del modo con cui i vari risultati sono stati ottenuti.

Siano ora x, y due risultati di misura ottenuti il primo come risultato complessivo di k misure di peso 1, e il secondo come risultato diretto

di una misura a cui si sia comunque condotti ad attribuire il peso k . Il risultato complessivo delle x, y risulta eguale alla loro media semplice, e, da questo punto di vista, le x, y appaiono equivalenti a due misure eseguite nelle identiche condizioni. Attribuire il peso k ad una misura è dunque come ritenerla egualmente attendibile rispetto al risultato complessivo di k misure di peso 1. Un criterio con cui si possa stabilire un paragone di questo genere è fornito dalla teoria degli errori. All'infuori di questo criterio, e quindi di un criterio generale con cui si possano fissare numericamente i pesi delle osservazioni, il concetto di peso con le sue proprietà fondamentali risulta però già dalla nostra discussione.

Matematica. — *Un teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale.* Nota di R. CACCIOPPOLI, presentata⁽¹⁾ dal corrisp. G. SCORZA.

Per le equazioni funzionali di una classe estesissima (p. es., equazioni differenziali ordinarie, equazioni integrali di seconda specie, equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico), che assumono naturalmente, per dir così, la forma $f = S[f]$, S dinotando una *trasformazione funzionale* (*transmutation*), l'esistenza di una soluzione si dimostra ricorrendo al metodo generale di *iterazione* (o delle *approssimazioni successive*), che fornisce simultaneamente un *teorema di unicità* ed un procedimento teorico di calcolo.

Accanto a questi, l'esempio di un risultato di natura affatto diversa è dato dal noto teorema di Peano sull'esistenza di integrali (non individuati generalmente dalla condizione iniziale) per ogni equazione del tipo

$$y' = F(x, y),$$

sotto la sola ipotesi della continuità del secondo membro; e dello stesso tipo, p. es., sono alcuni recenti risultati di Hammerstein sulle equazioni integrali non lineari⁽²⁾.

Una forma generale per le condizioni assicuranti la convergenza dei processi di iterazione si ottiene immediatamente estendendo agli spazi funzionali il teorema di Schröder sulla risoluzione dell'equazione $x = F(x)$ ⁽³⁾. Scopo precipuo di questa Nota è di mettere in evidenza un teorema di natura topologica, che è alla radice di molti teoremi puramente esistenziali del secondo tipo; e di indicarne alcune applicazioni.

(1) Nella seduta del 27 aprile 1930.

(2) *Über nichtlineare Integralgleichungen*. «Jahresb. der Deutschen Math. Vereinigung», t. 38 (1929), pp. 21-28.

(3) *Über unendlich viel Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen*. «Math. Ann.», t. 2 (1870), pp. 317-365.

1. Nello spazio Σ delle funzioni di x continue nell'intervallo (a, b) sia assegnata una trasformazione funzionale

$$(1) \quad \varphi(x) = S[f(x)]^{(1)}.$$

Supponiamo S continua, tale cioè che al tendere di $f(x)$ uniformemente ad un limite, la trasformata $\varphi(x)$ tenda anche essa uniformemente ad una funzione, trasformata del limite di f . Supponiamo inoltre che, descrivendo f l'intero spazio Σ , φ descriva una porzione compatta Σ' di Σ , cioè un insieme tale che da ogni sua successione possa estrarsene una convergente uniformemente; Σ' sarà dunque costituito da funzioni equicontinue.

Dimostreremo che la trasformazione S possiede necessariamente almeno un elemento unito, cioè che l'equazione funzionale

$$(2) \quad f(x) = S[f(x)]$$

ammette almeno una soluzione in Σ .

Dividiamo l'intervallo (a, b) in n parti eguali mediante i punti $x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$: siano y_0, y_1, \dots, y_n i valori assunti in questi da una qualunque funzione f lineare in ognuno degli intervalli di suddivisione, e $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n$ i corrispondenti valori della trasformata φ di f . L'insieme dei sistemi $(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n)$ è limitato, per essere le funzioni φ equilimitate; sicchè la corrispondenza fra le y e le η trasforma uno spazio ad $n + 1$ dimensioni in una sua porzione limitata. Ora, è immediata conseguenza di un teorema fondamentale di Brouwer⁽²⁾ che una siffatta trasformazione ammette almeno un elemento unito: potremo pertanto costruire una successione di funzioni lineari a tratti, f_1, f_2, f_3, \dots , la n^{ma} delle quali coincida con la sua trasformata φ_n in ognuno dei punti che dividono (a, b) in n parti eguali. L'insieme delle funzioni φ_n essendo compatto, lo sarà anche quello delle f_n , e dippiù convergendo una successione parziale $\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, \dots$ convergerà al medesimo limite la successione f_{n_1}, f_{n_2}, \dots . Tale limite sarà un elemento unito nella trasformazione (1), in virtù della continuità postulata per quest'ultima.

Sicchè se nella trasformazione (1) allo spazio Σ corrisponde un insieme compatto, la (2) ammette certamente soluzioni.

In particolare, esistono sempre soluzioni per le equazioni funzionali

$$y(x) = b(x) + \int_a^b K(x, \xi) F(y(\xi)) d\xi,$$

$$y(x) = c + \int_a^x F(\xi, y(\xi)) d\xi,$$

(1) Volendo mettere in evidenza che $S[f]$ dipende da x , si scriverà, con la notazione di VOLTERRA, $S[f, x]$.

(2) Ogni trasformazione continua dell'« elemento » ad n dimensioni in sé ammette almeno un punto unito. (Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, « Math. Ann. », t. 71 (1912), p. 115).

dove h, K, F sono simboli di funzioni continue, l'ultima *limitata*; ed il teorema di esistenza per la seconda è appunto quello surricordato di Peano⁽¹⁾.

2. Consideriamo ora l'equazione differenziale

$$(3) \quad y^{(n)} = F(x, y', y'', \dots, y^{(n-1)}),$$

dove F , definita per $a \leq x \leq b$, e per ogni sistema di valori degli altri argomenti, è continua e limitata.

Data y , la funzione χ verificante l'equazione

$$\chi^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

e le condizioni

$$\chi(x_1) = c_1, \chi(x_2) = c_2, \dots, \chi(x_n) = c_n,$$

essendo x_1, x_2, \dots, x_n n punti qualunque dell'intervallo (a, b) , è completamente determinata e data dalla formola

$$(4) \quad \chi(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x F[\xi, y(\xi), \dots, y^{(n-1)}(\xi)] (x - \xi)^{n-1} d\xi + \\ + \alpha_0 x^{n-1} + \alpha_1 x^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1},$$

dove le α sono certi funzionali in y , l'insieme dei cui valori è limitato.

Che l'insieme delle funzioni χ sia compatto non basta per assicurare l'esistenza di elementi uniti nella trasformazione (4), non essendo questa continua nel senso del numero precedente (la sua continuità, secondo una locuzione d'uso frequente, è di *ordine* $n-1$, mentre quella della S è di *ordine zero*). Ma v'ha di più: le derivate delle χ sono anch'esse equicontinue, fino a quelle di ordine $n-1$.

Si potrà allora dimostrare l'esistenza di elementi uniti per la (4) modificando in questo il procedimento generale che si sceglieranno funzioni trasformande y dotate di derivate $(n-1)^{me}$ coincidenti nei punti di suddivisione con le derivate $(n-1)^{me}$ delle corrispondenti funzioni χ , mentre che nel punto a , inoltre, coincideranno $\chi, \chi', \dots, \chi^{(n-2)}$ con $y, y', \dots, y^{(n-2)}$ rispettivamente.

Esistono dunque integrali dell'equazione (3) assumenti in n punti qualunque valori prestabiliti ⁽²⁾.

(1) Vedi su quest'argomento la monografia di MÜLLER, *Neuere Untersuchungen über den Fundamentalsatz* usw. « Jahresb. der Deutschen Math. Ver. », t. 37 (1928), pp. 33-48.

La funzione $F(x, y)$ può supporre continua in y soltanto, e maggiorata da una funzione sommabile di x .

(2) Questo teorema è stato dato, per $n=2$, da G. SCORZA, nella Memoria (in corso di stampa nei « Math. Ann. »): *Il problema dei valori ai limiti studiato in grande per gli integrali dell'equazione differenziale del secondo ordine*.

Più generalmente sussiste il seguente teorema la cui dimostrazione è la stessa:

Scelti comunque n punti x_1, x_2, \dots, x_n , in (a, b) , e posto $y_{ik} = y^i(x_k)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$; $k = 1, 2, \dots, n$), esiste sempre almeno un integrale della (3), supposta avere secondo membro continuo e limitato, che verifica n condizioni lineari qualunque,

$$L_1[y_{ik}] = 0, \quad L_2[y_{ik}] = 0, \quad \dots, \quad L_n[y_{ik}] = 0,$$

purchè per un polinomio di grado $n-1$ le condizioni $L_i = c_i$ siano compatibili per ogni sistema di valori delle costanti c .

Questo teorema è, p. es., applicabile all'equazione

$$y'' + \alpha^2 \sin y = \beta \sin x \quad (\alpha, \beta \text{ costanti})$$

che occorre nello studio delle oscillazioni forzate di un pendolo⁽¹⁾.

3. Il risultato generale implicitamente stabilito nella dimostrazione del teorema precedente può formularsi con lo stesso enunciato del n. 1, attribuendo soltanto ai termini un nuovo significato: lo spazio Σ diventa allora quello delle funzioni dotate di derivate continue fino alla $(n-1)^{ma}$, e la distanza fra due funzioni f_1, f_2 , diventa, p. es., il massimo fra i massimi delle n funzioni $|f_1 - f_2|, |f'_1 - f'_2|, \dots, |f_1^{(n-1)} - f_2^{(n-1)}|$ (o pure la somma di questi massimi); conseguentemente la continuità di S è di ordine $n-1$, ed un insieme compatto risulta costituito da funzioni equicontinue con le loro derivate fino alle $(n-1)^{me}$.

E da questo punto di vista si scorgono subito altre accezioni del medesimo teorema: p. es., lo spazio Σ può essere quello delle funzioni di quadrato sommabile, la distanza di due funzioni f_1 e f_2 essendo allora

$$\sqrt{\int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]^2 dx},$$

e la convergenza pertanto quella *in media*.

Il nostro teorema estende allora in sostanza quello di Brouwer allo spazio hilbertiano; e si applica subito anche in questa forma alla dimostrazione dell'esistenza degli integrali di un'equazione differenziale⁽²⁾.

4. Si possono considerare anche funzioni dipendenti da più variabili: per fissare le idee, le funzioni f siano definite nel quadrato fondamentale Q del piano xy . Per applicare il procedimento del n. 1, si prenderanno funzioni trasformande f_n lineari ciascuna nei triangoli di una rete p_n distesa su Q , che si restringa indefinitamente al divergere di n : p. es., diviso

(1) Vedi HAMEL, *Über erzwungene Schwingungen bei endlichen Amplituden*. «Math. Ann.», t. 86 (1922) pp. 1-13.

(2) Cfr. HAMMERSTEIN, *Ein Existenzbeweis für Systeme von Differentialgleichungen usw.*, «Jahresh. der Deutschen Math. Ver.», t. 38 (1929) pp. 238-243.

Q in n^2 quadrati eguali $Q_{kk}^{(n)}$, f_n sarà una funzione lineare in ognuno dei triangoli ottenuti dividendo questi quadrati mediante una diagonale, e coincidente con la sua trasformata φ_n in tutti i vertici.

Fra le applicazioni del teorema generale si presenta allora la seguente estensione del teorema di Peano alle equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico:

Se la funzione $F(x, y, z)$, definita nel dominio rettangolare R di estremi (a', b') e (a'', b'') e per tutti i valori di z è continua e limitata, l'equazione

$$(5) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = F(x, y, z)$$

ammette sempre almeno un integrale $z(x, y)$ definito in R e soddisfacente le condizioni $z(x, b') = z_1(x)$, $z(a', y) = z_2(y)$ [$z_1(a') = z_2(b')$].

Infatti le funzioni

$$-z_1(a') + z_1(x) + z_2(y) + \int_{a'}^x \int_{b'}^y F[\xi, \eta, z(\xi, \eta)] d\xi d\eta$$

sono equicontinue.

All'integrale della (5) si possono anche imporre le condizioni di Cauchy⁽¹⁾.

Osserviamo poi ancora che il particolare processo di decomposizione proposto per Q conduce a funzioni f_{n_i} convergenti uniformemente con le loro derivate prime sempre che la funzione limite sia dotata di derivate continue; sicchè il teorema generale è applicabile allo spazio Σ delle funzioni di più variabili continue con le loro derivate. Il teorema precedente ammette pertanto questa generalizzazione:

L'equazione

$$(6) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

ammette sempre integrali verificanti assegnate condizioni di Cauchy, purchè il suo secondo membro sia continuo e limitato.

Teoremi analoghi potrebbero dimostrarsi per le equazioni di tipo ellittico, previamente trasformate in equazioni integrali. P. es., un integrale dell'equazione

$$(7) \quad \Delta_2 z = F(x, y, z),$$

definito in un dominio D , sulla cui frontiera C coincida con un'assegnata funzione $\omega(x, y)$, verifica l'equazione

$$(8) \quad z(x, y) = \omega(x, y) - \frac{1}{2\pi} \iint_D G(x, y; \xi, \eta) F[\xi, \eta, z(\xi, \eta)] d\xi d\eta,$$

(1) Vedi p. es., GOURSAT, *Cours d'Analyse Mathématique* (4^e éd.), t. III, p. 116.

dove $u(x, y)$ è la funzione armonica in D che assume su C i valori di $\omega(x, y)$, e G è la funzione di Green relativa al contorno C . Ed alla (8) è applicabile il nostro teorema generale se la funzione F è continua e limitata.

5. Per terminare, poichè abbiamo accennato in principio al metodo delle approssimazioni successive, non sarà forse inutile enunciare esplicitamente un criterio generale per la convergenza dei processi di iterazione: criterio che fornisce un teorema di esistenza affatto diverso da quello del n. 1, e completato da un teorema di unicità.

Se in uno spazio funzionale metrico completo⁽¹⁾ una trasformazione S converte due elementi aventi distanza d in due altri la cui distanza d' stia a d in un rapporto inferiore ad un numero fisso $\alpha < 1$, S ammette un elemento unito ed uno solo, E ; detto E' un altro elemento qualunque, si ha

$$E = \lim_{n \rightarrow \infty} S^n [E'],$$

essendo S^n la trasformazione risultante dall'applicare n volte consecutive la S ⁽²⁾.

È questa l'estensione del teorema citato di Schröder. La dimostrazione ne è immediata.

Si può dire che la S opera una *contrazione* dello spazio considerato: ora, una contrazione non trasforma in generale lo spazio in un insieme compatto, come prova senz'altro l'esempio banale $S[f] = kf$, con $k < 1$; nè una trasformazione che converta lo spazio in un insieme compatto è necessariamente una contrazione, come mostra quella già considerata

$$\varphi(x) = c + \int_a^x F[\xi, f(\xi)] d\xi,$$

che notoriamente ammette in generale più di un elemento unito.

Pertanto, le iterate di una *trasformazione di Volterra*, cioè di una trasformazione in cui, come nella precedente, $\varphi(x)$ non dipende nell'intervallo (a, x) che dalla forma di $f(x)$ nello stesso intervallo, convergono sotto condizioni meno restrittive delle precedenti. Ma su ciò non insisteremo qui oltre.

(1) È questo uno spazio in cui è data una definizione di distanza per cui è valido il criterio di convergenza di Cauchy.

(2) Vedi BANACH, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits etc.* («Fundamenta Mathematicae», t. III [1922] pp. 133-181) p. 160.

Matematica. — *Sopra gli integrali della* (1) $\Delta u = c(M) u(M)$ ($c \geq 0$) *nelle vicinanze di un punto singolare O della* $c(M)$. Nota di M. BRELOT, presentata⁽¹⁾ dal Socio V. VOLTERRA.

1. Completerò qui uno studio cominciato in Note precedenti⁽²⁾, prendendo le ipotesi dell'ultima (2 marzo 1930). Ma voglio prima tornare a questa per indicare una piccola modificazione necessaria delle dimostrazioni. Nel n. 4 ho enunciato la proprietà di non-multiplicità, per valori dati su un contorno γ circondante O, di un integrale corrispondente a una sorgente *semplice* di flusso dato; ho osservato che, dal teorema del n. 2, se il flusso è nullo, la proprietà è vera perchè l'integrale è limitato nel modulo; si potrebbe completare subito se fosse sicuro che la differenza di due integrali corrispondenti a sorgenti calde, almeno nel caso di flussi uguali, sia limitata o superiormente, o inferiormente. Osserverò semplicemente che nella dimostrazione d'esistenza del n. 5 è solamente utilizzata la proprietà che per una sorgente *calda* di flusso *nullo*, l'integrale corrispondente è limitato nel modulo; e si vede che questa dimostrazione stabilisce l'*unicità* sopra-detta, visto il modo di ottenere l'integrale, supposta esistente e studiata. Così non c'è più difficoltà.

2. Si sa che, se una funzione u armonica nelle vicinanze di O, tranne forse in O, soddisfa a:

$$(2) \quad u(M) \geq -A \log \frac{1}{OM} \quad (A = \text{cost} > 0),$$

deve essere della forma:

$$(3) \quad B \cdot \log \frac{1}{OM} + f. \text{ arm. anche in O} \quad (B = \text{cost}).$$

Senza fare la dimostrazione speciale di Stozek⁽³⁾, osserverò che questo si deduce subito dal teorema analogo per il quale la (2) è cambiata colla: $u(M) \leq 0$, teorema di Picard ben conosciuto. Infatti, poichè

$$u + A \log \frac{1}{OM} \geq 0, \quad u + A \log \frac{1}{OM}$$

sarà della forma (3), quindi la proprietà.

(1) Nella seduta del 4 maggio 1930.

(2) «Rendiconti della R. Acc. Naz. dei Lincei», 2 febbraio 1930 (vol. XI, fasc. 3, p. 268); 16 febbraio 1930 (fasc. 4, p. 371); 2 marzo 1930 (fasc. 5, p. 458).

(3) «C.-R., Ac. Sc.», 9 marzo 1925.

Non vi è un teorema analogo per la (1), perchè possono essere integrali ≥ 0 , per i quali O non è sorgente, non avendo senso $(1) \iint cu \, d\sigma$. Ma si può stabilire che, per un integrale u tale che, nelle vicinanze di O

$$(4) \quad |u| \leq \alpha \log \frac{1}{OM}, \quad \alpha = \text{cost} > 0, \quad O \text{ è sorgente semplice,}$$

quindi l'integrale è della forma precisata nell'ultima Nota.

Basterà provarlo quando u è nulla su γ circondante O e non limitata superiormente. Come nell'ultima Nota n. 5, consideriamo la $c_n(M)$ e poi $u_n(M)$ nulla su γ , ammettendo O come singolarità logaritmica di valore $A > \alpha$. Si vedrà facilmente che u_n tende, non crescendo, verso un integrale ≥ 0 : sia $v \geq u$, integrale nullo su γ , ma non dappertutto, quindi tale che O sarà per esso sorgente calda di flusso $2\pi A$. Allora: $-u + v \geq 0$

e $\frac{|-u + v|}{\log \frac{1}{OM}}$ è limitata.

Dunque per l'integrale $(-u + v)$ nullo su γ , O sarà sorgente calda. Secondo la proprietà di non molteplicità per valori dati sul contorno e flusso dato, $(-u + v)$ sarà proporzionale a v , dunque anche u , quindi il teorema.

3. Senza entrare nelle particolarità, aggiungo che i miei studi anteriori della (1) nel piano (2) , possono essere fatti analogamente nello spazio; vi è solamente una differenza importante per lo studio delle vicinanze del « punto all'infinito ».

Nel piano come nello spazio, si potrebbero studiare direttamente i problemi in cui entra il punto all'infinito con metodi analoghi, ma è più comodo ridurre lo studio all'infinito a quello delle vicinanze di un punto O a distanza finita, utilizzando, per il piano una *inversione* come ho già detto, e per lo spazio la trasformazione di Lord Kelvin.

Sia: $OM \cdot OM' = 1$, Δ e Δ' le operazioni del Laplaciano per M e M' . È ben conosciuto che per il Laplaciano ordinario è, nel piano:

$$\Delta'(u) = \frac{1}{OM'^2} \Delta u$$

e nello spazio:

$$\Delta'\left(\frac{u}{OM'}\right) = \frac{1}{OM'^5} \Delta u.$$

(1) Per esempio, con $c(M) = \frac{1}{OM^2}$, vi è $u = \frac{1}{OM}$.

(2) « C.-R., Ac. Sc. », 30 dicembre 1929, 13 gennaio, 3 febbraio, 17 febbraio 1930; « Rendiconti dei Lincei », Note precitate.

Questo è ancora vero per il Laplaciano generalizzato che ho adottato precedentemente⁽¹⁾, e per una funzione u di cui la Δu è *continua*; infatti l'ha stabilito il prof. G. Bouligand che avevo consultato su questo punto.

Nel piano, all'infinito, si hanno per integrali di modulo, sia limitato, sia soddisfacente a una condizione (4) (con O punto a distanza finita e OM infinitamente grande), enunciati analoghi a quelli dati per le vicinanze di un punto a distanza finita.

Invece, nello spazio, all'infinito, vengono i risultati seguenti molto diversi:

Ogni integrale u limitato nel modulo è la somma di un integrale $\rightarrow 0$ all'infinito, e, se u non tende a 0 all'infinito, di un altro $0 \geq u$, $0 \leq u$, avendo all'infinito un « valore medio » $\mu \neq 0$, con « quasi-continuità ». Per il problema di Dirichlet esterno e anche per il piano intero⁽²⁾, vi è una sola soluzione per il valore 0 all'infinito e non possono esistere due soluzioni diverse (limitate nel modulo) preendenti all'infinito un « valore medio » finito dato μ . Se $\mu = 0$ ce n'è una che tende a 0 all'infinito.

Aggiungiamo che per $\mu \neq 0$, se $c(M) < \frac{1}{OM^2 - \epsilon}$ ($\epsilon > 0$) ce n'è una e se $c(M) > \frac{\alpha}{OM^2}$ ($\alpha > 0$) non c'è.

Matematica. — *Sur une méthode générale de recherches des propriétés invariantes des figures géométriques.* Nota di G. NICOLADZÈ, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) « Rendiconti dei Lincei », Nota del 16 febbraio 1929, in cui non avevo fatto questa osservazione.

(2) $c(M)$ è dappertutto a distanza finita, continua e ≥ 0 ; si può anche introdurre come nel problema di Dirichlet esterno, punti isolati singolari della $c(M)$ in cui l'integrale dovrà essere limitata nel modulo senz'altro,

Meccanica. — *Sulla deformazione di un mezzo elastico dovuta ad un piccolo spostamento di una sfera rigida immersa.* Nota di ENRICO VOLTERRA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. *Impostazione della questione. Formule risolutive dell'Almansi.*

Supponiamo di avere un mezzo elastico isotropo indefinito ed in esso immersa una sfera rigida, al cui contorno aderisce il mezzo elastico che si estende esternamente ad essa fino a distanza infinita. Supposto di fare subire alla sfera degli spostamenti vogliamo determinare le componenti u, v, w dello spostamento che subisce ciascun punto del mezzo elastico supponendo nulle le forze di massa applicate ai punti interni del mezzo e il mezzo stesso in quiete a distanza infinita ⁽²⁾.

Poniamo con l'Almansi ⁽³⁾

$$(1) \quad \begin{cases} u = (R^2 - r^2) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda, \\ v = (R^2 - r^2) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu, \\ w = (R^2 - r^2) \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \nu, \end{cases}$$

dove R rappresenta il raggio della sfera, r la distanza del punto generico nel quale si vogliono determinare le u, v, w dal centro della sfera, λ, μ, ν e φ sono le funzioni armoniche incognite da determinarsi caso per caso in base ai dati della questione.

È necessario che le espressioni (1) soddisfino alle equazioni della elasticità nel caso di forze di massa nulle cioè alle condizioni seguenti:

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta^2 u = k \frac{\partial \theta}{\partial x}, \\ \Delta^2 v = k \frac{\partial \theta}{\partial y}, \\ \Delta^2 w = k \frac{\partial \theta}{\partial z}, \end{cases}$$

(1) Nella seduta del 4 maggio 1930.

(2) Lo stesso problema era già stato studiato dal Tedone però con meno semplice procedimento. Vedi: O. TEDONE, *Sulle equazioni dell'equilibrio elastico per un corpo isotropo con speciale riguardo alle forze di massa e su alcuni problemi relativi alla sfera elastica.* «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», tomo XVII, 1903.

(3) Vedi: E. ALMANZI, *Sulla deformazione della sfera elastica.* «Rendiconti della R. Accademia delle Scienze di Torino», tomo XLVII, 1897.

ove la θ , dilatazione cubica, è $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ e k dipende nel noto modo ($k = \frac{1}{1-2\eta}$, η coefficiente di contrazione) dalle costanti di isotropia del mezzo. Noti i valori di u, v, w sulla superficie della sfera restano fissate le determinazioni superficiali delle funzioni λ, μ e ν quindi le funzioni stesse, in quanto armoniche e regolari all'esterno e nulle all' ∞ . La φ rimane univocamente determinata in base alle (2).

Queste infatti si riducono all'unica condizione

$$(3) \quad \varphi + r \frac{\partial \varphi}{\partial r} (2 + k) + \frac{k\psi}{2} = C$$

dove

$$(4) \quad \psi = \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z}$$

va riguardata come funzione del solo argomento r trattando i rapporti $\frac{x}{r}$, ecc. (o ciò che è lo stesso gli angoli polari) come costanti, e C designa una costante *a priori* arbitraria che si dimostra essere $= 0$.

La (3), integrata, ove si designi per brevità con m la costante $\frac{1}{2+k}$ e si fissi la inessenziale costante di integrazione in modo che si annulli all' ∞ , ci dà

$$(5) \quad \varphi = \frac{km}{2r^m} \int_r^\infty r^{m-1} \psi dr.$$

2. Spostamento traslatorio del nucleo sferico.

Volendo ora determinare le componenti u, v, w dello spostamento di un punto qualunque del mezzo per una traslazione della sfera di ampiezza a scegliendo l'asse x parallelo alla traslazione, dovremo assumere per λ, μ, ν le tre funzioni armoniche, regolari all'esterno della sfera, nulle all' ∞ che prendono in superficie i valori costanti $a, 0, 0$.

Tali funzioni sono manifestamente

$$\lambda = \frac{Ra}{r},$$

$$\mu = 0,$$

$$\nu = 0.$$

Dalla (5) ricaviamo

$$\varphi = \frac{kRa x}{2(k+1)r^3}$$

e quindi per u, v, w , componenti dello spostamento elastico in un punto generico, troviamo le espressioni

$$(6) \quad \begin{cases} u_1 = \frac{Ra}{r} + \frac{Rak}{2(k+1)} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} \right) (R^2 - r^2), \\ v_1 = \frac{3Rak}{2(k+1)} \frac{xy}{r^5} (R^2 - r^2), \\ w_1 = \frac{3Rak}{2(k+1)} \frac{x\chi}{r^5} (R^2 - r^2). \end{cases}$$

Analogamente se la sfera subisce delle traslazioni di ampiezza b, c rispettivamente nelle direzioni degli assi y, z otterremo per gli spostamenti le espressioni

$$(6') \quad u_2, v_2, w_2,$$

$$(6'') \quad u_3, v_3, w_3,$$

che si ottengono dalle (6) con una sostituzione circolare, nelle espressioni di u, v, w , delle $xy\chi, abc$.

Tali espressioni per le u, v, w soddisfano a distanza infinita alla condizione di divenire infinitesime del 1° ordine, e le loro derivate del secondo.

3. Rotazione del nucleo.

Volendo invece determinare le componenti u, v, w dello spostamento di un punto qualunque del mezzo, dovuto ad una rotazione della sfera rigida, converrà anzitutto assumere l'asse di rotazione della sfera rigida come uno degli assi coordinati, per esempio come asse delle χ . Con ciò, indicando con ω l'ampiezza della rotazione e con π la sua componente secondo l'asse orientato delle χ , i valori superficiali di u, v, w saranno

$$u = 0, \quad v = -\pi\chi, \quad w = \pi y.$$

Se ne deducono immediatamente per le funzioni armoniche λ, μ, ν le espressioni

$$\lambda = 0,$$

$$\mu = \pi R^3 \frac{\partial}{\partial \chi} \frac{1}{r},$$

$$\nu = -\pi R^3 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r}.$$

La corrispondente φ si annulla identicamente e per gli spostamenti u'_1, v'_1, w'_1 in un punto generico risulta

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} u' = 0, \\ v' = \pi R^3 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \chi}, \\ w' = -\pi R^3 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}. \end{array} \right.$$

Analogamente indicando con χ, ρ le componenti della rotazione secondo gli assi y e χ otterremo $u'', v'', w''; u''', v''', w'''$ dalle (7) con una sostituzione circolare sulle lettere $\pi\chi\rho, xy\chi$. Ed indicando invece con u, v, w le componenti dello spostamento per una rotazione di componenti $\pi\chi\rho$ avremo evidentemente

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = u' + u'' + u''', \\ v = v' + v'' + v''', \\ w = w' + w'' + w'''. \end{array} \right.$$

4. Spostamento rigido generale.

Se ora supponiamo che la sfera subisca uno spostamento risultante di una rotazione di componenti π, χ, ρ e di una traslazione di componenti a, b, c basta manifestamente sovrapporre le formule trovate e saranno

$$U = u + u_1 + u_2 + u_3$$

$$V = v + v_1 + v_2 + v_3$$

$$W = w + w_1 + w_2 + w_3$$

le componenti dello spostamento di ciascun punto del mezzo indefinito; le $u, v, w; u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3$ sono date dalle formule (8), (6), (6'), (6'').

Meccanica (Idromeccanica). — *Moti piani irrotazionali di liquidi perfetti in presenza di un disco mobile.* Nota di B. CALDONAZZO, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

Un moto piano irrotazionale di un liquido perfetto indefinito avvenga in presenza di un cilindro rotondo, con l'asse normale alla giacitura del moto liquido. Il moto è dovunque regolare ed all'infinito, tanto la velocità che l'accelerazione del moto liquido tendono ciascuna ad uno stesso limite funzione del tempo. Il cilindro stesso è animato di moto rigido piano normale al suo asse. Con riferimento ad uno dei piani comuni al moto rigido ed al moto liquido si ha in sostanza il moto irrotazionale di un velo liquido piano indefinito in presenza di un disco mobile. La determinazione del moto liquido rientra così in quella classe di problemi da me considerati recentemente ⁽²⁾.

Il moto stesso e le azioni dinamiche sopportate dal cilindro quando all'infinito si ha la quiete oppure quando il cilindro fisso viene investito da una corrente stazionaria è stato già studiato ⁽³⁾ ed è facile passare da questi casi al caso più generale di un liquido in moto vario anche all'infinito. È quanto faccio in questa Nota, in cui ho creduto non inutile riprendere il problema dirò così dalle origini. Il moto che così determino dipende

(1) Nella seduta del 4 maggio 1930.

(2) *Moti piani irrotazionali di liquidi perfetti in presenza di ostacoli mobili*, questi « Rendiconti », seduta del 16 febbraio 1930.

(3) Lord RAYLEIGH nella Nota: *On the irregular flight of a tennis-ball*. « Mess. of Math. », VII, pp. 14-16 (1877), oppure *Sc. Papers*, vol. I, Cambridge (1899), pp. 344-346, determina il moto della corrente stazionaria che investe il cilindro fisso e per primo mette in evidenza e valuta il cosiddetto effetto Magnus. Successivamente A. G. GREENHILL nella Nota: *On Lord Rayleigh's paper on the irregular flight of a tennis-ball*. « Mess. of Math. », IX, pp. 113-117 (1878), considera il cilindro mobile comunque in un liquido in quiete all'infinito e valuta la risultante delle azioni meccaniche. Cfr. anche H. LAMB, *Hydrodynamics*, Cambridge (1924), n. 69. Più recentemente: A. MASOTTI in varie Note si è occupato della stessa questione, dapprima in alcuni casi particolari relativi al cilindro rotondo e ad un cilindro di sezione qualunque; ha generalizzato poi il problema al caso di un solido cilindrico indefinito qualunque che si muove comunque normalmente alle sue generatrici in un liquido perfetto indefinito o, eventualmente, limitato da pareti rigide cilindriche parallele al solido. Mi limito qui a citare dei lavori del MASOTTI quello che in sostanza li riassume: *Azione dinamica che un liquido perfetto esercita su un solido cilindrico, di sezione qualunque, mobile in esso*, questi « Rendiconti », vol. V, serie 6^a (1927), pagine 872-876, in cui, supposto risolto il problema idrocinematico, esprime la risultante ed il momento risultante delle azioni dinamiche mediante elementi caratteristici del moto liquido e del moto rigido, assegnando così delle formule che costituiscono la più ampia generalizzazione, in questo campo, delle formule del Blasius.

dalla corrente all'infinito, dalla traslazione del cilindro, ma non dipende *a priori* dalla rotazione dello stesso. Precisamente il moto risulta composto di quello che si avrebbe in presenza del cilindro fisso e della traslazione del cilindro.

Le azioni meccaniche esercitate su ciascuna porzione unitaria del cilindro hanno come risultante una forza applicata nel centro della porzione e che si compone della solita *spinta idrostatica* secondo il principio di Archimede, dell'*effetto Magnus* e di una *reazione di inerzia* dovuta alla massa liquida spostata. Questa reazione di inerzia si compone di una parte dovuta al moto vario del cilindro e di una seconda parte dovuta al moto vario della corrente all'infinito. Si constata qui la notevole circostanza che in questa seconda parte il liquido contribuisce come se la massa spostata fosse doppia di quella effettiva.

1. *Il potenziale del moto.* — Il disco rotondo, sezione del cilindro, abbia il raggio r ed il centro nel punto P_0 di affissa ζ_0 , con riferimento ad un sistema di assi ortogonali fissi O, x, y , indicando al solito con $x + iy = \zeta$ l'affissa di un generico punto. La velocità di P_0 , che sotto forma complessa indichiamo con w_0 , come ζ_0 , è funzione del tempo t soltanto. La derivata di ζ_0 è ovviamente complessa coniugata di w_0 :

$$(1) \quad \dot{\zeta}_0 = \bar{w}_0.$$

Il potenziale complesso di una corrente liquida irrotazionale traslocircolatoria, che investe il disco e ricopre il resto del piano ζ , è della forma.⁽¹⁾

$$f(\zeta, t) = w_0 \zeta + f_1(\zeta, t),$$

la f_1 essendo caratterizzata dalle seguenti condizioni: deve essere regolare su tutto il piano, esclusi i punti interni del disco; deve avere derivata, rispetto a ζ , finita in tutti i punti del liquido in moto, e sul contorno c del disco dove $\zeta - \zeta_0 = re^{i\sigma}$, la parte immaginaria di f_1 deve assumere il valore (con ω indicando la velocità di rotazione del disco)

$$i\psi_1 = -\frac{i\omega}{2}(P - P_0)^2,$$

a meno di una funzione del tempo. Ma su c è $(P - P_0)^2 = r^2$, cosicchè

$$i\psi_1 = -\frac{i\omega}{2}r^2, \quad \text{su } c,$$

risulta indipendente dal posto. La più generale funzione che soddisfa a queste condizioni (a meno di una funzione di t) è

$$f_1(\zeta, t) = (\zeta - \zeta_0) w_1 + \frac{r^2 \bar{w}_1}{\zeta - \zeta_0} + \frac{C}{2\pi i} \log(\zeta - \zeta_0),$$

(1) Cfr. la mia Nota citata, n. 2.

dove w_1 è una grandezza in generale complessa, funzione *a priori* arbitraria della sola t e \bar{w}_1 è la sua complessa coniugata, C una grandezza reale anch'essa *a priori* arbitraria funzione al più del tempo. Il significato cinematico di w_1 e di C è ovvio in quanto la f_1 si può interpretare quale potenziale complesso di una corrente traslocircolatoria, in presenza del disco considerato col suo centro fermo nel punto P_0 : w_1 è la velocità all'infinito e C la circolazione attorno al disco di tale corrente.

L'ultimo termine di f_1 sul contorno c ha la parte immaginaria eguale a $\frac{C}{2\pi i} \log r$ in cui, data l'arbitrarietà di C , è inglobato l'eventuale termine $-\frac{i\omega}{2} r^2$ dovuto alla rotazione del disco. Ma si osservi che in generale non si può ammettere che una parziale aderenza del liquido sul contorno del disco, cosicchè l'eventuale moto di rotazione di questo non si trasmette interamente al liquido.

Su questo argomento si dirà ulteriormente in seguito. Possiamo concludere intanto che il moto risulta definito dal potenziale

$$(2) \quad f(\zeta, t) = w_0 \zeta + w_1 (\zeta - \zeta_0) + \frac{r^2 \bar{w}_1}{\zeta - \zeta_0} + \frac{C}{2\pi i} \log (\zeta - \zeta_0).$$

2. *Velocità della corrente.* — La velocità w (nella solita forma complessa) è

$$w(\zeta, t) = \frac{\partial f}{\partial \zeta},$$

vale a dire per la (2)

$$(3) \quad w = w_0 + w_1 - \frac{r^2 \bar{w}_1}{(\zeta - \zeta_0)^2} + \frac{C}{2\pi i (\zeta - \zeta_0)}.$$

All'infinito la velocità tende manifestamente al limite

$$(4) \quad w_\infty = w_0 + w_1.$$

Poniamo ora

$$(5) \quad w_0 = V_0 e^{-i\alpha_0}, \quad w_1 = V_1 e^{-i\alpha_1},$$

indicando in tal modo con V_0 e V_1 i moduli e con α_0 e α_1 gli angoli di direzione con l'asse reale x delle due velocità w_0 e w_1 .

Sul contorno c del disco, su cui ripetiamolo è $\zeta - \zeta_0 = r e^{i\sigma}$, la (3) ci fornisce allora per la velocità del liquido

$$w_c = V_0 e^{-i\alpha_0} + 2i V_1 \sin(\sigma - \alpha_1) e^{-i\sigma} + \frac{C e^{-i\sigma}}{2\pi i r}.$$

Il quadrato del suo modulo è

$$(6) \quad V_c^2 = V_o^2 + \frac{C^2}{4\pi^2 r^2} + 4V_1^2 \sin^2(\sigma - \alpha_1) + \\ + 4V_o V_1 \sin(\sigma - \alpha_o) \sin(\sigma - \alpha_1) - \frac{V_o C}{\pi r} \sin(\sigma - \alpha_o) - \frac{2V_1 C}{\pi r} \sin(\sigma - \alpha_o).$$

3. *Azioni dinamiche.* — Le forze di massa agenti sul liquido siano conservative ed il loro potenziale specifico U sia funzione uniforme del posto oltre che eventualmente funzione del tempo, regolare in tutto il campo del moto. La pressione p , in funzione di U , della densità ρ del liquido e degli elementi del moto, è espressa da (cfr. la mia Nota, n. 1)

$$(7) \quad p = \rho \left(U - \frac{V^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right),$$

V essendo il modulo di w e Φ il potenziale cinetico, parte reale della f . Sul contorno c il versore della normale interna è espresso sotto forma complessa da $-e^{i\sigma}$ e l'elemento d'arco da $rd\sigma$. Perciò la risultante delle azioni dinamiche esercitate dal liquido sul disco, sotto forma complessa, è data dall'integrale

$$(8) \quad R = -r \int_0^{2\pi} p e^{i\sigma} d\sigma.$$

Il momento risultante delle stesse azioni rispetto al centro P_o è ovviamente nullo. Per valutare la (8) cominciamo col rilevare che il primo dei tre termini di cui si compone p secondo la (7) porta come contributo alla risultante l'*azione idrostatica* o archimedeica, che indicheremo con S .

Il secondo dei tre termini che esprimono p nella (7), computato sul contorno, in virtù della (6) risulta in sostanza funzione di σ per mezzo di $\sin \sigma$ e $\cos \sigma$. Introducendolo nella (8) ed eseguendo l'integrazione, solamente i suoi termini lineari in $\sin \sigma$ e $\cos \sigma$ forniscono risultati non nulli. Questi termini provengono manifestamente dai due ultimi termini del secondo membro della (6). Poichè si ha in generale

$$(9) \quad \int_0^{2\pi} e^{i\sigma} \sin(\sigma - \alpha) d\sigma = \pi i e^{i\alpha},$$

si ha facilmente, tenuto conto delle posizioni (5),

$$(10) \quad \frac{\rho r}{2} \int_0^{2\pi} V_c^2 e^{i\sigma} d\sigma = -\frac{i\rho C}{2} (w_o + 2w_1).$$

Per completare il calcolo di R occorre tener conto nella (8) dell'ultimo termine di p , cioè di $-\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$. A questo scopo deriviamo la (2) parzialmente rispetto a t ed osserviamo che la f dipende dal tempo solo per mezzo di $w_0, w_1, \bar{w}_1, \chi_0$ e C , che a lor volta sono funzioni al più soltanto di t , ricordando beninteso che la f è definita a meno di un termine additivo funzione soltanto del tempo, termine che non influisce affatto sulla velocità e sulla risultante R . Notiamo ancora che (il punto sovrapposto indica, come nella (1), derivata rispetto a t)

$$\dot{w}_0 = a_0, \quad \dot{w}_1 = a_1$$

rappresentano sotto forma complessa le accelerazioni di P_0 e del moto di velocità w_1 . Si ottiene pertanto, a meno di una funzione di t ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} = & (a_0 + a_1)(\chi - \chi_0) + \left(r^2 \bar{a}_1 - \frac{\bar{w}_0 C}{2\pi i} \right) \frac{1}{\chi - \chi_0} + \\ & + \frac{r^2 \bar{w}_0 \bar{w}_1}{(\chi - \chi_0)^2} + \frac{\dot{C}}{2\pi i} \log(\chi - \chi_0). \end{aligned}$$

Passando ai punti di c , dove $\chi - \chi_0 = r e^{i\sigma}$, la parte reale di questa ponendo, con manifesto significato dei simboli,

$$(11) \quad a_0 = A_0 e^{-i\beta_0}, \quad a_1 = A_1 e^{-i\beta_1},$$

è espressa da

$$\begin{aligned} (12) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = & r A_0 \cos(\sigma - \beta_0) + 2r A_1 \cos(\sigma - \beta_1) + \frac{C V_0}{2\pi r} \sin(\sigma - \alpha_0) + \\ & + V_0 V_1 \cos(2\sigma - \alpha_0 - \alpha_1) + \frac{\dot{C}}{2\pi} \sigma. \end{aligned}$$

Ricordando che si è supposto U uniforme e che tali devono essere per loro natura p e V , dalla (7) risulta che anche la derivata ora valutata deve essere uniforme. Ciò richiede che l'ultimo termine che compare nel secondo membro sia identicamente nullo, cosicchè \dot{C} deve essere nullo e quindi C costante. Naturalmente questa conclusione rientra nel teorema della costanza della circolazione per moti fluidi in generale. Ma non è del tutto superfluo averla dedotta direttamente per il caso nostro in quanto in C è conglobata l'eventuale influenza del moto di rotazione del disco, la cui velocità in generale è variabile. Se ne conclude pertanto che una variazione della velocità di rotazione del disco non può influire affatto sulla circolazione del moto liquido attorno al disco.

Tenuto conto di ciò e rilevato che anche la (12) dipende da σ per mezzo di $\sin \sigma$ e $\cos \sigma$ e che assieme alla (9) vale la relazione

$$\int_0^{2\pi} e^{i\sigma} \cos(\sigma - \alpha) d\sigma = \pi e^{i\alpha},$$

L'ultima parte che rimane ancora per completare R è la seguente:

$$r\rho \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} e^{i\sigma} d\sigma = \pi r^2 \rho (\bar{a}_0 + 2\bar{a}_1) + \frac{i\rho C}{2} \bar{w}_0.$$

Raccogliendo i risultati trovati con questa e la (10) e con la spinta idrostatica S abbiamo

$$R = S - i\rho C \bar{w}_1 + \pi r^2 \rho (\bar{a}_0 + 2\bar{a}_1).$$

Qui conviene tenere presente la (4) per la quale

$$\bar{w}_1 = \bar{w}_\infty - w_0, \quad \bar{a}_0 + 2\bar{a}_1 = 2\bar{a}_\infty - \bar{a}_0,$$

e di rilevare che $\pi r^2 \rho = m'$ rappresenta la massa del liquido spostato dal cilindro avente per base il disco e di spessore unitario. Abbiamo così

$$(13) \quad R = S + i\rho C (\bar{w}_0 - \bar{w}_\infty) - m' (\bar{a}_0 - 2\bar{a}_\infty).$$

Questa si può trasformare facilmente sotto forma vettoriale, in quanto le coniugate delle velocità ed accelerazioni complesse si possono sostituire senz'altro coi vettori da esse rappresentati. Il termine poi che dipende dalle velocità può essere espresso con $\rho C \mathbf{k} \wedge (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_\infty)$, \mathbf{k} essendo il versore del terzo asse formante coi due x ed y del piano una terna ortogonale positiva. Si ha quindi

$$(14) \quad \mathbf{R} = \mathbf{S} + \rho C \mathbf{k} \wedge (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_\infty) - m' (\mathbf{a}_0 - 2\mathbf{a}_\infty) \quad (1).$$

Pertanto la risultante delle forze esercitate dal liquido su una sezione unitaria di cilindro si compone di tre parti: la *spinta idrostatica* \mathbf{S} , la *spinta* $\rho C \mathbf{k} \wedge (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_\infty)$ che rappresenta la forza prevista del teorema di Kutta-Joukowski⁽²⁾; la forza $-m'(\mathbf{a}_0 - 2\mathbf{a}_\infty)$ che si può chiamare la *forza di inerzia* dovuta al liquido. Importa rilevare che la spinta di Kutta-Joukowski si inverte cambiando le due velocità del centro del disco e della

(1) Per $\mathbf{v}_\infty = 0$ (liquido in quiete all'infinito) si ritrovano i risultati di GREENHILL citato sopra; vedi anche A. MASOTTI, *Azione dinamica esercitata da un liquido su un cilindro rotondo mobile in esso*. «Rend. del R. Ist. Lombardo», vol. LX, fasc. I-V (1927).

(2) Per $\mathbf{v}_0 = 0$ e \mathbf{v}_∞ costante si ha la spinta laterale di Lord Rayleigh, spinta che nel caso più generale qui considerato continua a sussistere formalmente la stessa ove si consideri il moto del cilindro relativo alla corrente asintotica.

corrente all'infinito. In particolare si ha così la conferma della circostanza ben nota che le azioni dinamiche sopportate da un ostacolo fisso ($v_0 = 0$) investito da una corrente con $v_\infty = \text{costante}$, rimangono inalterate se invece si fa muovere l'ostacolo con velocità $v_0 = -v_\infty$ nello stesso fluido in quiete all'infinito.

Si constata invece che la forza di inerzia $-m' a_0 - 2 a_\infty$ non si comporta nello stesso modo perchè l'accelerazione della corrente asintotica, a parità di modulo, importa una reazione doppia in valore assoluto di quella dovuta alla accelerazione del centro P_0 . Risulta così che l'azione subita dal disco mobile in un liquido in quiete all'infinito differisce da quella subita, nello stesso liquido mobile all'infinito con $v_\infty = -v_0$, dal disco in quiete di $m' a_0$, come aveva stabilito in un caso più generale il Valcovici⁽¹⁾.

Meccanica (Idromeccanica). — *Ancora una eccezione del teorema di Kutta-Joukowski.* Nota di A. CONSIGLIO, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

Il prof. Cisotti ha messo in evidenza in questi « Rendiconti »⁽³⁾ che la risultante delle azioni dinamiche esercitate da una corrente irrotazionale con circolazione sopra una lamina piana, non segue il teorema di Kutta-Joukowski. Questo risultato fu contestato in quanto se si considera un ostacolo senza singolarità al contorno, il teorema citato continua a sussistere quando si faccia tendere la configurazione dell'ostacolo a quella della lamina. In sostanza è stato messo in evidenza che nel calcolo diretto, cioè per un ostacolo con le singolarità della lamina, il teorema non sussiste; con il calcolo indiretto, cioè con il passaggio al limite dall'ostacolo regolare a quello singolare (la lamina) il teorema è valido⁽⁴⁾.

In questa Nota mi occupo dell'ostacolo pisciforme del Joukowski⁽⁵⁾, ostacolo con un solo punto cuspidale e riducibile alla lamina. I risultati confermano l'eccezione, eccezione che sussiste anche al limite quando compare il secondo punto cuspidale.

(1) V. VALCOVICI, *Sur la résistance hydrodynamique dans le mouvement non uniforme.* « C.-R. », 158 (1914), pp. 169-171.

(2) Nella seduta del 4 maggio 1930.

(3) U. CISOTTI, *Una notevole eccezione del teorema di Kutta-Joukowski*, questi « Rendiconti », vol. V, fasc. 1, pp. 16-21 (1927).

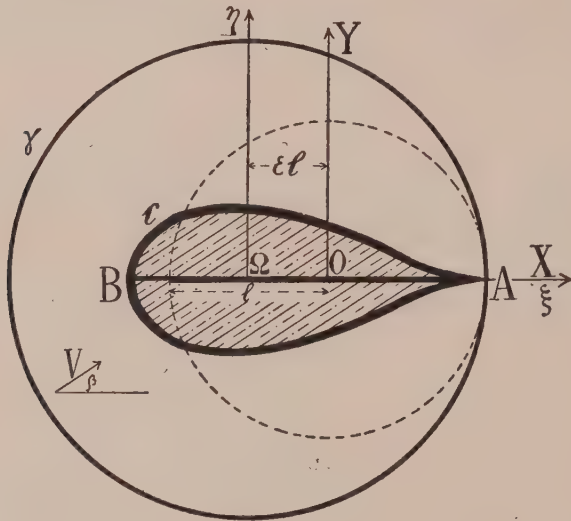
(4) Numerosi sono i lavori apparsi in questi « Rendiconti » ed altrove ai quali ha dato luogo la Nota del Cisotti.

(5) N. JOUKOWSKI, *Aérodynamique*, trad. in francese di Drzewiecki, edit. Gauthier-Villars, pp. 145-150 (Paris 1916). Il Joukowski considera soltanto il caso particolare in cui la velocità è finita anche nella cuspidale, nel qual caso il suo teorema sussiste.

1. *Profilo dell'ostacolo.* — Il profilo dell'ostacolo, sul piano $z = x + iy$ del moto, sia la curva c che corrisponde al cerchio γ di equazione $\xi^2 + \eta^2 = (1 + \epsilon)^2 l^2$ del piano della variabile complessa $\zeta = \xi + i\eta$, mediante la rappresentazione conforme:

$$(1) \quad z = \frac{1}{2} \left\{ \zeta - \epsilon l + \frac{l^2}{\zeta - \epsilon l} \right\},$$

in cui l è una lunghezza positiva, ϵ un numero positivo. Si tratta ovviamente di un profilo simmetrico rispetto all'asse reale con un punto di re-



gresso in $z = l$, della configurazione del quale si ha un'idea nella figura, in cui si è assunto $\epsilon = \frac{1}{2}$ (1).

È utile osservare poi che facendo corrispondere tra loro i due punti all'infinito dei due piani, la (1) stabilisce la rappresentazione conforme del piano z forato dall'ostacolo sul piano ζ forato dal cerchio.

2. *Corrente traslo-circolatoria.* — Il potenziale complesso di un moto irrotazionale ciclico che investa l'ostacolo c , espresso mediante la ζ , è notoriamente:

$$(2) \quad f = \frac{1}{2} V \left\{ e^{-i\beta} \zeta + \frac{(1 + \epsilon)^2 l^2}{\zeta} e^{i\beta} \right\} + \frac{C}{2\pi i} \log \zeta,$$

(1) Una semplice costruzione grafica della curva c è dovuta ad E. TREFFTZ, *Graphische Konstruktion Joukowski'scher Tragflächen*, «Zeitschr. f. Flugt. u. Motorluftsch.», 4 (1913), p. 130.

essendo V il valore della velocità asintotica, β l'angolo da essa formato con l'asse dell'ostacolo, C la circolazione attorno all'ostacolo.

In base alle (1) e (2) la velocità sotto forma complessa nel piano ζ è:

$$(3) \quad w = \frac{df}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = \left\{ \frac{1}{2} V \left[e^{-i\beta} - \frac{(1+\varepsilon)^2 l^2}{\zeta^2} e^{i\beta} \right] + \frac{C}{2\pi i \zeta} \right\} \frac{2}{1 - \left(\frac{l}{\zeta - \varepsilon l} \right)^2}.$$

3. *Azioni dinamiche.* — Rammentiamo che per le formule del Blasius, la risultante ed il momento risultante rispetto all'origine, delle azione dinamiche, sono espressi da:

$$(4) \quad R_y + iR_x = -\frac{1}{2} \rho \int w^2 d\zeta \quad ; \quad M = -\frac{1}{2} \rho \Re \int w^2 \zeta d\zeta,$$

essendo gli integrali estesi al contorno c dell'ostacolo.

In virtù delle (1) e (3) la prima delle (4) diviene

$$R_y + iR_x = -\frac{1}{2} \rho \int \left\{ \frac{1}{2} V \left[e^{-i\beta} - \frac{(1+\varepsilon)^2 l^2}{\zeta^2} e^{i\beta} \right] + \frac{C}{2\pi i \zeta} \right\}^2 + \frac{l}{\zeta - (\varepsilon + 1)l} - \frac{l}{\zeta - (\varepsilon - 1)l} \Bigg\} d\zeta;$$

l'integrale essendo esteso al cerchio γ .

La funzione integranda è manifestamente razionale in ζ con i tre poli

$$\zeta = 0 \quad ; \quad \zeta_1 = (\varepsilon - 1)l \quad , \quad \zeta_2 = (\varepsilon + 1)l,$$

i primi due essendo $\varepsilon > 0$, interni, il terzo sul contorno del campo. Eseguite le operazioni indicate, la stessa funzione risulta eguale alla seguente somma:

$$\frac{VCe^{-i\beta}}{\pi i \zeta} + \frac{V^2 e^{-2i\beta}}{4} \left(\frac{1}{\zeta - \zeta_2} - \frac{1}{\zeta - \zeta_1} \right) + S' + S'',$$

dove S' è un polinomio i cui termini a meno di un coefficiente costante sono ciascuno del tipo

$$\frac{1}{\zeta^n} \cdot \frac{1}{\zeta - \zeta_1}, \quad oppure \quad \frac{1}{\zeta^n} \cdot \frac{1}{\zeta - \zeta_2}, \quad n = 1, 2, 3, 4,$$

ed S'' è un polinomio i cui termini a meno di un coefficiente costante sono del tipo

$$\frac{1}{\zeta^m}, \quad m = 0, 2, 3, 4.$$

In virtù del teorema fondamentale di Cauchy su le funzioni di variabile complessa, la somma S'' non porta alcun contributo all'integrale cercato. Quanto alla somma S' , notando che si ha

$$\frac{1}{\zeta^n} \cdot \frac{1}{\zeta - \zeta_0} = \frac{1}{\zeta^n} \left(\frac{1}{\zeta - \zeta_0} - \frac{1}{\zeta} \right) + S^*,$$

essendo S^* un polinomio del tipo S'' , si rileva quanto segue:

Per $\zeta_0 = \zeta_1$ (polo interno a γ assieme a $\zeta = 0$) i termini corrispondenti di S' non danno alcun contributo all'integrale cercato; invece per $\zeta_0 = \zeta_2$ (polo sul contorno di γ) i termini corrispondenti di S' contribuiscono ciascuno all'integrale (a meno dell'accennato fattore costante) con il residuo $-\frac{\pi i}{\zeta_1^n}$.

Tenendo conto di quanto detto e dei due termini che con S' ed S'' danno la funzione integranda, l'integrale cercato è

$$2VCe^{-i\beta} - \frac{1}{4} \pi i l V^2 e^{-2i\beta} - \pi i l \left\{ \frac{VCe^{-i\beta}}{2\pi i \zeta_2} - \frac{1}{2} \left[(1 + \varepsilon)^2 l^2 V^2 + \frac{C^2}{2\pi^2} \right] \frac{1}{\zeta_2^2} - \right. \\ \left. - \frac{(1 + \varepsilon)^2 l^2 VCe^{i\beta}}{2\pi i} \frac{1}{\zeta_2^3} + \frac{(1 + \varepsilon)^4 l^4 V^2 e^{2i\beta}}{4} \frac{1}{\zeta_2^4} \right\}.$$

Sostituendo a ζ_2 il suo valore $(1 + \varepsilon)l$, ordinando opportunamente e moltiplicando per $-\frac{1}{2}\rho$ il risultato trovato, si ottiene

$$R_y + iR_x = -\frac{1}{2}\rho \left\{ \left[2 \cos \beta - \frac{1 + 2\varepsilon}{1 + \varepsilon} i \sin \beta \right] VC + \pi i l V^2 \sin^2 \beta + \frac{C^2}{4\pi(1 + \varepsilon)^2 l} i \right\}.$$

Da questa segue infine:

$$(5) \quad \begin{cases} R_x = \frac{1}{2}\rho \left\{ \left[\frac{1 + 2\varepsilon}{1 + \varepsilon} C - \pi l V \sin \beta \right] V \sin \beta - \frac{C^2}{4\pi(1 + \varepsilon)^2 l} \right\}; \\ R_y = -\rho VC \cos \beta. \end{cases}$$

In modo perfettamente analogo si può valutare il secondo degli integrali (4). Omettendo per brevità i calcoli, diamo senz'altro la parte reale moltiplicata per $-\frac{1}{2}\rho$, che sola ci interessa, così ottenuta:

$$(6) \quad M = -\frac{1}{2}\rho l V [2\pi l V \sin \beta - \varepsilon C] \cos \beta.$$

Per la resistenza diretta R_t (componente della risultante secondo la corrente investitrice) e per l'azione deviatrice R_n seguono poi le espressioni:

$$(7) \quad \begin{cases} R_t = -\frac{1}{2} \pi \rho l \left[V \sin \beta + \frac{C}{2 \pi (1 + \varepsilon) l} \right]^2 \cos \beta; \\ R_n = \frac{1}{2} \pi \rho l \left[V \sin \beta + \frac{C}{2 \pi (1 + \varepsilon) l} \right]^2 \sin \beta - \rho V C. \end{cases}$$

Come si vede, R_t non è in generale nulla (salvo nei casi $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$; $V \sin \beta + \frac{C}{2 \pi (1 + \varepsilon) l} = 0$). Anzi dalla sua espressione risulta che, quando non è nulla, R_t si oppone sempre al moto della corrente, cioè costituisce una così detta *forza di risucchio*. In quanto poi ad R_n , essa non è in generale quella prevista dal teorema di Kutta-Joukowski⁽¹⁾.

4. *Casi particolari.* — In particolare, per una corrente puramente traslatoria ($C = 0$), dalle (7) e dalla (6) si ha:

$$(8) \quad \begin{cases} R_t = -\frac{1}{2} \pi \rho l V^2 \sin^2 \beta \cos \beta & ; & R_n = \frac{1}{2} \pi \rho l V^2 \sin^3 \beta, \\ M = -\frac{1}{2} \rho \pi l^2 V^2 \sin 2\beta. \end{cases}$$

Quindi la resistenza diretta non è nulla neanche in questo caso (salvo per $\beta = 0, \pm \frac{\pi}{2}$), cosicchè non sussiste, almeno in generale, il paradosso di D'Alembert.

Per una corrente puramente circolatoria ($V = 0$) si ha invece (qui non è il caso di considerare le resistenze diretta e trasversa):

$$(9) \quad R_x = -\frac{\rho C}{8 \pi (1 + \varepsilon)^2 l} \quad ; \quad R_y = 0 \quad ; \quad M = 0.$$

che costituisce una conferma di uno dei casi considerati in generale dal Cisotti⁽²⁾.

(1) In sostanza la risultante differisce da quella prevista dal teorema di K.-J. di un vettore dovuto esclusivamente alla presenza del punto saliente cuspidale, il che si verifica anche nel caso di un contorno qualsiasi. Cfr. ad es. R. GRAMMEL, *Die Hydr. Grund. des Fluges*, Vieweg, Braunschweig (1917), p. 21.

(2) U. CISOTTI, *Tipi di profili rigidi isolati che subiscono un'azione dinamica da parte di una corrente fluida locale circolante intorno ad essi*, questi « Rendiconti », vol. X, fasc. 10, pp. 469-475 (1929).

5. *Caso di Joukowski.* — Come è stato rilevato sopra, la R_t si annulla in particolare quando

$$(10) \quad V \sin \beta + \frac{C}{2\pi(1+\varepsilon)l} = 0.$$

Corrispondentemente, dalle (7) e (6) si ha

$$(11) \quad \begin{cases} R_n = -\rho VC, \\ M = -\frac{1}{2} \rho \pi l^2 V^2 [1 + \varepsilon(1 + \varepsilon)] \sin 2\beta. \end{cases}$$

In questo caso ed in questo soltanto sussiste il teorema di Kutta-Joukowski, ed è questo appunto il caso considerato dal Joukowski stesso. Infatti, verificata la (10), il moto liquido diviene regolare da per tutto in quanto nella cuspidale la velocità diviene finita acquistando il valore:

$$\frac{1}{1+\varepsilon} V \cos \beta.$$

6. *Caso limite.* — Per $\varepsilon = 0$ l'ostacolo considerato si riduce alla lamina rappresentata dal segmento dell'asse reale $(-l, l)$.

Se si ponesse direttamente $\varepsilon = 0$ nelle espressioni (7) delle azioni dinamiche già valutate per $\varepsilon > 0$, si otterrebbe

$$\begin{cases} R_t = -\frac{1}{2} \pi \rho l \left[V \sin \beta + \frac{C}{2\pi l} \right]^2 \cos \beta; \\ R_n = \frac{1}{2} \pi \rho l \left[V \sin \beta + \frac{C}{2\pi l} \right]^2 \sin \beta - \rho VC. \end{cases}$$

Come si vede non si ottengono i risultati previsti dal teorema di Kutta-Joukowski e cioè:

$$R_t = 0 \quad ; \quad R_n = -\rho VC,$$

e nemmeno quelli ottenuti dal Cisotti direttamente per la lamina e cioè:

$$R_t = -\frac{1}{2} \rho VC \sin 2\beta \quad ; \quad R_n = -\rho VC \cos^2 \beta.$$

Ma se si fa $\varepsilon = 0$ direttamente nelle (4) prima di effettuare le integrazioni, ed è questo il procedimento corretto, il polo $\zeta_1 = (\varepsilon - 1)l$ da interno si porta sul contorno del campo di integrazione, quindi esso reca agli integrali un contributo diverso e si ritrovano appunto, come necessariamente deve essere, i risultati del Cisotti.

Si ha così una conferma, dedotta per il caso dell'ostacolo pisciforme del Joukowski stesso, del fatto che nella valutazione delle azioni dinamiche i punti cuspidali salienti portano un contributo che costituisce una eccezione al teorema di Kutta-Joukowski.

Meccanica. — *Nuova dimostrazione di un teorema di Painlevé-Levi-Civita sulle equazioni dinamiche.* Nota di LUISA PELOSI, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sia S un sistema dinamico, avente n gradi di libertà, i cui vincoli siano indipendenti dal tempo e soggetto a date forze. Indicando con x_1, x_2, \dots, x_n , le coordinate generali lagrangiane e con X_i la componente generale della forza secondo x_i , le equazioni del moto del sistema sono

$$(A) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = X_i \quad , \quad \left(\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ove:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r,s} a_{rs} \dot{x}_r \dot{x}_s$$

è la forza viva del sistema; i coefficienti a_{rs} , nelle ipotesi fatte, dipendono solo dalle x_i (e non dalle \dot{x}_i).

Consideriamo poi il sistema analogo:

$$(A_1) \quad \frac{d}{dt_1} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T_1}{\partial x_i} = \Xi_i \quad , \quad \left(\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt_1} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ove

$$T_1 = \frac{1}{2} \sum_{r,s} \alpha_{rs} \dot{x}_r \dot{x}_s$$

le α_{rs} essendo funzioni solo delle x_i ; esso determina il moto di un altro sistema dinamico S_1 , pure avente n gradi di libertà, a vincoli indipendenti dal tempo, e soggetto alle forze di componenti generali Ξ_i .

Se, ogni qualvolta si attribuiscono alle coordinate e alle direzioni delle velocità le stesse determinazioni iniziali, avviene che i moti dei due sistemi hanno nella varietà rappresentativa (x_1, x_2, \dots, x_n) la stessa *traiettoria* (potendo però differire per il modo con cui, al variare del tempo, tale comune traiettoria viene percorsa) allora i sistemi (A), (A₁) si chiamano, col Painlevé, sistemi *corrispondenti*.

Ciò premesso, se si suppongono nulle tutte le X_i , risultano pure nulle, in conseguenza, le Ξ_i , e allora se diciamo a ed α i discriminanti rispetti-

(1) Nella seduta del 4 maggio 1930.

vamente delle forme quadratiche T e T_1 , il teorema di Painlevé-Levi-Civita dice che l'equazione

$$(1) \quad (a/\alpha)^{\frac{2}{n+1}} \sum_{r,s} \alpha_{rs} x'_r x'_s = \text{cost}$$

porge un *integrale primo* per il sistema (A).

In questa Nota faccio vedere come questo importante teorema possa stabilirsi in modo semplicissimo, utilizzando convenientemente alcuni calcoli istituiti dal prof. Levi-Civita nel § 4 della sua Memoria: *Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche* (« Annali di Matematica », serie 2^a, t. XXIV, 1896).

Ricordiamo intanto che l'integrazione di un sistema equivale, a meno di quadrature, a quella d'ogni suo sistema corrispondente, come ha mostrato il prof. Levi-Civita (Memoria citata, p. 261), il quale ha altresì stabilito che condizione necessaria e sufficiente affinchè i sistemi (A), (A₁) siano corrispondenti si è che il sistema (A₁) possa identicamente trasformarsi nel sistema (A), mediante un cambiamento di variabile indipendente del tipo:

$$(2) \quad dt_1 = \frac{dt}{f(t, x_1, x_2, \dots, x_n; x'_1, x'_2, \dots, x'_n)};$$

più precisamente alla funzione f può darsi la forma generale (p. 269):

$$f = \mu \left\{ 1 + \sum_r c_r x'_r + \sum_{r,s} c_{rs} x'_r x'_s + [3] \right\},$$

ora la μ e le c sono funzioni solo delle x e, per brevità si è indicato con [3] un insieme di termini, almeno d'ordine 3 nelle x' ; inoltre la μ non può essere identicamente nulla.

Nell'ipotesi poi di $X_i = 0$, e quindi $\Xi_i = 0$, con calcoli facili, sviluppati nel § 4 della citata Memoria del prof. Levi-Civita, e che qui non è il caso di riportare, si trova che fra le funzioni f e μ sussiste la relazione (p. 270):

$$\frac{d \log f}{dt} = \sum_r \frac{\partial \log \mu}{\partial x_r} x'_r,$$

che può scriversi

$$\frac{d \log f}{dt} = \frac{d \log \mu}{dt},$$

da cui segue

$$(3) \quad f/\mu = \text{cost},$$

che è, possiamo dire, un integrale primo delle equazioni dinamiche.

Si può riconoscere facilmente che questo integrale equivale all'integrale (1). E infatti, poichè $\Xi_i = 0$, le (A_i) ammettono l'integrale $T_i = \text{cost}$, da ciò, e dalla (3), risulta:

$$\frac{\mu^2}{f^2} \sum_{r,s} \alpha_{rs} \bar{x}'_r \bar{x}'_s = \text{cost};$$

ma dalla (2) segue $\bar{x}'_r = x'_r \cdot f$, perciò si deduce:

$$(4) \quad \mu^2 \sum_{r,s} \alpha_{rs} x'_r x'_s = \text{cost},$$

e ricordando infine la relazione (p. 273):

$$\mu = C (a/\alpha)^{\frac{1}{n+1}},$$

ove C è costante, la (4) porge senz'altro la (1); c. d. d.

Meccanica. — *Fenomeni del regime transitorio nei trasduttori a impedenza caratteristica costante.* Memoria di M. FEDERICI, presentata dal Corrisp. G. GIORGI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo delle *Memorie*.

Geofisica (Meteorologia). — *Sul coefficiente di persistenza dei giorni piovosi.* Nota di ANNA EREDIA, presentata⁽¹⁾ dal Socio L. PALAZZO.

La probabilità dei giorni piovosi isolati o di gruppi di giorni piovosi consecutivi formò oggetto anni or sono di uno studio del Grossmann⁽²⁾; e supponendo egualmente probabili i diversi aggruppamenti, furono dedotte le formule che permettono di calcolare il numero medio dei giorni piovosi di due, tre o più giorni consecutivi.

I numeri così calcolati però non si accordano con quelli che indicano effettivamente gli aggruppamenti dei giorni piovosi che risultano dalle osservazioni eseguite anche durante un ragguardevole numero di anni.

Anche recentemente ciò fu confermato dal Besson⁽³⁾ nel suo studio sulla pioggia a Parigi (Montsouris) di un cinquantennio e da Domingo y

(1) Nella seduta del 4 maggio 1930.

(2) GROSSMANN L., *Die Extrem-Temperaturen in Hamburg. In den Jahren 1876-1900.* « Archiv. der Deutschen Seewart », XXIII. Jahrg.; Hamburg.

(3) BESSON L., *La pluie à Paris d'après cinquante années d'observations.* « Annales des Services Techniques d'Hygiène de la Ville de Paris », tome IX, Paris, 1927.

Quilez⁽¹⁾ nella sua ricerca sulle osservazioni di Saragozza di un trentennio.

La conoscenza della probabilità dei gruppi di giorni piovosi, può riuscire utile per determinare la variabilità del tempo e dedurre, come propone il Besson, il coefficiente di persistenza della pioggia.

Se si indica con $p_1 = \frac{n_2 + 2n_3 + 3n_4 + \dots}{n}$ la probabilità che piova in un certo giorno sapendo che ha piovuto il giorno precedente e con

$$p_i = \frac{n_{i+1} + 2n_{i+2} + 3n_{i+3} + \dots}{n_i + 2n_{i+1} + 3n_{i+2} + \dots}$$

la probabilità di i giorni consecutivi di pioggia e con p la probabilità generale di un giorno di pioggia il coefficiente di persistenza della pioggia è dato da:

$$R = \frac{p_1 - p}{1 - p}.$$

Esso oscilla tra zero e uno, assume il valore zero nei luoghi ove la pioggia caduta la vigilia non ha alcuna influenza e il valore uno nei giorni dove vi è mancanza di giorni isolati con precipitazioni.

Il Besson, basandosi su un cinquantennio d'osservazioni, trova che i valori R per i diversi mesi sono molto vicini alla media annuale e le deviazioni assolutamente fortuite. L'A. ha inoltre diviso le serie dei cinquanta anni in metà e calcolando il coefficiente medio annuale trova 0.40 e 0.35 per il primo e per il secondo venticinquennio, ossia valori poco diversi fra di loro sebbene i due anzidetti periodi abbiano avuto regimi pluviometrici molto dissimili. Non può quindi attribuirsi a Parigi la tendenza del tempo a presentarsi in alcune epoche dell'anno più variabile rispetto ad altre. Il Besson infine considera il coefficiente di persistenza 0.38 come una costante del clima parigino.

Dalla sopra citata ricerca di Domingo y Quilez appare invece che il coefficiente di persistenza debba variare con le condizioni climatiche delle regioni alle quali s'applica, e varierà anche per i diversi mesi dell'anno in una determinata regione poichè le caratteristiche piovose non sono identiche in tutti i mesi.

Difatti dal trentennio di osservazioni pluviometriche raccolte a Saragozza risulta che esso oscilla da 0.14 in agosto a 0.35 in febbraio; con un andamento ben distinto. Il valore medio annuo risulta di 0.26.

Siffatta diversità fra i risultati ottenuti dai due Autori citati mi indusse ad esaminare la questione, basandomi sulle osservazioni pluviometriche rac-

(1) DOMINGO Y QUILEZ, *Coefficientes de persistencia*. «Anales de la Sociedad Española de Meteorología», vol. II, n. 4, Madrid, 1928.

colte nell'Osservatorio del Collegio Romano dal 1880 al 1929 (che potei consultare per concessione del Direttore Palazzo, che qui vivamente ringrazio), portando così un contributo a tale genere di ricerche.

Nella tabella seguente è indicato il numero delle volte che nel cinquantennio si notarono a Roma giorni isolati di pioggia e gruppi di 2, 3, 4 e fino a 10 giorni piovosi consecutivi:

Mese	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	p	p_1	R
Gennaio . . .	76	61	28	17	3	12	8	2	2	2	0.360	0.620	0.40
Febbraio . . .	85	48	23	12	9	3	2	2	4	2	0.344	0.607	0.39
Marzo	76	61	30	13	11	5	4	2	0	2	0.366	0.629	0.41
Aprile	99	56	38	15	15	6	6	1	1	1	0.386	0.588	0.32
Maggio	117	52	29	16	2	4	3	0	0	0	0.275	0.477	0.27
Giugno	111	43	14	1	4	2	0	0	0	0	0.183	0.363	0.21
Luglio	72	13	4	0	1	0	0	0	0	0	0.073	0.213	0.14
Agosto	82	26	4	1	0	0	0	0	0	0	0.096	0.245	0.16
Settembre . .	97	40	19	12	5	1	1	1	0	0	0.218	0.463	0.31
Ottobre	81	70	31	17	12	6	3	0	2	1	0.353	0.589	0.35
Novembre . . .	73	53	32	24	14	6	6	3	5	1	0.426	0.654	0.39
Dicembre . . .	89	53	35	11	12	8	11	2	3	0	0.415	0.642	0.38
Totale annuo	1.058	576	287	139	88	53	44	13	17	9	0.291	0.507	0.30

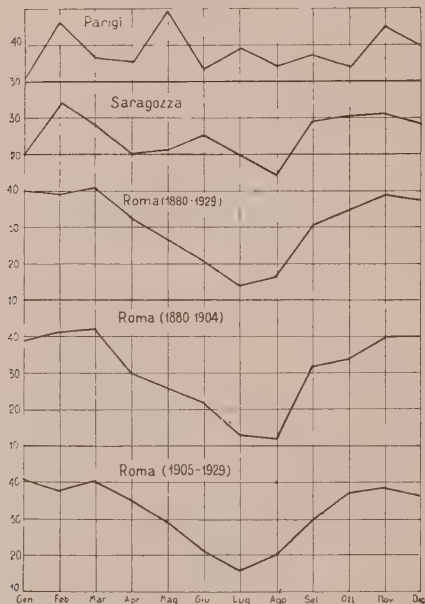
I valori del coefficiente di persistenza sono anche rappresentati nel grafico seguente e unitamente a quelli ottenuti dal Besson e da Domingo y Quilez.

Appare chiaramente per Roma un andamento annuale col massimo in marzo e il minimo in luglio, e si nota inoltre una grande regolarità nei diversi tratti della spezzata così ottenuta. Sembra quindi confermato quanto notò Domingo y Quilez che diversamente da quanto pensava il Besson il coefficiente di persistenza della pioggia è sottoposto ad una variazione annuale almeno in quei climi come quello di Roma ove le precipitazioni acquiee hanno un netto andamento annuale.

Nel grafico predetto abbiamo anche rappresentato le variazioni del coefficiente di persistenza per i due venticinquenni in cui può dividersi il periodo esaminato. Le spezzate così ottenute mostrano un andamento identico se si eccettui qualche spostamento in qualche mese che però non altera la fisionomia generale; il che prova che nei decorsi venticinquenni nel clima

di Roma non si verificarono complessivamente radicali variazioni nell'andamento dei fenomeni piovosi.

Non risulta dai nostri valori il massimo pronunciato di febbraio che si ha a Parigi e a Saragozza e non si trova nemmeno corrispondenza con gli altri massimi a causa evidentemente del diverso regime pluviometrico.



Riuscirebbe io credo utile condurre il calcolo del coefficiente di persistenza per diverse città italiane poichè dall'andamento dei valori ottenuti potrebbe risultare definito maggiormente il regime pluviometrico delle diverse regioni.

Riportiamo infine i valori della probabilità dei gruppi dei giorni piovosi consecutivi quali risultano dalle osservazioni di Roma.

$K =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_k (Roma)	= 0.507	0.555	0.575	0.587	0.566	0.535	0.470	0.472	0.257	0.000
p_k (Saragozza)	= 0.411	0.415	0.451	0.523	0.562	0.480	0.374	0.444	0.250	0.000

e paragonandoli con quelli di Saragozza risulta che il coefficiente di probabilità della pioggia aumenta coll'aumentare del numero dei giorni precedenti di precipitazione fino ad un certo limite che è 5 per Saragozza mentre per Roma è 4; dopo tale limite il coefficiente di probabilità diminuisce.

Fisica. — *Intensità delle righe negli effetti Raman di molecole biatomiche*⁽¹⁾. Nota di E. SEGRÈ, presentata⁽²⁾ dal Socio O. MARIO CORBINO.

Nelle righe Raman dei gas, quando sono risolti i livelli rotazionali, si nota una distribuzione di intensità che ricorda quelle di certe bande di emissione. Le condizioni sperimentali per poter osservare con una certa accuratezza i rapporti di intensità sono assai difficili a realizzarsi, perchè occorre che la riga eccitatrice non dia sulle lastre un alone e che le varie righe Raman di rotazione siano abbastanza lontane e ben risolte. Tali favorevoli circostanze si realizzano in alcune fotografie di effetti Raman dell'O₂ eseguite dal Rasetti⁽³⁾ e da lui gentilmente messe a mia disposizione. Le righe Raman sono eccitate con una lampada a mercurio con la riga 2536.6 e la luce eccitatrice è in gran parte riassorbita ponendo una atmosfera di vapore Hg entro lo spettrografo. Con questo sistema si può ottenere che la riga primaria disturbi assai poco, e la fotografia può essere fotometrata ottenendo risultati abbastanza attendibili. La fig. 3 è la riproduzione di una di queste fotometrie eseguite con un microfotometro di Kipp e Zonen.

Per interpretare tali risultati occorre premettere alcune considerazioni sullo spettro dell'O₂. Il nucleo di O non ha momento proprio, per cui in un determinato livello elettronico esistono solo i livelli rotazionali pari o dispari, non ambedue le classi insieme. Inoltre le bande che intervengono nell'effetto Raman dell'O₂ sono combinazioni $^3\Sigma \rightarrow ^1\Sigma$ ⁽⁴⁾ per cui vale la regola di selezione $\Delta K = \pm 1, 0$. La fig. 1 renderà ancora più chiari questi rapporti. Essa è disegnata in scala, e l'energia dei successivi livelli rotazionali ha i valori ben noti $BK(K+1)$ in cui $B = \frac{h}{8\pi^2 I}$ esprimendo sempre tutto in numeri d'onda (cm⁻¹). La distanza tra i due sistemi di livelli rotazionali ossia l'energia elettronica e vibrazionale, che non interessa direttamente in queste considerazioni è riportata arbitrariamente. Per B si è assunto il valore 1.44 dedotto dall'effetto Raman in accordo con quello misurato direttamente da Osssenbrüggen⁽⁵⁾.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 4 maggio 1930.

(3) RASETTI, «Zeitschr. f. Physik», 61, p. 598, 1930.

(4) Seguiamo le notazioni proposte da MULLIKEN, «Rev. of Mod. Phys.», II, 1, 1930.

(5) W. OSSENBRÜGGEN, «Zeitschr. f. Physik», 49, 167, 1928.

Per calcolare le intensità delle successive righe Raman dei due tipi, stokes ed antistokes, cominciamo col ricordare la formola di Kramers ed Heisenberg⁽¹⁾ che per la parte che interessa l'effetto Raman dà:

$$(1) \quad (M_{jk})_{\nu} = \frac{iEe^2}{2h} \sum \frac{(w_l - w_j) \tilde{\alpha}_{jl} q_{jk}}{w_l - w_j - h\nu} - \frac{(w_k - w_j) \tilde{\alpha}_{jk} q_{jl}}{w_k - w_j + h\nu}.$$

Essa dà l'ampiezza del momento elettrico che oscilla con frequenza $\nu = \frac{w_l - w_k}{h}$ nella direzione q in funzione delle varie frequenze che entrano in giuoco e degli elementi $q_{jk} = \int \psi_j q \psi_k d\tau$ o se si vuole delle probabilità di transizione tra gli stati j e k, l per la luce polarizzata secondo gli assi

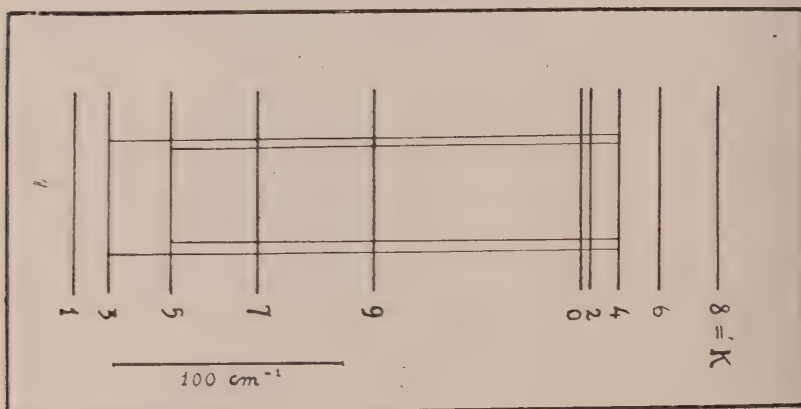


Fig. 1.

x, y o z , supposto l'atomo nello stato k e la luce incidente polarizzata secondo z . Bisogna ricordare inoltre che questa formola è per un solo atomo, e quindi l'intensità della riga sarà proporzionale non solo al quadrato del momento elettrico, ma anche al numero di atomi che intervengono nel processo. Inoltre, a rigore, bisognerebbe tener conto anche di un fattore $\left(\nu - \frac{w_l - w_k}{h}\right)^4$ il quale però può ritenersi costante nel nostro caso.

Generalmente è impossibile esplicitare la formola (1) perchè gli elementi della matrice x_{jk}, y_{jk}, z_{jk} sono sconosciuti. Ma nel caso attuale invece ci troviamo in condizioni assai favorevoli, ed è possibile un calcolo completo. Gli elementi della matrice x_{jk}, y_{jk}, z_{jk} , infatti, qualora si assimili la molecola ad un rotatore, sono calcolabili senz'altro. Assimilando le molecole ad

(1) Vedi SOMMERFELD, *Atombau* ecc., *Wellenmechanischer Ergänzungsband*, p. 207, e per la teoria secondo Dirac, AMALDI, «Rend. R. Acc. Lincei», 1929, II, p. 876.

un rotatore rigido si fa l'ipotesi che la ψ della molecola sia decomponibile nel prodotto della ψ_R del rotatore, per la ψ_e elettronica, ma tale approssimazione è giustificabile per i nostri scopi sia dal punto di vista teorico trattandosi di termini ${}^3\Sigma$ e quindi del caso b di Hund⁽¹⁾ ed essendo la separazione del tripletto assai piccola in confronto a quella dei livelli rotazionali, sia dai risultati in pieno accordo coi dati sperimentali. Per il rotatore rigido le autofunzioni dell'equazione di Schrodinger sono le funzioni sferiche $P_k^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$ a cui corrispondono i valori $E = BK(K+1)$ dell'energia. Inoltre per esse valgono le regole di selezione⁽²⁾.

$$(2) \quad \Delta K = 0, \pm 1 \quad \Delta m = 0, \pm 1$$

ed m assume i valori interi compresi tra $+K$ e $-K$.

Gli elementi della matrice x, y, z sono dati dalle seguenti formule:

$$(2') \quad \left\{ \begin{array}{ll} z_{K, K-1} = a \sqrt{\frac{(K+m)(K-m)}{(2K+1)(2K-1)}} & m' = m'' \\ (x+iy)_{K, K-1} = a \sqrt{\frac{(K-m-1)(K-m)}{(2K+1)(2K-1)}} & m' = m'' - 1 \\ (x+iy)_{K, K-1} = a \sqrt{\frac{(K+m-1)(K+m)}{(2K+1)(2K-1)}} & m' = m'' + 1 \end{array} \right.$$

Le regole di selezione sopra scritte fanno vedere senz'altro che i sommatore della (1) si riducono ad un solo termine (non tenendo conto della degenerazione delle funzioni sferiche). Ciò è graficamente riportato nella fig. 1 in cui le verticali a sinistra si riferiscono alle transizioni che interessano per le righe Stokes e quelle a destra riguardano le righe antistokes.

L'aumento di frequenza è nell'un caso $\frac{W_3 - W_5}{h}$, nell'altro $\frac{W_5 - W_3}{h}$.

Costruendo analogamente le frequenze delle righe Raman corrispondenti ai salti $1 \rightarrow 3$ ecc. $3 \rightarrow 1$ ecc., si può facilmente constatare come esse collimino con quelle della fotometria. La luce proveniente da transizioni fra vari stati degeneri della stessa energia va considerata come incoerente e quindi si devono sommare le intensità, non le ampiezze.

Premesse queste considerazioni sullo spettro dell' O_2 e sul rotatore rigido passiamo all'applicazione della formula (1) la quale si può scrivere

$$(3) \quad (M_j)_{kl} = \frac{ie^2 E}{2h} \sum_i \frac{z_{jl} q_{jk}}{1 - \frac{w_l - w_j}{h\nu}} - \frac{z_{jk} q_{jl}}{1 + \frac{w_k - w_j}{h\nu}}.$$

(1) Cfr., p. es., MULLIKEN, loc. cit.

(2) SOMMERFELD, loc. cit., p. 62 e segg.

Ora verosimilmente gli stati j che intervengono con gran preponderanza nell'effetto Raman dell'O₂ sono quelli stessi che danno l'assorbimento nella regione di Schumann, assorbimento che ha il suo massimo verso i 1500 Å, o in cifra tonda verso i 66.000 cm⁻¹; ν è di circa 39.500 cm⁻¹ per cui

$$\frac{h\nu}{w_j - w_l} \approx \frac{h\nu}{w_j - w_k} \approx 0.59 = \alpha.$$

Inoltre per le regole di selezione (2) la (3) si può scrivere per una riga stokes

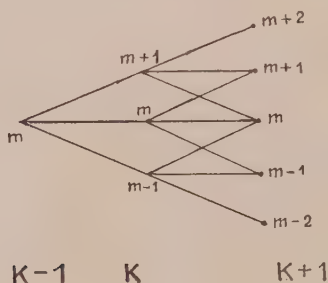
$$(4) \quad (M_q)_{K-1, K+1} = \frac{ie^2 E}{2h} \frac{\chi_{K, K+1} q_{K, K-1} (1 - \alpha) - \chi_{K, K-1} q_{K, K+1} (1 + \alpha)}{1 - \alpha^2}.$$

Le intensità delle righe risultano, per un atomo, proporzionali al quadrato del modulo di M ossia a

$$(5) \quad \chi_{K, K+1}^2 q_{K, K-1}^2 (1 - \alpha)^2 + \chi_{K, K-1}^2 q_{K, K+1}^2 (1 + \alpha)^2 - \\ - 2 \chi_{K, K+1} \chi_{K, K-1} q_{K, K+1} q_{K, K-1} (1 - \alpha^2).$$

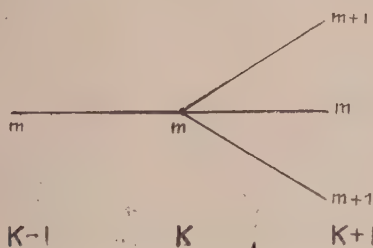
Per avere l'intensità totale bisogna poi far assumere a q le determinazioni x, y, z e sommare le intensità sia rispetto a x, y, z che rispetto ai vari valori possibili di m .

Le transizioni che bisognerebbe considerare nel caso della riga $K-1$, $K+1$ sono raccolte nello schema seguente:

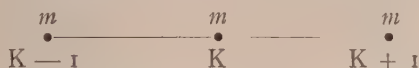


ma conviene supporre la luce incidente polarizzata secondo l'asse z . I risultati che si ottengono sono naturalmente gli stessi che si otterrebbero facendo il calcolo completo poichè l'asse z non è in alcun modo privilegiato non essendovi alcun campo esterno che permette di distinguere una direzione da un'altra. In tal modo tenendo conto delle regole di selezione (2) lo schema

delle transizioni da considerare si semplifica e diventa per il 1° termine della (5)



Pel 2° termine, si avrebbe uno schema analogo, mentre il 3° termine è diverso da 0 solo se q prende la determinazione χ poichè se $\chi_{K, K-1} \neq 0$, $\Delta m = 0$ nel passaggio da K a $K-1$ e allora $q_{K, K-1}$ è $\neq 0$ solo se q prende la determinazione χ , e quindi per esso si ha lo schema



La (5) dà, a meno di una inessenziale costante di proporzionalità l'intensità della riga Raman emessa da un atomo e il risultato va ancora naturalmente moltiplicato per il numero di atomi che si trovano nello stato di rotazione $K-1$ da cui ha inizio il processo. Poichè il gas che dà la diffusione con frequenza modificata è in equilibrio termico, e gli stati che si considerano, avendo tenuto conto esplicitamente della degenerazione, sono ormai da riguardarsi tutti come semplici, si ha dalla legge di Boltzmann, che tale numero è proporzionale a

$$e^{-\frac{w}{kT}} = e^{-\frac{BK(K-1)}{kT}}.$$

Eseguendo i calcoli e servendosi delle note formule

$$\sum_{-m}^m m^2 = \frac{m}{3} (m+1)(2m+1) \sum_{-m}^m m^4 = \frac{1}{15} m(m+1)(2m+1)(3m^2 + 3m + 1)$$

e ponendo per brevità:

$$A = \frac{\frac{32}{15} K^4 + \frac{24}{15} K^3 - \frac{12}{15} K^2 - \frac{4}{15} K}{(2K-1)(2K+1)(2K+3)}$$

$$B = \frac{\frac{24}{15} K^4 + \frac{48}{15} K^3 + \frac{3}{15} K^2 + \frac{4}{15} K}{(2K-1)(2K+1)(2K+3)}$$

$$C = \frac{\frac{8}{15} K^4 + \frac{16}{15} K^3 + \frac{2}{15} K^2 - \frac{6}{15} K}{(2K-1)(2K+1)(2K+3)}$$

si arriva alla seguente espressione per le intensità delle righe di tipo Stokes, ossia per passaggi da $K - 1$ a $K + 1$:

$$J_S = [(1 + \alpha)^2 A + (1 - \alpha)^2 B - 2(1 - \alpha^2) C] e^{-\frac{BK(K-1)}{kT}}$$

con procedimento analogo si arriva alla formula:

$$J_A = [(1 - \alpha)^2 A + (1 + \alpha)^2 B - 2(1 - \alpha^2) C] e^{-\frac{B(K+1)(K+2)}{kT}}$$

per quelle antistokes, per passaggi da $K + 1$ a $K - 1$.

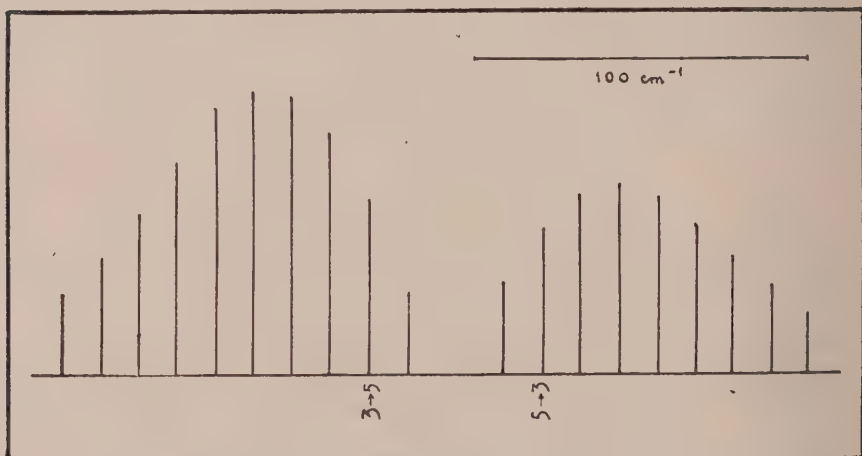


Fig. 2.

La fig. 2 mostra senz'altro il risultato dei calcoli ponendo $T = 300$ Kelvin. In essa sono stati indicati gli stessi passaggi a cui si riferiscono le verticali della fig. 1 e vi è anche segnata la scala delle frequenze che è stata scelta in modo che le righe nella fig. 2 e nella fotografia avessero la stessa distanza.

La fig. 3 è una fotometria delle lastre ottenute. Non si sa quantitativamente quale relazione vi sia tra l'intensità della riga e l'indicazione del microfotometro, però necessariamente devono essere conservate le relazioni di eguaglianza, maggioranza e minoranza e quindi la posizione, p. es., del massimo con l'incertezza della distanza fra due righe. Un confronto fra i risultati dei calcoli e la fotometria dà risultati assai soddisfacenti. (Alla seconda riga Stokes è sovrapposta la riga 2534.8 dell'Hg). Si vede così, p. es., che le posizioni dei massimi coincidono e che righe che hanno la stessa intensità nella fotometria, l'hanno anche nella figura calcolata. Si noti come la prima riga antistokes è più intensa della corrispondente stokes.

Inoltre dalla posizione del massimo si può dedurre il valore di h/k con la precisione del 10 % circa.

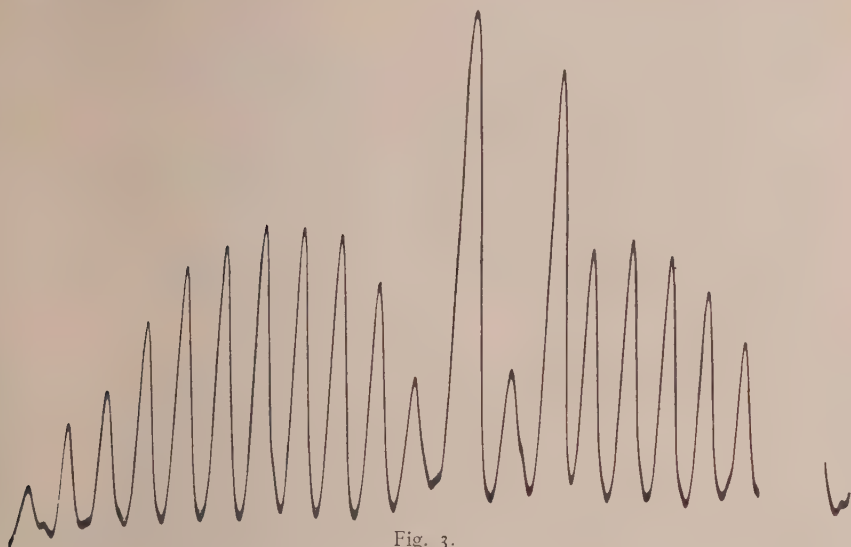


Fig. 3.

Riassumendo: si è esplicitata la formula della meccanica quantistica per le intensità delle righe Raman nel caso della molecola di O_2 ed è stato possibile un diretto confronto con l'esperienza, con ottima concordanza nei risultati. Inoltre si è potuto dedurre il valore di h/k con la precisione del 10 % circa.

Fisica. — *Sul funzionamento dei contatori a tubo di Geiger e Müller* ⁽¹⁾. Nota di B. ROSSI presentata ⁽²⁾ dal Socio A. GARBASSO.

1. — Il nuovo tipo di contatore a tubo di Geiger e Müller si è dimostrato utilissimo nelle ricerche sulla radiazione penetrante. Per poterlo adoperare in esperienze quantitative è però necessario conoscerne esattamente il funzionamento; occorre cioè sapere se, ed in quali condizioni, esso segnali tutti i corpuscoli, che l'attraversano; o, quando ciò non avvenga, quale sia il suo « rendimento » ⁽³⁾ e se questo sia o no lo stesso in tutte le sezioni del contatore.

(1) Lavoro eseguito presso il Laboratorio di Fisica in Arcetri.

(2) Nella seduta del 4 maggio 1930.

(3) Intendo con ciò il rapporto fra il numero dei corpuscoli, che vengono rivelati, ed il numero totale dei corpuscoli, che attraversano il contatore.

Risulta dalle esperienze di Geiger e Müller che, per un valore opportuno della tensione, il rendimento dei contatori deve essere abbastanza vicino ad uno ⁽¹⁾; e ciò è confermato, per altra via, dalle interessanti ricerche di Bothe e Kolhörster ⁽²⁾. Tuttavia esistono finora, per quanto mi consta, soltanto valutazioni approssimative; mi è sembrato utile perciò studiare un metodo, il quale permetta di eseguire direttamente e con una certa precisione la misura del rendimento.

Al principio di questo metodo ho già avuto occasione di accennare, incidentalmente, in una mia precedente Nota ⁽³⁾. Esso consiste nel disporre

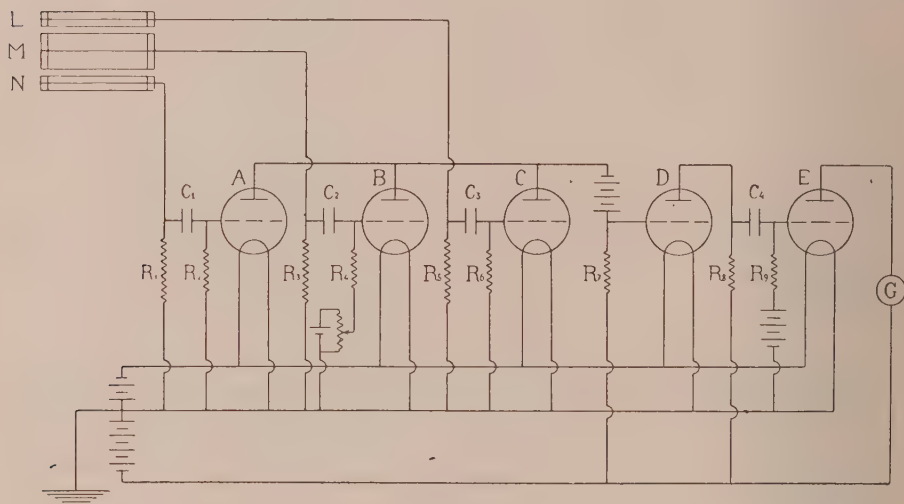


fig. 1.

il contatore in esame fra due altri contatori, in modo che un corpuscolo non possa attraversare questi ultimi senza attraversare anche il primo. In tali condizioni, se questo avesse rendimento uno, gli impulsi simultanei dei contatori estremi (provocati dal passaggio di un medesimo corpuscolo attraverso ad essi) dovrebbero essere sempre accompagnati da un impulso nel contatore centrale. Se ciò non avviene, dobbiamo concludere che quest'ultimo non segnala tutti i corpuscoli, che l'attraversano; ed allora il rapporto fra il numero delle coincidenze triple ed il numero totale degli impulsi simultanei fra i contatori estremi ne dà il rendimento.

2. — Per rendere pratica ed agevole la misura ho realizzato un dispositivo, che permette di registrare automaticamente sia le coincidenze doppie, che quelle triple.

(1) « Phys. Zs. », 30 (1929), p. 489.

(2) « Zs. f. Phys. », 56 (1929), p. 761.

(3) Questi « Rendiconti », 11 (1930), p. 478.

Il circuito, schematicamente rappresentato nella fig. 1, è sostanzialmente analogo a quello da me precedentemente adottato per la segnalazione delle coincidenze triple ⁽¹⁾. Ne differisce soltanto perchè nel circuito di placca dell'ultima valvola, al posto del telefono, è inserito un galvanometro di piccola sensibilità (2.10^{-6} amp. per 1 mm. della scala ad 1 m. di distanza); ma di grande prontezza, e perchè alla griglia della valvola B (accoppiata al contatore centrale) viene comunicato, mediante un potenziometro, un piccolo potenziale negativo. Ciò ha come conseguenza di aumentare la resistenza interna normale della valvola stessa, rendendola comparabile con R_7 ; cosicchè sulla griglia della valvola D si produce una piccola, ma sensibile, variazione di potenziale, quando, per una scarica simultanea dei due soli contatori L ed N, la corrente si interrompe in A e in C senza interrompersi anche

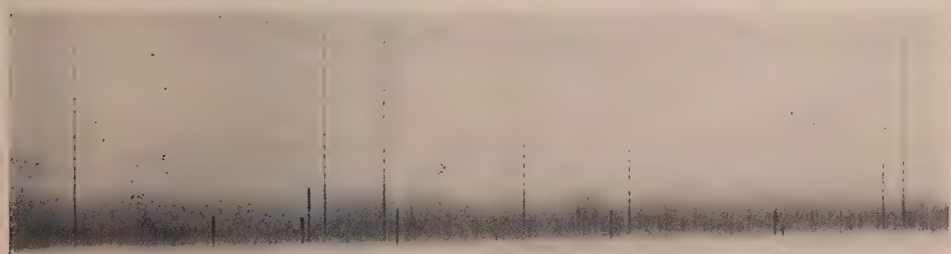


Fig. 2.

in B; mentre si ha una variazione di potenziale molto più forte, quando, per una scarica simultanea dei tre contatori, la corrente si interrompe in tutte tre le valvole.

Nel primo caso quindi il galvanometro segna una deviazione assai meno ampia che nel secondo; e il rapporto fra le ampiezze degli impulsi, che dipende dalla tensione di griglia della valvola B, può essere facilmente regolato in modo da escludere ogni possibilità di equivoco.

Questi impulsi vengono poi registrati fotograficamente sopra una striscia di carta sensibile avvolta attorno ad un cilindro, al quale un congegno di orologeria imprime un movimento elicoidale. La registrazione è ottenuta proiettando, per mezzo dello specchio del galvanometro, l'immagine reale di una fenditura intensamente illuminata sulla carta sensibile, davanti alla quale è posta una lente cilindrica, che concentra tutta la luce in un punto.

Nella fig. 2 è riprodotta, come esempio, una registrazione di coincidenze doppie e triple ⁽²⁾. Appare assai evidente la differenza di ampiezza fra

(1) Loc. cit. Ho ottenuto i migliori risultati adoperando in A, B, C, D valvole Telefunken RE 084 e in E una valvola Telefunken RE 134. Tutte queste valvole mi sono state gentilmente fornite dalla S. A. Osram.

(2) La velocità di registrazione è di 0,5 cm. al minuto; il fascio di luce, nella posizione di riposo, viene intercettato con uno schermo posto davanti alla lente cilindrica,

gli impulsi corrispondenti alle prime ed alle seconde. Ogni dubbio sull'attendibilità dei risultati è stato poi eliminato mediante opportune prove di controllo, eseguite ora allontanando il contatore centrale, in modo da registrare soltanto coincidenze doppie, ora dando alla valvola B un potenziale di griglia eguale a zero, in modo da registrare soltanto coincidenze triple.

3. — Il metodo ora descritto è stato applicato allo studio di un contatore a tubo di 16 cm. di lunghezza e di 5 cm. di diametro. Il filamento (di acciaio, del diametro di 0.35 mm.) è stato preparato, secondo uno dei metodi indicati da Geiger e Müller, per trattamento con acido nitrico. Prima dell'uso il contatore è stato evacuato e quindi riempito di aria essicata con anidride fosforica fino alla pressione di 37 mm. di mercurio. I contatori ausiliari (del diametro di 2 cm.) sono stati costruiti in modo analogo.

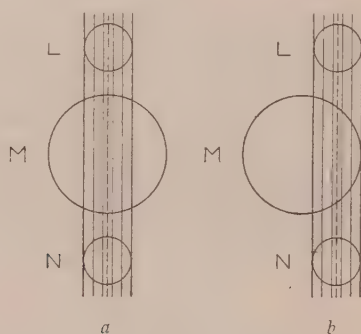


Fig. 3.

(a) Ho confrontato dapprima il rendimento nelle diverse sezioni, disponendo l'esperienza in modo da studiare, mediante il fascio di raggi penetranti delimitato dai contatori L ed N, ora la sezione centrale (fig. 3 a), ora una sezione laterale (fig. 3 b) del contatore M. I risultati ottenuti sono riassunti nella seguente tabella, dove t indica la durata dell'osservazione, V la tensione applicata al contatore M, R_s la resistenza che ne scarica a terra il filamento, m il numero totale di impulsi simultanei fra i contatori estremi, n il numero di coincidenze triple, $\rho = \frac{n}{m}$ il rendimento ⁽¹⁾.

per evitare l'eccessivo annerimento della carta; il particolare aspetto delle linee corrispondenti alle coincidenze triple va poi attribuito al fatto che lo specchio del galvanometro, fissato al telaio mediante un braccio piuttosto elastico, entra in vibrazione quando il galvanometro subisce una brusca deviazione.

(1) I dati riportati in questa e nelle seguenti tabelle sono già stati corretti tenendo conto delle coincidenze casuali. Il numero delle coincidenze doppie casuali fra i contatori L ed N è stato direttamente misurato e trovato eguale circa a 2 all'ora. Per quel che riguarda le coincidenze triple casuali, bisogna osservare che la correzione si riferisce più

	t	V	R_3	m	n	ρ
Sezione centrale	$4^h 5^m$	1481	3.109	115	63	0.55
Sezione laterale	4^h	1481	3.109	110	59	0.54

Come si vede dunque il rendimento non è sensibilmente diverso nei due casi; la probabilità cioè che ha un corpuscolo di provocare una scarica è la stessa a qualunque distanza dal filamento esso attraversi il contatore.

b) Ho poi studiato l'effetto della variazione di V ottenendo i risultati riassunti nella seguente tabella.

t	V	R_3	m	n	ρ
$3^h 10^m$	1443	3.109	90	38	0.42
$3^h 45^m$	1462	»	89	41	0.46
$3^h 45^m$	1481	»	106	56	0.53
6^h	1500	»	156	107	0.69
$3^h 10^m$	1510	»	60	50	0.83
$5^h 45^m$	1519	»	121	99	0.82

Il rendimento, come era da prevedere, aumenta dapprima notevolmente coll'aumentare della tensione applicata, fino a raggiungere un valore abbastanza vicino ad uno; poi rimane stazionario quando si aumenti ulteriormente la tensione fino al limite, oltre il quale cominciano a prodursi scariche spontanee. Il rendimento procede dunque parallelamente colla frequenza degli impulsi; tanto l'uno che l'altra sono, entro un determinato intervallo, indipendenti dalla tensione e questo intervallo corrisponde alle condizioni del miglior funzionamento.

c) Aumentando la resistenza di scarica (R_3) si allarga l'intervallo di rendimento costante, cosicchè l'uso del contatore riesce più agevole.

Occorre notare però che il rendimento dipende in modo sensibile da R_3 , come provano i risultati di alcune esperienze riassunti nella seguente tabella.

propriamente alle coincidenze casuali fra le coincidenze sistematiche di una coppia di contatori e gli impulsi del terzo. Il loro numero (variabile col rendimento e valutato, nel caso presente, 0.5 all'ora) non è, per quanto piccolo, completamente trascurabile, come invece è trascurabile il numero delle coincidenze casuali fra impulsi indipendenti dei tre contatori.

t	V	R_3	m	n	ρ
$3^b 10^m$	1513	$3 \cdot 10^9$	61	47	0.77
3^b	»	$2 \cdot 10^{10}$	62	35	0.56

Si vede dunque che, all'aumentare di R_3 , il rendimento diminuisce; nè può essere migliorato aumentando la tensione, giacchè con $V = 1566$ ed $R_3 = 2 \cdot 10^{10}$, ho registrato in un'ora 34 coincidenze, di cui soltanto 19 triple, il che corrisponde ad un rendimento eguale a 0.56.

Questa diminuzione di rendimento va, con ogni probabilità, attribuita al fatto che, quando R_3 è troppo grande, il filamento non si scarica abbastanza rapidamente, cosicchè il contatore, dopo ogni impulso, rimane inattivo per un intervallo di tempo non trascurabile di fronte alla distanza media fra due impulsi successivi.

4. - I valori numerici del rendimento, che abbiamo trovato nelle diverse condizioni di esperienza, non possono avere evidentemente carattere di generalità, per l'influenza notevolissima, che la preparazione del filamento esercita sul funzionamento dei contatori. È da ritenere invece che possano estendersi a tutti i contatori i risultati qualitativi delle esperienze descritte, i quali possono riassumersi nel modo seguente:

I contatori a tubo di Geiger e Müller hanno il medesimo rendimento in tutte le sezioni; questo rendimento cresce coll'aumentare della tensione applicata fino ad un limite, che non può essere superato aumentando ulteriormente la tensione ed il cui valore dipende dalla resistenza di scarica.

Fisica teorica. — *Sopra un esempio di trattazione quantistica di un fenomeno di interferenza.* Nota di G. RACAH, presentata ⁽¹⁾ dal Socio A. GARBASSO.

Il metodo escogitato dal prof. Fermi ⁽²⁾ per studiare in base alla teoria di Dirac dell'irraggiamento i fenomeni di interferenza della luce, e da lui applicato alla trattazione delle frange di Lippmann, può essere esteso a molti altri fenomeni di interferenza. Noi lo applicheremo, usando le medesime notazioni, allo studio del caso in cui un atomo emette per risonanza una radiazione che interferisce con quella incidente.

Dal punto di vista di Dirac la teoria si può svolgere allo stesso modo. Si considera il sistema unico formato dal campo di radiazione e da tre atomi: l'atomo emittente A, che si suppone eccitato all'istante iniziale e che cede in un certo tempo la sua energia al campo di radiazione; un atomo B (risonante), che ha una certa probabilità di assorbire l'energia emessa da A e di rimetterla; infine un atomo C (rivelatore), che ci indica con quale probabilità la luce emessa da A e da B viene assorbita nel punto in cui esso si trova. Il problema matematico consiste appunto nel calcolare questa probabilità.

Consideriamo dapprima il caso che vi siano soltanto i due atomi A e B, per vedere come viene eccitato l'atomo risonante. Supporremo per semplicità che essi si trovino sull'asse delle x in due punti di ascisse x e x' , ed abbiamo le direzioni di vibrazione parallele all'asse delle y .

Supponiamo che all'istante iniziale sia

$$a_{2,1,0,\dots,0,\dots} = 1$$

e tutte le altre a uguali a 0; chiamiamo $\frac{1}{2\gamma}$ la vita media dell'atomo A, cioè sia negli istanti successivi

$$a_{2,1,0,\dots,0,\dots} = e^{-\gamma t}.$$

Introducendo nell'equazione

$$(1) \quad \dot{a}_n = \frac{2\pi i}{h} \sum_m H_{nm} a_m$$

(1) Nella seduta del 4 maggio 1930.

(2) FERMI, « Rendiconti R. Acc. Lincei », vol. X, p. 77, 1929.

l'espressione delle $a_{1,1,0,\dots,1_s,\dots,0,\dots}$ data dalla teoria di Dirac dell'emissione, si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{a}_{1,2,0,\dots,0,\dots} &= - \frac{16 \pi^3 e^2 \nu \nu' Q Q'}{h \Omega} \sum_s \frac{B_{sy} B'_{sy}}{\nu_s} \frac{e^{[2 \pi i (\nu - \nu_s) - \gamma] t} - 1}{2 \pi i (\nu - \nu_s) - \gamma} e^{2 \pi i (\nu_s - \nu') t} \\ &= - \frac{16 \pi^3 e^2 \nu \nu' Q Q'}{h \Omega} e^{[2 \pi i (\nu - \nu') - \gamma] t} \sum_s \frac{B_{sy} B'_{sy}}{\nu_s} \frac{e^{[2 \pi i (\nu_s - \nu) + \gamma] t} - 1}{2 \pi i (\nu_s - \nu) + \gamma} \end{aligned}$$

dove

$$\vec{B}_s = - \vec{A}_s \sin 2 \pi \nu_s \frac{S \alpha_{sx} x}{c}$$

con $\alpha_{sx}, \alpha_{sy}, \alpha_{sz}$ coseni della direzione di propagazione, e \vec{A}_s versore della direzione di polarizzazione dell'essesimo oscillatore del campo di radiazione. Il simbolo S indica sommatoria fatta mutando x in y e z successivamente.

Nel nostro caso

$$\begin{aligned} B_{sy} B'_{sy} &= A_{sy}^2 \sin 2 \pi \nu_s \frac{\alpha_{sx} x}{c} \sin 2 \pi \nu_s \frac{\alpha_{sx} x'}{c} = \\ &= \frac{1}{2} A_{sy}^2 \left(\cos 2 \pi \nu_s \alpha_{sx} \frac{x' - x}{c} - \cos 2 \pi \nu_s \alpha_{sx} \frac{x' + x}{c} \right). \end{aligned}$$

Se trascuriamo il secondo termine, il cui contributo vedremo dal seguito che tende a 0 con l'allontanarsi della parete origine, e poniamo $\delta_1 = \frac{x' - x}{c}$, abbiamo

$$B_{sy} B'_{sy} = \frac{1}{2} A_{sy}^2 \cos 2 \pi \nu_s \alpha_{sx} \delta_1.$$

Se si media rispetto alle varie direzioni di polarizzazione, si ottiene

$$\overline{A_{sy}^2} = \frac{1}{2} (1 - \alpha_{iy}^2) = \frac{1}{2} (\alpha_{ix}^2 + \alpha_{iz}^2);$$

se poi si media rispetto ai valori che può assumere α_{sz} per un dato α_{sx} , si ottiene

$$\overline{\alpha_{sz}^2} = \frac{1}{2} (1 - \alpha_{sx}^2),$$

e perciò

$$\overline{A_{sy}^2} = \frac{1}{4} (1 + \alpha_{sx}^2).$$

Abbiamo dunque:

$$\frac{1}{\Omega} \sum_s \frac{B_{sy} B'_{sy}}{\nu_s} \frac{e^{[2 \pi i (\nu_s - \nu) + \gamma] t} - 1}{2 \pi i (\nu_s - \nu) + \gamma} = \frac{1}{8 \Omega} \sum_s (1 + \alpha_{sx}^2) \frac{\cos 2 \pi \nu_s \alpha_{sx} \delta_1}{\nu_s} \frac{e^{[2 \pi i (\nu_s - \nu) + \gamma] t} - 1}{2 \pi i (\nu_s - \nu) + \gamma}.$$

Se sostituiamo la sommatoria con un integrale, tenendo conto che vi sono $\frac{4\pi\Omega}{c^3} v_s^2 dv_s d\alpha$ sistemi di onde stazionarie con frequenza compresa tra v_s e $v_s + dv_s$, e α_{sx} compreso tra α e $\alpha + d\alpha$, otteniamo:

$$\frac{1}{\Omega} \sum_s \frac{B_{sy} B'_{sy}}{v_s} \frac{e^{[2\pi i(v_s - v) + \gamma]t} - 1}{2\pi i(v_s - v) + \gamma} =$$

$$= \frac{\pi}{2c^3} \int_0^\infty \frac{e^{[2\pi i(v_s - v) + \gamma]t} - 1}{2\pi i(v_s - v) + \gamma} v_s dv_s \int_{-1}^1 (1 + \alpha^2) \cos 2\pi v_s \alpha \delta_1 d\alpha.$$

Ma trascurando potenze superiori alla prima di $\frac{1}{2\pi v_s \delta_1} = \frac{\lambda_s}{2\pi(x' - x)}$, abbiamo che

$$\int_{-1}^1 (1 + \alpha^2) \cos 2\pi v_s \alpha \delta_1 d\alpha = \frac{2 \sin 2\pi v_s \delta_1}{\pi v_s \delta_1},$$

e perciò

$$\frac{1}{\Omega} \sum_s \frac{B_{sy} B'_{sy}}{v_s} \frac{e^{[2\pi i(v_s - v) + \gamma]t} - 1}{2\pi i(v_s - v) + \gamma} = \frac{1}{c^3 \delta_1} \int_0^\infty \frac{e^{[2\pi i(v_s - v) + \gamma]t} - 1}{2\pi i(v_s - v) + \gamma} \sin 2\pi v_s \delta_1 dv_s.$$

Questo integrale, che è del tipo del fattore discontinuo di Dirichlet⁽¹⁾, è nullo per $t < \delta_1$, mentre per $t > \delta_1$ ha il valore

$$\frac{i}{2} e^{-(2\pi i v - \gamma) \delta_1}.$$

Abbiamo dunque

$$(2) \quad \frac{1}{\Omega} \sum_s \frac{B_{sy} B'_{sy}}{v_s} \frac{e^{[2\pi i(v_s - v) + \gamma]t} - 1}{2\pi i(v_s - v) + \gamma} = \begin{cases} 0 & \text{per } t < \delta_1 \\ \frac{i}{2c^3 \delta_1} e^{-(2\pi i v - \gamma) \delta_1} & \text{per } t > \delta_1 \end{cases}$$

e perciò

$$(3) \quad \dot{a}_{1,2,0,\dots,0,\dots} = \begin{cases} 0 & \text{per } t < \delta_1 \\ -\frac{8\pi^3 i e^2 v' Q Q'}{hc^3 \delta_1} e^{-2\pi i v' \delta_1} e^{[2\pi i(v - v') - \gamma](t - \delta_1)} = \mathfrak{F} & \text{per } t > \delta_1 \end{cases}$$

e integrando

$$(4) \quad a_{1,2,0,\dots,0,\dots} = \begin{cases} 0 & \text{per } t < \delta_1 \\ \frac{8\pi^3 i e^2 v' Q Q'}{hc^3 \delta_1} e^{-2\pi i v' \delta_1} \frac{1 - e^{[2\pi i(v - v') - \gamma](t - \delta_1)}}{2\pi i(v - v') - \gamma} & \text{per } t > \delta_1 \end{cases}$$

(1) COURANT e HILBERT, *Meth. der Mathem. Physik*, p. 65.

Se vogliamo tener conto della vita media dell'atomo B, invece di porre

$$\dot{a}_{1,2,0,\dots,0,\dots} = \mathfrak{I}$$

dovremo porre

$$\dot{a}_{1,2,0,\dots,0,\dots} = \mathfrak{I} - \gamma' a_{1,2,0,\dots,0,\dots}$$

e integrando

$$(4') \quad a_{1,2,0,\dots,0,\dots} = \frac{8\pi^3 i e^2 \nu' Q Q'}{h c^3 \delta_1} e^{-2\pi i \nu' \delta_1 t} \frac{e^{-\gamma'(t-\delta_1)} - e^{[2\pi i(\nu-\nu')-\gamma](t-\delta_1)}}{2\pi i(\nu-\nu')-\gamma+\gamma'}$$

per $t > \delta_1$ (1).

Se si calcolasse secondo la teoria elettromagnetica classica il momento elettrico di un oscillatore B di frequenza propria ν' , che venisse eccitato dalla radiazione emessa da un oscillatore A di momento elettrico

$$e a_{2,1,0,\dots,0,\dots} Q e^{2\pi i \nu t}$$

si troverebbe un valore uguale a

$$\frac{h}{8\pi^2 m \nu' Q'^2} e a_{1,2,0,\dots,0,\dots} Q' e^{2\pi i \nu' t};$$

ma siccome Q' è l'elemento $1, 0$, della matrice di un oscillatore; la prima frazione è uguale a 1, e risulta così per la propagazione della luce la perfetta aderenza del risultato quantistico con quello classico.

Consideriamo ora il caso di tre atomi: le a avranno tre indici relativi agli stati quantici degli atomi, oltre a quelli riferentisi agli stati quantici delle componenti della radiazione; le equazioni (1) ci danno ora per calcolare l'eccitazione del campo:

$$\begin{aligned} \dot{a}_{1,1,1,0,\dots,1,0,\dots,0,\dots} = & -\frac{4\pi^{3/2} e}{\sqrt{h\Omega}} \frac{\nu Q}{\sqrt{\nu_s}} B_{sy} e^{2\pi i(\nu-\nu_s)t} a_{2,1,1,0,\dots,0,\dots} - \\ & -\frac{4\pi^{3/2} e \nu' Q'}{\sqrt{h\Omega}} \frac{Q'}{\sqrt{\nu_s}} B'_{sy} e^{2\pi i(\nu'-\nu_s)t} a_{1,2,1,0,\dots,0,\dots}; \end{aligned}$$

introducendo per $a_{2,1,1,0,\dots,0,\dots}$ il valore $e^{-\gamma' t}$ e per $a_{1,2,1,0,\dots,0,\dots}$ quello dato dalla (4'), e integrando, abbiamo

(1) La parte che abbiamo trascurato nell'espressione di $B_{sy} B'_{sy}$ ci avrebbe dato un termine simile a questo; però esso avrebbe avuto nel denominatore al posto di $\delta_1 = \frac{x' - x}{c}$, il valore $\frac{x' + x}{c}$; perciò con l'allontanarsi dell'origine esso tende a 0, come avevamo accennato.

$$a_{1,1,1,0,\dots,1,3,\dots,0,\dots} = -\frac{4\pi^{3/2}e}{\sqrt{h\Omega}} \frac{vQ}{\sqrt{v_s}} B_{sy} \frac{e^{[2\pi i(v-v_s)-\gamma]t} - 1}{2\pi i(v-v_s) - \gamma} -$$

$$-\frac{4\pi^{3/2}e}{\sqrt{h\Omega}} \frac{8\pi^3 i e^2 v' Q Q'}{c^3 h \delta_1} \frac{v' Q'}{\sqrt{v_s}} B'_{sy} \frac{e^{-2\pi i v_s \delta_1}}{2\pi i(v-v') - \gamma + \gamma'} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{e^{[2\pi i(v'-v_s)-\gamma'](t-\delta_1)} - 1}{2\pi i(v'-v_s) - \gamma'} - \frac{e^{[2\pi i(v-v_s)-\gamma](t-\delta_1)} - 1}{2\pi i(v-v_s) - \gamma} \right]^{(1)};$$

e introducendo di nuovo questo valore nella (1):

$$\dot{a}_{1,1,2,0,\dots,0,\dots} = -\frac{16\pi^3 i e^2 v v'' Q Q''}{h\Omega} e^{[2\pi i(v-v'')-\gamma]t} \sum_s \frac{B_{sy} B''_{sy}}{v_s} \frac{e^{[2\pi i(v_s-v)+\gamma]t} - 1}{2\pi i(v_s-v) + \gamma} -$$

$$-\frac{8\pi^3 i e^2 v'^2 Q'^2}{h c^3 \delta_1} \frac{16\pi^3 i e^2 v v'' Q Q''}{h\Omega} \frac{e^{-2\pi i v'' \delta_1}}{2\pi i(v-v') - \gamma + \gamma'} \left\{ e^{[2\pi i(v'-v'')-\gamma'](t-\delta_1)} \sum_s \frac{B'_{sy} B''_{sy}}{v_s} \frac{e^{[2\pi i(v_s-v)+\gamma](t-\delta_1)} - 1}{2\pi i(v_s-v) + \gamma} \right\}^{(1)}.$$

Tenendo conto della (2), ricordando che dalla teoria di Dirac abbiamo $\gamma' = \frac{32\pi^4 e^2 v'^3 Q'^2}{3 h c^3}$, e ponendo $\delta = \frac{AC}{c}$, $\delta_2 = \frac{BC}{c}$, $\bar{\delta} = \delta_1 + \delta_2$, otteniamo

$$\dot{a}_{1,1,2,0,\dots,0,\dots} = \begin{cases} 0 & \text{per } t < \delta \\ -\frac{8\pi^3 i e^2 v'' Q Q''}{h c^3 \delta} e^{-2\pi i v'' \delta} e^{[2\pi i(v-v'')-\gamma](t-\delta)} & \text{per } \delta < t < \bar{\delta} \\ -\frac{8\pi^3 i e^2 v'' Q Q''}{h c^3 \delta} e^{-2\pi i v'' \delta} e^{[2\pi i(v-v'')-\gamma](t-\delta)} - \\ -\frac{3i\gamma'}{4\pi v' \delta_1} \frac{8\pi^3 i e^2 v v'' Q Q''}{h c^3 \delta_2} \frac{e^{-2\pi i v'' \bar{\delta}}}{2\pi i(v-v') - \gamma + \gamma'} \cdot \\ \cdot [e^{[2\pi i(v'-v'')-\gamma'](t-\bar{\delta})} - e^{[2\pi i(v-v'')-\gamma](t-\bar{\delta})}] & \text{per } t > \bar{\delta} \end{cases}$$

e integrando:

$$a_{1,1,2,0,\dots,0,\dots} = \begin{cases} 0 & \text{per } t < \delta \\ \frac{8\pi^3 i e^2 v v'' Q Q''}{h c^3 \delta} e^{-2\pi i v'' \delta} \frac{1 - e^{[2\pi i(v-v'')-\gamma](t-\delta)}}{2\pi i(v-v'') - \gamma} & \text{per } \delta < t < \bar{\delta} \\ \frac{8\pi^3 i e^2 v v'' Q Q''}{h c^3} \left\{ \frac{e^{-2\pi i v'' \delta}}{\delta} \frac{1 - e^{[2\pi i(v-v'')-\gamma](t-\delta)}}{2\pi i(v-v'') - \gamma} + \right. \\ + \frac{3i\gamma'}{4\pi v' \delta_1 \delta_2} \frac{e^{-2\pi i v'' \bar{\delta}}}{2\pi i(v-v') - \gamma + \gamma'} \left[\frac{1 - e^{[2\pi i(v'-v'')-\gamma'](t-\bar{\delta})}}{2\pi i(v'-v'') - \gamma'} - \right. \\ \left. \left. - \frac{1 - e^{[2\pi i(v-v'')-\gamma](t-\bar{\delta})}}{2\pi i(v-v'') - \gamma} \right] \right\} & \text{per } t > \bar{\delta} \end{cases}$$

(1) Il secondo termine solo per $t > \delta_1$.

Anche in questo caso il valore classico del momento elettrico di un oscillatore C eccitato dalla radiazione emessa dall'atomo A e dal risonatore B, sarebbe

$$e a_{1,1,2,0,\dots,0,\dots} Q'' e^{2\pi i \nu'' t}.$$

Per osservare l'interferenza facciamo $t - \bar{\delta}$ grande rispetto alla vita media di A e di B, ed otteniamo

$$(7) \quad a_{1,1,2,0,\dots,0,\dots} = \frac{8\pi^3 i e^2 \nu \nu'' Q Q''}{\hbar c^3 \delta} \frac{e^{-2\pi i \nu'' \bar{\delta}}}{2\pi i (\nu - \nu'') - \gamma} \left\{ 1 + \right. \\ \left. + \frac{3\gamma'}{4\pi\nu} \frac{\delta}{\delta_1 \delta_2} \frac{e^{-2\pi i \nu'' (\bar{\delta} - \delta)}}{2\pi(\nu' - \nu'') + i\gamma'} \right\}.$$

Si ha dunque il massimo di luce quando $\frac{e^{-2\pi i \nu'' (\bar{\delta} - \delta)}}{2\pi(\nu' - \nu'') + i\gamma'}$ è reale e positivo, cioè quando $2\pi\nu''(\bar{\delta} - \delta) + \arctg \frac{\gamma'}{2\pi(\nu' - \nu'')} = 2n\pi$, con n intero; il primo termine si interpreta classicamente come il ritardo di fase tra l'onda diretta e quella emessa per risonanza, dovuto al maggior cammino ottico; il secondo termine corrisponde allo sfasamento che si ha nell'assorbimento di un'onda smorzata.

È da notare che in questo come in qualsiasi altro fenomeno di interferenza trattato con questo metodo, i ritardi di fase che producono l'interferenza si calcolano in base alla frequenza propria dell'atomo assorbente; e questo risultato si ha anche con la teoria classica. Sperimentalmente invece si sa che l'interferenza dipende dalla lunghezza d'onda della radiazione emessa. Ciò è dovuto al fatto che consideriamo un atomo emittente di vita media finita (classico: oscillatore smorzato), ed un atomo assorbente di vita media infinitamente lunga. In tal caso è naturale (come si osserva sperimentalmente in un caso simile col risonatore di Hertz) che predomini la frequenza assorbita.

Se vogliamo avvicinare la teoria al tipo di rivelatore che usiamo in pratica, cioè alla molecola di AgBr, dobbiamo considerare un sistema (atomo o molecola) avente infiniti stati quantici infinitamente vicini. In tal caso la probabilità che il quanto di luce venga assorbito sarà

$$\sum_n |a_{1,1,n,0,\dots,0,\dots}|^2;$$

dato il divisore che compare nella (7), i termini più notevoli della sommatoria saranno quelli per cui $\nu''(n1) = \sim \nu$, e perciò l'interferenza può essere calcolata in base alla frequenza emessa.

Tengo a ringraziare il prof. E. Persico, che mi suggerì questo lavoro e mi fu sempre largo di consiglio e di aiuto.

Chimica. — *Ricerche sulle γ -triazine. Sintesi della fenil-amino-idrossi-triazina*⁽¹⁾. Nota di A. OSTROGOVICH, presentata⁽²⁾ dal Socio R. NASINI.

Questa sostanza è stata ottenuta la prima volta nel 1898 da L. Elzanowski⁽³⁾ per azione dell'acido nitroso nascente, in medio acetico a caldo, sulla *benzo-guanamina* (fenil-diamino-triazina). Siccome egli ottenne le sue sostanze generalizzando il metodo del Nencki⁽⁴⁾, così ne applicò pure la nomenclatura e chiamò *benzo-guanide* la sostanza in questione.

Credo preferibile, peraltro, di adottare per essa il nome di *fenil-amino-idrossi-triazina*, che ne fa risultare molto meglio la costituzione, senza volere con ciò stabilire in modo preciso se a questa sostanza *allo stato libero* sia realmente da attribuire la struttura *amino-enolica*, alla quale il nome di sopra corrisponde. È un fatto che il suo comportamento farebbe supporre che ciò sia assai probabile; ma solo ulteriori ricerche, dirette specialmente a questo scopo e che intendo eseguire più tardi su una serie di queste *amino-idrossi-triazine* potranno darcene la prova o dimostrarne il contrario.

Con la presente pubblicazione desidero render noto un metodo di sintesi di questa sostanza, che molto probabilmente potrà estendersi anche ad altre *amino-idrossi-triazine*. Esso consiste nel far reagire in opportune condizioni il *cloridrato di benzamidina* sull'*acetato di guanilurea*.

Debbo subito far notare che solo con l'*acetato* di guanilurea si riesce ad ottenere una certa quantità di questa sostanza; con altri sali, come il *cloridrato* o il *solfato*, non se ne ha neppure una traccia e tutta la *guanilurea* si trasforma in *ammelina*. È evidente, peraltro, che questa base cianurica si forma come prodotto secondario anche adoperando l'*acetato*, ma solo in quantità relativamente piccole. Altri prodotti secondari, che si formano, sono il *benzonitrile* e l'*acetamide*. È probabile che si formi anche un po' di *benzamide*, dovuta alla decomposizione della *benzamidina*, ma non ho creduto necessario di farne speciale ricerca.

Il rendimento in *fenil-amino-idrossi-triazina* è perciò relativamente piccolo, giungendo appena al 20-25 % del teorico.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico della Università di Cluj (Romania).

(2) Nella seduta del 4 maggio 1930.

(3) Vedi la 1^a parte della sua tesi di laurea: *Ueber aromatische Guanamine*, Fribourg (Suisse), 1898, p. 22. L'Elzanowski, peraltro, non ha dato che una descrizione molto sommaria della sostanza, senza farne alcuno studio.

(4) M. NENCKI, « Ber. », VII, 1, p. 775 (1874).

Gr. 3 di acetato di guanilurea e gr. 1.85 (calc. 1.65) di cloridrato di benзамидина *anidro*, ben polverizzati e mescolati, si scaldano in bagno di acido solforico. Verso i 100°, la massa comincia a rammollirsi, a 135–140° tutto è fuso e comincia a svolgersi acido acetico che aumenta coll'innalzarsi della temperatura, cosicchè a 160° lo svolgimento è forte e comincia a deporsi una sostanza di color giallo-crema pallido.

Verso i 170° si sente l'odore del benzonitrile; a 180° l'odore è pronunziato, mentre l'acido acetico non si avverte più e in sua vece si sente l'odore dell'ammoniaca. Si continua ad alzare la temperatura fino a 200–205°, per la qual cosa si ha un forte sviluppo d'ammoniaca e nello stesso tempo sulle pareti fredde della provetta si condensa, e poi cristallizza, l'acetamide. Si mantiene a questa temperatura circa un quarto d'ora e cioè fino a cessazione quasi totale dello sviluppo d'ammoniaca. In tutto, l'operazione dura circa $\frac{3}{4}$ d'ora. Si toglie, allora, la provetta dal bagno e la massa pastosa si fa aderire in strato sottile, per mezzo del termometro, sulle pareti della provetta; in questo modo, quando si aggiunge dell'acqua (appena il tutto s'è raffreddato) la parte solubile viene estratta assai più rapidamente e rimane una sostanza polverulenta giallo-crema, insolubile, che si filtra e si lava ripetutamente, con poca acqua per volta. La soluzione filtrata si fa evaporare a circa metà volume e quindi, dopo averla alcalinizzata con un po' d'idrossido di sodio o di potassio, si acidifica leggerissimamente con acido acetico. Si ha così una piccola quantità di *fenil-amino-idrossi-triazina* in aghetti bianchi che era rimasta sotto forma di cloridrato solubile in acqua. La maggior parte di questa sostanza si trova invece nel prodotto insolubile, dal quale si estrae facendolo bollire con parecchio alcool acquoso (2:1). Dopo un certo tempo, si filtra per separare l'*ammelina* insolubile⁽¹⁾ e si decolora con carbone animale; quindi si distilla una parte del liquido e si lascia freddare.

Se il prodotto giallo insolubile in acqua, come si ottiene dalla reazione, dovesse asciugarsi, riesce molto difficile di estrarlo con alcool, essendo divenuto praticamente insolubile. In questo caso, lo si scioglie in idrossido potassico diluito, magari scaldando, e dopo aver filtrato si riprecipita con acido acetico pure diluito.

La sostanza così ottenuta si filtra su filtro ordinario e, col getto della spruzzetta, servendosi di alcool acquoso (2:1) si trasporta nel pallone in cui si farà l'estrazione, procedendo come si è detto più sopra.

Si hanno così lunghi aghi incolori, sottili e flessibili, identici a quelli che si ottengono col metodo dell'Elzanowski.

A questo punto debbo fare un'osservazione su quanto afferma quest'autore e cioè che, mentre egli avrebbe ottenuto dall'alcool acquoso (2:1)

(1) L'*ammelina* è stata identificata anche per mezzo del suo *picrato* caratteristico, che ho descritto nella Nota XVIII sulle γ -triazine, la quale sta per essere stampata nella « Gazzetta Chimica ».

la sostanza anidra (e l'analisi che ne dà ne sarebbe la prova) io l'ho sempre ottenuta con una molecola d'acqua di cristallizzazione, indifferentemente se preparata col suo metodo, oppure per sintesi. Anche scaldando gli aghetti sulla lamina di platino si osserva, che, ad un certo momento, essi diventano opachi e poi si fondono bruscamente a più alta temperatura.

Scaldati a 100° alla pressione ordinaria perdono di peso assai poco; ma a 110° dopo un paio d'ore diventano anidri. Meglio è di scaldarli a 100° nel vuoto secco (P_2O_5).

Gr. 0.1245 di sostanze, preparata secondo Elzanowski, hanno perduto a 100°, nel vuoto secco, gr. 0,0109.

	Trovato:	Calcolato per $C_9H_8N_4O + H_2O$:
H_2O %	8.67	8.74

Gr. 0.0878 della stessa (IDRATA) hanno dato cc. 20.4 di N secco a 18° e 759 mm.

	Trovato:	Calcolato per $C_9H_8N_4O + H_2O$:
N %	27.22	27.18

Gr. 0.0997 di sostanza, preparata sinteticamente, hanno perduto a 100° nel vuoto secco, gr. 0.0086.

	Trovato:	Calcolato per $C_9H_8N_4O + H_2O$:
H_2O %	8.62	8.74

Gr. 0.1105 della stessa, sintetica, ANIDRA, hanno dato gr. 0.2321 di CO_2 e gr. 0.0435 di H_2O .

Gr. 0.0765 della stessa, sintetica, ANIDRA, hanno dato cc. 20.00 di N secco a 16° e 735 mm.

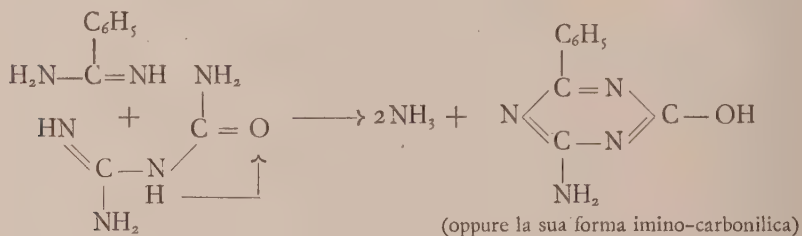
	Trovato:	Calcolato per $C_9H_8N_4O$:
C %	57.28	57.36
H %	4.37	4.28
N %	29.87	29.79

Come si vede, dunque, non c'è dubbio che la *fenil-amino-idrossi-triazina*, tanto se è preparata dalla *fenil-diamino-triazina* col metodo dell'Elzanowski, quanto se è ottenuta *sinteticamente* col metodo descritto in questa Nota, cristallizza dall'alcool acquoso con una molecola d'acqua. Io ho trovato che si può averla anidra dall'alcool assoluto, oppure anche dall'alcool concentrato del commercio, soprattutto se si parte dalla sostanza già desidratata. Si ha allora in pagliette minutissime più o meno allungate, oppure anche in prismetti microscopici acuminali, riuniti concentricamente e abbastanza pesanti per

deporsi in breve tempo sul fondo della provetta, dopo averne agitato il contenuto. Basta togliere, allora, con una pipetta, una parte dell'alcool, sostituendola con altrettanta acqua, per osservare, dopo un certo tempo, che tutte le pagliette o i prismettini, giacenti sul fondo della provetta, si sono trasformati nei lunghi aghi sottilissimi (caratteristici della sostanza idratata) i quali riempiono quasi tutto il liquido.

Anche con l'alcool metilico si comporta in modo perfettamente analogo. I cristallini più pesanti, ottenuti da alcool metilico anidro, si trasformano (per aggiunta d'acqua) negli aghetti lunghi e sottili, occupando un volume molto maggiore.

La sintesi di questa sostanza da *benzamidina* e *guanilurea* può esser rappresentata dai seguenti schemi:



Come ho accennato più sopra, quando si scaldano gli aghettini di questa sostanza sulla lamina di platino, prima diventano opachi e poi, a più alta temperatura, si fondono, decomponendosi bruscamente e lasciando un forte residuo carbonioso. L'Elzanowski non ha precisato la temperatura di fusione e si è limitato a dire: « Ihr Schmelzpunkt liegt über 300° ». Io ho trovato che la sostanza fonde a 322–323° (corretto 334–335°). La massima differenza che ho trovato nei diversi preparati è di un grado in più o in meno.

Essa è pochissimo solubile in acqua fredda; alquanto di più nell'acqua calda, da cui si ha sempre nei soliti aghettini lunghi e sottili. È praticamente insolubile, anche a caldo, in acetone, in etere etilico, in etere acetico e in cloroformio. Così pure in benzene e toluene, anche se precedentemente desidratata.

Si scioglie facilmente negli acidi minerali, anche diluiti, dando i rispettivi sali. Dalla loro soluzione acquosa si riprecipita la base con carbonato di sodio o anche con acetato di sodio.

Si scioglie pure facilmente negli idrossidi alcalini e si può riprecipitare saturando la soluzione con anidride carbonica od anche acidificandola leggermente con acido acetico.

Nell'acido acetico glaciale è parecchio solubile a caldo e per raffreddamento si ha l'*acetato* in aghettini minutissimi incolori, spesso riuniti a ciuffi. Esso si idrolizza facilmente quando è messo in contatto con l'acqua e perde completamente l'acido acetico se è scaldato a 100° nel vuoto su calce sodata.

In ammoniaca concentrata la fenil-amino-idrossi-triazina è parecchio solubile anche a freddo; ma a caldo si scioglie bene anche in ammoniaca diluita e non ricristallizza che allorquando si lascia evaporare l'ammoniaca. Si hanno allora i soliti aghettini della sostanza idratata, i quali alla prova del Nessler non contengono ammoniaca.

Se alla soluzione ammoniacale si aggiunge del nitrato d'argento si precipita un *sale d'argento* bianco, pochissimo solubile in ammoniaca, anche concentrata e calda, un po' più solubile nell'acido nitrico. Esso è completamente insensibile all'azione della luce e rimane perfettamente bianco anche se è tenuto per più ore al sole.

Con l'acetato di bario, sia pure in soluzione leggermente ammoniacale, la fenil-amino-idrossi-triazina non dà alcun precipitato. Così pure non dà alcun ammoniacato complesso di rame nelle condizioni ordinarie in cui diverse idrossi-triazine producono tali complessi.

Dà invece un *picrato* in aghetti sottili di color giallo piuttosto carico, assai poco solubili in acqua, anche a caldo. Riscaldati in tubicino, cominciano ad imbrunirsi verso i 240° e a 296-297° (corretto 306-307°) si fondono con viva decomposizione, dando un liquido bruno-nero.

I diversi sali di questa sostanza verranno descritti dettagliatamente, anche con i dati analitici, in altro luogo.

Desidero ora menzionare che, per passare dalla *fenil-diamino-triazina*, al derivato *mono-idrossilato* corrispondente, non c'è bisogno di ricorrere all'acido nitroso in medio acetico, come ha fatto l'Elzanowsky; ma si può benissimo far bollire il derivato *diaminico* con idrossido potassico acquoso (1:2), aggiungendovi alcuni centimetri cubi d'alcool. Dopo un certo tempo, tutto è sciolto con svolgimento d'ammoniaca. A questo punto si deve interrompere il riscaldamento e precipitare la sostanza con acido acetico; altrimenti la reazione procederebbe oltre e si otterrebbe la *fenil-diidrossi-triazina*.

Senza l'aggiunta d'alcool la *fenil-diamino-triazina* stenta molto a sciogliersi e in tal modo non si riesce a fermarsi alla sostanza intermedia *mono-idrossilata*, ma si passa addirittura alla *fenil-diidrossi-triazina* o *benzo-guanamide* come l'ha chiamata l'Elzanowski ⁽¹⁾. Ecco il perchè egli ha dovuto ricorrere all'acido nitroso per sostituire un solo amidogeno con l'ossidrile.

La *fenil-amino-idrossi-triazina* così ottenuta è perfettamente identica a quella preparata con gli altri due metodi di cui si è parlato in questa Nota.

(1) Vedi tesi di laurea, p. 23.

Mineralogia. — *Sulla determinazione dei plagioclasì per mezzo della misura degli angoli d'estinzione nella zona normale a (010).*
Nota di A. DEBENEDETTI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. E. REPOSSI.

L'utilità dei vari metodi, per la determinazione dei plagioclasì, basati sull'uso del piatto di Fedorow, viene limitata dalla relativa complicazione e dalla lunghezza delle operazioni di misura e di riporto che tutti questi metodi richiedono. Benchè a compenso di questa complicazione stia la maggior sicurezza della determinazione, difficilmente l'uso del piatto teodolite, secondo uno qualunque dei metodi noti, potrà estendersi, al di là dei petrografi e dei mineralogisti, fino ai geologi, per i quali la determinazione dei plagioclasì di una roccia è pure una delle operazioni più necessarie e correnti. L'unico metodo rapido, quello che combina l'uso del piatto di Fedorow con quello delle curve degli angoli d'estinzione nella zona di simmetria, non permette di determinare con sicurezza che i plagioclasì contengono più del 37 % di anortite.

È noto che le variazioni degli angoli di estinzione nella zona di simmetria [perpendicolare a (010)] furono studiate metodicamente dal Michel Lévy ⁽²⁾, il quale diede le curve degli angoli d'estinzione $\hat{\alpha}_x(010)$ di vari termini della serie dei plagioclasì, in funzione dell'inclinazione della sezione sul piano normale allo spigolo (100) (010). Egli fece notare che i massimi delle curve sono caratteristici per i termini da 37 a 100 % di anortite, e propose di utilizzare questi valori massimi per la determinazione dei geminati secondo la legge dell'albite. La successiva introduzione del piatto di Fedorow permise una estensione del metodo, proposta dal Michel Lévy stesso ⁽³⁾. Questa applicazione è esposta nei lavori che descrivono l'uso del piatto teodolite, p. es., diffusamente dal Berek ⁽⁴⁾. Il Berek fa risaltare la semplicità, la precisione e la costante applicabilità del principio teorico su cui si basa questo metodo, ma deve riconoscere che la sua pratica adozione non offre tutti i vantaggi promessi dalla teoria, da una parte per la non completa precisione dei dati coi quali sono state costruite le curve, dall'altro lato per la indeterminatezza, conseguente alla indeterminatezza dei segni

(1) Nella seduta del 4 maggio 1930.

(2) A. MICHEL LÉVY e A. LAGROIX, *Les minéraux des roches*. Baudry, Parigi, 1888.

(3) A. MICHEL LÉVY, *Étude sur la détermination des feldspates*, fasc. 1, p. 30. Baudry, Parigi, 1894.

(4) M. BEREK, *Mikroskopische Mineralbestimmung mit Hilfe der Universaltheodolithmethoden*, p. 81 sgg. Borntraeger, Berlino, 1924.

delle estinzioni, che rimane per i plagioclasì contenenti da 0 a 37% circa di anortite (V. tav. 5 del Berek).

Il primo inconveniente è di secondaria importanza per determinazioni che non siano puramente mineralogiche: il Berek dice che teoricamente si potrebbe stabilire la percentuale di anortite di un plagioclasio con un errore di 1/4%, ma che praticamente questa precisione non è raggiungibile. Per le determinazioni necessarie ad un geologo, il grado di esattezza che si può ottenere in pratica renderebbe però ancora applicabile il metodo, se si potesse eliminare la seconda difficoltà, di importanza assai maggiore, perchè non permette affatto la distinzione di una notevole quantità di plagioclasì.

Non mi pare quindi del tutto inutile esporre come, mediante semplici considerazioni ed accorgimenti, sia possibile togliere l'indeterminazione che infirma questo metodo; il quale viene così reso applicabile all'intera serie dei plagioclasì.

Se consideriamo le curve in questione (V. per es., Michel Lévy ⁽¹⁾; Rosenbusch ⁽²⁾; Duparc e Reinhard ⁽³⁾), verifichiamo che esse presentano, per ciascun termine, un massimo (caratteristico per i termini dal 37 al 93% di anortite), il quale ha valori positivi per i termini dal 73 al 21% circa, e negativo per quelli dal 21 al 0.5%. (Per il termine a 93% di anortite, il massimo sembra essere a 90° ed ha quindi segno indeterminato). Notiamo, inoltre, che le curve presentano una certa relazione reciproca di forma, come se ciascuna si potesse ottenere dalla precedente per deformazione in uno stesso senso; tuttavia vediamo che le curve dei termini da 0 a 21% di anortite non sono simmetriche, rispetto all'asse delle ascisse, di quelle da 21 a 37% di anortite. Data la forma delle curve, ciò vuol dire, in altre parole, che le tangenti, in due punti che abbiano uguale ascissa, a due curve la cui ordinata massima sia uguale in valore assoluto, hanno inclinazioni differenti.

Viene allora subito l'idea di utilizzare, per distinguere i due termini a massimo uguale, non più le curve degli angoli d'estinzione, ma le curve che ci danno il valore dell'inclinazione media, in un certo intervallo, delle tangenti alle curve delle estinzioni; cioè le loro curve derivate.

Queste curve, costruite coi comuni procedimenti del calcolo grafico, e prendendo come base le curve date da Duparc e Reinhard (loc. cit.) sono riportate nella fig. 1.

È evidente dal loro esame che esse sono nettamente differenti per ciascun termine, pur conservando, come è naturale, relazioni reciproche

(1) Loc. cit., p. 37.

(2) H. ROSENBUSCH, E. A. WÜLFING e O. MÜGGE, *Mikroskopische Physiographie der Mineralien u. Gesteine*, I vol. II metà, p. 788. Schweizerbart, Stuttgart, 1927.

(3) L. DUPARC e M. REINHARD, *La détermination des plagioclases dans les coupes minces*. (Da «Mémoires de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève», vol. 40, n. 1, p. 68). Georg, Ginevra, 1924.

analoghe a quelle che si rilevano all'esame delle curve delle estinzioni. Il punto nel quale ciascuna curva derivata passa per lo zero, corrisponde all'ascissa del massimo della curva funzione; si vede bene la migrazione di questo punto e la conseguente mancanza di simmetria delle curve delle

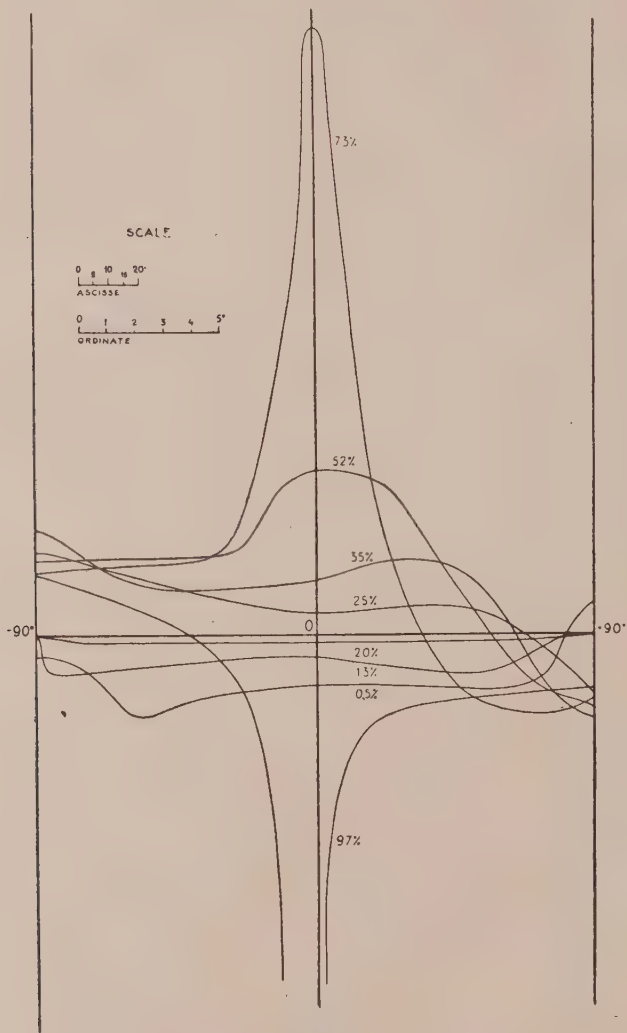


Fig. 1.

estinzioni. Le ascisse corrispondono a quelle delle curve di base; le ordinate, invece, ci danno (in una scala determinata dalla lunghezza del segmento preso come distanza polare per la costruzione) il valore dell'inclinazione della tangente alla curva delle estinzioni nel punto di uguale ascissa. Come

è noto, questo valore corrisponde al limite cui tende il rapporto tra l'incremento della funzione (rappresentata dalla curva) in un certo intervallo, ed il valore dell'intervallo stesso, quando l'intervallo tende a zero. Nel nostro caso, il valore che noi leggiamo come ordinata della curva derivata rappresenta

$$\lim_{\alpha_2 - \alpha_1 = 0} \frac{\text{angolo d'estinz. in } \alpha_2 - \text{angolo d'estinz. in } \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

Prendiamo ora in considerazione solo le curve dei termini da 0,5 a 37 % di anortite, che riguardano, cioè, i plagioclasii non distinguibili per valore assoluto del massimo angolo d'estinzione.

Se si potesse conoscere la posizione, nella zona, dell'intervallo che noi consideriamo [cioè l'angolo che la sezione fa, in ogni posizione, col piano

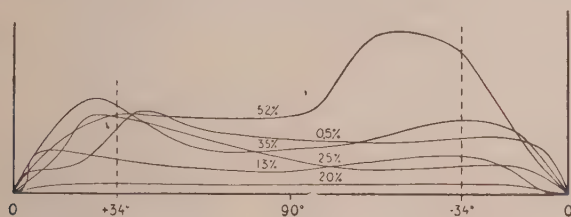


Fig. 2.

normale allo spigolo (100)(010)], due sole misure di angolo d'estinzione a distanza angolare nota, basterebbero generalmente per ottenere la determinazione del plagioclasio, perchè essa si avrebbe considerando insieme il massimo angolo d'estinzione ed il valore trovato della ordinata della curva derivata. Poichè, però, non possiamo conoscere la posizione della sezione, occorre portarla in una posizione conosciuta. Questa ci è data da quella corrispondente al massimo angolo d'estinzione. Esso, come abbiamo visto, non corrisponde, per i varii termini, ad una medesima ascissa. Per confrontare tra di loro le curve derivate, portiamo allora lo zero di ciascuna di esse a coincidere, facciamo cioè partire tutte le curve da uno stesso punto, come se i massimi di tutte le curve funzione avessero la stessa ascissa (fig. 2). Misurando l'incremento dell'angolo d'estinzione in un intervallo intorno al punto zero sarebbe possibile determinare il plagioclasio. Praticamente, siccome nei dintorni del massimo (a cui corrisponde lo zero della curva derivata) la variazione dell'angolo d'estinzione è molto piccola, conviene fare le misure in altri punti. Dal confronto delle varie curve, notiamo che, ad una distanza angolare di circa 34° dai due lati dello zero, l'incremento ha valori caratteristici per ciascun termine. Per determinare un plagioclasio, si trova quindi il punto di massimo angolo d'estinzione; portata

poi la sezione successivamente a 34° al di qua ed al di là di questo punto, si calcola l'ordinata della curva derivata in questi ultimi punti.

Praticamente la ricerca si conduce nel seguente modo. Si orienta la sezione in modo che il piano (010) sia verticale. Se la sezione è di un geminato secondo la legge dell'albite, non occorre aver rilevato la posizione

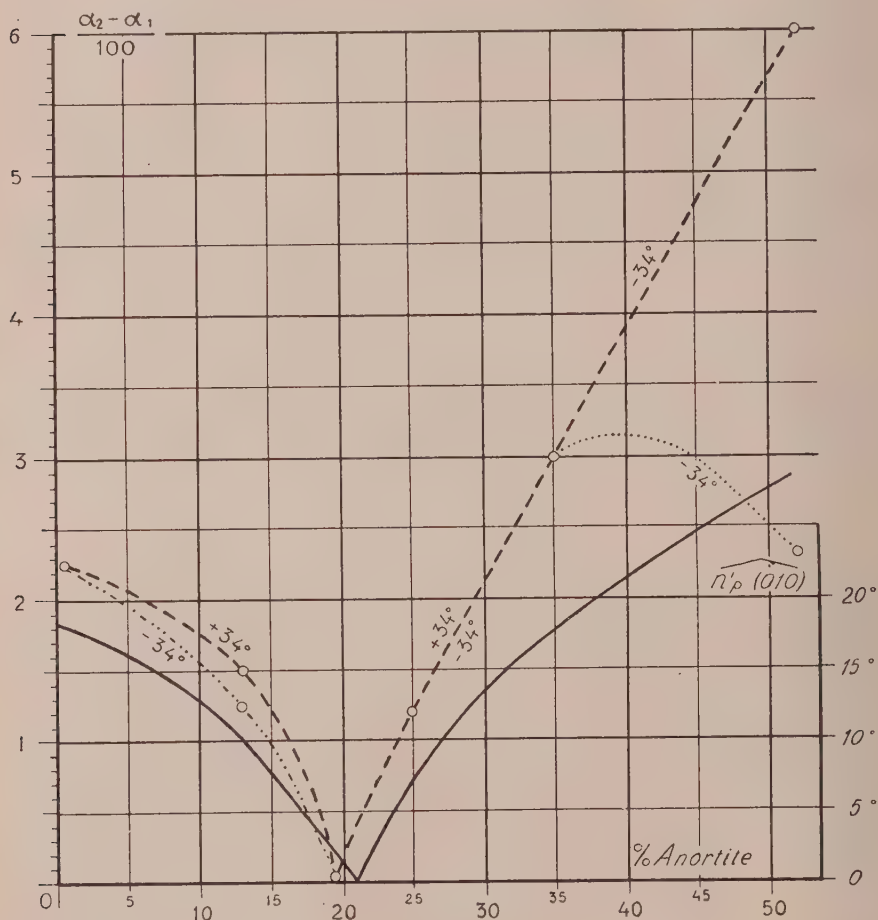


Fig. 3.

del piano (010) rispetto al piano della sezione. Col piatto di Fedorow (o con un altro piatto avente almeno due assi di rotazione orizzontali) si dispone la traccia di (010) a 45° rispetto alle sezioni principali dei nicoli; si inclina la sezione, ruotando intorno all'asse A_2 (mi riferisco alla notazione proposta dal Berek, loc. cit., p. 10) del minimo angolo necessario per produrre l'uguale illuminazione delle lamelle geminate. Si fissa l'asse A_2 in questa

posizione. Si riporta, ruotando secondo l'asse verticale, la traccia di (010) ad essere parallela alla direzione N-S del piatto. Ruotando la sezione intorno all'asse A_4 si ricerca il massimo dell'angolo d'estinzione $n_p(010)$, e lo si segna. Ruotando ancora intorno ad A_4 , si sposta la sezione di 5° dai due lati del punto distante 34° dalla posizione di massimo, leggendo l'angolo d'estinzione in queste due posizioni che risultano essere a 29° e 39° dalla posizione di massimo. Siano α'_1 e α'_2 gli angoli letti. Si ripete la stessa operazione ruotando a partire dalla posizione di massimo, nel senso opposto, di 29° e 39° . Siano α''_1 e α''_2 gli angoli letti in queste posizioni. Si fanno le differenze $\alpha'_2 - \alpha'_1$ e $\alpha''_2 - \alpha''_1$, e si divide ciascuna per il valore dell'angolo di spostamento, come abbiamo detto, 10° . Otteniamo così due valori corrispondenti con approssimazione praticamente sufficiente, ad ordinate della curva derivata, nelle ascisse distanti 34° dallo zero.

Questi dati: massimo valore dell'angolo d'estinzione, inclinazione delle tangenti alla curva delle estinzioni nei punti distanti 34° dal massimo, ci bastano per la determinazione. Per semplificarla, ho unito, nella fig. 3 il noto diagramma dei massimi degli angoli d'estinzione in funzione della percentuale in anortite (senza tener conto del segno dell'estinzione, cioè portando come positive le estinzioni per i termini da 0 a 21 % di anortite) insieme ad altre due curve, che danno il valore dell'ordinata della curva derivata per ogni plagioclasio, nei punti distanti di 34° sui due lati dello zero.

L'uso del diagramma si effettua nel seguente modo. Si cercano le due intersezioni dell'orizzontale corrispondente al massimo trovato, colla curva segnata a tratto continuo. Si ottengono due punti, le cui ascisse rappresentano la composizione dei plagioclasii da distinguere. In corrispondenza di queste ascisse si leggono le due coppie di valori delle ordinate delle curve punteggiate. Una delle due coppie lette coinciderà, più o meno sensibilmente, coi valori dedotti dalle misure, e l'ascissa corrispondente ci darà, senz'altro, la composizione del plagioclasio studiato.

Zoologia (Embriologia sperimentale). — *Costituzione zoologica e trapianti. Nuove esperienze tra Anuri e Urodeli* ⁽¹⁾. Nota III di GIULIO COTRONEI e ALDO SPIRITO, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. FANO.

Continuando, estendendole, le nostre ricerche ⁽³⁾ sui trapianti tra Anfibi Anuri e Urodeli, siamo riusciti a mettere in risalto alcuni fatti che valgono a lumeggiare i problemi impostati nelle nostre esperienze. Costituzione zoologica e trapianti, l'espressione da noi adoperata, vuol significare che col metodo dei trapianti si possono mettere in luce rapporti di affinità o di repulsione biologiche, tra forme zoologiche più o meno lontane, deducendole dallo studio delle più svariate proprietà di sviluppo embrionale che ci è dato seguire, se si possono seguire, in abbozzi di organi trapiantati in ospiti di costituzione biochimica diversa. Uno studio comparativo dei risultati raggiunti può mettere in luce non soltanto differenze costituzionali di carattere sistematico (ancora più ampie delle differenze di costituzioni individuali e di razze); ma può anche mostrare condizioni biochimiche che si stabiliscono in determinati momenti dello sviluppo. È ovvio però che lo sperimentatore deve operare sempre con gli stessi abbozzi embrionali, non essendo possibile generalizzare sui trapianti di organi differenti, perchè può ben accadere che abbozzi di organi differenti presentino un comportamento del tutto diverso. Già in lavori precedenti abbiamo accennato ad esperienze ⁽⁴⁾, eseguite durante la stagione primaverile dell'anno scorso, che dettero risultati negativi quando tentammo di trapiantare l'abbozzo dell'occhio di *Triton cristatus* su *Rana esculenta*. Scrivemmo ancora: ⁽⁵⁾ «abbiamo avuto dopo cicatrizzazione della ferita rapidissima necrosi del pezzo trapiantato. Non possiamo dire per ora se i risultati ottenuti erano puramente occasionali o se mostrano una reale incompatibilità biochimica che non si verifica nelle condizioni sperimentali inverse». Ricordiamo, infatti, che le nostre esperienze hanno dimostrato, invece, un perfetto differenziamento dell'occhio di *Rana esculenta* trapiantato in *Triton cristatus* o in *Triton taeniatus*.

Abbiamo creduto di riprendere queste esperienze per dare una risposta decisiva sulla questione che ci interessa, e, perseverando nel lavoro, abbiamo

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 4 maggio 1930.

(3) «Rend. R. Acc. dei Lincei», vol. X, 1929; *Atti della Soc. Ital. di Anat.*, in «Mon. Zool. Ital.», vol. XL, 1929; «Rend. R. Acc. dei Lincei», vol. XI, 1930.

(4) «Monitore Zool. Ital.», vol. XLI, 1930.

(5) «Rend. R. Acc. dei Lincei», vol. XI, p. 429, 1930.

finito per raccogliere dei frutti che riteniamo assai interessanti. Le nostre ricerche hanno avuto, quest'anno la fortuna di rivolgersi a un materiale sul quale non avevamo mai lavorato e che, proprio questo, ci ha permesso di entrare più nel vivo dei nostri problemi. Vogliamo alludere alle nuove operazioni compiute su embrioni di *Hyla arborea*.

Per procedere però con ordine vogliamo innanzi tutto dire che le esperienze di quest'anno ci consentono di affermare che vescicole ottiche primarie e secondarie di *Triton cristatus* trapiantate in embrioni di *Rana esculenta*, in regioni diverse del corpo, sono destinate, rapidamente durante lo sviluppo embrionale, ad essere distrutte senza mostrare quei processi differenziativi che si notano invece nei trapianti inversi di *Rana* su *Triton*. Un allievo interno del nostro Istituto, T. Perri, sta analizzando alcuni punti attinenti a queste ricerche. Dopo una prima operazione di trapianto dal Tritone sulla Rana, il Perri riporta la vescicola ottica sul Tritone, a distanza varia di tempo: vuol vedere così fino a quando la vescicola è capace, se lo è, di riprendere le sue attività di sviluppo. Ci proponiamo anche di verificare se nella Rana, in un primo tempo persiste o meno qualche tentativo di sviluppo.

Uno dei risultati più importanti conseguiti nelle esperienze di quest'anno è quello di dimostrare che tra varie forme di Anuri esiste una profonda differenza costituzionale, che vien messa in luce col metodo dei trapianti oculari.

I risultati che abbiamo avuto sui trapianti di vescicole ottiche di *Triton cristatus* su *Rana esculenta* si sono ripetuti quando abbiamo adoperato come ospite il *Bufo vulgaris*, e come donatore sia l'*Axolotl*, che il *Triton cristatus*. Su *Rana esculenta* e su *Bufo vulgaris*, abbiamo in tutte le operazioni notato questa rapida distruzione, anche quando si sono trapiantati insieme vescicola ottica, pezzi di prosencefalo, l'abbozzo olfattivo e il mesenchima circostante.

Operando su *Hyla arborea* si ottiene invece un risultato completamente diverso. La vescicola ottica, sia primaria che secondaria, di *Triton cristatus* trapiantata con l'ectoderma e il mesenchima circostante nella testa e nel ventre di embrioni di *Hyla* (allo stadio di accenno codale) si è differenziata in maniera normale con il cristallino, come è risultato al controllo istologico. Si è potuto anche osservare a tale controllo che se si trapianta insieme alla vescicola ottica un pezzo di prosencefalo di *Triton* e l'abbozzo olfattivo, queste parti presentano un evidente differenziamento istologico, che si è ottenuto nell'ambiente biochimico dell'ospite (*Hyla arborea*). Non vogliamo ancora azzardare prematuri giudizi su quello che potrà essere il destino ulteriore degli occhi di *Triton* trapiantati negli Anuri, in quella o in quelle forme (qualora se ne scoprissero delle altre) in cui l'occhio degli Urodeli può compiere il suo differenziamento, e soltanto quando saranno ultimate le osservazioni in proposito esporremo le nostre considerazioni.

Altre esperienze condotte quest'anno riguardano il comportamento di trapianti embrionali di Anuri su Urodeli.

Abbiamo già accennato in una Nota precedente ⁽¹⁾ che la vescicola ottica primaria di *Bufo vulgaris* trapiantata in embrioni di *Axolotl* proseguiva nel suo sviluppo dicendo che in un caso (rimasto per ora isolato) si metteva in relazione con il diencefalo dell'ospite mediante il nervo ottico. Nuove osservazioni con altri esemplari ci hanno dimostrato il differenziamento dell'abbozzo olfattivo e del prosencefalo di *Bufo* trapiantato in *Axolotl*; ed abbiamo notato il verificarsi di un'intima fusione istologica tra l'encefalo dell'ospite (*Axolotl*) e un frammento di encefalo di *Bufo* trapiantatovi accanto, insieme al placode olfattivo. È interessante notare che l'abbozzo olfattivo (*Bufo*) si è differenziato in prossimità di questa zona di fusione ed è connesso con un fascio di fibre al pezzo di encefalo trapiantato (*Bufo*) e quindi della propria forma.

Esperienze dello stesso genere sono state condotte adoperando come donatore il *Bufo vulgaris* e come ospite il *Triton cristatus* e il *Triton taeniatus*. In queste esperienze siamo stati sorpresi nel notare una grandissima mortalità nel materiale operato, ma siamo tuttavia riusciti a tenere in vita due esemplari (nei quali i trapianti erano stati eseguiti nella regione ventrale) per un tempo sufficiente a dimostrarci che la vescicola ottica poteva differenziarsi.

A conclusione di questa Nota vogliamo mettere in risalto che le nuove esperienze da noi condotte mettono in luce una profonda differenza costituzionale tra gli Anfibi anuri, differenza che risalta col metodo dei trapianti oculari; mentre nella *Rana esculenta* e nel *Bufo vulgaris* la vescicola ottica degli Urodeli da noi adoperati come donatori si distrugge rapidamente senza mostrare evidenti processi differenziativi, nella *Hyla arborea* la vescicola ottica di *Triton cristatus* si è sviluppata e differenziata.

(1) « Rend. R. Acc. dei Lincei », vol. XI, 1930.

Fisiologia. — *Studii sulla sindrome paratireopriva.* — II. *Azione preventiva dell'ergosterolo irradiato in dosi eccessive*⁽¹⁾. Nota di M. ÇOMEL, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. C. FOÀ.

Il caratteristico quadro ematologico che accompagna la tetania paratireopriva conferisce interesse particolare a ricerche in cui si saggi l'azione sulla sindrome paratireopriva stessa di sostanze che ne esercitano sul calcio e fosforo del sangue. Una tale sostanza è l'ergosterolo irradiato: e lo studio della sua azione sulla sindrome paratireopriva ha anche un altro interesse, in rapporto alla sua asserita identità con la vitamina antirachitica. Senza riportare qui dati bibliografici, accennerò al fatto che sia l'irradiazione con raggi ultravioletti, sia la somministrazione d'olio di fegato di merluzzo hanno dato a sperimentatori e a clinici risultati favorevoli, nel senso di un'attenuazione dei sintomi della tetania. Non si è riesciti tuttavia a impedirla, nè a protrarre definitivamente la vita dell'animale, che moriva coi segni della sindrome paratireopriva senza tetania, nei casi più favorevoli.

Riferisco in questa nota alcuni risultati ottenuti con l'ergosterolo irradiato somministrato preventivamente, ossia in periodi precedenti all'asportazione delle paratiroidi. Faccio osservare in via preliminare che si tratta, nei miei esperimenti, dell'azione di quelle che ormai chiamiamo le «dosi eccessive» di ergosterolo irradiato, ossia di somministrazioni che superano di migliaia di volte la dose terapeutica. Il loro studio ha attratto molti studiosi perchè accanto all'esame dell'azione biologica in senso stretto dell'ergosterolo irradiato, esso offre dati per confrontarla con quella della vitamina calciofissatrice (eventualmente, per la loro identificazione); e inoltre, ci pone in possesso di dati su un nuovo (finora problematico, a parer mio) campo della vitaminologia, l'ipervitaminosi o vitaminismo o vitaminopatia.

I cani trattati finora sono cinque. Le somministrazioni di ergosterolo irradiato, in soluzione all'1% in olio, furono fatte sia per via orale che per via parenterale (iniezioni sottocutanee). Il periodo di trattamento è durato da 10 a 24 giorni, a seconda della taglia ecc. Le dosi complessive sono state di 1-2.7 milioni di unità ratto (rimando alla pubblicazione in

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 4 maggio 1930.

estenso un estratto più particolareggiato dei protocolli). Alla fine del trattamento ai cani furono asportate le paratiroidi (a due di essi mediante la tiroparatiroidectomia bilaterale, agli altri tre mediante la paratiroidectomia associata all'asportazione della metà inferiore della tiroide). Dei cinque cani sono morti finora due, ambedue in seguito a un'infezione del sottocutaneo sviluppatasi prima dell'operazione, ma aggravatasi ed estesasi molto più rapidamente nei giorni a essa susseguenti: uno è morto 15, l'altro 13 giorni dopo l'operazione. Gli altri tre cani sono viventi tutt'ora, in condizioni normali di salute e di appetito⁽¹⁾. In nessuno dei cinque cani s'è manifestato mai alcun accesso tetanico, per quanto abortivo o lieve. Inoltre non si sono manifestati quei sintomi della sindrome paratireopriva che gli Autori hanno constatato anche quando si riusciva sperimentalmente (p. es. mediante somministrazioni d'olio di fegato di merluzzo, o mediante legatura, anzichè asportazione, delle paratiroidi) a inibire o ad attenuare grandemente la tetania. Questo quadro, che si potrebbe chiamare sindrome paratireopriva senza tetania, è caratterizzato da progressiva perdita di peso e di forze, con concomitante anoressia, resistenza alle infezioni diminuita grandemente, e, infine, stato stuporoso che conduce alla morte senza tetania. Nei miei cani di tutti questi sintomi non ci fu traccia, se non si vuole vederne uno nell'aggravarsi dell'infezione di cui morirono due; senonchè, e l'infezione era precedente all'operazione, e non conviene dimenticare la possibile azione tossica dell'ergosterolo irradiato ad alte dosi. I tre cani tuttora viventi non si distinguono per nulla da cani normali, nè per quanto riguarda le condizioni somatiche, nè per quanto riguarda l'appetito e il contegno.

Grande interesse ha l'andamento in questi animali, del calcio e del fosforo del siero. Esso fu caratteristico in tutti gli animali. Un confronto si può fare specialmente bene nei tre cani n. 11, 23 e 24, lupi della stessa taglia, ma di cui il primo ricevette 2.7 milioni di unità, e gli altri un milione ognuno. L'andamento fu il seguente: tutti i cani presentarono, alla fine del trattamento e nel periodo immediatamente precedente all'operazione, una non rilevante ipercalcemia (massimo valore osservato: mg. 13.5 per 100 cc. di sodio) e una notevole iperfosfatemia (massimo valore osservato: mg. 5.88). Quest'aumento del calcio e del fosforo è da attribuirsi all'azione dell'ergosterolo irradiato, conformemente a quanto è noto: è interessante tuttavia constatare che, come nella sua azione antirachitica, così in questa sul calcio e fosforo del sangue, l'ergosterolo somministrato in dosi eccessive, tossiche, non ne esercita una differente da quella esplicata da dosi terapeutiche. Dopo l'operazione il cane n. 11 conservò inalterato l'alto contenuto di calcio per più di un mese, tanto da farmi pensare all'eventuale presenza di paratiroidi accessorie (l'animale era stato operato di tiroparatiroidecto-

(1) La sopravvivenza è per il cane n. 11 di 91 giorni, per i cani nn. 23 e 24 di 32 giorni: il loro benessere continua, malgrado la dieta di zuppa in brodo di ossa e carne.

mia). 48 giorni dopo l'operazione il contenuto in calcio scese a mg. 10.5, valore in limiti normali. 72 giorni dopo l'operazione il contenuto in calcio era di mg. 6.7, e scese a 6.5 nel successivo dosaggio. Appena due mesi e mezzo dopo l'operazione dunque il calcio scese a valori caratteristici della sindrome paratireopriva. Nei cani n. 23 e 24, trattati con una quantità molto minore di ergosterolo irradiato, la discesa del calcio fu molto più precoce. Già pochi giorni dopo la paratiroidectomia il contenuto scese a 10.0 per il primo, a 9.6 per il secondo, e 13 giorni dopo l'operazione esso era di 7.0 e di 8.1 mg.

Il contenuto in fosforo del siero scende pure: in tutti gli animali esso discese lentamente, sino a raggiungere, finora, valori solo di poco superiori alla norma (circa 5 mg. per 100 cc. di siero). Questo comportamento della fosfotemia è tanto più caratteristico, in quanto che nella sindrome paratireopriva schietta il contenuto in fosforo aumenta nel siero di sangue in modo molto rilevante. Il trattamento preventivo con alte dosi di ergosterolo irradiato dunque, mentre impedisce la comparsa della tetania paratireopriva, solo temporaneamente impedisce la comparsa dell'ipocalcemia, ma impedisce invece l'iperfosfatemia. Di conseguenza, il quoziente Ca/P , pure diminuendo, rimane sensibilmente prossimo a cifre normali, e molto superiore a quello caratteristico della sindrome paratireopriva.

Forse all'azione sulla calcemia e fosfatemia, e sul rapporto Ca/P specialmente, nell'animale paratireoprivo si può attribuire l'efficacia antitetanica dell'ergosterolo irradiato. In ogni caso la tetania non ricompare più, nemmeno quando l'ipocalcemia si manifesta: in tal caso converrebbe attribuire maggiore importanza alla mancanza di iperfosfatemia. Ma quest'ultima potrebbe a sua volta essere la conseguenza, più che non una delle condizioni determinanti della tetania: e la sua mancanza esser dovuta alla mancanza della tetania stessa. Recenti contributi sono stati apportati al tema delle variazioni del fosforo nella tetania paratireopriva: ma li metterò in rapporto con i miei reperti nella pubblicazione in extenso di questo lavoro.

In questa nota mi limito ad affermare l'azione inibitrice dell'ergosterolo irradiato non solo sulla tetania, ma anche su altri sintomi clinici della sindrome paratireopriva: e a porre in evidenza le modificazioni della calcemia e della fosfatemia che vi si accompagnano. Ho allo studio anche alcuni animali in cui saggio l'azione curativa dell'ergosterolo irradiato sulla sindrome paratireopriva: ne riferirò prossimamente, non essendo i miei dati, per quanto positivi, ancora maturi.

Queste ricerche sono in pari tempo un contributo allo studio della tolleranza dell'organismo per le dosi « eccessive » di ergosterolo irradiato: i miei cani hanno tollerato iniezioni giornaliere, o somministrazioni orali di 100.000-120.000 unità ratto. I due cani morti a più di 10 giorni di distanza dall'operazione, per l'accennata grave infezione del sottocutaneo, sono stati, forse, vittime del trattamento: gli altri animali lo hanno sopportato molto bene.

Riassunto. L'ergosterismo ottenuto mediante somministrazioni preventive eccessive di ergosterolo irradiato impedisce la comparsa della tetania e la manifestazione dei sintomi clinici della sindrome paratireopriva. Non riesce a impedire, a lungo andare, la comparsa di un'ipocalcemia attenuata; ma impedisce la comparsa dell'iperfosfatemia. Tale quadro sierologico si accompagna a perfetto benessere degli animali operati.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente da all'Assemblea la triste notizia della morte del Socio LO MONACO e del Socio Straniero ROBERTSON ed annuncia che di ambedue gli scomparsi si terrà la commemorazione in una delle prossime sedute.

PRESENTAZIONI DI LIBRI

Il Socio NASINI presenta il volume da lui in gran parte redatto con la collaborazione di alcuni suoi allievi: «I Soffioni ed i Lagoni della Toscana e la industria boracifera» pubblicato per la liberalità del Socio GINORI-CONTI dall'Associazione Italiana di Chimica, con le seguenti parole:

«Ho l'onore di presentare in omaggio all'Accademia anche a nome del Socio Principe GINORI CONTI questo volume: R. NASINI, "I soffioni e i Lagoni della Toscana e la industria boracifera. Storia, studi, ricerche chimiche e chimico-fisiche eseguite principalmente nell'ultimo venticiquennio".

«In questo volume dedicato da me al Principe Ginori Conti, alla cui liberalità si deve e la pubblicazione del volume stesso e l'aiuto e l'impulso alle ricerche in esso contenute, sono raccolte non solo tutte le ricerche eseguite da me e dai miei collaboratori, principalmente da M. G. LEVI, A. BRINGHENTI, U. SBORGI, C. PORLEZZA sopra i lagoni, i soffioni e i loro prodotti, ma anche varie monografie sin qui inedite, una delle quali si riferisce alla storia dei soffioni nei secoli, e risolve una importante quistione sulla conoscenza di essi per parte di Lucrezio e tratta dei prodotti che si ricavavano dai lagoni prima della scoperta dell'acido borico; un'altra è una monografia completa sull'acido borico, sulle sue costanti chimiche e chimico-fisiche, sul suo ottenimento dai soffioni; altre due descrivono vivamente, può dirsi giorno per giorno, le ricerche fatte nei territori dei soffioni da me e dai miei collaboratori. Altra memoria riguarda la storia dei lagoni artificiali e il meccanismo del loro funzionamento.

« Ampie monografie corredate di molte figure, tavole e diagrammi sòno: quella del Dott. A. BRINGHENTI sul meccanismo dei soffioni, nella quale vengono trattati vari problemi attinenti alla geofisica: le ricerche di lui si svolgono poi in relazione anche alla grande impresa della utilizzazione del calore dei soffioni, voluta e realizzata dal Principe Piero Ginori Conti e da lui iniziata sin dal 1904 e che ebbe la prima attuazione industriale nel 1905; quella del Prof. M. G. LEVI sopra l'ottenimento tecnico del borace e sul suo processo e brevetto per la preparazione del borace elettrolitico; del prof. C. PORLEZZA sopra la radioattività dei soffioni, sull'ottenimento industriale dell'elio e sopra altri argomenti miranti allo sfruttamento razionale dei componenti il vapore dei soffioni, sulla volatilità dell'acido borico in solventi organici: del prof. SBORGI sopra i borati e i loro equilibri e via discorrendo. Chiude il volume un breve riassunto di tutti i lavori di tesi per laurea in chimica (in numero di 36) eseguiti nell'Istituto di Chimica Generale di Pisa negli ultimi venticinque anni riguardanti i soffioni, l'acido borico e la teoria e la pratica dell'industria boracifera; varie di queste dissertazioni costituiscono il germe di lavori per il futuro.

« Questo volume mi sembra che costituisca uno dei più interessanti esempi di collaborazione tra la scienza e l'industria, collaborazione che dura ormai da più di un quarto di secolo e che ha dato buoni frutti sia alla scienza che all'industria.

« L'Associazione italiana di Chimica nella persona del suo benemerito Segretario Generale prof. DOMENICO MAROTTA, che con tanto amore e tanta competenza ha dato l'opera sua, ha fatto sì che il volume riuscisse veramente degno del più alto encomio dal punto di vista tipografico ».

Il Presidente si congratula col Socio NASINI e col Socio GINORI-CONTI per il magnifico volume che è frutto di una collaborazione fra scienziati e industriali della quale sarebbe desiderabile avere esempi più frequenti.

L'Accademico Segretario PARRAVANO presenta i libri giunti in dono segnalando fra gli altri le « Oeuvres complètes de Christiaan Huygens » pubblicate dalla Société Hollandaise des Sciences.

PRESENTAZIONE DI PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente presenta quindi un plico suggellato inviato dall'Ingegnere Pietro Pisa perchè venga conservato negli archivi dell'Accademia.

PRESENTAZIONE DI NOTE

Presentano Note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci: CASTELNUOVO, CORBINO, FANO GIULIO, FRANCHI, GARBASSO, LEVI-CIVITA, NASINI, PALAZZO, PARRAVANO, PATERNÒ.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 4 maggio 1930

- Annali della Società Agraria della provincia di Bologna. Anni Accademici. 121-122. Bologna. 1930. 8°, pp. 1-358.
- Annuario della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei. Anno 1929-1930. Roma, 1930. 8°, pp. 1-78.
- BERRY W. ad KELLEY L. — The Foraminifera of the Ripley Formation on Coon Creek, Tennessee. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 76). Washington, 1929. 8°, pp. 1-20.
- Brochure A. B. C. La Réforme du Calendrier. Ginevra, London, Paris, s. d. 8°, pp. 1-29, 1-16, 1-31.
- CARTON M. E. — La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs. (Memorial des sciences mathématiques. Fasc. XLII). Paris, 1930. 8°, pp. 1-60.
- COSTANTINO G. — Contributo alla conoscenza della mosca delle frutta (Ceratitidis Capitata Wied.), (Diptera, Trypanidae). (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici». Vol. XXII, pp. 237-322). Spoleto, 1930. 8°.
- CUSHMAN R. A. — New Species of Ichneumon-Flies and Taxonomic Notes. (From the «Proceedings of the States National Museum». Vol. 76). Washington, 1930. 8°, pp. 1-18.
- D'ACHIARDI G. — Il Dottor Carlo Giannotti (Cenno necrologico). (Estr. dagli «Atti della Società Toscana di Scienze Naturali: processi verbali». Volume XXXVIII). Pisa, 1929. 8°, pp. 1-4.
- EIDE PARR A. — Notes on the Species of Myctophine Fishes represented by Type Specimens in the United States National Museum. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 76). Washington, 1929. 8°, pp. 1-47.
- FULCO P. — Quozienti e resti nella divisione di frazioni. Congruenze a modulo frazionario. Memoria IV. Civitavecchia, 1929. 4°, pp. 1-104.
- GARDNER LYM W. — A nearly complete Carapace of a fossil Turtle Amyda Virginiana (Clark). (From the «Proceedings of the United States National Museum» Vol. 76). Washington. 1929. 8°, pp. 1-4.
- HOFFMEISTER J. E. — A new Fossil Coral from the Cretaceous of Texas. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 76). Washington, 1929. 8°, pp. 1-3.
- HUYGENS C. — Oeuvres complètes, publiées par la Société Hollandaise des Sciences. Tome XVI. La Haye, 1929. 4°, pp. 1-599.
- KIRK E. — Mitrospira, a new Ordovician Gasteropod Genus. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 76). Washington, 1930. 8°, pp. 1-6.
- LECAT M. — Démixtion d'Azéotropes. (Extr. du «Journal de Chimie Physique». Tome XXVII, pagine 75-88). Paris, 1930. 8°.
- LECAT M. — Distillation d'un système binaire et allure des courbes. (p. t.) des constituants. (Extr. des «Annales de la Société scientifiques de Bruxelles». Tome XLIX, 1929, pp. 261-333). Louvain, 1930. 8°.
- MITCHELL S. A. — Atlas Stellarum variabilium. Series VII. (Reprint. from the «Monthly Notices of the Royal Astro-

- nomical Society ». Vol. LXXXIX, pagine 654-658). Edinburgh, 1929. 8°.
- MITCHELL S. A. — The Distances of the Stars. (Reprint from the « Proceedings of the American Philosophical Society ». Vol. LXVII, pp. 267-286). Lancaster, 1928. 8°.
- MITCHELL S. A. — The Relation between Corona and Sunspots. (Reprint from « Popular Astronomy ». Vol. XXXVII, 1929). s. l. 1929. 8°, pp. 1-7.
- OLIVIER CH. P. — Measures of 357. Double Stars made with the 66 cm. Refractor of the Leander Mc Cormick Observatory, University of Virginia. (Abdr. aus den « Astr. Nachr. ». Band 233, ss. 394-411). Kiel, 1928. 4°.
- PHELPS ALLIS E. — Concerning the subpitiary Space and the Antrum petrosi laterale in the Dipnoi, Amphibia and Reptilia. (Separat. aus « Acta Zoologica ». Band II, 1930). Stockholm, 1930. 8°, pp. 1-38.
- PINCHERLE S. — Commemorazione del Socio Francesco Brioschi. (Estr. dagli « Atti della Società italiana delle Scienze [detta dei XL] ». Tomo XXIII). Roma, 1929. 4°, pp. 1-7.
- RESSER C. E. — New Lower and Middle Cambrian Crustacea (From the « Proceedings of the United States National Museum », Vol. 76). Washington, 1929. 8°, pp. 1-18.
- STEPHENSON L. W. — Two new Mollusks of the Genera Ostrea and Exogyra from the Austin Chalk, Texas. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 76). Washington, 1929. 8°, pp. 1-6.
- WETMORE A. — A Systematic Classification for the Birds of the World. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 76). Washington, 1930. 8°, pp. 1-8.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 18 maggio 1930 (anno VIII)

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Un problema sui minimi e sui massimi parziali di una funzione.* Nota di G. SCORZA-DRAGONI, presentata ⁽¹⁾ dal Corresp. U. AMALDI.

Io ho già chiarito in modo soddisfacente quanto ha tratto alla semicontinuità delle due funzioni della y date, per ogni valore \bar{y} di y , dagli estremi di $f(x, \bar{y})$, se $f(x, y)$ è una funzione definita in un insieme I ; e facendo confluire i criteri relativi alla semicontinuità, ho indicato condizioni perchè queste due funzioni siano continue ⁽²⁾.

Recentemente il sig. Bonnesen è ritornato su questi problemi modificandone l'impostazione ⁽³⁾. Egli, invece di decomporre I nelle sue sezioni con le orizzontali, lo scinde in insiemi, a due a due privi di punti comuni, che dipendano biunivocamente dai valori di un parametro, e studia, in funzione di questo parametro, la semicontinuità degli estremi della f calcolati su queste porzioni di I .

Il sig. Bonnesen dà due criteri: una per la semicontinuità inferiore ⁽⁴⁾, l'altro per la continuità. Il primo è un'estensione facile e naturale del teo-

(1) Nella seduta del 18 maggio 1930.

(2) G. SCORZA-DRAGONI, *Sui minimi e massimi parziali per le funzioni di più variabili*. Questi «Rendiconti», serie 6^a, vol. VI (dicembre 1927).

(3) T. BONNESEN, *Les problèmes des Isopérimètres et des Isépiphanes*. (Paris, Gauthier-Villars), pp. 11-13.

(4) Questo si riferisce agli estremi inferiori della f e si muta facilmente in un criterio per la semicontinuità superiore degli estremi superiori.

rema che io avevo dato per il caso da me preso in esame; il secondo esula invece dal tipo degli altri miei enunciati, ma, se non erro, è inesatto.

Credo pertanto opportuno riprendere lo studio del problema impostandolo al modo del sig. Bonnesen e adoperando il mio metodo di dimostrazione. Approfitterò dell'occasione per precisare ancor meglio alcune condizioni e raggiungere una miglior simmetria fra i risultati.

1. Sia $f(x, y)$ una funzione, se occorre, non sempre finita ⁽¹⁾, data in un insieme I , decomposto in una infinità di porzioni ⁽²⁾ prive a due a due di punti comuni e poste in corrispondenza biunivoca con un parametro χ . E siano: I_χ l'insieme riempito sull'asse χ dai valori di χ cui corrispondono porzioni di I ; $S(\chi)$ la porzione di I corrispondente al valore χ del parametro; e, per ogni χ di I_χ , $e'(\chi)$ ed $e''(\chi)$ l'estremo inferiore e l'estremo superiore di $f(x, y)$, per (x, y) variabile in $S(\chi)$.

Ci proponiamo di studiare la semicontinuità di $e'(\chi)$ ed $e''(\chi)$ in I_χ , deducendola dalla semicontinuità della f in I .

2. Per ottenere una limpida rappresentazione geometrica supponiamo, per il momento, che $S(\chi)$ sia la sezione di I con l'orizzontale $y = \chi$; di guisa che come parametro si può assumere la stessa y e I_y è la proiezione ortogonale di I sull'asse y . Allora:

Se ogni porzione chiusa su I ⁽³⁾ si proietta ortogonalmente sull'asse y in una porzione chiusa su I_y e se $S(y)$ è chiusa e limitata per ogni y di I_y ⁽⁴⁾, $e'(y)$ è inferiormente semicontinua in I_y , se $f(x, y)$ è tale in I ; $e''(y)$ lo è superiormente, se tale è $f(x, y)$.

Per es., questo teorema si può applicare alle funzioni definite nell'insieme $0 \leq x \leq 1$, $0 < y < 1$.

Per dimostrare la prima parte basta far vedere che per ogni valore di α ⁽⁵⁾ l'insieme dei punti $I_y(\alpha)$ in cui è $e'(y) \leq \alpha$ è chiuso, se non è vuoto.

Supponiamo che in un punto y_0 di I_y sia $e'(y_0) \leq \alpha$; allora nell'insieme chiuso e limitato $S(y_0)$ esiste almeno un punto (x_0, y_0) in cui è $f(x_0, y_0) \leq \alpha$ ⁽⁶⁾; viceversa, se in un punto (x_0, y_0) di I è $f(x_0, y_0) \leq \alpha$, è anche $e'(y_0) \leq \alpha$.

In altri termini $I_y(\alpha)$ è la proiezione ortogonale sull'asse y dell'insieme $I(\alpha)$ dei punti in cui è $f(x, y) \leq \alpha$; ma $f(x, y)$ è inferiormente

(1) Vuol dire che per noi sarà definita una funzione anche se in certi punti essa vale $+\infty$ o $-\infty$.

(2) Non ha interesse il caso che queste porzioni siano in numero finito.

(3) Cfr. C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen*. Teubner, 1918, n. 74, pp. 58-59.

(4) Queste proprietà sono tutte soddisfatte se I è chiuso e limitato. Cfr. la mia Nota già citata.

(5) α si dovrà prendere uguale anche a $-\infty$ e $+\infty$.

(6) Per il teorema di Weierstrass applicato alla funzione inferiormente semicontinua $f(x, y_0)$.

semicontinua, dunque $I(\alpha)$ è chiuso su I ; ma allora anche $I_y(\alpha)$ è chiuso su I_y .

La seconda parte del teorema si dimostra con un ragionamento analogo o applicando il risultato precedente alla funzione $-f(x, y)$ ⁽¹⁾.

3. Il risultato ottenuto si generalizza facilmente.

Per ottenere un'identità anche formale dei vari enunciati, chiameremo *proiezione* di un insieme $I' (< I)$ su I_x l'insieme di tutti i punti di I_x cui corrispondono porzioni di I che contengono almeno un punto di I' . Ed ora supponiamo che ogni porzione I' di I chiusa su I si proietti in un insieme $I'_x (< I_x)$ che sia chiuso su I_x , o, come diremo più brevemente, supponiamo che I *goda della proprietà c* ⁽²⁾.

Allora:

Se I gode della proprietà c) e gli insiemi $S(\chi)$ sono chiusi e limitati, $e'(\chi)$ è inferiormente semicontinua in I_x , se $f(x, y)$ lo è in I ; $e''(\chi)$ lo è superiormente, se tale è $f(x, y)$.

4. A chiarimento del risultato esposto faccio notare che se la proprietà c) non è soddisfatta si può definire in I una funzione inferiormente semicontinua, tale che questa proprietà non sia conservata dalla $e'(\chi)$ corrispondente.

Infatti, se I' è una porzione di I chiusa su I , che si proietta in un insieme I'_x non chiuso su I_x , si ponga $f(x, y) = 0$, $f(x, y) = 1$ rispettivamente in I' e $(I - I')$. La funzione così definita è inferiormente semicontinua; d'altra parte l'insieme dei punti in cui è $e'(\chi) \leq 0$ è I'_x , e poichè I'_x non è chiuso su I_x , $e'(\chi)$ non può essere inferiormente semicontinua.

Lo stesso si dica per la semicontinuità superiore di $e''(\chi)$.

Invece la chiusura degli insiemi $S(\chi)$ non è sempre essenziale. Se I è l'insieme che risulta dall'aggregare il segmento $1 < x < 2$, $y = 1$ al quadrato $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, posto $S(\chi)$ uguale alla sezione di codesto insieme con l'orizzontale $y = \chi$, $S(1)$ non è chiuso, eppure per I le conclusioni del teorema dimostrato sono sempre esatte ⁽³⁾.

D'altra parte della chiusura degli $S(\chi)$ non se ne può far sempre a meno. Per l'insieme $0 < x < 1$, $0 \leq y \leq 1$ il teorema non vale, se $S(\chi)$ è ancora il segmento $0 < x < 1$, $y = \chi$ ($0 \leq \chi \leq 1$) ⁽⁴⁾.

(1) Cfr. la mia Nota già citata, n. 2.

(2) Indicherò in modo esplicito rispetto a quale decomposizione di I ed a quale corrispondenza fra i valori di χ e le porzioni di I questa proprietà debba essere verificata solo quando lo richiederà una sicura interpretazione del testo.

(3) Infatti, se $f(x, y)$ è inferiormente o superiormente semicontinua in I , $e'(y)$ ed $e''(y)$ sono intanto, rispettivamente, inferiormente e superiormente semicontinue, se si restringe I al quadrato $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ (n. 2); se a tale quadrato si aggiunge l'insieme $1 < x < 2$, $y = 1$, $e'(1)$ non può che diminuire, $e''(1)$ non può che aumentare, e la semicontinuità inferiore di $e'(y)$ o superiore di $e''(y)$ non è compromessa.

(4) Basta porre $f(x, y) = 0$ per $0 < x < 1$, $0 \leq y \leq 1 - x$ ed $f(x, y) = \frac{y - 1 + x}{x}$ per $0 < x < 1$, $1 - x < y \leq 1$, perchè la $f(x, y)$ sia continua, senza che $e'(y)$ sia inferiormente semicontinua per $y = 1$.

Va anche osservato che la proprietà $c)$ non è una caratteristica di I , ma dipende dalla sua decomposizione in parti e dalla peculiare corrispondenza che si pone fra queste parti e il parametro χ .

Per es., se I è ancora l'insieme somma del quadrato $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ e del segmento $1 < x < 2$, $y = 1$, I gode della proprietà $c)$, se si divide secondo le sezioni con verticali e ad ogni sezione si fa corrispondere come parametro il valore dell'ascissa della verticale; ma se si scinde secondo le sezioni con le parallele alla retta che unisce il punto $(0, 0)$ col punto $(2, 1)$ e ad ogni sezione si fa corrispondere l'ordinata del punto in cui la retta secante incontra l'asse y (di guisa che χ varia da $-\frac{1}{2}$ a 1) l'insieme $1 \leq x < 2$, $y = 1$ che è chiuso su I si proietta nell'insieme $0 < \chi \leq \frac{1}{2}$ che non è chiuso sul segmento $-\frac{1}{2} \leq \chi \leq 1$, cioè su $I_\chi^{(1)}$.

L'insieme I somma del quadrato $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ e dell'insieme $0 \leq x \leq 1$, $2 < y < 3$ gode della proprietà $c)$ se si pone $S(\chi)$, per χ variabile negli intervalli $0 \leq \chi \leq 1$, $2 < \chi < 3$, uguale alla sezione di I con l'orizzontale $y = \chi$. Ma, se si definisce χ in funzione di t al modo che segue:

$$\chi = t \quad \text{per } 0 \leq t \leq 1, \quad \chi = t + 1 \quad \text{per } 1 < t < 2$$

e si pone $S(t) = S(\chi(t))$, I non gode più della proprietà $c)$ rispetto a questa corrispondenza fra le sue sezioni con orizzontali e il parametro t : l'insieme $0 \leq x \leq 1$, $2 < y < 3$ è chiuso su I e si proietta nell'insieme $1 < t < 2$ che non è chiuso su I_t , cioè su $0 \leq t < 2^{(2)}$.

5. Tutte le condizioni richieste al n. 3 sono verificate, se I è un insieme chiuso e limitato e se, posto per ogni $\bar{\chi}$ di I_χ $\chi(x, y) = \bar{\chi}$ in $S(\bar{\chi})$, $\chi(x, y)$ risulta continua in I .

Infatti gli $S(\bar{\chi})$ sono tutti chiusi e limitati, perchè sono gli insiemi di valore costante di una funzione continua definita in un insieme chiuso e limitato.

Ogni insieme $I' (< I)$ chiuso su I è chiuso e limitato (3) , la sua proiezione su I_χ è l'insieme, I'_χ , dei valori che $\chi(x, y)$ assume nei punti di I' ,

(1) Si osservi che in queste ultime due decomposizioni di I gli insiemi $S(\chi)$ sono anche chiusi e limitati. Per la decomposizione di I prima indicata la proprietà $c)$ era verificata, ma $S(1)$ era un intervallo semiaperto.

(2) Se poniamo $f(x, y) = 1$ nel quadrato $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ ed $f(x, y) = 0$ nell'insieme $0 \leq x \leq 1$, $2 < y < 3$, $e'(\chi)$ è una funzione inferiormente semicontinua, $e'(\chi)$ non è invece inferiormente semicontinua.

Ormai sono evidenti i legami che passano fra la questione studiata e la seguente circostanza: se $y(x)$ è una funzione inferiormente semicontinua e $x(t)$ è funzione anche invertibile di t , ma non inferiormente semicontinua, $y(x(t))$ può non essere funzione inferiormente semicontinua di t .

(3) Ogni insieme I' , contenuto in un insieme chiuso I e chiuso su I , è chiuso. CARATHÉODORY, loc. cit., n. 74, p. 60.

e allora la proprietà *c*) sarà verificata di certo perchè l'insieme dei valori I'_χ che può assumere una funzione continua in un insieme chiuso e limitato I' è chiuso ⁽¹⁾ e quindi sarà chiuso su I_χ ⁽²⁾.

Queste osservazioni dimostrano il primo criterio del sig. Bonnesen.

Il teorema non sarebbe più esatto se I non fosse limitato. Infatti se nell'insieme I : $0 \leq x$, $0 \leq y \leq e^{-x}$ si pone $f(x, y) = y e^x$ e si pone $S(\chi)$ uguale alla sezione di I con la retta $y = \chi$ ($0 \leq \chi \leq 1$), si ha $e''(0) = 0$, $e''(\chi) \neq 1$ per $\chi > 0$, ed $e''(\chi)$ non è superiormente semicontinua.

6. Definita la proiezione come al n. 3 e detto che I gode della proprietà *a*) se ogni porzione di I aperta su I ⁽³⁾ si proietta in una porzione di I_χ che sia aperta su I_χ ⁽⁴⁾, si ha che:

Se I gode della proprietà *a*), $e''(\chi)$ è inferiormente semicontinua in I_χ , se tale è $f(x, y)$ in I ; $e'(\chi)$ lo è superiormente, se tale è $f(x, y)$ in I .

Sia α un numero ⁽⁵⁾ e si indichi con $I_\chi(\alpha)$ la porzione di I_χ in cui è $e''(\chi) > \alpha$; $I_\chi(\alpha)$ sarà la proiezione della parte $I(\alpha)$ di I in cui è $f(x, y) > \alpha$; ora $f(x, y)$ è inferiormente semicontinua, dunque $I(\alpha)$ è aperto su I o vuoto; e poichè I gode della proprietà *a*), $I_\chi(\alpha)$ sarà aperto su I_χ o vuoto.

Questo basta perchè $e''(\chi)$ sia inferiormente semicontinua.

Dopo di ciò la seconda parte del teorema si dimostra applicando il risultato precedente alla funzione $-f(x, y)$.

Anche qui: se I non gode della proprietà *a*) è possibile definire in I una funzione inferiormente (superiormente) semicontinua per la quale $e'(\chi)$ ($e''(\chi)$) non sia inferiormente (superiormente) semicontinua ⁽⁶⁾.

Per la proprietà *a*) si possono ripetere tutte le altre osservazioni fatte al n. 4 per la proprietà *c*). Anzi nell'ultimo esempio là indicato l'insieme $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ è una porzione di I aperta su I che si proietta in una porzione di I_χ aperta su I_χ ⁽⁷⁾ e in un insieme ($0 \leq t \leq 1$) che non è aperto su I_t : $0 \leq t < 2$ ⁽⁸⁾.

(1) Infatti sia χ_0 un punto di accumulazione di I'_χ ; allora almeno una delle due porzioni di I' in cui è $\chi(x, y) \leq \chi_0$, $\chi(x, y) \geq \chi_0$ non sarà vuota; quindi essa sarà chiusa e limitata e $\chi(x, y)$ vi avrà come estremo (inferiore o superiore) χ_0 . Ma allora per il teorema di Weierstrass è $\chi(x, y) = \chi_0$ almeno per un punto di questa porzione, e quindi χ_0 appartiene a I'_χ ; ecc.

(2) Un insieme chiuso di S_τ è chiuso su ogni altro insieme di S_τ . Nel caso nostro anche I_χ è chiuso, quindi I'_χ non potrebbe esser chiuso su I_χ se non fosse chiuso.

(3) Cfr. CARATHÉODORY, loc. cit., n. 75, p. 60.

(4) Ripeto anche qui quello che ho detto nell'annotazione al n. 3.

(5) α dovrà variare da $-\infty$ a $+\infty$, assumendo il valore $-\infty$ ma non raggiungendo il valore $+\infty$.

(6) Cfr. il n. 4 e la mia Nota già citata, n. 3.

(7) I_χ è somma dei due intervalli $0 \leq \chi \leq 1$, $2 < \chi < 3$; la porzione di I_χ di cui si tratta è il segmento $0 \leq \chi \leq 1$.

(8) Un esempio il quale dimostra che la proprietà *a*) dipende dalla decomposizione di I lo indicherò al n. 10.

7. Se I gode della proprietà $a)$ e $c)$, gli $S(\bar{x})$ sono chiusi e limitati ed $f(x, y)$ è continua, $e'(\bar{x})$ ed $e''(\bar{x})$ sono continue.

Se I è chiuso e limitato e gode della proprietà $a)$ ed è continua la funzione $\bar{x}(x, y)$ definita nel n. 5, $e'(\bar{x})$ ed $e''(\bar{x})$ sono continue in $I_{\bar{x}}$, se $f(x, y)$ è continua in I .

Un esempio molto semplice in cui la mancanza della proprietà $a)$ fa cadere quest'ultimo teorema in difetto io l'ho già indicato nella mia Nota citata considerando l'insieme I della fig. 1 ponendo $S(\bar{x})$ uguale alla sezione

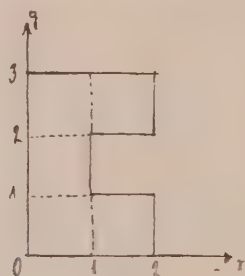


Fig. 1.

di I con l'orizzontale $y = \bar{x}$ (di guisa che $\bar{x}(x, y) = y$), e definendo $f(x, y)$ nel modo che segue: nel rettangolo $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3$ è $f(x, y) = 1$;

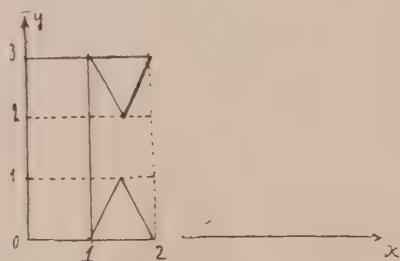


Fig. 2.

inoltre è $f(2, y) = 0$ per $0 \leq y \leq 1$, $f(2, y) = 2$ per $2 \leq y \leq 3$; in tutti gli altri punti la $f(x, y)$ è definita dalla condizione che per ogni y_0 , per il quale sia $0 \leq y_0 \leq 1$, oppure $2 \leq y_0 \leq 3$, la $f(x, y_0)$ sia lineare nell'intervallo $1 \leq x \leq 2$.

Evidentemente si ha $e'(1) = 0$, mentre per $y > 1$ è sempre $e'(y) = 1$, dunque $e'(y)$ è discontinua nel punto $y = 1$. Del pari $e''(y)$ è discontinua per $y = 2$.

8. Nell'esempio precedente $S(y)$ per $y = 1$ ed $y = 2$ ha in comune un arco con la frontiera di I ; ma le discontinuità di $e'(y)$ per $y = 1$ e di $e''(y)$ per $y = 2$ non sono legate a tale circostanza.

Infatti si consideri ancora la funzione ivi assegnata, ma la si ritenga definita solo nell'insieme della fig. 2.

Allora sarà $e'(1) = \frac{1}{2}$, $e'(y) = 1$ per $y > 1$; $e''(2) = \frac{3}{2}$, $e''(y) = 1$ per $y < 2$; quindi $e'(y)$ ed $e''(y)$ sono ancora discontinue per $y = 1$ e $y = 2$, rispettivamente, pur non presentandosi più la detta circostanza.

Ebbene quest'ultimo esempio mostra l'inesattezza del secondo criterio del sig. Bonnesen. Infatti, se esso fosse esatto, darebbe luogo, in particolare, alla seguente proposizione:

Se $f(x, y)$ è continua nell'insieme chiuso e limitato I e se, posto $S(y)$ uguale alla sezione di I con l'orizzontale di ordinata $y^{(1)}$, $S(y)$ non ha in comune con la frontiera di I alcun arco finchè y varia nell'intervallo $y_1 < y < y_2$,

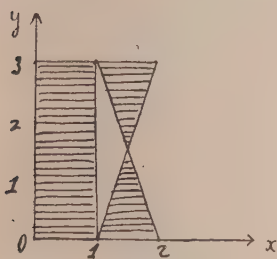


Fig. 3.

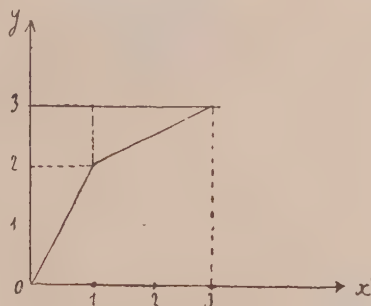


Fig. 4.

$e'(y)$ ed $e''(y)$ sono continue in tutta la porzione di I_y contenuta nel segmento $y_1 \leq y \leq y_2$.

9. Nella mia Nota già citata ho affermato che:

Ogni insieme convesso I gode della proprietà a), se si pone $S(\chi)$ uguale alla sua sezione con l'orizzontale $y = \chi$;

ed ho dimostrato questo teorema, se I è un rettangolo coi lati paralleli agli assi coordinati. Ma accanto ad esso ne sussistono altri che qui mi limiterò ad enunciare e che insieme con esso dimostrerò altrove.

In primo luogo si ha che:

I gode della proprietà a) se è somma di due o più ⁽²⁾ insiemi convessi che si proiettino ortogonalmente sull'asse y in uno stesso intervallo (chiuso, aperto o semiaperto) e se si pone $S(\chi)$ uguale alla sezione di I con l'orizzontale $y = \chi$.

Supponiamo che I_1, I_2, \dots, I_n siano n insiemi del tipo ora descritto. Ammesso, per evitare distinzioni, che essi siano chiusi, e indicati rispettivamente con $y_1 \leq y \leq y'_1, \dots, y_n \leq y \leq y'_n$ i segmenti in cui si proiettano ortogonalmente sull'asse y , supponiamo che sia $y'_1 \leq y_2, \dots, y'_{n-1} \leq y_n$ e

(1) Assumo senz'altro y come parametro.

(2) Anche infiniti.

che se $y'_i = y_{i+1}$ ($i = 1, \dots, n-1$) la parte della frontiera di I_i contenuta nella retta $y = y'_i$ coincide con la parte della frontiera di I_{i+1} contenuta nella stessa retta.

Allora:

L'insieme $I = I_1 \dot{+} \dots \dot{+} I_n$ gode della proprietà a), se si pone $S(\chi)$ uguale all'insieme dei punti di I per i quali è $y = \chi$.

Modificando questi enunciati in modo opportuno si possono introdurre, al posto delle sezioni con orizzontali, sezioni con rette aventi tutte una stessa direzione arbitraria.

10. Nel dominio dell'ultimo teorema enunciato al n. 9 rientrano gli insiemi delle figg. 3, 4.

Di questi il secondo, diciamolo I , non gode della proprietà a) se si scinde in sezioni con le parallele alla retta che unisce il punto $(1, 2)$ al punto $(3, 3)$ e come valore di χ si prende l'ordinata del punto in cui la retta secante incontra l'asse y (di guisa che χ varia da 0 a 3). Il triangolo di vertici $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(3, 3)$, a cui si tolga il segmento $x = 1$, $2 \leq y \leq 3$ è aperto su I e la sua proiezione $\frac{3}{2} \leq \chi < \frac{5}{2}$ non è aperta su I_χ .

Matematica. — *Le discendenze normali dei gruppi cremoniani geometrici.* Nota I di D. MONTESANO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio R. MARCOLONGO.

Ogni corrispondenza birazionale fra i punti di due piani si può riguardare come prodotto di successive corrispondenze piane isologiche ⁽²⁾ di ordine variabile succedentisi con determinata legge in modo che, corrispondentemente, ogni gruppo cremoniano geometrico risulti in un unico modo il prodotto di gruppi isologici.

Con ciò fra i gruppi cremoniani si stabiliscono legami di successione in virtù dei quali ogni gruppo G ammette un unico gruppo di origine Γ , mentre da ogni gruppo Γ discendono determinati gruppi G , analogamente a ciò che si verifica quando si assume come corrispondenza generatrice del sistema delle trasformazioni birazionali piane la corrispondenza birazionale quadratica.

Nelle presenti Note sono studiati i legami che intercedono fra le anzidette discendenze *normali*, e le proprietà che le caratterizzano.

(1) Nella seduta del 18 maggio 1930.

(2) Una corrispondenza birazionale piana è *isologica* quando in essa alle rette dell'un piano corrispondono nell'altro curve di ordine n che hanno in comune un punto $(n-1)$ -plo e 2 $(n-1)$ punti semplici.

Un primo accenno alle ricerche qui contenute trovasi nella Memoria: *I gruppi cremoniani di numeri*⁽¹⁾, mentre nella Nota *Su le resi omaloidiche di curve*⁽²⁾ era già stata adoperata nelle varie proposizioni la corrispondenza isologica.

Più tardi Młodziejowski⁽³⁾ fece uso del metodo di discendenza qui indicato per costruire i gruppi cremoniani geometrici di ordine inferiore o eguale ad un numero dato, ma l'Autore si limitò a stabilire le prime proprietà della discendenza senza continuarne lo studio.

1. Sia dato un gruppo cremoniano geometrico G di ordine $n > 1$. Il gruppo sia ordinato. In tali ipotesi il primo termine r sarà il *termine principale* e la differenza

$$i = n - r$$

sarà l'*indice principale*.

I restanti termini del gruppo siano i numeri positivi r_1, r_2, \dots, r_p ed i numeri nulli r_{p+1}, r_{p+2}, \dots .

Si considerino le differenze

$$\delta_1 = i - r_1 - r_2, \delta_2 = i - r_3 - r_4, \dots, \delta_b = i - r_{2b-1} - r_{2b}.$$

Essendo per ipotesi $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_{2b-1} \geq r_{2b}$ sarà $\delta_1 \leq \delta_2 \leq \dots \leq \delta_b$.

Inoltre pel teorema di Rosanes-Clifford è

$$\delta_1 = i - r_1 - r_2 = n - r_1 - r_2 < 0.$$

Nè possono tutte le δ risultare negative, perchè qualora i termini r_{2l-1}, r_{2l} siano nulli, è $\delta_l = i - r_{2l-1} - r_{2l} = i$ e però positiva.

Inoltre essendo, come si è visto, $\delta_1 \leq \delta_2 \leq \dots \leq \delta_b \leq \delta_{b+1} \leq \dots$, appena si presenta una δ_{b+1} nulla o positiva, tutte le δ che susseguono, saranno anche esse nulle o positive.

Ora si supponga che l'ultima delle δ che risulti negativa sia la δ_b ; si supponga cioè che b sia il numero più grande, pel quale si abbia

$$r_{2b-1} + r_{2b} > i,$$

nel qual caso due qualunque dei termini r_1, \dots, r_{2b} , essendo maggiori o eguali a r_{2b-1}, r_{2b} , daranno somma maggiore dell'indice i .

Invece avendo in precedenza supposto che sia nulla o positiva la differenza $\delta_{b+1} = i - r_{2b+1} - r_{2b+2}$, la somma dei termini r_{2b+1}, r_{2b+2} sarà uguale o minore dell'indice i , e così due qualunque dei termini $r_{2b+1}, \dots, r_p, r_{p+1}, r_{p+2}$, non essendo maggiori rispettivamente di r_{2b+1}, r_{2b+2} , daranno somma non maggiore dell'indice i .

(1) «Atti dell'Accademia delle Scienze di Napoli», serie 2^a, vol. XV, p. 4 in nota, 1911.

(2) «Rendiconti dell'Accademia delle Scienze di Napoli», 1905.

(3) *A propos des tables des nombres Crémoniens des 21 premiers ordres*, «Recueil Mathématique de la Société Mathématique de Moscou», tom. XXXI, 1922-1924 (in russo).

In tale ipotesi si effettui il prodotto

$$\Gamma^{(h)} = \times \begin{matrix} G_n & \equiv & r & r_1 & r_2 & \dots & r_{2h-1} & r_{2h} & \dots \\ G_{h+1} & \equiv & h & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \end{matrix}$$

del gruppo dato pel gruppo isologico di ordine $h+1$, facendo coincidere il termine h ed i termini 1 di questo gruppo rispettivamente col termine principale r e con i termini susseguentisi r_1, r_2, \dots, r_{2h} del gruppo dato G_n .

Il gruppo $\Gamma^{(h)}$ che ne risulta, si dirà *gruppo di origine in discendenza normale* del gruppo G .

Esso è geometrico al pari del gruppo dato.

Se questo è isologico di ordine $n \geq 2$, è $h = n - 1$, ed il gruppo di origine $\Gamma^{(h)}$ è il gruppo di 1° ordine.

In ogni altro caso l'ordine v_h del gruppo è maggiore di 1, e propriamente è

$$v_h = (h+1)n - hr - S_{2h}^{(1)},$$

essendo

$$S_{2h} = r_1 + r_2 + \dots + r_{2h}.$$

Inoltre il gruppo $\Gamma^{(h)}$ comprende il termine

$$(1) \quad \rho = hn - (h-1)r - S_{2h},$$

i termini

$$\rho_1 = n - r - r_1 = i - r_1, \dots, \rho_{2h} = n - r - r_{2h} = i - r_{2h},$$

ed i termini del gruppo G_n diversi dai termini r, r_1, \dots, r_{2h} sui quali si è operato.

In $\Gamma^{(h)}$ è

$$v_h - \rho = n - r = i;$$

cioè il numero i è anche l'indice del gruppo $\Gamma^{(h)}$ relativo al termine ρ .

Per questo termine dalla (1) si ha

$$\begin{aligned} \rho &= r + hi - S_{2h} = r + (i - r - r_1) + \dots + (i - r_{2h-1} - r_{2h}) = \\ &= r + \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_h. \end{aligned}$$

Ne segue che l'ordine v_h del gruppo $\Gamma^{(h)}$ è

$$v_h = \rho + i = r + i + \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_h = n + \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_h.$$

Le $\delta_1, \dots, \delta_h$ sono negative; perciò l'ordine del gruppo di origine del gruppo G_n è inferiore all'ordine del gruppo G_n , e propriamente è

$$v_h \leq n - h.$$

(1) Not. cit., *Su le reti omaloidiche di curve*, § 4.

Il numero h sarà detto *grado di discendenza* del gruppo dato G_n .
Esso è maggiore o eguale a 1.

Se è $v_h > 1$, si potrà assumere del gruppo $\Gamma_{v_h}^{(h)}$ il gruppo di origine e così di seguito, venendo ad ottenere una serie di gruppi (*serie di origine in discendenza normale* del gruppo G_n) la quale si completa col gruppo di 1° ordine.

E può affermarsi che: *La condizione necessaria e sufficiente affinché un gruppo cremoniano di numeri sia geometrico, si è che la sua serie di origine in discendenza normale sia completa, si arresti cioè al gruppo di 1° ordine.*

2. I termini del gruppo $\Gamma^{(h)}$ sono: il numero ρ , i numeri $\rho_1 = i - r_1$, $\rho_2 = i - r_2$, ..., $\rho_{2h} = i - r_{2h}$, pei quali è $\rho_1 \leq \rho_2 \leq \dots \leq \rho_{2h}$, e i numeri r_{2h+1} , r_{2h+2} , ... pei quali si ha $r_{2h+1} \geq r_{2h+2} \geq \dots$

Pei termini ρ_{2h-1} , ρ_{2h} è

$$\rho_{2h-1} + \rho_{2h} = 2i - (r_{2h-1} + r_{2h}) < i;$$

sicchè due qualsiasi dei termini $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{2h-1}, \rho_{2h}$ non essendo superiori rispettivamente a ρ_{2h-1}, ρ_{2h} danno somma minore di i .

Così per i due termini r_{2h+1}, r_{2h+2} si ha

$$r_{2h+1} + r_{2h+2} \leq i;$$

e però due qualunque dei termini $r_{2h+1}, r_{2h+2}, \dots$ non essendo superiori rispettivamente a r_{2h+1}, r_{2h+2} , danno somma minore o eguale ad i .

Infine nel gruppo G_n è

$$r_{2h} \geq r_{2h+1};$$

perciò nel gruppo $\Gamma^{(h)}$ è

$$i - \rho_{2h} \geq r_{2h+1},$$

ossia è

$$\rho_{2h} + r_{2h+1} \leq i;$$

sicchè uno qualunque dei termini ρ_1, \dots, ρ_{2h} (non superiore a ρ_{2h}) ed uno qualunque dei termini $r_{2h+1}, r_{2h+2}, \dots$ (non superiore a r_{2h+1}) danno somma minore o eguale ad i .

Ora si ordini il gruppo Γ e si supponga che i termini successivi siano $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots$

In tale ipotesi l'ordine v del gruppo è minore della somma $x_1 + x_2 + x_3$; perciò il termine ρ non potrà coincidere con x_1 , perchè, se così fosse, sarebbe $x_2 + x_3$ maggiore di $v - x_1 = i$, sicchè i termini x_2, x_3 non potrebbero essere compresi entrambi fra i termini ρ_1, \dots, ρ_{2h} o entrambi fra i termini $r_{2h+1}, r_{2h+2}, \dots$ nè uno di essi fra i termini ρ_1, \dots, ρ_{2h} e l'altro fra i termini $r_{2h+1}, r_{2h+2}, \dots$, il che è assurdo.

Scambiando x_1 con x_2 o con x_3 si riconosce analogamente che il termine ρ non può coincidere nè con x_2 , nè con x_3 .

Inoltre se l'ordine v del gruppo $\Gamma^{(h)}$ è maggiore di 2, si ha che $v < x_1 + x_3 + x_5$ ⁽¹⁾ e però è anche $v_1 < x_1 + x_3 + x_4$, sicchè con lo stesso ragionamento si riconosce che il termine ρ non può coincidere nè con x_4 , nè con x_5 .

I termini x_1, x_2 del gruppo $\Gamma^{(h)}$, diversi da ρ , debbono dare somma minore o eguale al numero $i = v - \rho$, deve essere cioè

$$(1) \quad \rho \leq v - x_1 - x_2.$$

Viceversa se questa condizione è soddisfatta, si avrà $x_1 + x_2 \leq i$, sicchè due altri termini qualsiasi del gruppo $\Gamma^{(h)}$ diversi da ρ daranno somma uguale o minore dell'anzidetto numero $i = v - \rho$.

Ora, fissato nel gruppo ordinato $\Gamma^{(h)} \equiv x_1, x_2, x_3, \dots, x_p$ o o \dots un termine ρ (*modulo di derivazione*) che soddisfi alla (1) e calcolato il numero $i = v - \rho$, se nella successione $|x_1, x_2, x_3, \dots, x_p$ o o $\dots|$ dei termini del gruppo $\Gamma^{(h)}$, diversi dal termine ρ , si determina il più piccolo numero u tale che i due termini consecutivi x_u, x_{u+1} della successione diano somma minore di i , numero che esiste certamente perchè per x_1, x_2 è $x_1 + x_2 \leq i$ per la (1), mentre per due termini nulli $x_\tau, \tau+1$ è $x_\tau + x_{\tau+1} < i$, resta determinato l'insieme $I \equiv x_u, x_{u+1}, \dots, 0$ o o \dots formato dai termini del gruppo $\Gamma^{(h)}$ di cui due qualunque danno somma minore di i .

I termini $\rho_{2h}, \rho_{2h-1}, \dots, \rho_1$ (pei quali $\rho_{2h} \geq \rho_{2h-1} \geq \dots \geq \rho_1$) sono compresi nel predetto insieme e verificano un'altra sola condizione che si ottiene esprimendo che nel gruppo G_n è $r \geq r_1$. Essendo

$$r = hv - (h-1)\rho - \rho_1 - \rho_2 - \dots - \rho_{2h} = \rho + hi - \rho_1 - \dots - \rho_h,$$

$$r_1 = i - \rho_1,$$

la predetta condizione sarà che

$$\rho + (h-1)i - \rho_2 - \dots - \rho_{2h} \geq 0$$

o, se $h = 1$, che

$$(2) \quad \rho \leq \rho,$$

o, se $h > 1$, che

$$(3) \quad \rho \leq \rho + (i - \rho_3 - \rho_4) + \dots + (i - \rho_{2h-1} - \rho_{2h}),$$

nella quale il numero ρ e le differenze segnate in parentesi sono ognuna ≥ 0 .

Viceversa se nell'insieme I si assumono ad arbitrio termini susseguenti $\rho_{2h}, \rho_{2h-1}, \dots, \rho_1$ che verifichino la (2) se $h = 1$ o la (3) se $h > 1$,

(1) Per questa estensione del teorema di Rosanes-Clifford veggasi: MONTESANO, *Su alcuni problemi fondamentali nella teoria delle corrispondenze cremoniane*, Nota II, § 2, « Rendiconti Accad. Scienze Napoli », serie 3^a, vol. XXXIV, 1928.

si sarà determinato nel gruppo cremoniano $\Gamma^{(h)}$ un *nucleo* di termini $N \equiv \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{2h}$ corrispondente al modulo ρ tale che il prodotto

$$\begin{aligned} \times \Gamma^{(h)} &\equiv \rho, \rho_1 \rho_2 \dots \rho_{2h} r_{2h+1} \dots r_p \\ G_h &\equiv h, 1 \ 1 \dots 1 \end{aligned}$$

sarà un gruppo cremoniano geometrico $G_n \equiv r, r_1, \dots, r_{2h}, r_{2h+1}, \dots, r_p$ che avrà per gruppo di origine in discendenza normale il gruppo $\Gamma^{(h)}$.

Si dirà che G_n *discende da* $\Gamma^{(h)}$ *rispetto al modulo* ρ *ed al nucleo di derivazione* $N \equiv \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{2h}$.

3. Di un gruppo cremoniano geometrico G di ordine $n > 1$ sia stata costruita la serie di origine $GG^{(1)} \dots G^{(u)}$ sino al gruppo di 1° ordine $G^{(u)}$.

Le operazioni effettuate siano: 1° la Ω_1 eseguita nel gruppo G sul termine di posto o_1 e sui termini di posto $o_{1.1}, \dots, o_{1.2h_1}$, mediante la quale si ottiene il gruppo $G^{(1)}$; 2° la Ω_2 eseguita nel gruppo $G^{(1)}$ sul termine di posto o_2 e sui termini di posto $o_{2.1}, \dots, o_{2.2h_2}$, mediante la quale si ottiene il gruppo $G^{(2)}$; \dots , la Ω_u eseguita nel gruppo $G^{(u-1)}$ sul termine di posto o_u e sui termini di posto $o_{u.1}, \dots, o_{u.2h_u}$ mediante la quale si ottiene il gruppo di 1° ordine $G^{(u)}$.

Si parta ora dal gruppo di 1° ordine Γ che contenga tanti termini nulli quanti sono quelli considerati in G e si esegua in esso l'operazione Ω_1 sul termine di posto o_1 e sui termini di posto $o_{1.1}, \dots, o_{1.2h_1}$.

Sia $\Gamma^{(1)}$ il gruppo che si ottiene con la predetta operazione.

In $\Gamma^{(1)}$ si esegua l'operazione Ω_2 sul termine di posto o_2 e sui termini di posto $o_{2.1}, \dots, o_{2.2h_2}$ e così di seguito.

L'ultimo gruppo $\Gamma^{(u)}$ che si viene ad ottenere, è il gruppo cremoniano geometrico coniugato al gruppo dato.

Infatti i due gruppi G, Γ sono i gruppi caratteristici rispetto ad un medesimo gruppo di punti generici O_1, \dots, O_p di un piano ω di due reti omaloidiche P, Σ di linee l'una di ordine n , l'altra di ordine 1.

Così i due gruppi $G^{(1)}, \Gamma^{(1)}$ sono i gruppi caratteristici rispetto ad un medesimo gruppo di punti $O_1^{(1)}, \dots, O_p^{(1)}$ di un piano ω_1 di due reti omaloidiche $P^{(1)}, \Sigma^{(1)}$ di curve, omologhe delle precedenti in una corrispondenza birazionale isologica K_1 .

E così di seguito sino al gruppo di ordine 1 $G^{(u)}$ ed al gruppo $\Gamma^{(u)}$ che saranno i gruppi caratteristici rispetto ad un medesimo gruppo di punti $O_1^{(u)}, \dots, O_p^{(u)}$ di un piano ω_u di due reti omaloidiche $P^{(u)}, \Sigma^{(u)}$, la prima di rette, omologhe delle precedenti in una corrispondenza birazionale isologica $K^{(u)}$.

Dunque fra i piani ω, ω_u vi sarà una corrispondenza birazionale K , prodotto delle $K^{(1)}, \dots, K^{(u)}$, che alla rete Σ dell'un piano fa corrispondere la rete di curve $\Sigma^{(u)}$ dell'altro, e alla rete di curve P dell'un piano fa corrispondere la rete di rette $P^{(u)}$ dell'altro, sicchè i gruppi caratteristici $G, \Gamma^{(u)}$ delle reti $P, \Sigma^{(u)}$ saranno fra loro coniugati.

4. A chiarire le proprietà indicate varrà un esempio numerico.

Dati quattro numeri interi positivi diseguali a, b, c, d ed essendo x un numero intero positivo, i 9 numeri

$$r_1 = x + a, \quad r_2 = x + b, \quad r_3 = x + c, \quad r_4 = x + d, \\ r_5 = x, \quad r_6 = x - d, \quad r_7 = x - c, \quad r_8 = x - b, \quad r_9 = x - a,$$

costituiranno un gruppo cremoniano di ordine n se, designando con S la somma $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, si ha che

$$3(n-1) = 9x, \quad n^2 - 1 = 9x^2 + 2S,$$

se cioè

$$\frac{n-1}{3} = x, \quad n^2 - 1 = (n-1)^2 + 2S,$$

ovvero se

$$n = S + 1, \quad x = \frac{S}{3};$$

sicchè l'unica condizione a cui debbono soddisfare i numeri a, b, c, d si è che la somma $S = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ sia divisibile per 3.

In particolare se i numeri dati sono $4d, 3d, 2d, d$, essendo d un numero intero positivo arbitrario, i 9 numeri

$$x + 4d, \quad x + 3d, \dots, x, \dots, x - 3d, x - 4d$$

che si susseguono in progressione aritmetica di ragione d , formeranno un gruppo cremoniano di ordine n , se è

$$n = 30d^2 + 1, \quad x = 10d^2 \quad (1).$$

Nel caso più semplice in cui $d = 1$, si ha un gruppo cremoniano di ordine 31 formato da 9 numeri consecutivi della serie naturale

$$14 \quad 13 \quad 12 \quad 11 \quad 10 \quad 9 \quad 8 \quad 7 \quad 6.$$

Si vuole riconoscere se questo gruppo G è geometrico.

A ciò si costruisca la serie di origine del gruppo. Essa comprende ulteriormente gruppi di ordine 19, 10, 5, 2, 1 formati rispettivamente dai termini

2	4	5	6	7	9	8	7	6
2	4	5	4	3	0	2	3	4
2	1	0	1	2	0	2	3	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

(1) Per questo gruppo cfr. DE MARTINO, *Corrispondenze birazionali piane dissimetriche*. Tesi di laurea, Napoli, 1926. Aquila, Officine grafiche Vecchioni, 1925, p. 14.

che ottengonsi successivamente mediante operazioni

$$|1, 2, 3, 4, 5|, |6, 3, 4, 5, 7, 8, 9|, |3, 2, 4, 5, 9|, |8, 1, 2, 5, 7|, |2, 4, 9|.$$

La serie si arresta al gruppo di 1° ordine sicchè il gruppo in esame è geometrico.

Se si parte dal gruppo di 1° ordine Γ

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

e si eseguono successivamente le anzidette operazioni sul gruppo Γ e su quelli che man mano si presentano, si otterranno i gruppi di ordine 3, 9, 15, 23, 31 costituiti dai termini

2	1	1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	2	2	6	3	3	3
2	6	8	5	5	6	3	3	4
10	6	8	5	7	6	9	11	4
10	14	8	12	7	6	9	11	13.

L'ultimo gruppo che si ottiene, è coniugato al gruppo G . Esso coincide col gruppo G : questo perciò è autoconiugato.

Matematica. — *Sur une Méthode Générale de Recherche des Propriétés invariantes des Figures Géométriques.* Nota di G. NICOLADZÉ, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Le but de cette Note est de signaler une méthode générale de recherche des invariants d'une figure géométrique et de donner une application aux points de contact des branches d'une courbe plane.

1. Soit donné un système continu Σ à p paramètres de courbes (surfaces ou hypersurfaces), déterminé par l'équation

$$(1) \quad F(x, y, \lambda_j) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, p)$$

où F est une fonction dérivable jusqu'à l'ordre voulu en x, y et λ_j , et soit (λ_j^0) une courbe de Σ , déterminée par les valeurs $\lambda_j = \lambda_j^0$ des paramètres.

Dans un travail antérieur ⁽²⁾, j'ai introduit la notion de système S_k osculateur d'ordre k à Σ dans (λ_j^0) , en nommant ainsi le système linéaire déterminé par l'équation suivante:

$$(2) \quad F(x, y, \lambda_j^0) + \sum_j \mu_j F_{\lambda_j}(x, y, \lambda_j^0) + \dots + \sum_{j_1, \dots, j_k} \mu_{j_1, \dots, j_k} F_{\lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_k}}(x, y, \lambda_j^0) = 0,$$

(1) Nella seduta del 4 maggio 1930.

(2) G. NICOLADZÉ, *Sur les systèmes continus de figures géométriques.* Thèse. Ed. A. Blanchard, Paris, 1928, p. 5.

où les $F_{\lambda_j}, F_{\lambda_{j_1} \lambda_{j_2}}, \dots$ désignent les dérivées de F par rapport aux λ_j , tandis que les $\mu_j, \mu_{j_1 j_2}, \dots$ sont les paramètres arbitraires.

Il est aisé de démontrer le théorème suivant :

THÉOREME I. — *Le système osculateur S_k est un invariant par rapport à tout changement régulier des paramètres du système Σ .*

Introduisons en effet dans l'équation (1) à la place des λ_j les nouveaux paramètres réguliers v_i , déterminés par les relations suivantes :

$$(3) \quad \lambda_j = \lambda_j(v_i), \quad (j, i = 1, 2, \dots, p)$$

avec les conditions :

$$(4) \quad \lambda_j(v_i') = \lambda_j^0.$$

Nous obtenons alors :

$$(5) \quad F[x, y, \lambda_j(v_i)] \equiv \Phi(x, y, v_i) = 0.$$

En outre, nous avons :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{\lambda_j}(x, y, \lambda_j) \equiv \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial \lambda_j} \Phi_{v_i}(x, y, v_i); \\ F_{\lambda_{j_1} \lambda_{j_2}} \equiv \sum_{i_1 i_2} \frac{\partial v_{i_1}}{\partial \lambda_{j_1}} \frac{\partial v_{i_2}}{\partial \lambda_{j_2}} \Phi_{v_{i_1} v_{i_2}}(x, y, v_i) + \sum_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial \lambda_{j_1} \partial \lambda_{j_2}} \Phi_{v_i}(x, y, v_i); \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

En tenant compte de (4), substituons (5) et (6) dans (2); en désignant par $\pi_i, \pi_{i_1 i_2}, \dots$ les nouveaux paramètres arbitraires, nous obtenons alors :

$$(7) \quad \Phi(x, y, v_i^0) + \sum_i \pi_i \Phi_{v_i}(x, y, v_i^0) + \dots + \sum_{i_1 \dots i_k} \pi_{i_1 \dots i_k} \Phi_{v_{i_1} \dots v_{i_k}}(x, y, v_i^0) = 0,$$

ce qui est manifestement l'équation du système osculateur au système (5) dans (v_i^0) . Le théorème est ainsi démontré.

Cela étant, supposons que (λ_j^0) est une courbe générique de Σ ; supposons en outre que la courbe générique du système osculateur S_k possède une propriété quelconque Ω . Par suite du théorème I, cette propriété Ω sera indépendante du choix des paramètres du système Σ . Il en résulte que la propriété Ω est un invariant de la courbe (λ_j^0) par rapport à l'ensemble des déformations déterminées par le système Σ .

2. Pour donner un exemple d'application, démontrons d'abord le théorème suivant :

THÉOREME II. — *Si la courbe générique (λ_j^0) du système continu Σ admet dans son point mobile P un groupe Γ_0 de r éléments linéaires d'ordre $s + 1$, ayant un contact d'ordre s entre eux, toutes les courbes génériques d'un système S_k*

osculateur d'ordre k à \sum dans (λ_j^0) , admettent dans P un groupe Γ_k fixe de $r - k$ éléments linéaires d'ordre $s + 1$, ayant un contact d'ordre s avec les éléments de Γ_0 .

Démonstration. Supposons, ce qui ne réstreint pas la généralité, que le point P de (λ_j^0) se trouve à l'origine des coordonnées et que la tangente des branches de (λ_j^0) en P soit confondue avec l'axe OX . Nous pouvons donc, en nous arrêtant aux termes d'ordre $s + 1$, donner la forme suivante aux équations des branches de (λ_j^0) :

$$(8) \quad f = A_i^0 x^{s+1}, \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

où nous avons posé:

$$(9) \quad f = y - b_0 x^2 - \dots - m_0 x^s.$$

L'équation de la courbe (λ_j^0) prendra alors la forme suivante:

$$(10) \quad f^r - f^{r-s} x^{s+1} \sum_i A_i^0 + \dots \pm f x^{(r-1)(s+1)} \sum_{i_1, \dots, i_{r-1}} A_{i_1}^0 \dots A_{i_{r-1}}^0 \mp \\ \mp x^{r(s+1)} A_1^0 \dots A_r^0 + R = 0,$$

où R désigne l'ensemble des termes d'ordre supérieur à $r(s + 1)$ en x et $y^{1/2}$.

Nous pouvons déduire de l'équation (10) l'équation du système \sum , dont la courbe générique est donnée par l'équation (10) elle-même. Désignons à cet effet par ξ, η les coordonnées du point de contact P mobile et soit $y - \eta - a(x - \xi) = 0$ l'équation de la tangente en ce point P . Cela étant, portons dans l'équation (10) $x - \xi, y - \eta - a(x - \xi)$ à la place de x, y respectivement et remplaçons les coefficients de (10) par des fonctions des paramètres de \sum . Evidemment, nous obtenons alors l'équation du système \sum qui sera mise sous la forme suivante:

$$(11) \quad \varphi^r - \varphi^{r-1} (x - \xi)^{s+1} \sum_i A_i + \dots \pm \varphi (x - \xi)^{(r-1)(s+1)} \sum_{i_1, \dots, i_{r-1}} A_{i_1} \dots A_{i_{r-1}} \mp \\ \mp (x - \xi)^{r(s+1)} A_1 \dots A_r + R = 0,$$

où nous avons posé:

$$(12) \quad \varphi = y - \eta - a(x - \xi) - b(x - \xi)^2 - \dots - m(x - \xi)^s$$

et où R désigne l'ensemble de termes d'ordre supérieur à $r(s + 1)$ en $x - \xi$ et $[y - \eta - a(x - \xi)]^{1/2}$. Les quantités $\xi, \eta, a, b, \dots, m, A_1, \dots$ sont donc des fonctions des paramètres du système \sum . Supposons d'abord que \sum ne dépende que d'un paramètre λ_1 qui prend la valeur λ_1^0 pour la courbe (λ_j^0) . Nous avons donc:

$$(13) \quad \xi(\lambda_1), \eta(\lambda_1), a(\lambda_1), b(\lambda_1), \dots, m(\lambda_1), A_1(\lambda_1), \dots$$

avec les conditions suivantes :

$$(14) \quad \xi(\lambda_i^0) = 0; \eta(\lambda_i^0) = 0; a(\lambda_i^0) = 0; b(\lambda_i^0) = b_0; \dots; \\ m(\lambda_i^0) = m_0; A_i(\lambda_i^0) = A_i^0; \dots$$

En outre, pour $\lambda_i = \lambda_i^0$ nous avons :

$$(15) \quad \varphi = f.$$

En désignant par $F(x, y, \lambda_j)$ le premier membre de l'équation (11) et en dérivant par rapport à λ_i , nous obtenons pour $\lambda_i = \lambda_i^0$

$$(16) \quad F_{\lambda_i}(x, y, \lambda_j^0) = -\eta'_0 [rf^{r-1} - (r-1)f^{r-2}x^{s+1} \sum A_i^0 + \dots \pm \\ \pm x^{(r-1)(s+1)} \sum_{i_1, \dots, i_{r-1}} A_{i_1}^0 \dots A_{i_{r-1}}^0] + R_1,$$

où η'_0 désigne $\left(\frac{\partial \eta}{\partial \lambda_i}\right)_{\lambda_i = \lambda_i^0}$, tandis que R_1 est l'ensemble des termes d'ordre supérieur à $(r-1)(s+1)$ en $x, y^{1/2}$ et $f^{1/(s+1)}$.

Cela nous montre que si, en considérant x comme infiniment petit du premier ordre, on s'arrête aux infiniment petits d'ordre $(r-1)(s+1)$, l'équation de la courbe

$$(17) \quad F_{\lambda_i}(x, y, \lambda_j^0) = 0$$

prendra la forme suivante :

$$(18) \quad rf^{r-1} - (r-1)f^{r-2}x^{s+1} \sum_i A_i^0 + \dots \pm x^{(r-1)(s+1)} \sum_{i_1, \dots, i_{r-1}} A_{i_1}^0 \dots A_{i_{r-1}}^0 = 0.$$

En effet, en résolvant (18) par rapport à f , nous obtenons $r-1$ solutions :

$$(19) \quad f = B_j^0 x^{s+1}, \quad (j = 1, 2, \dots, r-1)$$

d'où on voit que f est infiniment petit d'ordre $s+1$ par rapport à x .

Il en résulte que la courbe (17) admet à l'origine le groupe Γ_i des $r-1$ éléments linéaires d'ordre $s+1$ déterminé par (19).

L'équation du système osculateur d'ordre 1 au système (11) dans (λ_j^0) est :

$$(20) \quad F(x, y, \lambda_j^0) + \mu F_{\lambda_i}(x, y, \lambda_j^0) = 0.$$

Comme la courbe

$$F(x, y, \lambda_j^0) = 0$$

admet à l'origine le groupe Γ_0 des r éléments linéaires d'ordre $s+1$ (déterminé par (8)), il s'ensuit que le groupe Γ_i est commun à toutes les courbes génériques du système (20). Or, les équations (19) ne dépendent que des coefficients des équations (8); il est donc évident que les équations (19) seront les mêmes quelle que soit la forme des fonctions (13)

c'est-à-dire si le système (11) dépend aussi d'autres paramètres $\lambda_2, \lambda_3, \dots$, dont les valeurs $\lambda_2^0, \lambda_3^0, \dots$ correspondent à la courbe (λ_j^0) , toutes les courbes :

$$(21) \quad F_{\lambda_2}(x, y, \lambda_j^0) = 0 \quad ; \quad F_{\lambda_3}(x, y, \lambda_j^0) = 0 ; \dots$$

auront à l'origine le même groupe Γ_1 d'éléments linéaires déterminé par les équations (19). Le théorème est ainsi démontré pour le cas $k = 1$. Or, remarquons que les coefficients B_j^0 des équations (19) ne dépendent que des coefficients A_i^0 des équations (8). Nous pouvons donc partir des équations (19), en remplaçant $r - 1$ par r . Alors, en répétant le raisonnement précédent, nous voyons que le théorème est vrai pour le cas $k = 2$. En continuant ainsi, on arrive à la démonstration complète du théorème énoncé.

3. Appliquons au théorème II, la méthode du § 1. Nous obtenons immédiatement le théorème suivant :

THÉOREME III. — *Chaque groupe Γ_0 de r éléments linéaires d'ordre $s + 1$ ayant un contact d'ordre s entre eux, détermine sur le plan pour $k = 1, 2, \dots, r - 1$ des groupes Γ_k de $r - k$ éléments linéaires du même ordre ayant un contact d'ordre s avec ceux de Γ_0 . Ces Γ_k sont des invariants du Γ_0 vis à vis de toute transformation ponctuelle du plan, respectant l'ordre des éléments linéaires et l'ordre du contact entre eux. En particulier, ce sont des invariants projectifs ⁽¹⁾.*

Ce fait particulier peut être démontré directement. Il suffit pour cela de tirer les coefficients B_j^0 des équations (18) et de former le groupe des $r - 1$ droites concourantes :

$$(22) \quad y = B_j^0 x.$$

Evidemment ce groupe n'est que le premier groupe polaire de l'axe OY par rapport au groupe des r droites :

$$(23) \quad y = A_i^0 x,$$

où les A_i^0 sont tirés des équations (8). D'autre part, il est aisé de voir que toutes les courbes polaires d'ordre k de chaque point générique du plan, par rapport à la courbe (λ_j^0) , admettent dans P un même groupe fixe de $r - k$ éléments linéaires d'ordre $s + 1$ qui n'est autre que Γ_k .

(1) En posant dans les théorèmes précédents $s = 1$ et $r = 2$ (donc $k = 1$), nous obtenons les théorèmes démontrés récemment par M. B. SEGRE dans ces « Rendiconti », vol. IX (6), 1929, 1^o sem., p. 970. Il est à remarquer que dans la même Note M. B. Segre cite le théorème suivant (dû à M. F. Severi) : « Se una curva C variabile in un sistema continuo possiede un punto k -plo variabile P ($k \geq 2$), ogni curva \bar{C} del sistema infinitamente vicina a C, passa per P $k - 1$ volte (almeno) » et ajoute la démonstration du théorème suivant : se P è il punto k -plo di \bar{C} infinitamente vicino a P, le $k - 1$ tangenti in P a C costituiscono il gruppo primo polare della retta $P\bar{P}$ rispetto al gruppo delle k tangenti in P a C ».

Mais ce théorème a été déjà démontré dans ma thèse citée plus haut, car ce n'est qu'un cas particulier du théorème n. 4 (p. 48) de cette thèse.

Matematica. — *Une démonstration du théorème de Cauchy et de la formule de Gauss.* Nota di E. ČECH, presentata ⁽¹⁾ dal Corrispondente G. FUBINI.

Soit Γ l'intérieur d'une courbe C plane simple fermée de longueur finie; posons $\Delta = \Gamma + C$. Je démontrerai le théorème de Cauchy sous la forme: Soit $f(\zeta)$ une fonction de la variable complexe ζ continue dans Δ et dérivable dans Γ ; alors $\int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta = 0$ ⁽²⁾. La même méthode suffira à établir

la formule de Gauss sous la forme: Soient u, v deux fonctions de deux variables réelles x, y continues dans Δ et telles que la formule

$$(1) \quad \int_{\Gamma} u dx + v dy = \iint_{\Delta} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy$$

soit valable pour chaque rectangle ρ de périmètre r , ρ et r faisant partie de Δ ; alors (1) subsiste pour $\rho = \Gamma$, $r = C$ pourvu que l'intégrale double converge dans Γ .

Commençons par le théorème de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$; je démontrerai $\left| \int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta \right| < 25 s \varepsilon$. Il existe un nombre $\delta > 0$, tel que, pour ζ_1, ζ_2 dans Δ , $|\zeta_1 - \zeta_2| < \delta$ entraîne $|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| < \varepsilon$. Il existe un nombre $\eta > 0$ tel que, ζ_1, ζ_2 étant sur C tels que $|\zeta_1 - \zeta_2| < \eta$, un arc de C aux extrémités ζ_1, ζ_2 soit plus court que δ . Divisons C (pos. orientée) en des petits arcs moyennant les points $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n = a_0$; la longueur σ_i de l'arc $a_i a_{i+1} = \alpha_i$ soit $< \frac{1}{4} \eta$. Soit K_i ($0 \leq i \leq n-1$) le périmètre d'un carré parallèle aux axes de centre a_i et de côté $p_i < \frac{1}{2} \eta$; $2\sigma_i < p_i < 3\sigma_i$. η soit si petit qu'il existe un arc de C extérieur à K_i de longueur $\frac{1}{2} s$. Je démontrerai plus loin le lemme qu'il existe un arc k_i de K_i contenu dans Γ dont les extrémités c'_i, c''_i sont sur C , le plus petit arc γ_i de C aux extrémités c'_i, c''_i contenant a_i (et donc α_i , car $\sigma_i < \frac{1}{2} p_i$).

(1) Nella seduta del 18 maggio 1930.

(2) (2-7-1930). Je donnerai une autre démonstration de cet énoncé dans une Note ultérieure.

On peut supposer que les $2n$ points c'_i, c''_i soient tous distincts. L'intérieur de la courbe simple fermée $k_i + \gamma_i$ fait partie de Γ ; les lignes brisées k_j ($0 \leq j \leq n-1$; $j \neq i$) le partagent en un nombre fini de domaines Γ_{iv} ; leurs frontières c_{iv} sont composées d'un nombre fini d'arcs de C et d'arcs de carrés K_0, K_1, \dots, K_{n-1} . Le domaine $\Gamma^* = \Gamma - \sum \Gamma_{iv}$ peut être divisé en un nombre fini de rectangles ρ_μ ; les ρ_μ et leurs frontières r_μ font partie de $\Gamma^{(1)}$. Évidemment,

$$\int_C f(z) dz = \sum_{iv} \int_{c_{iv}} f(z) dz + \sum_{\mu} \int_{r_\mu} f(z) dz,$$

tous les contours étant positivement orientés. D'après la démonstration classique de Goursat, $\int_{r_\mu} f(z) dz = 0$, d'où, en remarquant que $\int_{c_{iv}} dz = 0$,

$$(2) \quad \left| \int_C f(z) dz \right| \leq \sum_{iv} \left| \int_{c_{iv}} [f(z) - f(a_i)] dz \right|.$$

Or sur k_i on a $|\tilde{z} - \tilde{a}_i| < p_i < \frac{1}{2} \eta$; en particulier $|c'_i - a_i|, |c''_i - a_i| < \frac{1}{2} \eta$; $|c'_i - c''_i| < \eta$, de manière que la longueur de γ_i est $< \delta$. Il en résulte (a_i appartenant à γ_i) que $|z - a_i| < \delta$ sur γ_i ; cet inégalité subsistant sur k_i , elle vaut sur $k_i + \gamma_i$ et donc aussi à l'intérieur de $k_i + \gamma_i$. En particulier, sur c_{iv} on aura $|z - a_i| < \delta$ et par suite $|f(z) - f(a_i)| < \varepsilon$. Le second membre de (2) est donc $\leq \varepsilon$ multiplié par la somme des longueurs des c_{iv} . Or on voit sans difficulté que cette somme ne dépasse par s augmenté de la double longueur totale des carrés K_i ; et cette longueur est $4 \sum p_i < 12 \sum \sigma_i = 12 s$. Donc le (second et par suite le) premier membre de (2) est $\leq 25 s \varepsilon$.

La démonstration de la formule de Gauss est presque la même. Si l'on ne suppose pas la convergence du second membre, cette formule

$$\int_C u dx + v dy = \iint_{\Gamma} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy$$

reste valable pourvu qu'on définisse

$$\iint_{\Gamma} = \lim \iint_{\Gamma^*},$$

les Γ^* parcourant une suite convenablement choisie de domaines complètement intérieurs à Γ et tels que chaque point de Γ appartienne à tous les Γ^* à

(1) Il faut remarquer que l'arc α_i fait partie de l'intérieur de l'arc γ_i .

partir d'un certain rang. $\varepsilon > 0$ étant donné, je fixe $\delta > 0$ de manière que, pour $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ dans Δ , $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta$ entraîne $|u(x_1, y_1) - u(x_2, y_2)| < \varepsilon$, $|v(x_1, y_1) - v(x_2, y_2)| < \varepsilon$. Les symboles $\eta, a_i, \alpha_i, K_i, p_i, k_i, c'_i, c''_i, \gamma_i, \Gamma_{iv}, c_{iv}, \Gamma^*, \rho_\mu, r_\mu$ gardant leurs significations, il suffit de prouver que

$$(3) \quad \left| \int_C u dx + v dy - \iint_{\Gamma^*} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \right| \leq 50 s \varepsilon.$$

Or d'après (1)

$$\iint_{\Gamma^*} = \sum_{\mu} \iint_{Q_{\mu}} = \sum_{\mu} \int_{r_{\mu}}, \quad \int_C = \sum_{iv} \int_{c_{iv}} + \sum_{\mu} \int_{r_{\mu}},$$

de manière que l'inégalité à démontrer devient

$$\left| \sum_{iv} \int_{c_{iv}} u dx + v dy \right| \leq 34 \varepsilon.$$

Or chaque point de c_{iv} étant à une distance $< \delta$ de a_i , on a sur c_{iv} : $|u - \alpha| < \varepsilon$, $|v - \beta| < \varepsilon$, où α, β sont les valeurs de u, v au point a_i . Donc

$$\int_{c_{iv}} u dx + v dy = \int_{c_{iv}} (u - \alpha) dx + (v - \beta) dy$$

ne dépasse pas en module 2ε multiplié par la somme des longueurs des c_{iv} , et donc $2\varepsilon \cdot 25s = 50s\varepsilon$.

Reste à prouver le *lemme*. L'intersection O de K_i avec Γ est une somme d'une infinité dénombrable d'arcs ouverts du carré K_i (composantes de O); les extrémités de ces arcs appartiennent à un arc C^* de C de longueur $< \frac{1}{2}s$; C^* contient a_i (et tout l'arc α_i). Une composante de O soit dite *favorable* si ses extrémités sont sur C^* séparées l'une de l'autre par a_i . Il s'agit de l'existence d'une composante favorable. Rangeons les composantes non favorables dans une suite

$$(4) \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$$

Moyennant (4) je définirai une certaine courbe simple fermée C' (si les arcs (4) n'existent pas, je pose $C' = C$). Soient p'_1, p''_1 les deux extrémités de λ_1 et soit l_1 l'arc ouvert de C^* aux mêmes extrémités. En remplaçant l_1 par λ_1 , C se transforme en C_1 . L'intérieur Γ_1 de C_1 fait partie de Γ . Aucun des arcs λ_v ($v \geq 2$) n'a des points communs ni avec λ_1 , ni avec C et donc pas même avec C_1 ; chaque λ_v est donc complètement à l'extérieur ou à l'intérieur de C_1 . Soit λ_k le premier d'entre eux à l'intérieur de C_1 (si λ_k

n'existe pas, $C' = C_1$). Soient p'_k, p''_k les extrémités de λ_k ; ces points ne sont pas sur λ_1 , cet arc étant à l'extérieur de C_1 ; pourtant, ils appartiennent à C ; ils se trouvent donc sur C_1 . En remplaçant par λ_k cet arc de C_1 aux extrémités p'_k, p''_k qui ne contient pas a_i on obtient de C_1 une nouvelle courbe C_2 . L'intérieur Γ_2 de C_2 fait partie de Γ_1 , donc de Γ . Moyennant le premier arc (4) situé à l'intérieur de C_2 , on forme la courbe C_3 , et ainsi de suite. On arrive ainsi ou à une courbe $C_n = C'$ telle que tous les arcs (4) sont à l'extérieur d'elle, ou bien on pourra former C_n pour chaque n . On voit alors sans peine que les courbes C_n ont une position limite C' . L'intérieur Γ' de C' fait partie de l'intérieur Γ_n de chaque courbe C_n et donc de Γ . Tous les arcs (4) sont à l'extérieur de C' . Les arcs α_i et $C - C^*$ de C font partie de C' . Il y a donc un point $\alpha(\beta)$ dans Γ' à l'intérieur (extérieur) de K_i . Joignons α à β par une ligne brisée située dans Γ' ; elle rencontre K_i au point q ; q appartient à $(\Gamma',$ donc à) Γ et à K_i , donc à O . La composante μ de O passant par q est favorable, les composantes (4) se trouvant à l'extérieur de C' .

La démonstration qui vient d'être complétée du théorème de Cauchy et de la formule de Gauss s'étend sans peine au cas où la frontière C du domaine bornée Γ se compose d'un nombre fini d'arcs simples rectifiables ayant deux à deux au plus une extrémité commune. Chaque point de C accessible de Γ de plusieurs manières doit alors être considéré comme multiple et la fonction $f(z)$ peut avoir des valeurs différentes dans deux points coïncidants, mais accessibles de différentes manières.

On peut aussi admettre un nombre fini de discontinuités sur le contour. Supposons p. ex., la fonction $f(z)$ continue en $\Delta - a$ et dérivable dans Γ , a étant un point particulier de C . De plus soit, au voisinage de a , $f(z) =$

$$= o\left(\frac{1}{|z-a|}\right). \text{ Alors, } \lim_{c-\gamma} \int f(z) dz = 0, \text{ ou } \gamma \text{ parcourt une suite } \textit{conver-$$

nable de petits arcs de C entourant a . En effet, d'après le lemme, on peut construire un arc k d'un petit carré au centre a , k faisant partie de Γ et les extrémités c', c'' de k limitant un petit arc γ de C qui entoure a . En appliquant le théorème de Cauchy sous la forme déjà démontrée à l'intérieur de $(C - \gamma) + k$, on obtient $\int_{C-\gamma} f(z) dz = \int_k f(z) dz$. Or la dernière

$$\text{intégrale tend vers zéro, car } f(z) = o\left(\frac{1}{|z-a|}\right) \text{ et la longueur de } k \text{ est}$$

de l'ordre de $|z-a|$.

Astronomia. — *Il tipo spettrale delle componenti una stella doppia determinato con l'interferometro.* Nota di M. MAGGINI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio E. BIANCHI.

Le ricerche interferometriche a Collurania si sono rivolte nello scorso anno alla risoluzione di un problema assai importante dell'Astronomia siderale: la determinazione del tipo spettrale di ambedue le componenti di una stella doppia stretta. Come è noto, il metodo diretto, spettrografico, è applicabile soltanto a stelle doppie lucide aventi una separazione di almeno $1''$, per tutte le altre doppie, pure lucide, ma più strette di $1''$, non si conoscono che i tipi spettrali «compositi»; gli altri metodi indiretti, come possono essere quelli della lunghezza d'onda effettiva e degli indici di colore, si arrestano anch'essi ad un limite di separazione poco diverso.

L'interferometro stellare, per il fatto che può adoperarsi tanto come reticolo quanto come fotometro, permette di estendere i due metodi indiretti ora ricordati anche ai sistemi stretti. Sulle misure di lunghezza d'onda effettiva interferometrica ho già riferito a suo tempo ⁽²⁾ e mi propongo di ritornare fra breve su quanto di quell'argomento riguarda il problema attuale; nella presente Nota è mia intenzione dare un cenno sulla determinazione degli indici di colore e quindi del tipo spettrale delle componenti una stella doppia mediante la misura della «visibilità» delle frange.

Descrivo in altro luogo ⁽³⁾ il metodo che adopero a Collurania per misurare la «visibilità» delle frange date da una stella doppia stretta: in generale, se ρ è la distanza angolare fra le due componenti e r il rapporto delle loro intensità luminose, si deduce facilmente che la «visibilità» V in corrispondenza di ciascun valore della separazione D delle aperture interferometriche è data da

$$(1) \quad V = \frac{\sqrt{1 + r^2 + 2r \cos 2\pi \frac{D}{\lambda} \rho}}{1 + r}.$$

I valori V_1 e V_2 della visibilità massima ($D = [2k - 2]\lambda/2\rho$) e minima ($D = [2k - 1]\lambda/2\rho$; $k = 1, 2, 3 \dots$) saranno dunque, per fenditure sottili:

$$(2) \quad V_1 = 1 \quad V_2 = \frac{1 - r}{1 + r}$$

(1) Nella seduta del 18 maggio 1930.

(2) Cfr. questi «Rendiconti» vol. VII, ser. 6^a, 1° sem., fasc. 1; vol. VIII, ser. 6^a, 2° sem., fasc. 9, 1928.

(3) «Memorie della Soc. Astron. Ital.», vol. V, n. 1, 1930.

da cui si deduce il rapporto d'intensità r e quindi la differenza Δm di grandezza stellare fra le due componenti la doppia:

$$(3) \quad r = \frac{V_1 - V_2}{V_1 + V_2} \quad \Delta m = \log \left(\frac{V_1 - V_2}{V_1 + V_2} \right) : 0.4.$$

È subito intuito il procedimento da seguire per determinare l'indice di colore e quindi il tipo spettrale di ambedue le componenti: basta ricavare la differenza Δm per due diverse radiazioni λ e λ' e dedurre quindi le grandezze stellari di ciascuna componente in λ e λ' ; il confronto di queste grandezze, quando sia nota la relazione che lega il tipo spettrale all'indice di colore relativo a λ e λ' , fornisce il tipo spettrale. Vediamo come questo può ottenersi con l'interferometro.

La misura della « visibilità » al primo minimo delle frange ($D = \lambda/2\rho$) nelle radiazioni λ e λ' dà la differenza fra le Δm relative alle due λ , giacchè si ha:

$$(4) \quad r = \frac{1 - (V_2 - V'_2)}{1 + (V_2 - V'_2)} \quad ; \quad \Delta m' - \Delta m = \log \left[\frac{1 - (V_2 - V'_2)}{1 + (V_2 - V'_2)} \right] : 0.4;$$

chiamando ora con J_λ e $J_{\lambda'}$ gli indici di colore relativi a λ e λ' delle componenti A e B, è facile vedere che deve essere:

$$(5) \quad J_{\lambda'} - J_\lambda = \Delta m' - \Delta m.$$

Dunque, la semplice misura della « visibilità » al minimo in due radiazioni diverse è capace di fornire la differenza fra gli indici di colore, e quindi la differenza fra il tipo spettrale, delle due componenti una doppia stretta, differenza che, oltre che in grandezza, è determinata anche nel senso, perchè l'interferometro permette di giudicare quale dei due astri AB aumenta o diminuisce di splendore passando dalla radiazione λ alla λ' .

Per una prima indagine statistica sui sistemi binarii stretti, la conoscenza della differenza di tipo spettrale è già molto⁽¹⁾. Volendo poi conoscere quale è lo spettro di ambedue le componenti, bisogna, come è evidente, avere il modo di determinare gli indici di colore J_λ ed $J_{\lambda'}$. Per diversi sistemi è noto intanto lo spettro della componente A più luminosa, nel qual caso è possibile dedurre dalla (5) anche l'indice di colore $J_{\lambda'}$ e lo spettro della componente B. Quando non sia noto lo spettro di A, ma solo uno spettro « composito » la conoscenza delle due differenze Δm e $\Delta m'$ non basta più, ma per determinare gli indici di colore J_λ e $J_{\lambda'}$ occorre anche conoscere le grandezze stellari di almeno una componente nelle due radia-

(1) Cfr. p. es. « Lick Observatory Bull. », vol. X, pp. 183-184.

zioni λ e λ' . In questo caso dunque l'interferometro solo non è capace di risolvere il problema, ma ha bisogno di una misura fotometrica diretta, misura fotometrica del resto assai facile, bastando determinare la grandezza complessiva della doppia nelle due radiazioni λ e λ' ; indicando allora con Δ_A la differenza fra la grandezza stellare di A e la grandezza complessiva della doppia, per es. in λ , si ha:

$$(6) \quad \Delta_A = \log \left(1 + \frac{I}{2.512^{\Delta_m}} \right) : 0.4$$

ed analogamente per la radiazione λ' . Ottenute le grandezze stellari di A in λ e λ' , cioè J_A , la (5) fornisce senz'altro anche J_B .

Per dare un esempio della precisione che può raggiungersi col metodo ora esposto, riporto qui sotto le misure che ho eseguite a Collurania su alcuni sistemi per i quali sono già noti gli spettri di ambedue le componenti; questi sistemi vennero scelti dalle liste pubblicate dal Leonard⁽¹⁾. Una prima serie di misure, su otto sistemi stretti, venne eseguita col rifrattore Cooke, ma poichè quasi tutte le doppie di cui è noto lo spettro hanno separazioni di almeno $1''$, pensai di togliere l'interferometro dal rifrattore Cooke e lo applicai ad un piccolo rifrattore di m. 0.118 di apertura e m. 1.95 di distanza focale; in questa maniera, e mantenendo le fessure poco separate, riuscii a produrre un unico sistema di frange anche in quei casi in cui la separazione della doppia giungeva ai $2''$.

Le misure di visibilità vennero eseguite interponendo nell'interferometro due dei soliti filtri già ricordati⁽²⁾ e precisamente il rosso $645 \mu\mu$ e l'azzurro $412 \mu\mu$, i quali valori corrispondono dunque a λ e λ' ; l'equazione di colore per questi filtri risultò, al zenit, $1^m 42$. Dato il valore assai alto dell'equazione di colore, un intervallo 0.1 di classe spettrale corrisponde a circa 0.05 di grandezza stellare; per la determinazione della classe spettrale (che basta conoscere entro qualche decimo) mi sembrò quindi più che sufficiente ricavare la grandezza complessiva di ciascuna doppia in λ e λ' mediante stime col metodo di Argelander.

Riporto nella tabella seguente queste determinazioni di spettri, tenendo separate le misure eseguite coi due rifrattori; per economia di spazio mi limito a dare⁽³⁾, per ciascun sistema, gli indici di colore $J_A J_B$ ed i tipi spettrali che ne ho dedotti e, nelle due ultime colonne, riporto i tipi spettrali dati dal Leonard.

(1) V. «Lick Obs. Bull.», loc. cit.

(2) V. questi «Rendiconti», vol, VII, ser. 6^a, 1^o sem., fasc. I, 1928.

(3) Nel vol. II delle «Memorie ed Osservazioni» di Collurania, attualmente in preparazione, darò, per una gran parte dei 402 sistemi misurati da me in questi ultimi anni con l'Interferometro, anche le singole misure di «visibilità» delle frange, la differenza di grandezza fra le due componenti ed i loro tipi spettrali.

β GC	J_A	J_B	Spettro		Sp. Leonard		
			A	B	A	B	
<i>Misure al rifrattore di m. 0.394</i>							
1952	+ 0. ^m 80	+ 0. ^m 10	F7	A2	F8	A2	
2535	0. 48	0. 00	F0	A0	F0	A2	
3625	0. 53	0. 00	F1	A0	F5	A2	
9531	0. 72	0. 11	F5	A2	F5	A3	
9634	0. 80	0. 00	F7	A0	F5	A2	
11214	0. 82	0. 72	F7	F5	F8	F8	
11828	0. 48	0. 13	F0	A3	F2	A5	
<i>Misure al rifrattore di m. 0.118</i>							
1512	+ 0. ^m 24	+ 0. ^m 10	A5	A2	A0	A0	
2976	0. 50	0. 12	F0	A2	F0	F0	
4839	1. 41	1. 44	K0	K0	G9	K0	
7012	0. 00	0. 00	A0	A0	B9p	A0p	
7487	0. 72	0. 95	F5	G0	F2	F5	
7878	0. 70	0. 90	F5	F9	F8	F8	
8303	0. 57	0. 25	F2	A5	F2	F2	
8785	0. 22	0. 26	A5	A5	A5	A5	

Dato il genere di misure, l'accordo fra i tipi spettrali può considerarsi soddisfacente.

In una prossima Nota conto di dare un cenno sulla determinazione delle *temperature effettive* mediante l'interferometro.

Astronomia. — *Orbita circolare di U Cephei.* Nota di G. VIOLA, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. A. BEMPORAD.

L'importanza delle osservazioni fotometriche del prof. Bemporad messa in rilievo nella Nota precedente, ci ha indotto a calcolare gli elementi orbitali del sistema ellittico U Cephei le seguenti ipotesi:

- a) che i dischi siano uniformemente illuminati;
- b) che i dischi siano del tutto oscurati al lembo.

I valori perequati delle grandezze osservate, corretti dell'effetto dovuto alla ellitticità apparente χ delle componenti e rappresentati graficamente danno la curva di luce rettificata (vedi fig. 1) dalla quale otteniamo per il minimo principale (ricavando l'intensità luminosa corrispondente alla massima perdita di luce espressa in grandezza stellare)

$$\Delta G = 2^{\text{H}}.26 \quad 1 - \lambda_p = 0.8753.$$

Nella tabella che segue diamo i valori di $\text{sen}^2 \theta$ (calcolati con la teoria di H. N. Russell) corrispondenti alle diverse frazioni dell'oscuramento massimo α_0 .

TABELLA I.

n	$1 - l$	Gr.	fase	θ	$\text{sen}^2 \theta$	$\text{sen}^2 \theta - A$	$\psi(k, \alpha)$	k
0.00	0.00000	6.67	0.2180	31.48	0.27270	+ 0.20102	+ 4.509	0.5833
10	08753	6.76	1850	26.72	20220	+ 0.13052	+ 3.020	6148
20	17506	6.88	1655	23.90	16410	+ 0.09242	+ 2.152	6159
30	26259	7.00	1490	21.51	13440	+ 0.06272	+ 1.465	6137
40	35012	7.14	1340	19.35	10980	+ 0.03812	+ 0.893	6000
50	43765	7.29	1205	17.40	08953	+ 0.01785	+ 0.420	6060
60	53518	7.50	1075	15.53	07168	—	—	—
70	61271	7.70	0950	13.72	05625	— 0.01543	— 0.364	5666
80	70024	7.98	0820	11.84	04210	— 0.02958	— 0.693	5875
85	74400	8.15	0755	10.90	03576	— 0.03592	— 0.858	5663
90	78777	8.35	0685	9.89	02950	— 0.04218	—	—
95	83153	8.60	0610	8.80	02340	— 0.04828	— 1.145	6389
98	87779	8.78	0550	7.94	01908	— 0.05260	— 1.247	6250
1.00	87530	8.93	0490	7.07	01515	— 0.05653	— 1.340	6245

k medio = 0.6030

(1) Nella seduta del 18 maggio 1930.

La penultima colonna riporta i valori della funzione

$$\psi(k, \alpha) = \frac{(\sin^2 \theta - A) (1 - \chi \cos^2 \theta_{(0,0)})}{B (1 - 2 \cos^2 \theta)}$$

dove si è posto: $A = \sin^2 \theta_{(0,6)}$, $B = \sin^2 \theta_{(0,6)} - \sin^2 \theta_{(0,9)}$.

Dalla tabella II (vedi « A. I. », vol. 35, p. 315) per $\psi(k, \alpha)$ e per α presa come argomento orizzontale, deduciamo 13 valori di k , (dati nell'ultima colonna) i quali sono in accordo soddisfacente.

Assumiamo come definitivo il valore medio 0.6030.

Curva di luce teorica. — Rappresentando graficamente i valori di $\sin^2 \theta$ e quindi di i , corrispondenti alle diverse frazioni di oscuramento massimo, dedotti in funzione del valore definitivo di k , abbiamo la curva di luce teorica, la quale, nell'ipotesi di orbita circolare rappresenta la variazione in luminosità del sistema.

TABELLA II.

Curva di luce teorica: dischi uniformemente illuminati.

Gr.	$\psi(k, \alpha)$	$\sin^2 \theta$	fase	O — C	Gr.	$\psi(k, \alpha)$	$\sin^2 \theta$	fase	O — C
6.67	+ 4.556	0.2826	0.2224	— 0.0044	7.70	— 0.369	0.0541	0.0931	+ 0.0019
6.76	+ 2.972	0.2104	0.1887	— 0.0037	7.98	— 0.700	0.0383	0.0782	+ 0.0048
6.88	+ 2.119	0.1712	0.1692	— 0.0037	8.15	— 0.854	0.0308	0.0700	+ 0.0055
7.00	+ 1.449	0.1400	0.1521	— 0.0031	8.35	— 1.000	0.0238	0.0658	+ 0.0027
7.14	+ 0.895	0.1140	0.1366	— 0.0016	8.60	— 1.152	0.0230	0.0610	—
7.29	+ 0.419	0.0916	0.1220	— 0.0015	8.78	— 1.255	0.0187	0.0544	+ 0.0006
					8.93	— 1.352	0.0156	0.0497	+ 0.0007

I valori O — C mostrano il leggiero distacco esistente fra le due curve, distacco che non è superiore a 8 minuti. Questa lieve divergenza in fase conferma l'attendibilità degli elementi fin qui trovati, in base ai quali passiamo senz'altro al calcolo degli altri.

Per $k = 0.603$, ricaviamo dalla tabella II per le funzioni

$$\varphi_1(k) = \frac{4k}{\psi(k, 0) - \psi(k, 1)} \quad \varphi_2(k) = \frac{4k}{(1 - k)^2 \psi(k, 0) - (1 + k)^2 \psi(k, 1)}$$

rispettivamente i valori:

$$\varphi_1(k) = 0.575 \quad \varphi_2(k) = 0.604$$

quindi, per l'inclinazione i del piano dell'orbita otteniamo risolvendo la seguente equazione rispetto a $\cot^2 i$:

$$\cot^2 i = \frac{\sin^2 \theta_{(0.6)} - \sin^2 \theta_{(0.9)}}{\varphi_1(k)} - \sin^2 \theta_{(0.6)}$$

$$\cot^2 i = 0.00167$$

$$i = 87^\circ, 7$$

il valore di i sostituito nella formola

$$r_i^2 = \frac{B}{\varphi_2(k)} \sin^2 i$$

dà per il raggio r_i della componente più grande del sistema:

$$r_i = 0.2673$$

che moltiplicato per il rapporto k dei raggi, dà per la componente più piccola:

$$r_2 = 0.1590.$$

Il rapporto delle perdite di luce ai due minimi per dischi uniformemente illuminati ed orbita circolare, ci dà il valore della intensità relativa per unità di area della superficie stellare, cioè:

$$\frac{J_2}{J_1} = \frac{1 - \lambda_1}{1 - \lambda_2} = 21.$$

Se con $\bar{\rho}_1$ e $\bar{\rho}_2$ indichiamo le densità delle componenti più grande e più piccola, nell'ipotesi che queste siano di massa uguale a quella del sole, si ha:

$$\bar{\rho}_1 = 0.059 \quad \bar{\rho}_2 = 0.270.$$

I semiassi maggiori, per componenti di massa uguale a quella del sole sono rispettivamente dati da:

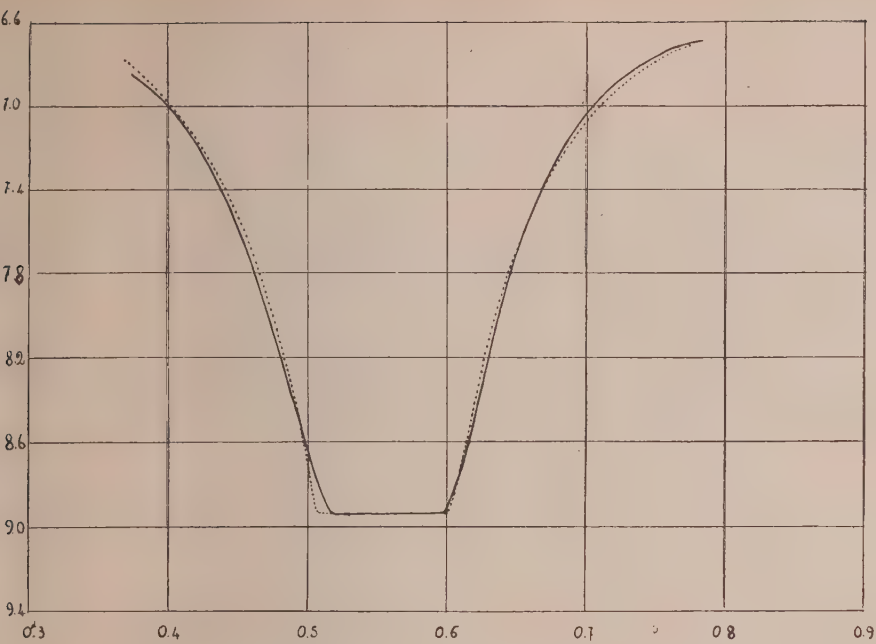
$$\bar{r}_1 = 5.29 P^{\frac{2}{3}} r_1 = 2.56 \quad \bar{r}_2 = 5.29 P^{\frac{2}{3}} r_2 = 1.53$$

dove la quantità $5.29 P^{\frac{2}{3}} = 9.72$ rappresenta la lunghezza dell'asse maggiore dell'orbita del sistema in esame, in rapporto al raggio solare.

I rapporti dei semiassi equatoriali, e del semiasse polare con l'equatoriale risultano:

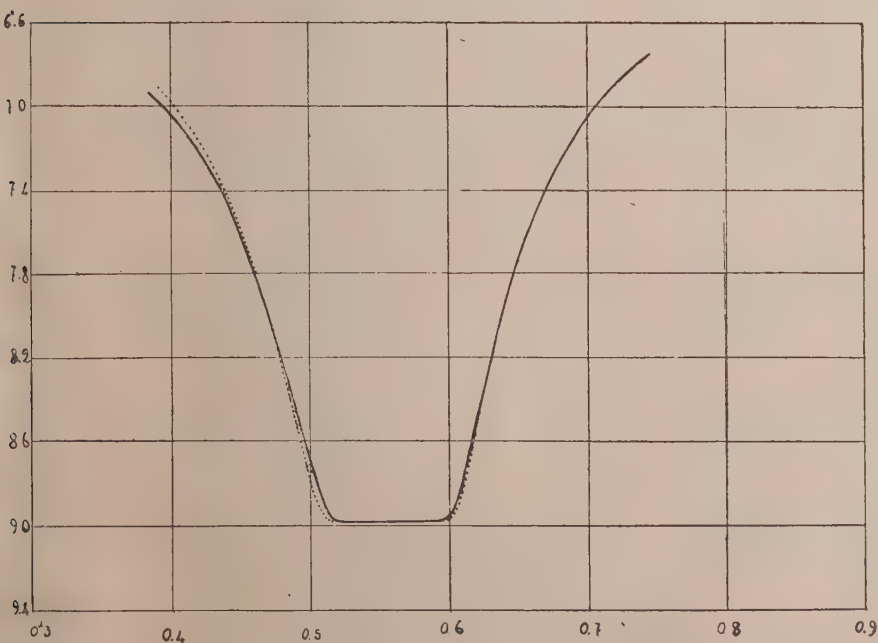
$$\frac{b_1}{a_1} = 0.932 \quad \frac{c_1}{a_1} = 0.900$$

l'eccentricità dell'orbita e la longitudine ω del periastro potrebbero essere ricavate dalla curva di luce costruita da noi in base alle osservazioni pere-



Curve di luce osservata e teorica
ipotesi: dischi uniformemente illuminati

Fig. 1.



Curve di luce osservata e teorica
ipotesi: dischi oscurati al lenbo

Fig. 2.

quate del Dugan, ma data l'amplitudine relativamente piccola del minimo secondario, crediamo opportuno limitarci al semplice calcolo della componente

$$e \cos \omega = \frac{t_2 - t_1 - \frac{P}{2}}{P(1 + \cos ec^2 i)} = -0.0018.$$

Nell'ipotesi che i dischi siano oscurati al lembo e le componenti pressochè sferiche, il valore della ellitticità apparente ζ delle componenti può assumersi uguale ai $\frac{5}{8}$ del valore adottato nella prima soluzione.

Come precedentemente, le grandezze osservate corrette dell'effetto dovuto alla componente ζ e rappresentati graficamente danno la curva di luce rettificata (vedi fig. 2), dalla quale ricaviamo per il minimo principale:

$$\Delta G = 2^{\text{h}} 31 \quad 1 - \lambda p = 0.8809.$$

I valori di $\sin^2 \theta$ calcolati per le diverse frazioni dell'oscuramento massimo danno:

$$A = 0.07626 \quad B = 0.04635.$$

Dalla tabella IIax (vedi « A. J. », vol. 36, p. 245) ricaviamo in funzione $\psi'(k, \alpha')$ e di α' 13 valori di k , la cui media risulta 0.6720.

Le differenze O — C tra fase osservata e calcolata, dedotte per grandezze eguali e date nella tabella che segue, chiaramente mostrano la quasi coincidenza delle curve di luce osservata e teorica. Questo importantissimo fatto conferma (come d'altronde abbiamo visto precedentemente) che l'ordinario metodo di calcolo degli elementi dell'orbita di un sistema binario, applicato alla curva di luce rettificata costruita con le osservazioni fotometriche raccolte dal prof. Bemporad, conduce a risultati del tutto reali.

TABELLA III.
Curva di luce teorica: dischi oscurati al lembo.

Gr.	$\psi'(k, \alpha')$	$\sin^2 \theta$	θ	fase	O — C	Gr.	$\psi'(k, \alpha')$	$\sin^2 \theta$	θ	fase	O — C
6.67	+ 4.489	0.28432	32.22	0.2283	— 0.0043	7.71	— 0.348	0.0601	14.20	0.0983	— 0.000
6.77	+ 2.793	0.20571	26.97	1868	— 0.0018	7.99	— 0.670	0.1419	12.24	0848	— 0.000
6.88	+ 1.943	0.16649	24.07	1667	+ 0.0003	8.17	— 0.838	0.2374	11.15	0772	+ 0.000
7.00	+ 1.316	0.13725	21.74	1505	— 0.0005	8.38	— 1.000	0.299	9.96	0690	—
7.14	+ 0.814	0.11399	19.73	1366	+ 0.0004	8.64	— 1.164	0.223	8.59	0595	+ 0.001
7.30	+ 0.384	0.09406	17.86	1236	— 0.0006	8.83	— 1.281	0.169	7.47	0517	+ 0.001
						8.98	— 1.144	0.093	5.54	0383	+ 0.002

Per le funzioni $\varphi'_1(k)$ e $\varphi'_2(k)$ si ricava:

$$\varphi'_1(k) = 0.426 \quad \varphi'_2(k) = 0.590$$

quindi, passando successivamente al calcolo dell'inclinazione i del piano dell'orbita e dei semiassi maggiori delle componenti più grande e più piccola si ha:

$$i = 87^\circ 25 \text{ inclinazione dell'orbita}$$

$$r'_1 = 0.3295 \text{ raggio della componente più grande}$$

$$r'_2 = 0.2214 \text{ raggio della componente più piccola}$$

per gli altri elementi si ottiene:

$$\overline{\rho}_1 = 0.030 \text{ densità superficiale della componente più grande}$$

$$\overline{\rho}_2 = 0.100 \text{ densità superficiale della componente più piccola}$$

$$r'_1 = 3.205 \text{ raggio della componente più grande in rapporto al raggio solare}$$

$$\overline{r}'_2 = 2.153 \text{ raggio della componente più piccola in rapporto al raggio solare.}$$

Questi quattro elementi sono stati ricavati supponendo le componenti di massa uguale a quella del sole

$$\frac{J_2}{J_1} = 12.4 \text{ intensità superficiale}$$

$$\frac{b'_1}{a'_1} = 0.872 \text{ rapporto tra i semiassi equatoriali}$$

$$\frac{c'_1}{a'_1} = 0.920 \text{ rapporto tra il semiasse polare ed il semiasse maggiore equatoriale}$$

$$L'_1 = 0.129 \text{ luce della più grande}$$

$$L'_1 = 0.881 \text{ luce della stella più piccola.}$$

Paragonando gli elementi da noi trovati con quelli dedotti da altri autori abbiamo:

TABELLA IV.

Elementi		Viola	Shapley	Baker	Dugan	
		ipotesi				
		uni- forme	oscu- rato	uni- forme	uni- forme	parzial- mente oscurato
Rapporto dei raggi	k	0.603	0.672	0.630	0.595	0.620
Raggio della stella più grande . .	r_1	0.264	0.329	0.324	0.320	0.322
Raggio della stella più piccola . .	r_2	0.159	0.221	0.205	0.190	0.200
Area massima oscurata	α_0	1.000	1.000	1.00	1.000	1.000
Luce della stella più grande . . .	L_1	0.125	0.129	0.110	0.125	0.162
Luce della stella più piccola . . .	L_2	0.875	0.881	0.890	0.875	0.838
Inclinazione del piano dell'orbita .	i	87°.7	87°.3	90°	90°	86°.4
Densità della stella più piccola . .	$\bar{\rho}_2$	0.270	0.100	0.185	0.249	0.214
Densità della stella più grande . .	$\bar{\rho}_1$	0.059	0.030	0.017	0.025	0.022
Intensità superficiale	$\left\{ \begin{matrix} J_2 \\ J_1 \end{matrix} \right\}$	21	12.4	20	19.8	13.5
Grandezza del sistema		6.67	6.67	6.78	6.90	6.87

Il precedente specchietto mostra che la maggior parte degli elementi da noi dedotti, concordano con la maggior parte di quelli ricavati dagli astronomi Shapley, Baker e Dugan. Per quest'ultimo poi, si verifica una marcata coincidenza nei risultati finali; mentre le soluzioni date dallo Shapley e dal Baker mostrano per alcuni elementi una lieve divergenza, che dipende dal numero di osservazioni e dal maggiore o minor grado di precisione della curva di luce adottata. Così il fatto che essi trovano per l'inclinazione del piano dell'orbita il valore 90° , facilmente è in relazione con qualche ripiego adottato per rendere reale la soluzione. Infatti, esaminando la soluzione data dallo Shapley a p. 36 della sua opera « *Orbits of eclipsing binaries* » troviamo: $\cot^2 i = -0.0005$. L'autore, a dimostrazione di quanto sopra, riferisce: « to obtain a real solution we must set $\varphi_2(k) = 0.600$ which gives $k = 0.631$ and $i = 90^\circ$ ». Invece, le osservazioni fotometriche raccolte con somma diligenza dal prof. Bemporad all'Osservatorio di Capodimonte hanno dato soluzioni reali e risultati più attendibili.

Astronomia. — *Sul sistema 61 Cygni.* Nota I di G. L. ANDRISSI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. ARMELLINI.

1. — Tra le stelle doppie il cui movimento relativo delle componenti appare controverso, e quindi incerto il loro legame fisico, è la 61 Cygni. Infatti il Flammarion ⁽²⁾ dallo studio delle osservazioni compiute sino al 1878 deduce un moto rettilineo per le componenti e tale lo confermano il Secchi ⁽³⁾ ed il Burnham ⁽⁴⁾; mentre lo Schlesinger ⁽⁵⁾, prendendo in esame gli scostamenti, dimostra invece l'esistenza del moto orbitale.

Essendo nostra intenzione ritornare a studiare la questione ed eventualmente procedere al calcolo di una nuova orbita ⁽⁶⁾, abbiamo ripreso in esame tutte le osservazioni sino ad oggi compiute. L'elenco che ne abbiamo ricavato è desunto: in parte dall'opere citate del Flammarion e del Burnham, nel rimanente dalle pubblicazioni della Biblioteca del R. Osservatorio Astronomico del Campidoglio e della R. Accademia dei Lincei. Per quanto fosse nostra intenzione darne un elenco completo, particolarmente dal 1900 in poi, può darsi che non tutte le osservazioni siano riassunte potendosi esse, forse, trovarsi in altre opere non esistenti in dette Biblioteche.

Innanzi di procedere al calcolo degli elementi dell'orbita abbiamo ritenuto opportuno servirci del metodo grafico riportando le osservazioni trovate onde stabilire immediatamente la natura del moto delle componenti. Dalla figura qui unita, nella quale sono riportati i risultati di circa trecento osservazioni, appare evidente il moto orbitale, particolarmente dagli ultimi anni dove più accentuata è la curvatura. Invece meno evidente è la curvatura nel periodo che va dal 1821 sino al 1878, periodo preso in esame dal Flammarion. E ciò spiega il suo affrettato giudizio sul quale si basarono gran parte degli autori successivi.

2. — Come il lettore vedrà, il risultato ottenuto, da questo primo studio, appare in pieno accordo con le conclusioni dello Schlesinger confermando quindi il legame fisico fra le due componenti della 61 Cygni.

In note successive renderemo conto dello studio completo di questo sistema, mentre per ora esponiamo i risultati delle osservazioni, dopo aver

(1) Nella seduta del 18 maggio 1930.

(2) C. FLAMMARION, *Catalogue des Etoiles doubles et multiples*. Parigi «Comptes Rendus de l'Academie des Sciences», 18 gennaio 1875.

(3) A. SECCHI, *Le stelle*. Milano, 1877, p. 211.

(4) S. W. BURNHAM, *A General Catalogue of Double stars*. Washington, 1906.

(5) F. SCHLESINGER, *On the Relative Motions in 61 Cygni and similar stars*. Public. of the «Allegheny Observatory», vol. II, n. 2, p. 13.

(6) L'orbita della 61 Cygni fu studiata nel 1885 da C. F. W. PETERS, vedi *Bestimmung der Bahn des Doppelsterns 61 Cygni*. «Astr. Nachr.», N. 2708-09. Nel 1914 W. RABE annunciava in «Astr. Nachr.», N. 4709, essere sua intenzione studiare detta orbita ma lo studio, se compiuto, non ci risulta pubblicato.

ridotto gli angoli di posizione all'epoca intermedia 1875.0, nella seguente tabella indicando insieme le fonti da cui sono tratti ⁽¹⁾.



(1) Per le osservazioni desunte dal Flammarion e dal Burnham - indicate rispettivamente con uno e due asterischi - rimandiamo alle opere citate; per le rimanenti riportiamo qui avanti l'abbreviazione usata:

G. CELORIA (Ce), *Misura di stelle doppie calcolate da L. Gabba*. «R. Osservatorio Astronomico di Brera», Milano, LIX, 1923; JEDRZEJEWICZ (Je.), «Astr. Nach.», 3802; G. V. SCHIAPARELLI (Sp.), *Misure di stelle doppie*, Milano, 1909; L. NIESTEN (Nie.), «Annales de l'Observatoire Roy. de Belgique», 1904; SERAPHINOW (Sw.), «Bull. Obs. Central de Russie», Poulkovo, vol. VII, 1916; HUSSEY (Hu.), «Lick Obs. Bull.», 206, 1911; F. PAVEL (Pa.), «Astr. Nach.», 4744; Greenwich Obs. (Gree.) *Phot. Aufn.*; H. THIELE (Th.), *Über Messungen von Doppelsternen ecc.* «Astr. Nach.», 3837; G. C. COMSTOCK (Ck.), «Publ. Wasburn Obs.», vol. XI, parte I; LOHSE (Lh.), «Publ. Potsdam», 1909; LAU (Lau), «Astr. Nach.», 4221, 4232, 4279; HERTZSPRUNG (Hg.), «Astr. Nach.», 4299; ROE (Roe), «Astr. Nach.», 4259; H. LAU und C. LUPLAU JANSSEN (Luj.), «Astr. Nach.», 4315, 4735, 5471; BARNARD (Ba.), vedi SCHLESINGER, op. cit.; G. VAN BIESBROCK (Bk.), «Annales Obs. Roy. Belgique», t. XIII-XIV; FIL FOX (Ff.), *Measures Double Stars*. «Ann. of the Dearbon Ob.», vol. I, 1915; DOBERCK (Dk.), «Astr. Nach.», 4480, 4572, 5058, 5088, 5357, 5471; VÖÖTE (Vt.) «Astr. Nach.», 4486; ANDERSEN (An.), «Astr. Nach.», 4735, 4747; W. S. FRANCK (Fk.), «Montley Notice», lib. LXXIV; ERNST (Et.), *Badischen Stern. Heidelberg*; W. RABE (Ra) «Veröffentlichungen der Sternw. zu Breslau», N. 3, 1925; LEAVENWORTH (Le.), «Astronomical Journal», 678, 1915; E. HERTZSPRUNG (Hg.), *Photographische Messungen von Doppelsternen von 1914 bis 1919*. «Pub. Obs. Potsdam», vol. 24, 1921; J. PARASKEVOPULAS (Pa.), «Ann. Obs. Athene», vol. VIII, 1926; W. M. O. BEAL (Be.), «Astr. Jour.», 715; F. L. BROWN (Bn.), «Astr. Jour.», 878; VAN STEENWIJK (Sk.), «Montley Notice», LXXX; LEONARD (Ld.), *Osservazioni di Mount Wilson*, riportate da L. in «Lick. Obs. Bul.», 343; LEAVENWORTH (Le.), «Astr. Journ.», 787; E. R. PHILIPS, «Mon. Not.», LXXXI; G. ARMELLINI (Ar.), «Rend. Acc. Lincei», 1922; G. ABETTI (Ab.), «Memorie Oss. Arcetri», N. 39, 1922; E. PRZYBYLLOK (Py.), *Mikrometrische Messungen von Doppelsternen*; P. LABITZE (Lz.) «Astr. Nach.», 5364; PEEK (Peek), «Mont. Not.», LXXXVII, 171; SHAJN (Sh.), «Astr. Nach.», 5516; N. COMMENDATOFF (Cof.) *Mesures d'étoiles doubles ecc.* Poulkovo; MANSON, «Astr. Journ.», 910.

TABELLA I.

N.º	Data	Angolo di posizione	Distanza	n	Autorità	N.º	Data	Angolo di posizione	Distanza	n	Autorità
1	1753	34°.9	19".63	—	Bd.*	36	1837.63	95°.0	16".27	—	Ek.*
2	1778	50.4	15.24	—	C. M.*	37	37.65	94.9	15.90	—	P. S.*
3	1781	53.3	16.33	—	H.*	38	37.71	95.2	15.91	—	Ga.*
4	1793	52.4	14.87	—	Ll.*	39	38.73	95.9	16.70	—	Ga.*
5	1800	68.9	18.20	—	Pi*	40	38.88	95.1	16.20	10	Bs.*
6	1805	78.2	14.50	—	Pi*	41	39.69	96.1	16.30	—	P. S.*
7	1812.30	78.8	16.74	—	Bs.*	42	39.75	95.9	16.53	—	Da.*
8	13.50	79.7	16.56	—	Ld.*	43	40.05	96.9	16.00	6	Kr.**
9	21.62	84.1	15.02	—	E.*	44	40.24	96.5	16.47	4	Da.**
10	22.90	84.4	15.42	—	J. H.*	45	40.73	97.0	16.40	—	Da.*
11	25.70	86.7	15.44	—	So.*	46	41.49	98.3	16.49	—	Md.*
12	28.52	89.1	15.43	—	J. H.*	47	41.81	97.4	16.10	6	Kr.**
13	28.72	89.2	15.31	—	Σ.*	48	41.87	97.7	16.55	—	Da.*
14	29.47	89.7	15.43	—	J. H.*	49	42.62	98.8	16.86	—	Md.*
15	30.56	90.6	15.61	—	J. H.*	50	43.53	98.8	16.67	3	O. Σ.**
16	30.66	90.1	15.70	—	Da.*	51	43.64	99.3	16.51	5	Md.**
17	30.68	90.4	15.47	3	Σ.**	52	43.76	98.7	16.78	—	Md.*
18	30.81	90.3	15.60	—	P. S.*	53	43.98	99.5	—	—	Da.*
19	30.84	90.2	15.63	—	Σ.*	54	44.48	100.0	16.35	—	Md.*
20	30.84	90.1	15.64	9	Bs.**	55	45.87	99.2	16.02	—	Ja.*
21	31.70	90.9	15.63	—	Σ.*	56	46.70	99.6	17.12	—	Ja.*
22	31.74	90.5	15.45	—	J. H.*	57	46.87	100.9	17.07	2	Da.**
23	32.09	91.3	15.74	3	Σ.**	58	47.46	100.8	17.02	3	O. Σ.**
24	32.31	—	16.82	—	Cp.*	59	47.54	101.0	17.85	—	Mi.*
25	32.65	92.1	15.40	—	P. S.*	60	47.96	100.7	16.81	—	Ja.*
26	32.77	91.8	15.79	—	Σ.*	61	48.07	99.7	16.40	—	P. S.*
27	33.80	92.3	15.88	—	Da.*	62	48.30	101.8	17.00	—	Da.*
28	34.62	93.1	16.12	—	Da.*	63	49.59	102.8	17.02	4	Da.**
29	34.76	93.0	16.20	—	P. S.*	64	50.30	102.3	17.18	2	O. Σ.**
30	35.54	93.9	15.59	—	Md.*	65	50.88	103.8	17.04	—	Da.*
31	35.59	93.4	15.80	—	P. S.*	66	50.90	102.8	16.96	—	Ft.*
32	35.65	93.6	15.97	6	Σ.**	67	50.94	102.9	16.80	4	Md.**
33	36.57	94.2	16.08	—	Σ.*	68	50.95	103.0	16.80	—	Md.*
34	37.06	94.6	16.01	7	Σ.**	69	51.65	102.7	16.87	—	Mi.*
35	37.56	94.7	16.20	—	Da.*	70	51.81	103.6	17.34	3	O. Σ.**

Segue: TABELLA I.

N.º	Data	Angolo di posizione	Distanza	n	Autorità	N.º	Data	Angolo di posizione	Distanza	n	Autorità
71	1852.41	104°.0	16".92	20	Md.**	106	1858 27	107°.2	17".90	—	Ja.*
72	52.44	104.0	16.83	—	Md.*	107	58.54	107.8	17.78	4	Δ.**
73	52.72	104.4	17.46	2	O. Σ.**	108	59.54	107.5	17.56	—	Md.*
74	52.72	103.8	17.20	—	Ft.*	109	59.89	108.5	18.20	—	Po.*
75	52.76	104.2	17.28	—	Wr.*	110	59.91	108.2	17.88	—	Wr.*
76	52.93	103.8	17.17	—	Md.*	111	60.80	108.7	18.23	3	O. Σ.**
77	53.13	104.3	16.90	—	Md.*	112	61.03	108.6	17.93	—	Md.*
78	53.26	104.3	17.25	—	Da.*	113	61.73	109.5	18.12	7	Md.**
79	53.80	103.6	17.00	—	P. S.*	114	61.83	108.7	17.89	5	Md.**
80	53.85	104.6	17.24	2	Pe.**	115	62.57	108.3	17.66	—	Md.*
81	53.89	104.6	17.68	—	Ja.*	116	62.83	109.7	18.38	5	Md.**
82	53.94	104.7	17.28	10	Md.**	117	62.93	109.4	18.23	—	Ba.*
83	54.25	105.1	17.57	2	O. Σ.**	118	62.97	109.4	18.36	12	Δ.**
84	54.28	104.6	17.24	—	Pe.*	119	65.15	110.7	18.54	18	Δ.**
85	54.55	104.9	17.63	5	Md.**	120	65.76	111.4	18.75	—	Ta.*
86	54.73	105.5	17.32	7	Δ.**	121	65.89	111.2	18.47	—	Kr.*
87	54.73	105.5	17.29	7	Da.**	122	66.72	111.7	18.76	—	Kn.*
88	54.83	105.3	17.45	—	Wr.*	123	66.74	112.8	18.84	—	Ta.*
89	54.98	105.6	17.29	—	Δ.*	124	66.84	111.8	18.81	—	Se.*
90	55.55	105.6	17.56	5	Se.**	125	67.16	111.8	18.72	16	Δ.**
91	55.84	106.0	17.39	2	Δ.**	126	67.89	112.1	18.49	4	Du.**
92	55.86	106.5	17.88	—	Po.*	127	68.54	112.5	18.81	4	O. Σ.**
93	56.12	108.1	17.06	—	Lu.*	128	68.60	112.3	18.62	6	Du.**
94	56.43	107.8	17.25	2	Lu.**	129	68.82	112.3	18.57	—	Du.*
95	56.58	106.4	17.49	5	Δ.**	130	69.28	112.9	18.90	12	Δ.**
96	56.62	107.1	17.79	4	Md.**	131	69.58	112.3	18.65	—	Md.*
97	56.63	105.1	17.89	3	Se.**	132	69.89	113.0	18.83	8	Du.**
98	56.67	107.4	17.70	—	Ft.*	133	70.49	112.4	19.27	—	Md.*
99	56.81	106.3	17.90	—	Ja.*	134	70.53	113.9	19.15	—	Gl.*
100	57.20	106.4	18.02	2	O. Σ.**	135	70.90	113.5	18.91	2	Du.**
101	57.56	106.8	17.48	—	Md.*	136	70.90	113.6	18.86	—	Du.*
102	57.59	107.7	17.62	—	Δ.*	137	71.07	113.9	19.18	14	Δ.**
103	57.61	107.1	17.77	3	Δ.**	138	71.50	114.1	19.27	—	Gl.*
104	57.63	106.9	17.93	9	Ja.**	139	71.60	113.4	19.20	—	Kn.*
105	57.82	107.1	18.00	—	Ja.*	140	72.72	114.6	19.16	—	Ws.*

Segue: TABELLA I.

N.º	Data	Angolo di posizione	Distanza	n	Autorità	N.º	Data	Angolo di posizione	Distanza	n	Autorità
141	1872.72	113°.6	18".93	—	Ta.*	176	1883.77	118°.9	20".58	3	Ha.**
142	72.78	114.1	19.77	—	Md.*	177	83.93	119.2	20.33	4	Sp.**
143	73.00	114.5	19.59	—	Kn.*	178	84.67	119.7	20.50	6	Ha.**
144	73.05	114.6	19.38	15	Δ.**	179	84.91	119.9	20.49	4	Sp.**
145	73.72	114.7	20.28	—	Ws.*	180	85.71	120.4	20.62	5	Ha.**
146	73.75	115.0	19.36	—	Gl.*	181	86.64	120.6	20.71	6	Ha.**
147	73.87	115.1	19.41	3	Du.**	182	86.79	120.5	20.68	2	H. Σ.**
148	74.74	116.1	19.42	2	O. Σ.**	183	86.90	120.1	20.64	4	Ce.
149	74.92	115.4	19.41	—	Gl.*	184	86.92	121.2	20.74	2	Eng.**
150	75.09	115.6	19.55	13	Δ.**	185	87.03	120.6	20.52	2	Sp.
151	75.51	115.0	19.53	—	Md.*	186	87.68	121.1	20.58	7	Sp.**
152	75.60	116.4	19.46	—	Gl.*	187	87.69	120.6	20.76	6	Ha.**
153	75.95	115.7	19.39	3	Du.**	188	87.84	120.7	20.87	—	Je.
154	76.60	116.1	19.72	—	Ws.*	189	87.92	120.6	21.00	5	Ce.
155	76.61	115.5	—	—	Dk.*	190	87.94	121.3	20.61	5	Sp.
156	76.70	116.0	19.63	4	Je.**	191	88.75	121.0	20.95	6	Ha.**
157	76.76	116.0	19.80	6	O. Σ.**	192	88.86	121.0	20.99	4	Ce.
158	77.17	116.4	19.76	13	Δ.**	193	88.91	121.5	20.74	8	Sp.
159	77.65	116.7	19.46	—	Dk.*	194	89.28	121.6	20.94	2	H. Σ.**
160	77.79	116.2	19.76	—	Fl.*	195	89.65	121.6	21.09	7	Ha.**
161	77.84	116.5	19.85	6	Je.**	196	89.79	121.4	20.93	10	Gia.**
162	78.13	117.0	19.89	4	O. Σ.**	197	89.86	121.9	20.92	6	Sp.
163	78.28	116.7	19.74	6	Dk.**	198	89.87	121.3	21.36	3	Ce.
164	78.45	116.7	19.71	4	Sp.**	199	90.79	122.0	21.06	6	Ha.**
165	78.58	117.1	19.97	5	Δ.**	200	90.87	122.0	21.15	4	β.**
166	79.71	117.7	19.98	6	Ha.**	201	90.93	122.1	21.11	1	Sp.
167	79.80	117.6	20.12	4	Je.**	202	90.95	121.6	21.19	6	Ce.
168	80.24	117.7	19.74	7	Franz.**	203	91.63	122.1	21.24	6	Ha.**
169	80.74	117.9	20.09	5	Ha.**	204	91.77	122.2	21.15	2	H. Σ.**
170	80.96	118.1	20.16	4	Je.**	205	91.94	122.1	21.29	3	Ce.
171	81.24	118.4	20.29	4	Je.**	206	91.96	122.8	21.03	3	Sp.
172	81.60	118.2	20.18	5	Ha.**	207	92.95	123.4	21.26	2	Sp.
173	82.65	119.2	20.24	3	O. Σ.**	208	93.28	122.9	21.22	6	Cohn.**
174	82.76	118.6	20.31	5	Ha.**	209	93.72	123.3	21.55	2	Nie.
175	83.64	119.0	20.39	5	Pe.**	210	93.96	123.2	21.38	2	Sp.

Segue: TABELLA I.

N.º	Data	Angolo di posizione	Distanza	n	Autorità	N.º	Data	Angolo di posizione	Distanza	n	Autorità
211	1894.58	123°.7	21".51	7	Cho.**	246	1909.60	128°.6	23".01	3	Bk.
212	94.85	123.0	21.29	2	Maw.**	247	09.66	129.0	22.92	—	Gree.
213	95.19	123.5	21.50	2	Sw.	248	10.41	128.0	23.22	4	F. F.
214	95.74	124.0	21.57	3	Cm.**	249	10.70	129.0	23.05	3	Dk.
215	95.77	123.7	21.66	2	Collins**	250	10.95	129.0	23.11	3	Vt.
216	95.88	123.9	21.47	2	Sp.	251	11.51	129.1	23.22	4	Bk.
217	96.56	124.3	22.13	2	Hu.	252	11.82	129.2	23.23	11	Dk.
218	97.84	124.5	21.91	1	Sp.	253	13.39	129.7	23.40	—	Et.
219	97.88	124.6	22.05	2	Ce.	254	13.66	130.1	23.44	3	Bk.
220	98.96	125.2	22.00	5	Ce.	255	13.66	130.2	23.36	4	An.
221	99.64	126.2	—	8	Pa.	256	13.66	130.5	23.37	3	Luj.
222	99.79	126.1	21.56	2	Cn.**	257	13.73	130.0	23.32	9	An.
223	99.79	125.5	21.92	—	Gree.	258	13.84	130.4	23.36	2	Ra.
224	1900.53	126.5	21.85	3	Lh.**	259	13.85	129.1	23.60	1	Fk.
225	01.71	127.7	21.18	1	Hu.	260	13.86	129.7	23.47	1	Fk.
226	02.57	124.9	22.38	3	Th.	261	14.47	130.3	23.30	10	Ra.
227	02.69	125.8	22.22	3	Ck.	262	14.73	130.2	23.41	17	Dk.
228	02.87	126.3	22.20	2	Dk.**	263	14.96	129.7	23.57	2	Le.
229	02.98	126.5	22.31	6	Ce.	264	15.13	130.4	23.48	—	Hg.
230	03.72	126.5	22.32	10	Ce.	265	15.40	130.5	23.49	10	Ra.
231	03.73	126.9	22.52	3	Bk.**	266	15.50	130.5	23.51	10	Ra.
232	05.41	127.3	22.50	8	B.**	267	15.59	130.0	23.52	2	Pa.
233	05.58	126.9	21.87	2	Lh.	268	15.79	130.4	23.73	6	Bl.
234	06.92	127.7	22.58	6	Lau.	269	15.80	130.6	23.54	11	Ra.
235	06.93	127.5	22.63	1	Lau.	270	16.08	130.8	23.58	6	Ra.
236	07.59	127.9	22.98	2	Lau.	271	16.45	130.8	23.87	20	Dk.
237	07.59	128.4	22.92	—	Ck.	272	16.45	130.8	23.60	10	Ra.
238	07.61	128.3	22.71	1	Lau.	273	16.46	131.2	23.55	3	Pe.
239	07.67	128.2	22.63	4	Hg.	274	16.58	130.8	23.61	10	Ra.
240	07.85	128.5	22.75	3	Ba.	275	16.59	130.8	23.83	3	Bn.
241	07.85	128.2	22.85	3	Bk.	276	16.79	131.0	23.57	5	Ra.
242	07.85	128.0	23.31	1	Rol.	277	17.78	131.2	23.74	—	Hg.
243	08.63	127.9	22.93	4	Las.	278	18.60	131.2	24.06	3	Pa.
244	08.64	128.2	22.97	7	Lau.	279	18.64	131.8	23.57	15	Dk.
245	09.58	129.0	23.04	12	Ba.	280	18.69	132.0	23.95	2	Sk.

Segue: TABELLA I.

N.°	Data	Angolo di posizione	Distanza	n	Autorità	N.°	Data	Angolo di posizione	Distanza	n	Autorità
281	1918.69	131° 9	23'' .95	—	Ld.	290	1922.84	132° .7	24'' .36	5	Peek
282	20 61	132 .0	23 .99	2	Dk.	291	23.67	133 .5	24 .26	3	Py.
283	20.71	132 .4	24 .11	5	Ph.	292	23.78	133 .8	24 .12	—	Sh.
284	20.87	131 .4	24 .19	3	Le.	293	24.61	133 .7	24 .25	3	Py.
285	21.68	132 .3	24 .03	3	Ab.	294	24.75	133 .4	24 .34	16	Dk.
286	21.68	132 .5	24 .18	12	Py.	295	24.73	133 .7	24 .63	14	Dk.
287	21.76	132 .4	24 .21	6	Lz.	296	26.66	134 .0	24 .66	3	Cof.
288	21.97	131 .1	—	3	Ar.	297	26.83	134 .4	24 .91	3	Man.
289	22.61	132 .8	24 .37	3	Lz.	—	—	—	—	—	—

Chimica. — *Azione del bromuro di etilmagnesio e degli ossidanti sui polisolfuri dietilici*⁽¹⁾. Nota di A. BARONI, presentata⁽²⁾ dal Socio G. BRUNI.

In due Note precedenti⁽³⁾ furono studiati, in collaborazione col prof. G. R. Levi, i polisolfuri dietilici: vennero allora poste in discussione le formule più probabili per questi composti, discussione complicata dalla dimostrata esistenza di due pentasolfuri isomeri a punto di ebollizione rispettivamente 119° e 130°. Allo scopo di convalidare le nostre vedute con dati sperimentali, nella presente Nota viene studiata l'azione dei magnesioalchili e degli ossidanti sui diversi polisolfuri dietilici.

L'azione dello zolfo sui magnesioalchili, che è stata trovata per i primi da Wuyts e Cosyns⁽⁴⁾, è molto complessa; essa conduce principalmente alla formazione di mercaptani, ma per effetto di reazioni secondarie si ottengono anche di- e trisolfuri. Non era invece nota a tutt'oggi l'azione dei polisolfuri

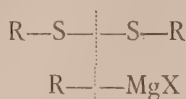
(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale e Chimica Fisica della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 18 maggio 1930.

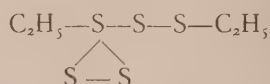
(3) Questi « Rendiconti », fasc. 9, 1929, pp. 772-778; fasc. 10, 1929, pp. 903-906.

(4) « Bull. Soc. Chim. », 1903, t. 29, p. 689.

furi superiori sui magnesioalchili; era nota solo l'azione dei magnesioalchili sui disolfuri⁽¹⁾ che avviene nel modo seguente:



con formazione di solfuro e mercaptano. Mi è sembrato interessante intraprendere tale studio in quanto i magnesioalchili potevano agire sui polisolfuri provocando una graduale demolizione della molecola con eliminazione di zolfo che mi permettesse di trarre qualche conclusione sulla loro costituzione. I risultati non furono però quelli che io speravo in quanto i magnesioalchili provocano la completa demolizione della molecola dei diversi polisolfuri con formazione di monosolfuro e di mercaptano in quantità crescente rispetto al solfuro con l'aumentare del numero di atomi di zolfo nella molecola: non è quindi possibile trarre dalla loro azione alcuna conferma sperimentale delle formule di struttura attribuite alle diverse catene a proposito delle quali debbo far notare che le due formule dei pentasolfuri a p. 775 (del lavoro sopra citato), devono essere rispettivamente:



Il mancato spostamento di una di esse risulta subito ad occhio come errore di stampa, infatti altrimenti i due prodotti sarebbero identici.

Più interessante è risultata invece l'azione degli ossidanti sui diversi polisolfuri. L'azione dell'acido nitrico diluito sul mono- e disolfuro dietilico era già stata studiata da Saizew⁽²⁾ e da Saizew e Lukaschewitsch⁽³⁾ i quali avevano così ottenuto il mono- e il disolfossido; facendo agire l'acido nitrico diluito sul trisolfuro io ho potuto ottenere anche il trisolfossido, liquido di odore sgradevole che bolle a 154°—155° a 20 mm. con forte decomposizione. Per azione dell'acido nitrico diluito sul tetrasolfuro e sui due pentasolfuri isomeri ottenni solo trisolfossido.

Per azione di acido nitrico fumante, permanganato di potassio e acqua ossigenata sul di- e trisolfuro dietilico ho potuto ottenere il di- e il trisolfone non ancora noti. Il monosolfone era già stato ottenuto da altri autori⁽⁴⁾. Il disolfone si ottiene sotto forma di piccoli cristalli giallastri che fondono a 50°; il trisolfone pure in piccoli cristalli che fondono a 32°. Questi composti vennero purificati ricristallizzandoli dall'etere; sono solubili

(1) « Bull. Soc. Chim. », 1910, p. 288.

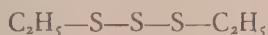
(2) « Liebigs Annalen », 144, p. 154.

(3) « Zeitschr. für Chemie », 1868, p. 641.

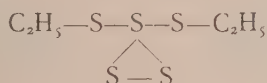
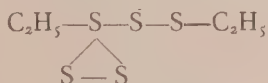
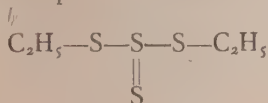
(4) BECKMANN, « J. pr. », (2), 17, p. 452; PUMMERER, « Berichte », 43, 1407.

anche in alcool e in benzolo bollente e non sono ridotti dallo zinco ed acido solforico. I rendimenti della loro preparazione sono molto bassi.

In relazione ai risultati sperimentali sotto riportati e con riferimento alla discussione sulla struttura di questi composti fatta a suo tempo, tengo a far rilevare come gli attuali miei risultati facciano pensare verosimili le formule tipo III e cioè l'esistenza di una catena:



dalla quale poi deriverebbero il tetra e i due penta:



PARTE SPERIMENTALE.

Preparazione del dietiltrisolfossido ($\text{C}_2\text{H}_5\text{—SO—SO—SO—C}_2\text{H}_5$). — Questo composto venne da me ottenuto per azione dell'acido nitrico ($D = 1.2$) sul trisolfuro dietilico. Si fa gocciolare lentamente alla temperatura ordinaria l'acido nitrico in difetto nel pallone contenente il trisolfuro e si distilla poi, a reazione ultimata, il prodotto a pressione ridotta (20 mm.). A 85° distilla il trisolfuro inalterato e a $154^\circ\text{—}155^\circ$ passa un liquido denso di odore cattivo che si decompone fortemente durante la distillazione. Questo liquido è facilmente solubile in acqua, alcool ed etere e viene ridotto dallo zinco e dagli acidi diluiti a mercaptano. L'analisi di questo prodotto venne eseguita dosando lo zolfo con micro Carius come solfato di bario; i risultati analitici sono i seguenti:

sostanza pesata	BaSO_4 pesato	S % teorico	S % trovato
0.005832	0.0201	47.56	47.45
0.007228	0.0249	47.56	47.53

Del dietiltrisolfossido ho determinato il peso specifico col metodo del picnometro ottenendo il valore $D_4^{20} = 1.2844$.

Preparazione del dietildisolfone ($\text{C}_2\text{H}_5\text{—SO}_2\text{—SO}_2\text{—C}_2\text{H}_5$). — Il dietildisolfone si può ottenere per azione dell'acido nitrico fumante, o di una soluzione acquosa di permanganato di potassio od anche per azione dell'acqua ossigenata sul disolfuro dietilico. Nel primo metodo si introduce a freddo il disolfuro in piccolo eccesso nell'acido nitrico fumante: si ha una reazione

molto violenta ed abbondante sviluppo di vapori rossi. Quando tutto il disolfuro è stato aggiunto si lascia riposare il liquido qualche giorno: da esso si separano dei cristallini che vengono filtrati e ricristallizzati dall'etere. Il loro punto di fusione è 50°.

Il dietildisolfone si può ottenere anche introducendo in una soluzione acquosa di permanganato di potassio (1:30) una quantità di disolfuro tale che per agitazione sparisca il colore rosso; si aggiunge allora un eccesso di permanganato, si riscalda a bagnomaria, si filtra l'ossido di manganese formatosi e si evapora poi il filtrato a piccolo volume. Al residuo si aggiunge alcool a 95° Bè e si evapora lentamente a bagnomaria la soluzione alcolica: da essa si separano dei piccoli cristalli di dietildisolfone.

Con l'acqua ossigenata il dietildisolfone si forma solo se si permette il riscaldamento della massa per effetto del calore di reazione; se la si raffredda si ottiene solo il solfossido. Si aggiunge al disolfuro dietilico sciolto in acido acetico glaciale, la quantità calcolata di acqua ossigenata: si ha un forte riscaldamento e la miscela viene lasciata a sè parecchi giorni. Distillandola poi a 26 mm., distilla il solfossido (p. e. 26.128°) e rimane il solfone che si ricristallizza dall'etere.

L'analisi del dietildisolfone venne fatta dosando lo zolfo con micro Carius come solfato di bario; i risultati analitici sono i seguenti:

sostanza pesata	BaSO ₄ pesato	S % teorico	S % trovato
0.007631	0.0189	34.45	34.20
0.005482	0.0137	34.45	34.32

Il peso specifico del dietildisolfone determinato col metodo del picnometro è $D_4^{20} = 1.3035$.

Preparazione del dietiltrisolfone (C₂H₅—SO₂—SO₂—SO₂—C₂H₅).— Questo composto si forma con gli stessi metodi indicati per il disolfone. Si presenta sotto forma di cristalli che fondono a 32° e sono solubili in alcool ed in etere, insolubili in acqua. Essi vennero analizzati dosando lo zolfo come BaSO₄; i risultati analitici sono i seguenti:

sostanza pesata	BaSO ₄ pesato	S % teorico	S % trovato
0.004080	0.0114	38.44	38.38
0.006832	0.0190	38.44	38.20

Il peso specifico del dietiltrisolfone determinato col metodo del picnometro è $D_4^{20} = 1.5048$.

RIASSUMENDO :

a) Viene studiata l'azione del bromuro di etilmagnesio sui polisolfuri dietilici che conduce alla completa demolizione dei diversi polisolfuri con formazione di solfuro dietilico e di mercaptano.

b) Vengono preparati il dietiltrisolfossido, il dietildisolfone e il dietiltrisolfone (non ancora noti), il primo liquido a punto di ebollizione 154° a 20 mm. e gli altri due solidi a punto di fusione rispettivamente 50° e 32° e ne vengono determinati i pesi specifici a 20°:

$(C_2H_5)_2SO-SO-SO$	$D_4^{20} = 1.2844$
$(C_2H_5)_2SO_2-SO_2$	» = 1.3035
$(C_2H_5)_2SO_2-SO_2-SO_2$	» = 1.5048

c) Vengono messi in relazione questi risultati sperimentali con le diverse formule a suo tempo proposte per i polisolfuri alchilici.

Zoologia. — *La distribuzione del pigmento negli strati del bozzolo degli incroci reciproci (F_1) tra due razze di bachi da seta, Oro cinese e Giallo Indigeno.* Nota di C. JUCCI presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. F. RAFFAELE.

In una precedente Nota⁽²⁾, assodato che ambedue le razze di bachi da seta, Oro e Fossombrone, posseggono la « capacità di migrazione del pigmento dal sangue alla seta », ma che in esse la capacità di migrazione è caratteristicamente diversa — prima della maturazione (salita al bosco) nell'Oro, dopo nel Fossombrone — mi domandavo: « Si erediterà anche la “ precocità di migrazione ” come carattere mendeliano? »⁽³⁾. La capacità di migrazione è dominante sull'assenza della capacità: sarà anche uno dei due “ tempi di migrazione ” dominante sull'altro nel prodotto dell'incrocio, o si avrà nella F_1 un carattere intermedio? E si avrà nella F_2 la disgiunzione dei caratteri?».

Mi metteranno in grado, spero, di rispondere pienamente a queste domande le esperienze che ho già intrapreso allevando, in questa primavera

(1) Nella seduta del 18 maggio 1930.

(2) *Sui pigmenti del sangue, del bozzolo e delle uova nei bachi da seta* (B. M.) « Rendiconti R. Accad. Naz. Lincei », vol. XI, ser. 6°, 1° sem. fasc. I, gennaio 1930.

(3) Come tale si eredita, secondo la mia interpretazione dei risultati di Uda, la « capacità di migrazione ».

1930, la F_1 dei due incroci reciproci ♀ Oro ♂ Giallo⁽¹⁾ e ♀ Giallo ♂ Oro.

Ma posso già fin d'ora affermare, credo, in base all'esame di alcuni campioni di bozzoli dei due incroci reciproci⁽²⁾ che *nella F_1 la precocità di migrazione dei pigmenti dal sangue alla seta è intermedia rispetto a quella delle razze parentali*. Deduco questo dall'esame della distribuzione del pigmento nei vari strati del bozzolo, prendendo detta distribuzione ad indice della precocità di migrazione.

Mentre nella razza cinese il bozzolo è giallo oro negli strati esterni e va man mano impallidendo sinchè la fodera interna è proprio bianca, nella razza indigena lo strato esterno è incolore o quasi e il colore va accendendosi quanto più ci si addentra nello spessore della corteccia serica, smorzandosi poi rapidamente negli strati più interni.

Questa diversità di distribuzione dei pigmenti dipende proprio dalla diversa precocità di migrazione, come dimostra l'esame delle variazioni di colorazione del sangue nel periodo dalla 4^a muta all'incrisalidamento.

Nell'Oro, le ghiandole della seta assorbono rapidamente i pigmenti dal sangue negli ultimi giorni della 5^a età, sicchè il sangue è già scolorato nei bachi maturi e non v'è più pigmento che possa passare a colorare la quantità notevole di seta che verrà secreta nel periodo stesso della maturazione e nel susseguente della tessitura, dalla salita al bosco all'incrisalidamento.

Nel Fossombrone, invece, le ghiandole della seta cominciano ad assorbire intensamente i pigmenti dal sangue solo dopo la maturazione, sicchè i primi strati di seta sono pressochè incolore e poi sempre più colorati. Che il colore vada smorzandosi negli ultimi strati, riducendosi ad un minimo nella fodera interna, deve dipendere da un affievolirsi della capacità dei seritteri di assorbire i pigmenti, più che da un esaurimento del contenuto in pigmento del sangue, che rimane nelle crisalidi dei Fossombrone notevolmente più colorato che non nelle crisalidi degli Oro (il che rende possibile, pare, la deposizione di uova più vivacemente colorate nella razza indigena in confronto alla Chinesa).

Ora, nei bozzoli degli incroci, la distribuzione dei pigmenti nei vari strati del bozzolo è intermedia rispetto a quella caratteristica delle due razze parentali. Il colore esterno del bozzolo è di un giallo cromo tendente al dorato, evidentemente intermedio tra il colore giallo oro acceso della razza cinese ed il color giallo carnicino della indigena.

Più istruttivo ancora è l'esame comparativo dei vari strati — quattro o cinque — nei quali è possibile sfogliare la corteccia serica dei bozzoli. Perchè il colore esterno del bozzolo è qualcosa di composto che dipende anche

(1) Una razza gialla indigena che, se non è la Fossombrone tipica, certo si avvicina molto ad essa: e, ad ogni modo, non ne differisce sensibilmente per i caratteri del bozzolo.

(2) Bozzoli gentilmente inviati dalla ditta « Luciani » di Ascoli Piceno.

molto dal colore degli strati più interni. Così il colore giallo carnicino delle razze giallo-indigene, come la Fossombrone, è dato dal trasparire degli strati gialli intensamente dorati attraverso la sovrastante corteccia bianca appena soffusa di giallo.

Basta questa considerazione a mettere in evidenza la necessità di una revisione critica del materiale accumulato da tanti Autori sull'eredità del colore dei bozzoli. Così il Toyama distingue, in ordine di dominanza, il giallo, il carneo, il giallo verdognolo, il bianco, e nota, nelle sue esperienze d'incrocio, eccezioni alle proporzioni mendeliane e talvolta fusioni di caratteri.

Il Kellog, avendo studiato per 7 anni l'eredità nei bachi, trova che, mentre i caratteri larvali (macchie, disegni) si ereditano regolarmente secondo le leggi di Mendel, invece il comportamento ereditario del colore dei bozzoli è irregolare, *erratic*, sì da dover ammettere l'esistenza di *strain and individual idiosyncrasies*. Egli incontra, ad ogni piè sospinto, inversioni di dominanza, scissioni di colore già nella F_1 , proporzioni irregolari nella F_2 , e, oltre a questo, una costante tendenza del colore « salmone » a risolversi in una serie di colori, che vanno dal salmone pallidissimo al giallo oro, ed una influenza del bianco, nel senso di rendere il « salmone » estremamente pallido, tendendo dunque ad una fusione più che ad una scissione netta.

Evidentemente siamo di fronte a caratteri molto complessi, che dipendono da più fattori ereditari. In questo caso la molteplicità dei fattori non è una ipotesi comoda (troppo comoda veramente, perchè può servire a spiegare, o meglio a parafrasare, qualunque tipo di comportamento ereditario complesso) ma è un fatto indiscutibile, che lo studio dei rapporti tra i pigmenti del sangue e del bozzolo mette in piena luce.

Ancora: mentre il color bianco delle razze cinesi e giapponesi è recessivo rispetto al giallo, il color bianco di razze europee e della razza turca Bagdad è dominante. Le ricerche di molti Autori concordano su questo punto, ma non ci permettono di approfondire il fenomeno. Possiede la Bagdad un fattore che impedisce la formazione (probabilmente per passaggio dalla foglia) dei pigmenti gialli nel sangue? o un fattore che impedisce la migrazione del pigmento dal sangue alla seta? Néanche questo possiamo dire, perchè i ricercatori non hanno pensato ad osservare il colore del sangue negli ibridi. Spero di poter un poco approfondire il meccanismo dei fenomeni eseguendo, questa primavera, incroci di varie razze gialle con la Bagdad ⁽¹⁾.

Ma torniamo ai bozzoli degli incroci tra le due razze Oro Chinesa e Giallo indigeno. Io trovo nei due reciproci una sensibile differenza, nel senso che l'incrocio a ♀ Oro presenta, rispetto al reciproco, lo strato esterno del bozzolo un pò più colorato, un pò più intensa la colorazione degli strati

(1) Ho potuto importare una razza bianca, che credo corrispondente alla Bagdad, da Salonico grazie alla cortesia del Direttore della ΤΙΟΙ ΜΙΧΡΑΝ ΧΑΝΤΖΙΑΝ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ ed alla premura del Tenente Medico della R. Nave « C. Colombo », Luigi Campanelli; mi è grato esprimere loro la mia riconoscenza.

intermedi più pigmentati, e più spesso e più nettamente bianca la fodera interna.

Insomma, ambedue gli incroci presentano carattere intermedio fra quelli

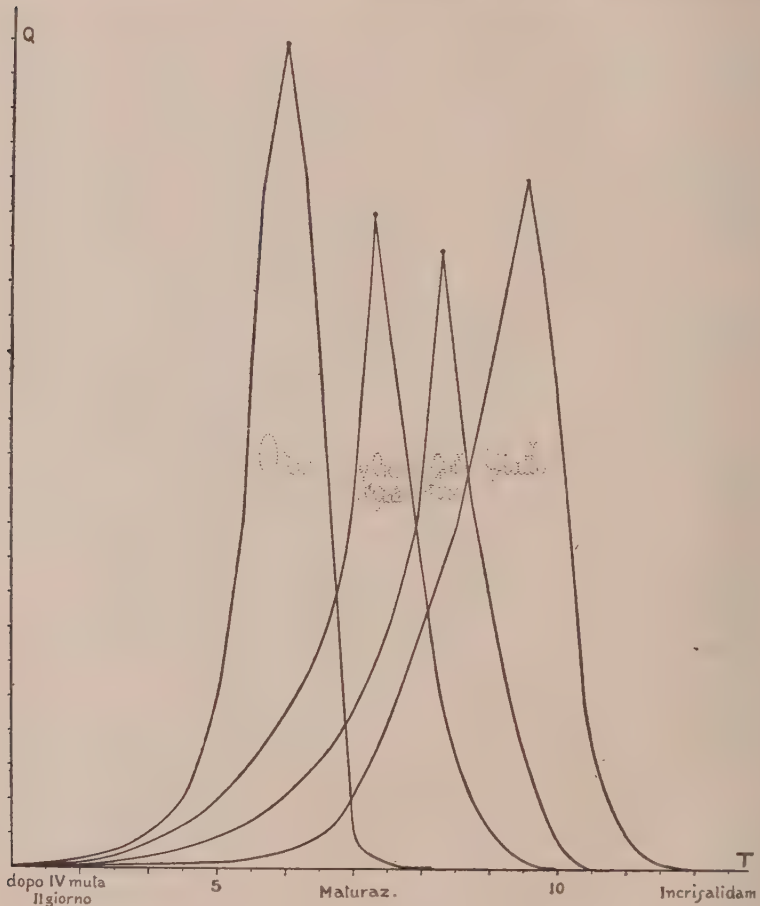


Diagramma I. — L'andamento della migrazione del pigmento dal sangue alla seta nelle due razze di bachi Oro e Giallo e nei loro incroci reciproci (F_1). Sulle ascisse il tempo, dal 2° giorno della 5ª età (dopo la 4ª muta) alla maturazione e all'incrisalidamento, sulle ordinate la velocità di migrazione del pigmento.

parentali, ma ciascuno si presenta un pochino ravvicinato al carattere della rispettiva razza materna.

Non mi permetto di considerare questa osservazione come certa e definitiva, essendo stato molto piccolo il numero dei bozzoli che ho potuto studiare. Mi riservo di ripetere le determinazioni su un gran numero di bozzoli dei miei allevamenti, quest'anno. Oltre che sui bozzoli studierò la questione

sul sangue dei bachi dei due incroci reciproci, cercando di determinare la curva di migrazione dei pigmenti dal sangue alla seta nel periodo che va dalla 4^o muta all'incrisolidamento.

Per le due razze parentali Oro e Giallo indigeno (Fossombrone) nella scorsa primavera avevo prelevati i campioni di sangue lungo tutto il periodo predetto ma non ho avuto tempo ad esaminarli subito e quando mi sono accinto all'esame li ho trovati già molto notevolmente scolorati ⁽¹⁾. Nè credo che quest'anno avrò tempo di ripetere sulle razze pure il prelevamento e le determinazioni.

Però l'andamento delle curve di migrazione (di assorbimento da parte delle ghiandole serigene) dei pigmenti dal sangue mi pare di poterlo stabilire con sufficiente approssimazione così: (v. diagr. I).

Sulle ascisse il tempo, dal 2^o giorno dopo la 4^o muta all'incrisolidamento entro il bozzolo. Sulle ordinate la velocità di migrazione dei pigmenti dal sangue alla seta. Negli ibridi F₁ il tempo di migrazione è intermedio rispetto a quello delle razze parentali, ma un pò più ravvicinato, pare, a quello della rispettiva razza materna.

Dò un'altezza maggiore alla curva dell'Oro rispetto a quella del Fossombrone perchè mi pare che nell'Oro la migrazione del pigmento sia non solo assai più precoce ma anche parecchio più rapida: anche il fatto che lo strato più pigmentato (esterno) del bozzolo Oro è più intensamente colorato dello strato più pigmentato (intermedio) del bozzolo Fossombrone, sembra indicare che la velocità massima di migrazione del pigmento è maggiore nella razza cinese che nella indigena. Notare che, a parte il tempo e la velocità di migrazione, la quantità di pigmento migrata, per una stessa quantità di seta prodotta, è presso a poco uguale nelle due razze. Difatti, avendo estratti i pigmenti dai bozzoli delle 2 razze ed avendoli dosati colorimetricamente, ho trovato che la quantità di sostanza colorante estratta da 2 gr. di bozzoli in 350 cc. di solvente, valutata come carotina, corrisponderebbe ad una concentrazione di 0.000343 % per il Fossombrone, e 0.000352 % per l'Oro; valutata come xantofilla, ad una concentrazione di 0.000699 per ambedue le razze.

Questo conferma che, non dalla diversa quantità della sostanza colorante, ma dalla diversa distribuzione di essa nei vari strati del bozzolo, dipende la diversità del colore nelle due razze studiate.

Però a far 2 gr. occorrono circa 7 bozzoli per il Fossombrone e 14 per l'Oro, sicchè un bozzolo di Oro contiene solo circa metà della quantità di pigmento contenuta in un bozzolo Fossombrone.

(1) Questo per gli estratti alcoolici dei pigmenti del sangue ottenuti aggiungendo a 1 cc. o 2 di sangue, prelevato da un numero sufficiente di individui nello stesso stadio, 10 cm. di alcool a 95° e filtrando per rimuovere le sostanze proteiche precipitate. Invece si sono conservati inalterati o quasi i campioni di sangue prelevati in capillari poi chiusi alla fiamma.

Tutto considerato, mi è sembrato che fosse meglio contentarsi, per ora, di una prima approssimazione, cercando di tracciare la curva di migrazione del pigmento senza tentare di rappresentare con essa anche la quantità relativa di pigmento migrata.

Per gli incroci non ho ancora eseguito estrazioni dei pigmenti dai bozzoli, né dal sangue, e l'altezza che ho assegnato alle curve rispettive nel diagramma è regolata in base al fatto che l'intensità massima di colore del bozzolo è leggermente inferiore, specialmente per l'incrocio a ♀ Giallo, a quella del Fossombrone.

Molto meno schematica è la rappresentazione grafica della variazione del colore nello spessore del bozzolo dei 2 incroci reciproci in confronto alle razze parentali (v. diagramma II). Utilizzando i vari strati di seta diversamente coloriti ottenuti delaminando bozzoli Oro e Fossombrone, ho costituito una scala cromatica dal giallo oro acceso al bianco, graduandola da 0 a 100. Delaminando ciascuna in 4 fogli la corteccia serica di 18 bozzoli Oro, 10 Fossombrone, 11 ♀ Oro e 13 ♀ Giallo e 15 ♂ Giallo e ♀ Oro ho valutato per ogni bozzolo, in base alla scala graduata, il colore delle 2 facce di ciascuno degli strati, valutando anche lo spessore relativo del foglietto serico.

Facendo la media dei valori ottenuti per i singoli bozzoli si hanno le cifre seguenti:

		I strato		II strato		III strato		IV strato	
Oro chinese	Intensità di colore	88	72	34	21	14	9	4	0
	Spessore	3.4		2.2		2.2		2.2	
Giallo Indig. (Fossombrone)	Intensità di colore	6	19	54	72	82	68	39	6
	Spessore (sp. tot. 17.5)	4.5		4.3		4.4		4.3	
	(sp. tot. 10)	2.5		2.5		2.5		2.5	
♀ Oro ♂ Giallo	Intensità di colore	32	49	66	72	61	44	21	0
	Spessore (sp. tot. 19.6)	5.2		5.8		4.4		4.2	
	(sp. tot. 10)	2.6		3.0		2.2		2.2	
♀ Giallo ♂ Oro	Intensità di colore	22	37	52	59	63	36	27	6
	Spessore (sp. tot. 20)	5.5		5.0		5.9		3.6	
	(sp. tot. 10)	2.8		2.5		2.9		1.8	

Lo spessore degli strati per l'Oro è stato valutato in decimi, e per le altre razze assumendo per tutto il bozzolo un valore proporzionale al suo peso: mentre per l'Oro 10, per il Fossombrone 17.5, per il ♀ Oro ♂ Giallo 19.6, per il ♀ Giallo ♂ Oro 20⁽¹⁾.

Ma riportando i valori sul diagramma, ho creduto meglio, per facilitare il confronto, valutare a 10 lo spessore di tutti i bozzoli: ed ho riportato

(1) I bozzoli di incrocio che ho usati a mia disposizione per l'esame erano campioni scelti. Il peso medio dei bozzoli d'incrocio probabilmente è poco lontano dalla media dei valori parentali.

sulle ordinate il valore colorimetrico della faccia interna di ogni strato a livello di una ascissa uguale al valore dello spessore dello strato meno 1

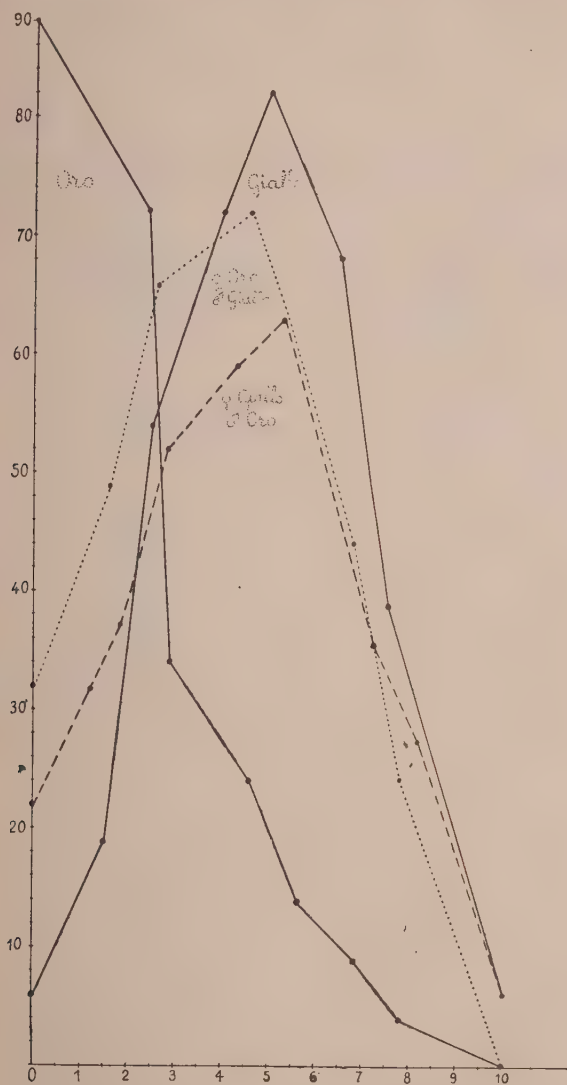


Diagramma II. — La distribuzione del 'pigmento' negli strati del bozzolo delle due razze di bachi Oro e Giallo e dei loro incroci reciproci (F_1). Sulle ascisse lo spessore relativo degli strati, sulle ordinate l'intensità del colore.

(per non farne coincidere l'ascissa con quella del valore colorimetrico della faccia esterna dello strato seguente).

N. P.



RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 30 maggio 1930 (Anno VIII)

Presidenza del sen. prof. A. GARBASSO

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Tensori isotropi e tensori emisotropi.* Nota ⁽¹⁾
del Corrisp. U. CISOTTI.

I. ISOTROPIA ED EMISOTROPIA. — In una Nota precedente ⁽²⁾ ho denominato *tensori isotropi*, quei tensori dello spazio ordinario che, riferiti a una terna cartesiana, godono della proprietà di avere componenti invariantive di fronte a qualunque sistema di riferimento. Ad esempio godono di tale proprietà i tensori doppi del tipo

$$(I) \quad \mathbf{T} = A \delta,$$

essendo A uno scalare e δ il tensore fondamentale o unitario le cui componenti cartesiane sono:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq k, \\ 1, & \text{se } i = k. \end{cases}$$

Chiamerò ora *emisotropo* un tensore le cui componenti cartesiane si mantengono invariate quando si passa da una terna cartesiana ad altra terna cartesiana *congruente* alla primitiva, e cambiano di segno quando la seconda terna di assi cartesiani è *simmetrica* alla primitiva. Ad esempio è emisotropo il tensore triplo

$$(II) \quad \mathbf{U} = B \epsilon,$$

(1) Presentata nella seduta del 30 maggio 1930.

(2) *Tensori isotropi*, questi « Rendiconti », vol. XI (1° sem., 1930), p. 727.

essendo B uno scalare e ϵ il noto tensore triplo emisimmetrico le cui componenti cartesiane ϵ_{ijk} sono nulle quando gli indici non sono tutti distinti ed eguali all'unità positiva o negativa secondochè la permutazione degli indici, distinti, i, j, k presenta un numero pari o dispari di scambi nel confronto colla permutazione $1, 2, 3$. La circostanza della emisotropia del tensore U dipende⁽¹⁾ da quella del tensore ϵ . Questa a sua volta scaturisce dal fatto⁽²⁾ che il determinante formato dai coseni direttori di due terne cartesiane è $= 1$ se le terne sono *congruenti* ed $= -1$ se le terne sono *simmetriche*.

2. TENSORI DOPPI ISOTROPI. — Mi propongo di far rilevare la seguente notevole circostanza: *i tensori doppi isotropi sono solamente quelli del tipo (I).*

Infatti, dette T_{ik} le componenti cartesiane di un tensore doppio T , riferito ad una terna ($O; y_1, y_2, y_3$) e \bar{T}_{jh} le sue componenti rispetto a una seconda terna ($\bar{O}; \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3$) si ha:

$$(1) \quad \bar{T}_{jh} = T_{ik} \alpha_{ij} \alpha_{kh},$$

essendo

$$\alpha_{ij} = \cos(y_i, \bar{y}_j).$$

Se T è isotropo, dev'essere $\bar{T}_{jh} = T_{jh}$ qualunque sieno le due terne cartesiane. Per questa, la precedente esige che si abbia identicamente

$$(2) \quad T_{jh} = T_{ik} \alpha_{ij} \alpha_{kh}.$$

In particolare, questa dev'essere soddisfatta dai seguenti valori delle α_{ij} :

$$(3) \quad \begin{aligned} \alpha_{11} &= -1, & \alpha_{22} &= \alpha_{33} = 1, \\ \alpha_{12} &= \alpha_{21} = \alpha_{13} = \alpha_{31} = \alpha_{23} = \alpha_{32} = 0, \end{aligned}$$

per cui dev'essere $T_{12} = -T_{21}$; $T_{13} = -T_{31}$; e quindi $T_{12} = T_{13} = 0$. Analogamente si dimostra che devono essere nulle tutte le componenti con indici distinti:

$$(4) \quad T_{i+1 i+2} = T_{i+2 i+1} = 0.$$

Per queste, la (2) fornisce:

$$(5) \quad T_{jj} = T_{ik} \alpha_{ij} \alpha_{kj}.$$

Queste, in particolare, devono essere soddisfatte assumendo

$$(6) \quad \begin{aligned} \alpha_{11} &= 1, & \alpha_{12} &= \alpha_{13} = 0; & \alpha_{21} &= \alpha_{22} = 0, & \alpha_{23} &= -1; \\ \alpha_{31} &= 0, & \alpha_{32} &= 1, & \alpha_{33} &= 0. \end{aligned}$$

(1) Loc. cit.

(2) Cfr. le mie *Lezioni di Calcolo Tensoriale*, Milano (1928), Tamburini, p. 8.

Per queste, da (5) si ha $T_{22} = T_{33}$; in modo analogo si constata che dev'essere:

$$T_{11} = T_{22} = T_{33}.$$

Da queste e dalle (4), scende che il tensore \mathbf{T} non può essere che del tipo (I), c. v. d.

3. INESISTENZA DI TENSORI DOPPI EMISOTROPI. — Se un tensore doppio fosse emisotropo dovrebbero verificarsi per le (1): le (2) quando le due terne cartesiane sono *congruenti*, e le seguenti

$$(7) \quad T_{jh} = -T_{ik} \alpha_{ij} \alpha_{kh}$$

quando le terne sono *simmetriche* [n. 1]. In particolare, sono *simmetriche* le due terne cartesiane quando

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = -1, \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{13} = \alpha_{31} = \alpha_{23} = \alpha_{32} = 0,$$

con che le (7) divengono

$$T_{jh} = -T_{ik} \delta_{ij} \delta_{kh} = -T_{jh},$$

e quindi $T_{jh} = 0$. Dunque il tensore \mathbf{T} è necessariamente nullo: *non esistono tensori doppi emisotropi*.

4. INESISTENZA DI TENSORI PARI EMISOTROPI. — Col medesimo procedimento si constata che *non esistono tensori emisotropi m^{pli}, essendo m pari*.

5. TENSORI TRIPLI EMISOTROPI. — Sia \mathbf{U} un tensore triplo; U_{ijk} le sue componenti cartesiane rispetto a una terna ($O; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$) e \bar{U}_{pqr} le sue componenti cartesiane rispetto a una seconda terna ($\bar{O}, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3$); si ha:

$$\bar{U}_{pqr} = U_{ijk} \alpha_{ip} \alpha_{jq} \alpha_{kr}.$$

Se \mathbf{U} è emisotropo dev'essere

$$\bar{U}_{pqr} = \pm U_{pqr}$$

valendo il segno superiore se le due terne di riferimento sono *congruenti*, e l'inferiore se le terne sono *simmetriche*. Dovrà dunque essere

$$(8) \quad U_{pqr} = \pm U_{ijk} \alpha_{ip} \alpha_{jq} \alpha_{kr}.$$

Sono, in particolare, *congruenti* le due terne di riferimento quando

$$\alpha_{11} = -1, \quad \alpha_{12} = \alpha_{13} = 0; \quad \alpha_{21} = 0, \quad \alpha_{22} = -1, \quad \alpha_{23} = 0; \\ \alpha_{31} = \alpha_{32} = 0, \quad \alpha_{33} = 1;$$

corrispondentemente in (8) deve assumersi il segno superiore; ne segue che dev'essere, per esempio:

$$U_{122} = U_{ijk} \alpha_{i1} \alpha_{j2} \alpha_{k2} = -U_{122},$$

e quindi $U_{122} = 0$. E così in generale è facile constatare che devono essere nulle tutte le componenti in cui gli indici non sono distinti. In quanto alle altre componenti, con indici distinti, dalle (8) scende che devono avere comune il valore assoluto. Applicando infatti, le (6) devesi avere per esempio: $U_{123} = -U_{132}$; $U_{312} = -U_{213}$; $U_{231} = -U_{321}$ e così via. Per cui si può porre:

$$(9) \quad U_{pqr} = (-1)^c B,$$

designando B uno scalare e c un numero intero, pari o dispari secondo l'ordine, ancora non precisato, degli indici distinti p, q, r .

Per la precedente, la (8) diviene:

$$(-1)^c = \pm \sum_{ijk} (-1)^{\alpha} \alpha_{ip} \alpha_{jq} \alpha_{kr},$$

la sommatoria andando estesa alle $3! = 6$ permutazioni degli indici i, j, k .

Ora si noti⁽¹⁾ che il secondo membro è $\pm (-1)^c$ con c pari o dispari insieme colla classe della sostituzione $\begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, secondochè le due terne cartesiane di riferimento sono congruenti oppure simmetriche. Con ciò la relazione precedente è identicamente soddisfatta, mentre c , che compare in (9), ha il significato ora accennato. Pertanto *i tensori tripli emisotropi rientrano tutti nel tipo (II)*.

6. INESISTENZA DI TENSORI TRIPLI ISOTROPI. — Affinchè un tensore triplo U fosse isotropo bisognerebbe che fosse identicamente soddisfatta (8) col segno superiore del secondo membro, tanto per cambiamenti congruenti quanto per cambiamenti simmetrici delle terne di riferimento. Ora è facile verificare che questo esigerebbe che fossero nulle tutte le componenti in cui compare un numero dispari di volte ciascuno degli indici $1, 2, 3$. Questo esige, a sua volta, che siano nulle tutte le componenti del tensore; *non esistono dunque tensori tripli isotropi*, s'intende non nulli.

7. INESISTENZA DI TENSORI DISPARI ISOTROPI. — Si constata analogamente che *non esistono tensori isotropi m^{pli}, con m dispari*.

(1) Cfr. le citate mie lezioni, p. 8.

Astronomia. — *Altezza della cromosfera nel 1929 ed andamento del presente ciclo solare.* Nota⁽¹⁾ del Corrisp. G. ABETTI.

I risultati delle osservazioni eseguite ad Arcetri e a Madrid durante il 1929 per l'altezza della cromosfera solare, misurando l'altezza della riga H α invertita, con la fessura dello spettroscopio radiale al bordo, sono i seguenti.

Altezza media della cromosfera nel 1929.

+90° N	+60° E	+30° E	0° E	-30° E	-60° E	-90° S	-60° W	-30° W	0° W	+30° W	+60° W	Media
Arcetri												
10''.35	10''.41	10''.21	10''.04	10''.13	10''.21	10''.49	10''.54	10''.62	10''.43	10''.55	10''.53	10''.38
Madrid												
11''.14	10''.82	10''.77	10''.62	10''.83	10''.83	10''.13	10''.74	10''.78	10''.77	10''.92	10''.70	10''.84

Le osservazioni di Arcetri si basano su 89 giorni di osservazioni⁽²⁾ da cui sono stati tolti quei valori delle altezze alle varie latitudini che risultavano perturbate per la presenza di protuberanze. A Madrid i giorni di osservazioni sono stati 42. Le osservazioni di Arcetri danno un lieve aumento generale della cromosfera da 10''.22 per il 1928 [a 10''.38 per il 1929; quelle di Madrid danno un aumento più sensibile da 10''.11 nel 1928 a 10''.84 nel 1929. L'altezza risulta costante a tutte le latitudini e viene confermato che l'altezza massima è stata raggiunta nel 1926 in coincidenza al massimo di attività delle protuberanze.

Nella figura 1 sono tracciate le altezze ottenute ad Arcetri e a Madrid nel 1929.

L'area totale delle protuberanze, misurata in unità di protuberanza, che dal 1927 al 1928 era diminuita di 53 unità, è ulteriormente diminuita dal 1928 al 1929 di 156 unità.

(1) Nella seduta del 30 maggio 1930.

(2) Cfr. Pubbl. Osservatorio di Arcetri, fasc. 47 in corso di stampa.

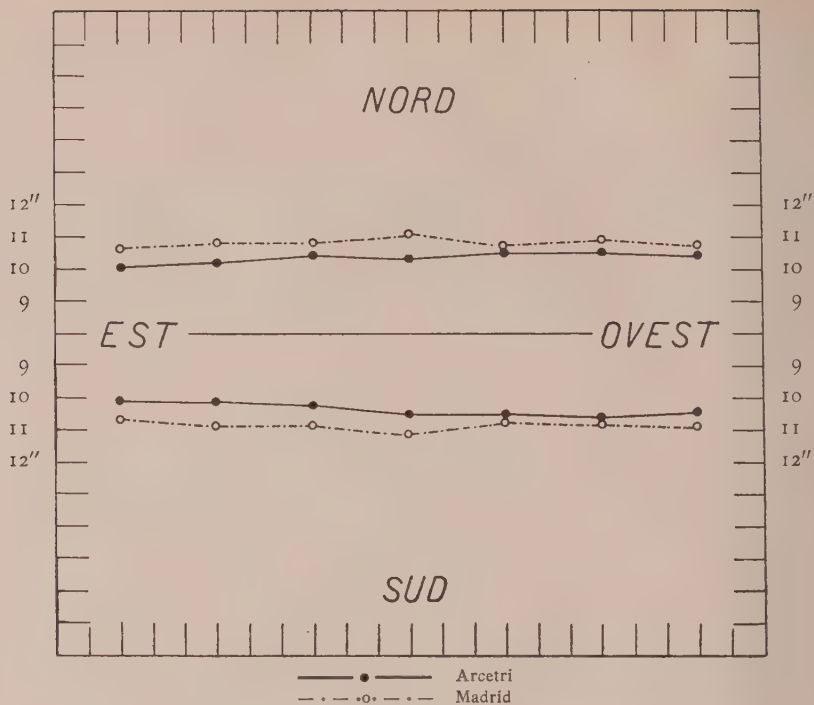
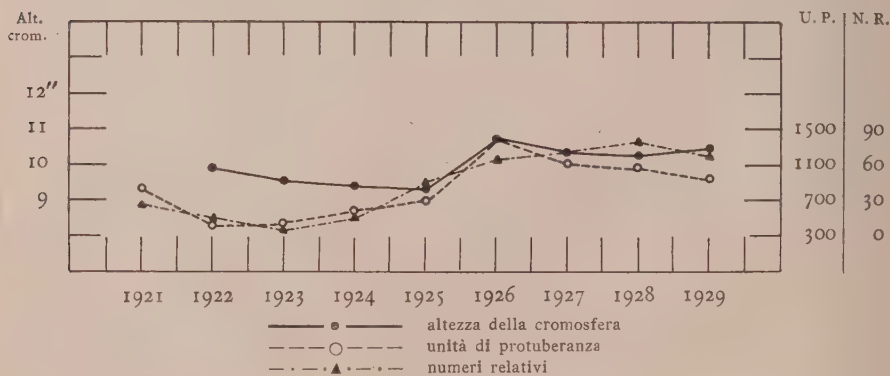


Fig. 1. - Altezza della cromosfera nel 1929.

Nella fig. 2, analoga a quella pubblicata l'anno scorso⁽¹⁾, sono tracciate le curve rappresentanti l'andamento dei numeri relativi delle macchie, dell'area delle protuberanze e dell'altezza della cromosfera durante il presente ciclo solare.



(1) Questi «Rendiconti», vol. X, ser. 6^a, p. 7, 1929. Fig. 2, che per errore tipografico fu invertita.

Resta dunque confermato che fino a questo momento il massimo di attività delle protuberanze è avvenuto insieme all'altezza massima della cromosfera, nel 1926, mentre il massimo delle macchie si è avuto nel 1928. Brunner discutendo le osservazioni di protuberanze ottenute a Zurigo trova, che il massimo di questo ciclo è accaduto nel 1926 ⁽¹⁾, mentre i numeri relativi delle macchie hanno avuto il loro massimo nel 1928.5 ⁽²⁾,

Sembra dunque che il massimo del presente ciclo sia passato, inferiore e meno pronunciato di quello del 1917, e rassomigliante a quello del 1905 cioè più complicato e arrotondato.

Chimica. — *Sopra la costituzione e le reazioni dei diazoidrati isomeri* ⁽³⁾. Nota ⁽⁴⁾ del Socio A. ANGELI.

In un lavoro comparso recentemente sotto lo stesso titolo ⁽⁵⁾ A. Hantzsch, fondandosi sopra le mie ricerche sperimentali, ha mosso alcune obiezioni ai risultati cui io sono pervenuto e dopo una serie di considerazioni che rassomigliano a tutte le altre che ha fatto in precedenza, viene nuovamente alla conclusione che soltanto la stereoisomeria è in grado di spiegare tutte le differenze di comportamento che intercedono fra i diazoderivati normali ed i loro isomeri.

Sebbene nella « Gazzetta Chimica Italiana » io abbia in corso di pubblicazione un lavoro nel quale implicitamente vi è anche la risposta a talune obiezioni sollevate dal predetto autore, tuttavia per maggiore chiarezza esporrò brevemente alcuni dati di fatto che completano quelli che ho già esposti in merito.

Le obiezioni di Hantzsch sono senza dubbio dovute in gran parte al fatto che egli non prende sempre nella dovuta considerazione i dati di ordine chimico, per quanto bene stabiliti essi sieno; a questo proposito egli dichiara ⁽⁶⁾ che è impossibile stabilire per via puramente chimica la costituzione dei composti tautomeri e recentemente aggiunge ⁽⁷⁾ che per via chimica è impossibile di fissare la struttura non solo dei prodotti tautomeri ma anche degli isomeri contenenti complessi di atomi inorganici. Io però non sono del suo avviso ed invece mi trovo completamente d'accordo con

(1) « Astr. Mitt. » Zürich. Nr. CXXI, p. 8.

(2) « Astr. Mitt. », Nr. CXXII, p. 32.

(3) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica organica della R. Università di Firenze.

(4) Presentata nella seduta del 30 maggio 1930.

(5) « Berichte » 63, 1270 (1930).

(6) *Die Diazoverbindungen*, Berlino 1921, p. 9.

(7) Loc. cit., p. 1282.

il pensiero di K. von Auwers⁽¹⁾ secondo il quale la ricerca chimica e chimico-fisica devono procedere di pari passo ed i loro risultati si devono integrare reciprocamente. Ed al fatto di non avere tenuto nel debito conto i dati di ordine chimico e fisico sono evidentemente dovute alcune ipotesi ed affermazioni che Hantzsch ha espresso nel corso dei suoi lavori e che successivamente non sono state confermate.

Così egli ha supposto⁽²⁾ che la nitrammide fosse da considerarsi come uno stereoisomero dell'acido iponitroso; ma ancora molti anni or sono⁽³⁾ io ho fatto notare che ciò non era ammissibile perchè la nitrammide, per azione del diazometano, si trasforma in dimetilnitrammina, nella quale i due atomi di ossigeno sono uniti ad uno stesso atomo di azoto. Ed ora sono lieto di constatare che Hantzsch stesso ha fatto sua la mia obbiezione e che non considera più nitrammide ed acido iponitroso come stereoisomeri⁽⁴⁾.

E sempre per non avere tenuto conto anche dei fatti di ordine chimico, non hanno avuto conferma le deduzioni cui era pervenuto circa la struttura chetenica dei diazocomposti alifatici da me proposta.

Anche nel suo nuovo lavoro Hantzsch afferma cose che non corrispondono alla verità. Pure tralasciando il dato, che mi ha posto in grave imbarazzo e mi ha dato molto da pensare, secondo cui per riduzione degli acidi diazobenzolici si ottengono diazotati normali⁽⁵⁾ e che egli stesso ha dovuto smentire, ora esprime affermazioni non esatte sopra il differente comportamento dei diazotati normali e degli isodiazotati rispetto all'azione dei riducenti.

Egli asserisce in modo ben reciso che *tali sostanze si comportano in modo differente soltanto rispetto alle soluzioni alcaline dei sali stannosi*, ed aggiunge che nello stesso modo che i sali di diazonio coi sali del rame non saturo forniscono complessi che si decompongono spontaneamente, così anche il diazoidrato normale forma una combinazione complessa instabile col composto stannoso, non saturo, nel quale il sale stannoso da un lato viene ossidato a stannico e dall'altra parte il residuo aromatico viene ridotto a benzolo.

Anche tutto questo è contrario ai risultati dell'esperienza.

Non è vero infatti, come sostiene Hantzsch, che questa proprietà riducente sia peculiare dei *sali stannosi* e nemmeno è vero che si compia solamente *in mezzo alcalino*. Le ricerche eseguite in precedenza da altri sperimentatori ed anche le più recenti sono contrarie a quanto Hantzsch dice, molto probabilmente al solo scopo di sostenere la sua tesi.

(1) « Berichte » 63, 1246 (1930).

(2) « A. » 292, 341.

(3) « Ahrens Sammlung » 13, 43 (1908).

(4) Loc. cit., p. 1272 (nota a pie' di pagina).

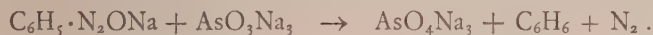
(5) Op. cit., p. 43.

In tutti i casi finora studiati la reazione segue l'andamento che si può rappresentare nel modo più semplice:



e secondo la quale i diazoidrati normali manifestano azione ossidante. Si comprende che la reazione si può anche intendere come un processo correlativo di ossidazione e riduzione, ma è chiaro che la differenza di comportamento sussiste sempre egualmente.

Lo stesso processo infatti si compie anche in presenza di arseniti ⁽¹⁾ e Gutmann ha dimostrato che la reazione procede in modo quantitativo:



Anche qui la reazione è negativa impiegando isodiazotato.

Lo stesso processo pure si verifica impiegando diazotati normali e sali ferrosi e, in determinate condizioni, anche con i sali manganosi ⁽²⁾; gli isodiazotati invece, come nei casi precedenti, non reagiscono. Le stesse reazioni avvengono altresì dopo di avere aggiunta una forte quantità di acetato sodico, anziché di idrato.

Anche in questi casi, come impiegando sale stannoso, si ha forte sviluppo di azoto e formazione di idrocarburo; contemporaneamente si formano anche altre sostanze, che non abbiamo tutte identificate; fra queste abbiamo riscontrato anilina, azobenzolo, fenilazide e difenile e le loro quantità variano a seconda delle condizioni in cui si opera.

Riporterò qualche altro esempio in appoggio di quanto ho riferito.

I diazotati normali pongono in libertà zolfo dalle soluzioni diluite di solfuro ammonico.

I sali di diazonio, in presenza di acetato sodico, reagiscono sopra l'idrochinone con formazione di chinone e sviluppo di azoto ⁽³⁾:



(1) « Berichte » 45, 822 (1912).

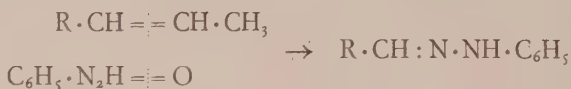
(2) In questo caso, a reazione compiuta, l'idrato ferrico rimane impregnato di quella sostanza, chiamata diazoresina, che ha la composizione: $\text{C}_{24}\text{H}_{18}\text{N}_2\text{O}$ e la cui grandezza molecolare non è stata ancora determinata; si può considerare come un prodotto di ossidazione interna dell'idrato di diazobenzolo: $4 \text{C}_6\text{H}_5 \cdot \text{N}_2\text{OH} = \text{C}_{24}\text{H}_{18}\text{N}_2\text{O} + 3 \text{H}_2\text{O} + 3 \text{N}_2$. Un composto analogo assieme al dott. Z. Iolles l'ho ottenuto dalla p-toluidina. Mgr. sostanza: 4.295, 13.135 mgr. CO_2 e mgr. 2.45 H_2O ; mgr. 4.245 sost.: c.c. 0.2676 N a 719 mm. e 21°. $\text{C}_{28}\text{H}_{26}\text{N}_2\text{O}$ Calcolato C 82.76, H 6.41, N 6.9. Trovato C 83.40, H 6.34, N 6.9. Con tutta probabilità si tratta di un azoderivato e come tale si scolora per prolungato riscaldamento con peridrol in soluzione acetica. Il derivato ottenuto dall'anilina per riduzione con stagno ed acido cloridrico fornisce anilina ed un'altra base della quale non venne ultimato lo studio.

(3) ORTON e EVERATT, « Journ. Chem. Soc. » 93, 1010 (1908).

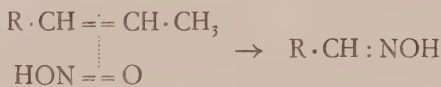
I diazotati reagiscono con l'idrossilammina con sviluppo di protossido di azoto e ciò dimostra che l'idrossilammina ha subito un processo di ossidazione (1):



Recentemente Quilico e Freri (2) hanno fatto l'interessante osservazione che i diazoidrati reagiscono facilmente sopra i derivati propenilici aromatici, per dare fenilidrazoni e la reazione procede probabilmente nel seguente modo:



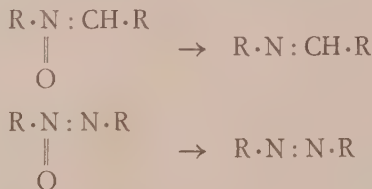
e corrisponde a quella dell'acido nitroso che conduce alle corrispondenti ossime (3):



Gli stessi autori hanno altresì scoperto che i diazoidrati possono anche ossidare il pirrolo (4) per dare prodotti che presentano una grande rassomiglianza con i neri che fornisce il pirrolo per azione degli altri ossidanti. Contemporaneamente anche in questi casi si ha sviluppo di azoto.

D'altra parte è noto da lungo tempo che gli alcool vengono ossidati ad aldeidi.

Inoltre Iolles e Krugliakoff hanno dimostrato che i diazotati normali ossidano la fenolfталina a fenolfталeina e colorano la salda d'amido iodurata. In modo analogo, operando con gli stessi riducenti (5) i medesimi autori hanno trovato che si comportano i nitroni e gli azossicomposti:



(1) I. MAI, « Berichte » 25, 372 (1892).

(2) « Gazzetta » 58, 1°, 380 (1928) e sgg.

(3) R. FABINY, « Zeit. physik. Chemie » 12 (1893), 5. ALESSANDRI (« Rend. Lincei » 24, I, 65 (1915) ha dimostrato che anche il nitrosobenzolo trasforma i composti propenilici in nitroni:



(4) « Rend. Lincei » 11, 1° sem. (1930), 296 e 409.

(5) « Rend. Lincei » 11, 1° sem. 197 (1930).

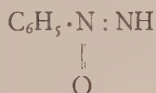
i quali contengono del pari un atomo di ossigeno unito per doppia valenza all'azoto.

Tutti questi esempi illustrano il carattere ossidante dei derivati normali e perciò giustificano la forma da me ammessa, nella quale l'ossigeno è unito all'azoto per doppio legame.

Gli isodiazotati invece, al pari delle ossime, non esercitano azioni ossidanti; soltanto l'idrossilammina può determinare ossidazioni ⁽¹⁾ ma in questi casi, come giustamente ammette Fritz Haber, essa assume la forma di ossido $\text{NH}_3 : \text{O}$ ⁽²⁾.

Anche la formazione di nitrosobenzolo, per azione del nitrossile sopra i diazotati normali, scoperta dal compianto Bigiavi ⁽³⁾ Hantzsch la pone subito in accordo con le sue formole e l'attribuisce ad un processo di ossidazione. Ma è da domandarsi come mai una reazione che secondo lui apparisce così semplice non sia stato possibile realizzarla prima d'ora impiegando altri ossidanti, senza bisogno di ricorrere al nitrossile. Ma una spiegazione molto più plausibile venne già data altrove da Bigiavi stesso e da me.

Riguardo al nome del termine:



io non ho fatto altro che usare quello proposto da Hantzsch stesso, che l'ha chiamato imminonitrobenzolo ⁽⁴⁾, la cui struttura ricorda quella dei cheteni e che perciò giustifica la sua grande facilità di reagire, come ho posto in evidenza altrove allo scopo di chiarire il meccanismo dei processi di copulazione.

Inoltre Hantzsch giuoca sull'equivoco quando dice che io ho accettata la sua forma per i diazotati normali ⁽⁵⁾; in una stessa riga io non ho fatto che scrivere le forme dei due diazoidrati, analoghe a quelle dei due azossicomposti asimmetrici ⁽⁶⁾:



e mi sono guardato bene dal dire che la terza, tautomera con la seconda, corrisponde ai diazoidrati normali. Ciò significa il contrario di quanto penso ed ho scritto.

(1) « Berichte » 29, 2080 (1896).

(2) Ibid., 29, 2444 (1896).

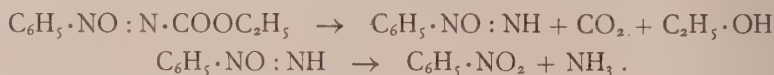
(3) « Berichte » 62, 2101 (1929).

(4) Op. cit., p. 34.

(5) Loc. cit., p. 1271.

(6) « Berichte » 62, 1924 (1929).

Hantzsch riconosce che il nodo della questione sta nella reazione interessante scoperta nel mio Laboratorio da Pieroni e Giannini ⁽¹⁾, e che egli ha fatto ripetere e confermare sperimentalmente dal dott. Emmerich Strasser. Come è noto Pieroni e Giannini hanno trovato che gli eteri degli acidi azossicarbonici da loro scoperti, si scindono facilmente in alcool, anidride carbonica e successivamente in nitrobenzolo ed ammoniaca:



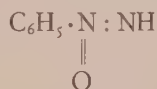
Per conto mio io ho sempre considerata questa reazione come l'inversa di quella di Bamberger, per mezzo della quale da nitrobenzolo ed ammoniaca (sotto forma di sodioammide) si perviene al diazotato normale:



la quale sta in perfetto accordo con la mia formola.

Hantzsch ammette che il composto che così si ottiene possiede realmente la struttura di imminonitrobenzolo, ma non già quella di diazocomposto o diazoidrato, per il fatto che finora non si è osservato che diazoidrato normale o diazotato forniscano nitrobenzolo, ma bensì azoto e fenolo. Ma ciò non vuol dire che queste reazioni siano impossibili soltanto perchè non vennero finora realizzate; tanto egli stesso ha veduto che in questi ultimi anni sono state effettuate trasformazioni che pochi si aspettavano.

Inoltre secondo Hantzsch anche la proprietà di copularsi dell'imminonitrobenzolo non prova che esso sia un diazocomposto normale, per il fatto che p. e. anche i diazoeteri facilmente si copulano. In altre parole però *Hantzsch stesso riconosce che esiste un imminonitrobenzolo:*



che ha l'identica composizione dei diazoidrati e che presenta le reazioni che sono caratteristiche dei derivati normali ⁽²⁾.

È precisamente questo che io desiderava vedere confermato da Hantzsch.

Accennerò infine che non hanno avuto migliore fortuna anche tutti gli attacchi che Hantzsch, per mezzo de' suoi ragionamenti, delle sue considerazioni, delle sue esperienze e delle sue sottigliezze ⁽³⁾ ha mosso contro le

(1) « Gazzetta » 54, 162 (1924).

(2) Loc. cit. p. 1275.

(3) Op. cit., p. 107, 109, 110; HANTZSCH e LIFSCHITZ, « Berichte » 45, 3022 (1912).

formole o catena aperta (cheteniche) che io ho proposto per i diazocomposti alifatici e per le azidi, cui prima ho accennato.

Ma anche questa sua ingegnosità è stata vana.

Non solo il comportamento chimico⁽¹⁾ ma anche lo studio delle proprietà fisiche⁽²⁾ e lo stesso esame röntgenografico⁽³⁾ hanno dimostrato che le rispettive formole ad anello non possono più venire prese in considerazione, vale a dire precisamente il contrario di quanto Hantzsch si è sforzato sempre di sostenere.

Chimica. — *La struttura cristallina del tiofene*⁽⁴⁾. Nota⁽⁵⁾ del Socio G. BRUNI e di G. NATTA.

Le note analogie tra benzolo e tiofene, che si rivelano in molte proprietà sia fisiche che chimiche e nella difficoltà che presenta la purificazione con mezzi fisici del benzolo dalle impurezze di tiofene che spesso contiene, non eliminabili nemmeno per cristallizzazione, malgrado la notevole differenza nella temperatura di solidificazione dei composti puri, ci hanno indotto ad esaminare la struttura cristallina, tuttora ignota, del tiofene per raffrontarla a quella meglio conosciuta, del benzolo.

La formazione di soluzioni solide fra benzolo e tiofene, accertata per per via crioscopica, e che dall'analisi termica si era creduto di poter osservare che avvenisse in tutti i rapporti, lasciava supporre che esistesse un isomorfismo completo. Riprenderemo questo argomento a fondo in una prossima Nota.

Questo isomorfismo tra benzolo e tiofene non è stato sinora accertato da nessuna misura cristallografica diretta. Coi metodi classici della cristallografia non sarebbe d'altronde facile studiare un prodotto, quale il tiofene, che cristallizza male e solo a temperatura molto bassa (— 37°) per un ordinario esame al goniometro.

Soltanto per il benzolo abbiamo alcune misure goniometriche dovute a Groth⁽⁶⁾, che gli attribuì una forma cristallina rombica definita da un rapporto assiale approssimato: $a : b : c = 0.891 : 1 : 0.799$, determinato però solo in base all'osservazione di un numero limitatissimo di faccie.

(1) STAUDINGER, « *Helvetica Acta* » 5, 87 (1922); KENDALL e NOYES, « *Journ. Amer. Soc.* », 48, 2404 (1926).

(2) K. VON AUWERS, « *Berichte* » 63, 1242 (1930).

(3) STERLING e PAULING, « *Journ. Amer. Soc.* » 47, 2904 (1925).

(4) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale del R. Politecnico di Milano.

(5) Presentata nella seduta del 30 maggio 1930.

(6) « *Chemische Kristallographie* », 4, 3 (1917).

Successive misure roentgenografiche di altri e nostre, su cui ritorneremo dettagliatamente in una seconda Nota, hanno dimostrato che il benzolo è bensì rombico, ma che il rapporto assiale è assai diverso da quello indicato da Groth. Il valore attualmente più attendibile può ritenersi essere: $a : b : c = 0.771 : 1 : 0.704$.

Noi abbiamo anzitutto determinato la struttura cristallina del tiofene, finora totalmente sconosciuta, mediante l'esame coi raggi X col metodo delle polveri. Ci riserviamo di esporre prossimamente i risultati dell'esame dell'intero sistema tiofene-benzolo.

DISPOSITIVO SPERIMENTALE PER L'ESAME COI RAGGI X A BASSA TEMPERATURA.

Data la bassa temperatura alla quale solidifica il tiofene ed essendo in genere utile, per ottenere dei fotogrammi nitidi, tenersi a temperature notevolmente più basse ancora di quella di fusione, abbiamo provato, per metterci nelle condizioni migliori, diversi dispositivi sperimentali.

Pur possedendo in questo laboratorio un sistema di due celle frigorifere concentriche, la prima delle quali contenente un tubo Coolidge a raggi X, raffreddata a -10° da un ordinario frigorifero ad ammoniac, la seconda, più interna, contenente gli spettrografi, raffreddata a -45° per espansione dell'ammoniaca nel vuoto, ciò nondimeno abbiamo trovato più conveniente l'uso di un dispositivo che possa essere applicato agli ordinari tubi Philips ad anticatodi ricambiabili.

Lo spettrografo da noi adoperato, già descritto da uno di noi⁽¹⁾, permette di raffreddare il preparato a temperature vicine a quella di ebollizione dell'aria liquida. Questa, contenuta in un recipiente di Dewar, superiore allo spettrografo, giunge attraverso un piccolo serpentino nell'interno di un esile tubicino di vetro del diametro di circa 1 mm., nel quale si mantiene in vivace ebollizione. L'alimentazione dell'aria liquida nel tubicino è assicurata per capillarità da un sottile filo di platino interno. La centratura del preparato è assicurata da due guide coniche. La camera, che può eventualmente essere evacuata, è a tenuta di gas.

La sostanza liquida da esaminarsi si fa solidificare, per rapida immersione del cilindretto di vetro nel liquido in esame, e si deposita in esile velo. Si ripete l'operazione, sempre mantenendo il cilindretto raffreddato all'interno dall'aria liquida, varie volte, sino a raggiungere uno spessore del preparato di 1-2 decimi di mm.

Si può così mantenere il preparato durante l'esame coi raggi X ad una temperatura di circa -170° . Si è potuto infatti ottenere con facilità un velo di etilene solido per condensazione sul tubicino, pur solidificando tale gas a -162° .

(1) NATTA, questi « Rendiconti », XI, 680 (6 aprile 1930).

Desiderando invece temperature relativamente meno basse si può usare lo stesso dispositivo modificando soltanto il Dewar in modo da sostituire il tubicino di vetro terminale con un filo di platino di 1 mm. circa di diametro. Un'estremità di tale filo, penetra nell'interno del Dewar e raffredda per conduzione l'estremità esterna sulla quale deve depositarsi la sostanza in esame.

Prima del fotogramma è necessario, per evitare la condensazione di ghiaccio, essicare perfettamente l'interno della camera.

APPLICAZIONE AL METODO DELLE POLVERI DI RADIAZIONI A GRANDE LUNGHEZZA D'ONDA.

Nell'esame di sostanze a bassa simmetria od a grandi dimensioni della cella elementare si ottengono frequentemente, usando il metodo delle polveri e gli ordinari spettrografi, dei fotogrammi, ricchissimi di linee spesso sovrapponentisi, la cui identificazione e stima delle intensità può risultare oltremodo difficile.

Per ridurre questi inconvenienti furono, dagli sperimentatori moderni, seguite due vie diverse. Gli americani, sempre adoperando radiazioni molto penetranti generate da tubi Coolidge usano spettrografi a grande diametro, per distanziare le linee sulle film, ma devono ricorrere ad esposizioni molto lunghe. Gli sperimentatori europei applicano invece prevalentemente tubi smontabili, radiazioni molli e spettrografi a minor diametro. La tendenza ad usare radiazioni sempre a maggior lunghezza d'onda ha indotto alcuni sperimentatori moderni a sostituire il rame ed il ferro, che sono da noi gli anticatodi prevalentemente usati, con altri a minor numero atomico: manganese, cromo, titanio.

Noi abbiamo nell'esame del sistema benzolo-tiofene dapprima applicato un tubo Philips ad anticatodi ricambiabili, del tipo B, ed usato le radiazioni del rame e del ferro. I fotogrammi risultano nitidi, ma ricchissimi di linee e quindi di difficile interpretazione soprattutto nell'esame delle miscele, per l'abbondanza delle linee e per la poca precisione della lettura, non potendosi utilizzare le parti delle film corrispondenti ai maggiori angoli di riflessione perchè molto offuscate.

Abbiamo perciò tentato l'applicazione di radiazioni a maggiore lunghezza d'onda. Dopo diversi tentativi abbiamo trovato vantaggioso l'applicazione delle radiazioni del *calcio*, che presentano lunghezze d'onda $K_{\alpha} = 3351.69$ e $K_{\alpha'} = 3354.95$ U X.

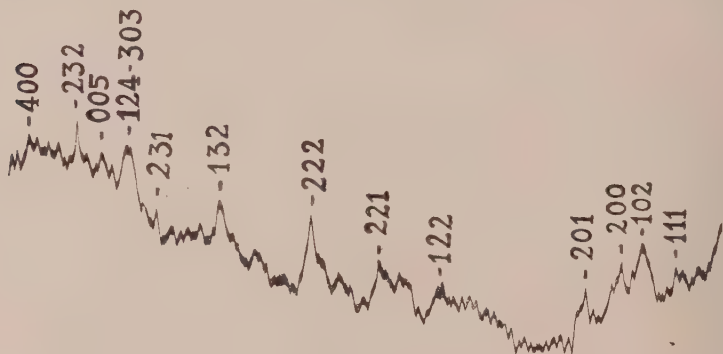
L'uso dell'anticatodo di calcio, costituito da una lastrina di metallo applicata su di un ordinario supporto in rame, non presenta speciali difficoltà, impiegando tubi ioni e raffreddando bene l'anticatodo. Data però la loro grande lunghezza d'onda, le radiazioni emesse sono fortemente assorbite dall'aria e dal preparato stesso in esame. Sono perciò necessarie

esposizioni molto lunghe. Normalmente, per sostanze non molto semplici, sono richieste per ottenere dei buoni fotogrammi esposizioni di 6-10 ore, alimentando il tubo generatore di raggi X con una intensità di 2-3 miliamp. e una tensione di 30 Kvolts. Si ottengono così infatti fotogrammi a linee molto più distanziate e sufficientemente nitide, leggibili con precisione, e più adatti al calcolo.

Questo metodo si presta quindi molto bene per lo studio roentgenografico delle sostanze organiche in genere.

ESAME DEL TIOFENE.

Abbiamo esaminato del tiofene Kahlbaum coi dispositivi precedentemente descritti, rispettivamente usando anticatodi di rame, ferro, calcio.



Abbiamo usato per il calcolo i fotogrammi ottenuti con gli ultimi due anticatodi. Riproduciamo in figura la microfotometria di un fotogramma ottenuto con anticatodo di calcio.

Si osserva subito, dal confronto coi fotogrammi del benzolo, un minor numero di linee, che lascia prevedere per il tiofene una forma cristallina a simmetria più elevata.

Si sono potute infatti ordinare tutte le linee dei fotogrammi nel sistema tetragonale per un rapporto assiale $a:c = 1:1.32$. Nella tabella seguente sono riportati i dati relativi al calcolo di un fotogramma ottenuto con anticatodo di calcio.

L'aumento notevole dei valori osservati della costante a coll'aumentare dell'angolo è dovuto allo spessore del preparato ed alla sua opacità rispetto alle radiazioni molli del calcio.

Abbiamo perciò assunto come valore della costante quello limite a cui tendono i valori medi sperimentali per angoli θ tendenti a 180° .

La cella elementare del tiofene risulta delle dimensioni

$$a = 7.225 \pm 0.01, c = 9.54 \text{ \AA},$$

possiede un volume di 498.10^{-24} cc. La densità, supponendo che la cella contenga 4 molecole C_4H_4S , risulta $a - 170^\circ : 1.11$.

Tiofene Ca/ant

sen $\frac{\theta}{2}$	J	d	hkl	a
(0.3584)	(d)	(4.679)	110	(6.617)
(0.3868)	(d)	(4.334)	002	(6.564)
0.4107	d	4.084	111	6.553
0.4450	f	3.768	102	6.840
0.4708	md	3.562	200	7.124
0.5055	m	3.317	201	7.170
(0.5568)	(d)	(3.012)	121	(7.110)
0.6338	d	2.646	122	7.143
(0.6947)	(dd)	(2.414)	(221)	(7.068)
0.7510	ff	2.233	222	7.164
0.8140	f	2.060	132	7.222
0.8572	dd	1.956	231	7.184
0.8753	ff	1.915	124-303	7.211-7.206
0.8897	dd	1.885	005	7.142
0.9102	m	1.843	232	7.206
0.9270	dd	1.809	400	7.235
0.9612	m	1.744	224	7.228
0.9740	mf	1.722	411	7.218

Abbiamo anche calcolato il fotogramma del tiofene ottenuto con anticatodo di ferro. Oltre alla maggior parte delle faccie osservate nel fotogramma con anticatodo di calcio se ne hanno numerosissime altre ad indici più alti che si possono ordinare per la medesima ipotesi di struttura.

Non riportiamo il calcolo del fotogramma perchè nell'ultima parte di questo si hanno numerose sovrapposizioni di linee ad indici diversi, la cui identificazione rimane incerta.

Come costante reticolare del tiofene risulterebbe in base a tale fotogramma un valore di pochi centesimi di Å superiore a quello osservato con anticatodo di calcio, mentre il rapporto c/a rimane identico.

Da quanto è esposto più sopra risulta subito evidente che *non esiste un isomorfismo cristallografico completo fra tiofene e benzolo* che cristallizzano

i sistemi diversi; vi sono però somiglianze notevoli fra le loro celle elementari che permettono la formazione di soluzioni solide come dimostreremo in una Nota successiva.

RIASSUNTO.

1° La struttura cristallina del tiofene è stata determinata coi raggi X col metodo delle polveri e con uno speciale spettrografo per basse temperature. Esso possiede una cella tetragonale con un rapporto assiale $a:c = 1:1.32$.

2° Le costanti reticolari del tiofene a -170° risultano:

$$a = 7.225, \quad c = 9.54 \pm 0.01 \text{ \AA}, \quad v = 498.10^{-24} \text{ cc.}$$

La cella elementare contiene 4 molecole C_4H_4S . La densità risulta 1.11.

3° Sono state impiegate per la prima volta nell'esame della struttura cristallina col metodo delle polveri le radiazioni di un anticatodo di calcio metallico, la cui applicazione risulta particolarmente vantaggiosa nell'esame di sostanze organiche.

Chimica. — *La struttura cristallina del benzolo e le sue relazioni con quella del tiofene.* Nota del Socio G. BRUNI e C. NATTA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geologia. — *Uniformità di caratteri della zona ad « Helmynthoida labyrinthica » dall'Ubaye alle Alpi e alle Riviere liguri, e conseguente suo grande valore cronologico.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. S. FRANCHI.

Dopo la chiusura dell'annoso dibattito sull'età dei grès d'Annot, fra me ed alcuni dei più illustri geologi alpini che vanti la Francia, terminata con pieno, benchè tardivo, riconoscimento dell'età eocenica da me sostenuta, per cui un grande capitolo della storia geologica delle Alpi occidentali francesi viene a subire una vera rivoluzione ⁽²⁾, io sento l'urgente bisogno di trattare subito di un'altra pure grande questione, ancora pendente per alcuni terreni eocenici estesi dall'Ubaye alle Alpi liguri, all'Appennino genovese ed alle Alpi Apuane.

La questione, che è pure di una grandissima portata, riguarda l'età, l'estensione, i caratteri ed i limiti della zona da me detta « *zona ad Helmynthoida labyrinthica* » in un mio lavoro del 1894 ⁽³⁾. Questo nome io lo mantenni in un più grande lavoro del 1916 ⁽⁴⁾, col quale io iniziai, contro il compianto J. Boussac, la disputa sull'età delle arenarie di Annot, e che venne naturalmente mantenuto nelle carte al 100.000 stampate nel 1926, carte alle quali sarà riconosciuto finalmente, io spero, tutto il valore che esse hanno nella presente questione.

Siamo sempre nell'Eocene, ma di orizzonti soprastanti indiscutibilmente, e di molto (almeno di parecchie centinaia di metri) a quello delle famose arenarie.

CENNI SULLA CRONOLOGIA.

I calcari ad *Helmynthoida* sono stati riferiti con grande acume, fin dal 1846 dal Pareto, nella sua immortale opera « *Descrizione di Genova e del genovesato* », alla parte superiore dell'Eocene, mentre i calcari con Nummuliti (*Nummulites perforata*) dovevano rappresentarne la parte inferiore;

(1) Presentata nella seduta del 30 maggio 1930.

(2) Un'affermazione di questo tenore faceva L. Moret dopo la scoperta di piccole nummuliti e discocicline entro le arenarie di Taveyannaz; ma senza valida ragione, perchè l'età eocenica delle arenarie d'Annot era allora da me dimostrata da vari lustri.

(3) S. FRANCHI, *Contribuzione allo studio del Cretaceo e del Titonico nelle Alpi Marittime italiane*, (« Boll. R. Comitato geologico », 1894).

(4) *Le « Arenarie d'Annot » e La « zona ad Helmynthoida » nell'Eocene delle Alpi Marittime e dell'Appennino Genovese*, (« Boll. R. Comitato geologico », 1916).

verità questa lampante, purtroppo ancora disconosciuta da alcuni geologi ai giorni nostri.

I geologi francesi riferirono nelle loro carte i calcari ad *Helmynthoida* di alcune regioni dell'Ubaye e delle alte Alpi, che riconobbero identici a quelli dei dintorni di Genova (Castellaccio) all'Eocene medio. Ecco quello che si legge nel Rendiconto della riunione del 10 settembre 1905 della Società geologica di Francia a Torino (1): « Mr. Kilian a été frappé de « l'identité presque absolue que présentent les calcaires éocènes à Helmynthoïdes (Alberese) des environs de Gênes avec des assises très développées dans la région de l'Ubaye et des Hautes-Alpes et que M. Haug « et lui ont désignées sous le nom de « Flysch calcaire ». Ces assises renferment les mêmes empreintes et appartiennent également, dans les Basses-Alpes, à l'Eocene moyen ».

Io credo però che il riferimento da me fatto all'Eocene superiore fin dal 1894, e che mantenni sempre fino alla stampa delle carte geologiche di S. Remo e di Imperia, fatta nel 1926, rappresenti certamente la verità, perchè esso è il risultato del rilevamento dettagliato e minuto da me fatto, passo passo dell'Eocene di tutto il vasto bacino di S. Remo e di alcuni tratti dell'Ubaye e dell'Appennino genovese.

La visione attenta della cartina geologica e dei profili da me esposti nel lavoro citato del 1894, sarebbero d'altra parte sufficienti, ad ogni geologo accorto, per farsi la convinzione della giustezza della mia assegnazione: e io non riesco a spiegarmi come, dopo l'accordo perfetto fra me e i grandi maestri L. Pareto, A. Sismonda e A. Issel, sul riferimento alla parte superiore dell'Eocene, e soprattutto dopo la stampa dei fogli al 100.000 della Carta geologica d'Italia, fatta dall'Ufficio geologico, si possa ancora restare dubbiosi, o peggio, riferire ancora al Parisiano ed al Bartoniano tutta la zona ad *Helmynthoida* perfettamente caratterizzata.

Esaminando la carta geologica di S. Remo, salta all'occhio il fatto impressionante che tra il grosso banco basale dell'Eocene a *Nummulites perforata* e il limite occidentale dell'affioramento della nostra zona, intercede una distanza di almeno sette chilometri, tutta in scisti (Flysch) i quali, pure tenendo conto dei ripetuti ripiegamenti, corrisponderanno almeno ad un migliaio di metri di potenza di depositi.

Stando sulla vetta del M. Baraccone, a N.N.E. di Ventimiglia, si vede, a ponente, il grande banco Luteziano salire con forte pendenza verso nord, e a levante il banco ad *Helmynthoida* salire alla distanza di almeno 7 chilometri, nella stessa direzione.

Questo fatto è sufficiente a darci un'idea del grande distacco cronologico esistente fra il Luteziano e la nostra zona, la quale corrisponderà certamente alla parte superiore del Priaboniano.

(1). « Bull. de la Société géologique de la France », 1905, p. 850.

Si potrà dire che l'assegnazione al Priaboniano da me fatta sia un po' arbitraria, non possedendo io fossili caratteristici, oltre alle Fucoidi e ad alcune Nummuliti e Discocycline ⁽¹⁾, ma nessuno, vedendo le carte al 100.000 di S. Remo ed Imperia, nei quali la zona, unitaria in sè, costituisce la parte superiore dell'Eocene, potrà negare che l'assegnazione al Parisiano, che vedemmo sottostare di almeno 1000 m. di depositi alla nostra zona, sia un errore inammissibile.

Ma c'è chi obietta al piccolo valore cronologico dell'elmintoidi e delle fucoidi, e ciò può valere per i fossili presi da soli; ma quando ad essi si accompagna la costanza dei caratteri litologici delle rocce in cui essi sono inclusi, per varie centinaia di chilometri di estensione degli affioramenti, dall'Ubaye all'Appennino settentrionale ed alle Alpi Apuane, e per migliaia e migliaia di chilometri quadrati di distribuzione in superficie della zona di terreni che li comprende, è ovvio che debba intervenire il concetto della continuità, il quale anche da solo, può essere sufficiente, come tutti i geologi sanno, a stabilire l'individualità di una formazione.

Nel caso nostro c'è poi, oltre alla costanza dei caratteri litologici proprii (alberesi, arenarie, scisti ardesiaci, ecc.), la costanza della sottoposizione alla nostra zona, di un'altra zona, che direi *pre-elmintoidica*, distintissima per costituzione litologica e per colore, zona che il Pareto distinse per primo e che A. Issel studiò accuratamente, alla quale nessun geologo può negare una grande importanza, dal punto di vista stratigrafico.

« Il Pareto (loc. cit.) traccia la distribuzione dei calcari a fucoidi, aiutativi, dice lui, *dall'esistenza costante* sotto di essi di una zona di argille varicolori con diaspri, nelle quali si mostrano mineralizzazioni di rame o di manganese », zona che egli indica nella valle del Bisagno ed in molti punti « seguendo la base occidentale del M. Antola, tutta formata sull'alto da calcari a fucoidi, mentre da una parte e dall'altra, cioè a levante ed a ponente è dessa sorretta dai banchi medi e inferiori della formazione ».

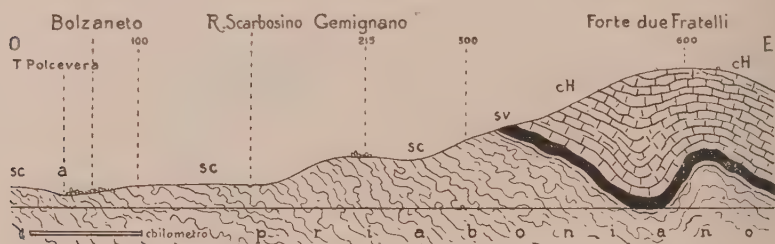
Questa zona di scisti variegati, rosei, verdastri, violacei, costantemente osservata sotto la *zona ad Helmythoida* dall'Ubaye al contrafforte di confine (Monte Ventasuso) ed in tutto il versante del Bacino di S. Remo, lungo la valle Arroscia, e poi, dopo un gran salto, nella valle Polcevera ed attorno al gruppo del Monte Antola, dove la notò e descrisse lo stesso Pareto, concorre a dare una spiccata individualità alla nostra complessa zona, e ad avvalorare, come meglio non si potrebbe desiderare, il significato e il valore cronologico delle meravigliose impronte di elmintoidi e delle numerose e belle fucoidi ⁽²⁾.

(1) Da me raccolte e determinate dal prof. Checchia-Rispoli, nelle arenarie di Valle Crosia e delle cave di Bordighera, costituenti i banchi inferiori della zona.

(2) Ricordo che qualche piccola lente di calcari con piccole nummuliti è stata trovata negli scisti variegati, e che dei fittissimi ed esilissimi feltri di spugne calcaree sono stati da me scoperti entro ad alberesi presso Imperia.

Per la descrizione completa della zona ad *Helmynthoida labyrinthica* e della soprastante zona a questa intimamente collegata, ad *H. irregularis* Squinabol, come risulta dalla carta al 100.000, vedansi i lavori citati del 1894 e del 1916.

Allo scopo di chiarire la cronologia della zona io credo necessario esporre un profilo importantissimo, da me rilevato nel 1894, profilo passante per Bolzaneto, per l'abitato di Gemignano e pel forte Due Fratelli, al quale ho sovente alluso dal 1894 in poi. In esso figurano, a partire dal basso: una potente massa di scisti argillosi, argilloso-arenacei, banchi di scisti argillosi semi-refrattari, scisti lucenti passanti a calcescisti, ecc., sopra cui vengono, con grande potenza e sfumanti coi precedenti, gli scisti variegati, indicati, come già dissi, dal Pareto tutt'attorno al Monte Antola, e, sopra,



Profilo attraverso la Valle Polcevera.

a) alluvione; sc) scisti priaboniani; sv) scisti variegati pre-elmintoidici;
cH) calc. e scisti ardesiaci ad *Helmynthoida labyrinthica*.

la rupe ripida di calcari alberesi ad *Helmynthoida* che, dopo il Pareto, tutti i geologi sanno costituire quella grande massa montuosa.

Ritenuto come fatto accertato e indubitabile l'età Priaboniana superiore dei calcari alberesi ad *Helmynthoida* ed a *Condrites*, gli scisti variegati costituiranno il limite superiore del Priaboniano medio, ed il resto, forse fino al fondo di valle, il Priaboniano medio e inferiore.

Rimarrebbe quindi assolutamente escluso, che una parte qualsiasi del versante sinistro della valle Polcevera, ad es. fino a Bolzaneto, se non anche una parte importante del versante sinistro, possa appartenere ad un terreno diverso dall'Eocene.

RIEPILOGO.

I terreni del complesso che io chiamai «zona ad *Helmynthoida labyrinthica*» Herr, si estendono da alcune zone delle Alte Alpi francesi e dell'Ubaye fino al confine italo-francese, al M. Ventasuso. Essendo stati essi erosi per grandi estensioni attraverso le valli Stura, Gesso e Vermentagna, nelle cui sinclinali è solo rappresentato l'Eocene medio-inferiore, è solo nel-

l'alto di quest'ultima valle, nella caratteristica Cima di Gherra presso il Colle di Tenda, che i terreni della nostra zona tornano ad affiorare. Si proseguono quindi nel lungo contrafforte, vivamente ripiegato, separante le valli Roja, Arroscia e Argentina, poscia nei contrafforti separanti le valli Nervia, Argentina, Impero e Andora, e al caratteristico Capo Mele. Si mostrano quindi in varie sinclinali fortemente coricate lungo la bassa valle Arroscia, delle quali la più orientale termina al Capo Santa Croce, presso Alassio.

La nostra zona non riappare più ad oriente, che a Genova e nel versante sinistro della Valle Polcevera, oltre la quale essa ha enorme sviluppo nel gruppo del Monte Antola e nei fogli al 100.000 di Voghera, di Rapallo, ecc., fino alla regione Apuana.

Al disotto della principale zona ad *Helmynthoida*, quella ad *Helmynthoida labyrinthica*, si sviluppa la zona di scisti variegati, perfettamente nota al Pareto, e che io direi *pre-helmyntoidica*, la quale, pel suo colore, ha originato i nomi geografici di *Col de la Sanguinière* e di *Col du Vermillon* nell'Ubaye, e di Colla Rossa, tra Roja e Arroscia, a sud del Monte Bertrand.

In questa zona di scisti variegati, e in corrispondenza di una profonda sinclinale coricata, con ampio carreggiamento, è impigliata una meravigliosa linea di *klippen* di Trias medio, di Lias, di Giurese (Titonico) e di Cretaceo, estesa forse un centinaio di chilometri, dalla Valle Argentina alla Vermentina.

Al disopra invece della zona principale predetta, e sfumante quasi litologicamente con essa, si sviluppa un'altra zona distinta da altre elmintoidi, l'*Helmynthoida irregularis*, Squinabol, e da piccole *Chondrites*; zona questa che rappresenta il più alto orizzonte dell'Eocene ligure, il quale avrà così, a cominciare dalla base del Luteziano, almeno 2000 m. di potenza.

CONCLUSIONI.

La zona ad *Helmynthoida*, che, come si vide, ha caratteri distintissimi e grande potenza, e quindi una capitale importanza nella costituzione della parte superiore dell'Eocene ligure, per estensioni di centinaia di chilometri, dovrà essere distinta, nelle carte geologiche, ovunque la si riscontri, con una o più tinte speciali, come è stato fatto nei fogli al 100.000 di San Remo, di Imperia e per quello Argentara-Dronero, ora pubblicato, e come si sta facendo nei fogli in preparazione per la stampa, di Boves, di Genova, di Rapallo, ecc.

Se queste conclusioni rappresentano, come io penso, una vittoria, essa non è già contro nessuno, ma semplicemente e completamente a favore di una grande verità, la quale, dopo la felice intuizione di L. Pareto (1846), la pronta e completa comprensione di D. Zaccagna e di altri geologi insigni, e dopo le chiarissime dimostrazioni da me date, con carte geologiche e con profili nel 1894 e nel 1916, ecc., aventi il valore di dimostrazioni mate-

matiche, e finalmente colle carte geologiche di San Remo, di Imperia e di Argentera-Dronero, di recentissima pubblicazione, nonchè col profilo geologico allegato, attraverso la Polcevera, noi riusciremo fatalmente ad inculcare, io non ne dubito, anche ai più ostinati contraddittori.

Verità così semplici ed intuitive non possono rimanere più a lungo misconosciute, senza recar grave torto alla Geologia italiana.

Biologia (Morfologia). — *Struttura e proprietà delle fibrille a graticcio e reticolari in alcuni tessuti viventi* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ del Socio G. LEVI e di G. C. DOGLIOTTI.

Molto si è parlato negli ultimi anni delle sottili fibrille che in quasi tutti gli organi costituiscono una trama fittissima interposta fra cellule parenchimali e capillari sanguigni.

I caratteri morfologici di questo stroma reticolare, fibre a graticcio, Gitterfaseru dei tedeschi, diversi nei singoli organi sono stati minutamente descritti e si cercò di stabilire il nesso che esiste fra di esso ed il collagene.

Mà quest'argomento rimane tuttora molto confuso. Uno di noi ⁽³⁾ ha cercato di raggruppare, in base ai caratteri strutturali, le varietà di tessuto reticolare di organi differenti. E quasi contemporaneamente il Plenck (1927) ha trattato con profondità la natura e l'origine delle fibre a graticcio in una rivista sintetica, corredata da molte osservazioni personali.

Ma è singolare che nessuno si sia fino ad oggi curato di stabilire, se strutture da tempo conosciute ed alle quali a torto od a ragione si attribuisce importanza, preesistono realmente nei tessuti viventi oppure se non sono invece un prodotto di precipitazione determinato dai liquidi fissatori.

È noto che la fine trama fibrillare è invisibile o quasi coi comuni metodi di colorazione, si vede imperfettamente coi metodi per la dimostrazione del collagene (metodo Mallory), solamente con quelli all'argento od all'oro colloidale; talora, ma non in tutti gli organi anche colla reazione di Golgi si colora in modo elettivo. Furono inoltre di grande aiuto nelle ricerche sul reticolo i metodi di separazione meccanica del medesimo dalle cellule colle quali ha rapporti e specialmente quelle della digestione colla tripsina del materiale in precedenza fissato e tagliato al microtomo.

Vari Autori hanno elevato dei dubbi sulla reale esistenza del tessuto reticolare nel vivente; già anni or sono l'Jsaacs aveva espresso la convinzione che il reticolo è un prodotto di precipitazione dei fissatori. Policard

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto anatomico dell'Università di Torino.

(2) Presentata nella seduta del 30 maggio 1930.

(3) LEVI, *Trattato di Istologia*, 1927.

interpreta come prodotti di precipitazione le strutture che Mallory ha riunito nella denominazione comune di fibroglia e che corrispondono, almeno in gran parte, alle fibrille reticolari. Huzella suggestionato dalla rassomiglianza fra le pseudostrutture che si ottengono precipitando con fissatori delle soluzioni di albumina e le fibrille reticolari di alcuni tessuti esprime l'avviso che queste ultime non preesistono come tali nei preparati istologici, bensì come una sostanza omogenea con orientazione caratteristica determinata dalle necessità dinamiche delle cellule. Anche un autorevole istologo, lo Schaffer, ritiene indiscutibile che le fibre a graticcio del fegato, le quali non si possono mai, secondo l'A., isolare nel fegato fresco, vanno interpretati come prodotti di coagulazione intercellulare e pericellulare nei quali si deposita l'argento.

Però dagli scritti più recenti di Huzella, al quale dobbiamo le ricerche più originali fra le recenti, sulle fibre a graticcio sembra che egli abbia modificato alquanto le proprie vedute, nel senso che non ne pone più in dubbio l'esistenza reale delle medesime. Ed anche Plenk, allievo di Schaffer, esclude che rappresentino pseudostrutture.

Non ci risulta che lo stroma fibrillare sia stato studiato in vivo; nella letteratura abbiamo trovato soltanto le due seguenti notizie. Ettisch nel perinevrio, il quale in preparati all'argento appare a struttura finamente reticolare, ha visto all'esame in campo oscuro fibrille finissime ultramicroscopiche, parallele. Secondo de Renyi invece, il quale lavorò col micromanipolatore di Chambers, la guaina perinevrile delle fibre mieliniche di Rana consta di fibrille compresse le une contro le altre e contro la fibra nervosa da una sostanza interfibrillare tenace, in apparenza anista; quest'ultima può essere eliminata coll'iniettare nel tessuto una goccia di soluzione salina; allora la pressione del liquido iniettato solleva le fibrille e queste possono venir stirate dall'ago di vetro; abbandonate a sè si raccorciano di nuovo e lentamente riprendono la lunghezza che avevano prima. Esse sarebbero adunque di natura elastica.

Noi abbiamo iniziato, per studiare meglio di quanto fosse stato fatto finora lo stroma reticolare, due ordini di ricerche; le une di semplice osservazione, sovra organi freschi, evitando ogni trattamento che possa determinare nei medesimi una precipitazione di colloidi, dirette a dimostrare la reale esistenza delle fibrille nei tessuti viventi.

Tale compito ci fu facilitato dall'esperienza acquistata da molti anni da uno di noi sulla trama reticolare quale appare coi metodi all'argento. Furono utilizzati per controllo preparati di vari organi di uomo e di animali, col metodo Del Rio Hortega ed altri di ratto furono eseguiti di recente.

Un secondo gruppo di ricerche, e queste con metodo sperimentale, furono dirette a ricercare le proprietà fisiche delle medesime nei tessuti freschi: resistenza alla trazione, elasticità.

Le prime ricerche furono, almeno in parte, comunicate in forma succinta alla seduta del febbraio scorso alla Società di Biologia sperimentale. Ciononostante le riassumeremo, anche perchè le medesime furono nel frattempo proseguite ed estese.

Le poche osservazioni preliminari intraprese ci hanno convinto che l'antico metodo della dissociazione del tessuto fresco non è applicabile, verisimilmente, perchè le sottili fibrille se sottoposte ad azioni meccaniche grossolane si conglutnano alle cellule del parenchima e divengono invisibili. Il metodo da noi adottato, sebbene estremamente semplice non fu, per quanto ci consta, da altri usato a questo fine, di esaminare in liquido di Ringer sottili fette (di 10-15 μ di spessore) di organi freschissimi ottenute col microtomo a congelazione; queste sono molto trasparenti e possono essere analizzate coi più potenti mezzi ottici. Il dubbio che si potrebbe affacciare, che la bassa temperatura comprometta l'integrità del tessuto, non ha fondamento, dopochè le ricerche recenti di Bucciante hanno dimostrato che i tessuti di animali omeotermi, e non soltanto di quelli a sangue freddo, come era già noto, resistono a temperature bassissime, senza che le attività vitali siano compromesse. E del resto, l'osservazione microscopica delle fette ha dimostrato che le strutture più minute erano perfettamente conservate.

Abbiamo adoperato vari organi di ratto dimagrito mediante inanizione protratta, perchè ci è sembrato che, almeno in alcuni organi, l'analisi della trama fibrillare fosse facilitata, probabilmente per la diminuzione delle sostanze metaplasmatiche nelle cellule.

Non ci soffermeremo a lungo su quanto abbiamo visto nella milza, perchè sulla reale esistenza di uno stroma reticolare in questo organo, come pure nel tessuto linfoide non possono sussistere dubbi. Le immagini osservate coincidono pienamente con quanto si vede sia nei preparati di materiale fissato, nei quali le cellule racchiuse nelle maglie del reticolo furono digerite colla tripsina, sia nei preparati all'argento colloidale. I punti del preparato più favorevoli son quelli nei quali cellule contenute nelle maglie del reticolo furono in parte eliminate. Il reticolo è evidentemente in continuità coi fasci collageni più cospicui, i quali fanno capo alle trabecole. Le fibrille appaiono dotate di una sensibile refrangenza; nei punti nodali si vedono sovente degli ispessimenti; le cellule del reticolo aderiscono intimamente alle fibrille, com'è noto. Parimenti i preparati dei gangli linfatici di freschi ratto non differiscono da quelli colorati col metodo al tannato d'argento (Achucarro-Del Rio Hortega). Anche senza digestione con tripsina si vede facilmente la rete fibrillare, nelle maglie della quale risiedono i linfociti.

Anche nel timo abbiamo veduto fibrille intrecciate, alcune delle quali estremamente fini, ma la disposizione del reticolo è diversa da quella del tessuto linfoide e della polpa splenica.

Poichè però le strutture da noi viste in quest'organo sia a fresco che nei preparati col metodo Achucarro si discostano sensibilmente da quanto

hanno descritto Strandberg e Plenck, riteniamo preferibile di parlarne in altra occasione.

Neppure nei preparati di midollo osseo di coniglio che furono esaminati, vi è un reticolo a maglie regolari, come nella milza, bensì un graticcio di fibrille sottili e non molto numerose.

Anche le fibre a graticcio del fegato scoperte da von Kupffer sono facilmente visibili nelle fette di organi freschi. Però in quest'organo i rapporti intimi che le sottili fibre del reticolo hanno colle cellule epatiche, le quali d'altra parte essendo ripiene di granuli appaiono molto opache, ne rende ardua l'analisi ottica; perciò abbiamo trovato molto vantaggioso di sottoporre le fette ottenute dall'organo fresco ad un breve periodo di digestione con una soluzione diluita di tripsina alcalina. È indispensabile di evitare che le cellule epatiche siano distrutte, perchè in tal caso le fibrille reticolari si frammentano; ma in preparati nei quali le cellule furono soltanto parzialmente digerite, lo stroma del lobulo appare nei suoi più fini particolari; si vedono le fibre avvolgenti e di congiunzione (Maresch, Castaldi) le quali si dipartono dai fasci di fibre radiali. Nel fegato, come nella milza, anche le fibrille più sottili, per la sensibile refrangenza, risaltano molto bene. Però paragonando le immagini osservate a fresco con quelle ottenute col metodo di Achucarro, ci è sembrato che le anastomosi delle sottili fibre siano meno numerose di quelle visibili nei preparati all'argento; si vedono bensì fibrille intrecciate in varia direzione, anzichè reticoli a strette maglie; ci sembra adunque probabile che le reti a strette maglie si producano sotto l'azione dei reagenti per conglutinazione di fibrille indipendenti.

Nel rene abbiamo visto, nei punti in cui il canalicolo è stato sfiorato dalla lama, che ciascun canalicolo contorto è avvolto da una membranella, la quale consta di sottili strie circolari disposte con grande regolarità perpendicolarmente all'asse del canalicolo; ove il canalicolo s'incurva, si vede che i filamenti convergono verso la concavità, divergono a ventaglio verso il lato convesso, per ridivenire parallele ove il canalicolo riprende un tragitto rettilineo. Lungo i margini si vede una punteggiatura fine, la quale corrisponde alla sezione ottica delle strie.

Strutture molto simili a quelle da noi viste erano state in passato descritte nella letteratura; dagli uni furono interpretate come componenti della membrana propria del canalicolo (E. Bizzozero, B. von Frisch, Plenck), da altri come pertinenti allo stroma interstiziale (Rühle). Luna ritiene che questa membrana appartenga al tessuto reticolare ed ha osservato che spesso la medesima è rinforzata da fibre collagene.

Plenck ritiene, fondandosi su quanto ha osservato in preparati digeriti colla tripsina, che la membrana propria striata e l'involucro reticolare sono strutture distinte.

Già nella nostra prima comunicazione avevamo cercato di dimostrare l'infondatezza di queste affermazioni, riferendoci a quanto avevamo veduto

in preparati di rene di uomo e di altri animali col metodo al tannato d'argento, nei quali la membranella che avvolge il canalicolo consta di fibrille simili a quelle visibili a fresco; l'immagine è alquanto differente per la minor regolarità nel decorso delle fibrille.

Nel frattempo abbiamo allestito molti preparati al tannato d'argento di rene di ratto e quanto abbiamo visto non lascia adito a dubbi sulla natura della membranella a fibrille parallele visibile a fresco; questa appartiene certamente allo stroma reticolare; infatti nei preparati di rene di ratto le fibrille sono parallele e disposte con grande regolarità perpendicolarmente all'asse del canalicolo; l'identità fra le immagini a fresco e quelle dei preparati colorito col metodo Hortega è nel rene di ratto perfetta. Da queste nostre osservazioni emerge adunque che le fibrille le quali avvolgono i canalicoli contorti del rene hanno caratteri morfologici alquanto diversi da quelle di altri organi; non si anastomizzano a rete e neppure si intrecciano, bensì formano finissimi cerchi ad intervalli regolari. Però le medesime sono in continuità materiale colle fibre più grossolane interposte fra i canalicoli.

Sempre collo stesso metodo delle fette congelate di materiale fresco fu studiata la tonaca muscolare d'intestino crasso di ratto; si apprezza lungo il contorno di ciascuna cellula muscolare una linea refrangente, la quale, almeno in apparenza, corrisponde alla sezione ottica della membranella reticolare; ma in queste condizioni di osservazione non si vede, come nei preparati all'argento, la punteggiatura la quale corrisponde alle sezioni ottiche delle fibrille; in qualche punto abbiamo visto delle fibre a decorso trasversale rispetto all'asse delle cellule muscolari; ma è dubbio se queste corrispondano alle membrane proprie delle singole cellule, oppure ai sottili sepiamenti i quali separano i fascetti primari.

Ancor più incerti sono i risultati ottenuti nel miocardio; in preparati allestiti sempre collo stesso metodo abbiamo visto bensì finissime reti negli interstizi fra i fascetti delle fibrille del miocardio ma non siamo riusciti a distinguere gli involucri propri alle singole fibre, neppure in preparati sottoposti a digestione protratta. Con ciò non intendiamo di contestare la reale esistenza di membranelle fibrillari nel miocardio; per il momento ci limitiamo ad affermare che nelle condizioni di osservazione nelle quali ci siamo posti queste non erano visibili. È possibile che se queste condizioni verranno modificate, come ci proponiamo di fare, i risultati possano essere diversi.

Le ricerche eseguite con metodo sperimentale saranno riferite in forma preliminare perchè ancora incomplete. Ci siamo serviti del micromanipolatore di Péterfi. Sottili fette di fegato e di milza ottenute col microtomo a congelazione dall'organo fresco erano distese sopra un coprioggetti in liquido di Ringer e vi aggiungevamo una piccola goccia di soluzione di tripsina molto diluita. Il vetrino veniva collocato nella camera umida del microma-

nipolatore. Con due aghi di vetro, quanto più possibile sottili ma resistenti, abbiamo esercitato una trazione sovra un tratto di una fibrilla; oppure, ove lo stroma è a forma di rete, abbiamo cercato di stirare una maglia della rete; l'operazione veniva sorvegliata a forte ingrandimento. (Imm. apocr. Zeiss 3 mm. apertura 1,3. Oc. 8). Il problema che ci ponevamo con queste ricerche era quello di stabilire se le fibrille sono come le collagene inestensibili, oppure se invece si comportano come una molla, analogamente alle fibre elastiche, se cioè sono elastiche nel senso comune della parola. La questione fu già posta ma non analizzata sperimentalmente.

Mall era dapprima convinto che le fibrille reticolari siano costituite da elastina, ma poi mutò opinione ed accettò l'opinione dei Siegfried che consistono di una sostanza specifica (reticolina). Huzella ha di recente supposto che le fibre a graticcio siano dotate di elasticità attiva. Plenck invece per molti argomenti d'ordine indiretto lo contesta.

Il determinare la resistenza delle fibrille alla trazione è più difficile di quanto si potrebbe supporre; si hanno risultati chiari solamente quando si facciano coincidere due punti della scala del micrometro oculare con punti di repere sul decorso di una fibra; o meglio ancora quando si stiri una maglia della rete in modo che questa si allunghi.

Da quanto abbiamo veduto riteniamo escluso che le fibre a graticcio del fegato ed il reticolo della milza si comportino in modo analogo alle fibre elastiche; in nessun caso abbiamo visto che si lasciano distendere in misura notevole riprendendo subito la lunghezza originaria. Se però siano affatto inestensibili come le fibre collagene o se invece si allunghino in misura lieve, quando sono sottoposte a trazioni di alto grado, non potremmo ancora affermare con sicurezza. Se la prima supposizione apparisse confermata avremmo un validissimo argomento in appoggio alla supposizione che fu da molti anni avanzata che fibre a graticcio e collagene siano della stessa natura.

Certo è che le une e le altre hanno comune la proprietà di essere resistentissime; si lacerano solamente quando la trazione è intensa, relativamente all'estrema sottigliezza della fibra.

Riassunto. — Fu dimostrata l'esistenza reale in vivo delle fibrille a graticcio (reticolo) in molti organi: milza, gangli linfatici, timo, midollo osseo, fegato, rene; fu inoltre nella milza e nel fegato studiata la resistenza alla trazione delle fibre mediante il micromanipolatore di Péterfi; da quanto fu visto finora non risulta che le fibrille siano elastiche nel senso comune della parola.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Limite e pseudo-limite di una successione.* Nota di G. ANDREOLI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio R. MARCOLONGO.

1. *Premesse.* In questa ricerca ci proponiamo di giungere ad una definizione di limite, più ampia di quella abituale, con essa coincidente nel caso ordinario e che gode di tutte le sue proprietà.

Il valore calcolato attraverso la nostra definizione lo chiameremo « pseudo-limite »: ne daremo qui la definizione per una successione, ed in seguito per la variabile continua.

La via scelta è sostanzialmente diversa da quelle sinora seguite; anzi può comporsi con queste dando luogo ad ulteriori sviluppi, e permette di costituire tutto un processo ricorrente di definizioni, transfinite e sempre più ampie.

Con maggior precisione, restano fissate per la definizione di limite (e le altre connesse, quale continuità, derivata, integrale ecc.) due grandi vie.

La prima — quella classica — si riduce sostanzialmente a sostituire con una certa legge ad una successione data un'altra (ad esempio con la formazione di medie) che ammetta limite coincidente con quello della data — se v'è — o che possa ammetterlo anche se questa non lo abbia: e tale via è di natura sostanzialmente algoritmica.

La seconda invece, qui delineata, fa entrare in giuoco precisamente l'*ordine* (ciò che differenzia quindi la successione dallo insieme numerabile); mentre la definizione classica *non* tiene alcun conto di ciò, potendosi ovviamente definire il limite attraverso l'esistenza di un solo punto limite per l'insieme numerabile (e *non numerato*) costituito dagli elementi della successione: e ciò appunto senza tener conto dell'ordinamento. Nelle successive Note estenderemo ciò alla variabile continua.

Vedremo poi che, attraverso tale seconda direttiva assumano diverso aspetto molti punti delle funzioni di variabile reali.

2. *Definizione di limite ordinale o pseudolimite di una successione.*

Si abbia un insieme numerabile I ; sia I' il suo derivato, ξ un punto di questo scelto con un certo criterio.

Se ordiniamo l'insieme I in una successione $S(I)$, tale che scelto un numero σ piccolo a piacere si verifichi che i punti di S che cadono in

(1) Nella seduta del 30 maggio 1930.

$(\xi - \sigma, \xi + \sigma)$ formino una sotto-successione di frequenza ⁽¹⁾ 1, qualunque sia σ tendente a zero, noi diremo che ξ è il *limite ordinale* o lo *pseudolimit* della successione $S(I)$, scrivendo

$$\xi = \text{pslim } S(I) = \text{pslim}_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

In altri termini:

ξ è pseudolimit di S , quando, e solo quando:

1° esso è limite, nel senso ordinario, di una successione estratta da S ;

2° la successione residua ha frequenza nulla (oppure la successione estratta ha frequenza unitaria).

Si vede dunque che entra direttamente in giuoco l'ordine dato agli elementi dell'insieme I per formare la successione $S(I)$, poichè il concetto di frequenza (anche limitato al solo caso 1 e 0) è essenzialmente legato all'ordinamento imposto.

Due esempi chiariscono la definizione ora data.

Si abbia un insieme I costituito da punti di $(0, 1)$ aventi proprio 0 ed 1 come soli punti limiti. Consideriamo il punto $1/2$ e chiamiamo I' l'insieme comune a I e $(0, 1/2)$; con I'' quello ad I ed $(1/2, 1)$.

Ordiniamo I' in una successione decrescente che avrà dunque il limite 0; e sia $a'_1, a'_2, \dots \rightarrow 0$; ed I'' in una, crescente, col limite 1: $a''_1, a''_2, \dots \rightarrow 1$.

Se a sua volta ordiniamo I in modo da avere $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ con $a_{n^2} = a'_n$; mentre le a_v per $v \neq n^2$ formano nello stesso ordine con cui si susseguono la successione delle a'' , cioè

$$a_1 = a'_1; a_2 = a''_1; a_3 = a''_2; a_4 = a'_2; a_5 = a''_3; \dots, a_8 = a''_6; a_9 = a'_3; \dots$$

ci troviamo precisamente nelle condizioni volute per porre

$$\text{pslim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

Ed in effetti, la successione delle a_v ha per limite comune 1, mentre la successione delle a_{n^2} ha frequenza nulla.

Un altro esempio — ancora più perspicuo — si ha considerando come insieme I quello dei razionali fra 1 e 0. In tal caso, scegliamo come successione I' una qualunque successione di razionali aventi come solo punto

(1) Senza entrare in ulteriori sviluppi, almeno in queste Note, noi diremo che una sotto successione di $S \equiv a_n$, ha frequenza 1 se, indicando con $k(n)$ il numero di elementi da a_1 ad a_n che appartengano alla sottosuccessione, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = 1.$$

Similmente diremo che ha frequenza zero, se quel limite esiste ed è nullo. Ovviamente se una sottosuccessione ha frequenza uno (o zero) la complementare avrà frequenza zero (o uno).

limite ξ ($0 \leq \xi \leq 1$, del resto arbitrario) e come successione I'' tutti i rimanenti razionali nella sequenza con cui si trovano nel notissimo ordinamento. Si vede che, come prima, anche qui

$$\text{pslim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \xi.$$

3. Proprietà del limite ordinale.

È ovvio anzitutto che se una successione ammette limite, ammetterà anche lo pseudolimito, che coincide con quello.

Mostriamo invece che lo pseudo limite è unico. Supponiamo infatti che ne esistano almeno due distinti: α' , α'' .

Ciò implica che dato σ piccolo a piacere la sottosuccessione delle a_r per cui

$$|\alpha' - a_r| > \sigma$$

abbia sempre frequenza nulla; e che similmente abbia frequenza nulla l'altra sottosuccessione di a_q per cui

$$|\alpha'' - a_q| > \sigma.$$

Intanto, se $\sigma < \left| \frac{\alpha' - \alpha''}{2} \right|$, la seconda sottosuccessione — quella delle a_q — deve contenere tutti gli elementi della successione che ha per limite α' ; e poichè per definizione questa ha frequenza 1, ne sègue che la successione a_q che la comprende dovrà avere frequenza almeno eguale (anzi addirittura eguale, poichè le frequenze sono sempre incluse fra 0 ed 1): epperò anche essa avrà frequenza 1. Contrariamente all'ipotesi che avesse frequenza nulla.

Dunque necessariamente $\alpha' = \alpha''$.

Inoltre: Una successione somma di due assegnate, aventi pseudolimito, ammette anche essa uno pseudolimito, e questo è eguale alla somma di quelli.

In effetti se a_n è la prima e b_n la seconda successione, tali che

$$\text{pslim } a_n = \alpha; \quad \text{pslim } b_n = \beta;$$

ciò che implica una particolare sotto-successione a_v avente per limite α , mentre la complementare a_q ha frequenza nulla; e similmente una b_μ avente per limite β e la complementare b_r ha frequenza nulla.

Se ora si considera la somma logica delle due successioni (q) ed (r) , cioè l'insieme dei loro valori, comuni o no, ordinati e la si indica con (p) , si vede che anche (p) ha frequenza nulla rispetto a quella dei numeri naturali.

Intanto se (σ) è la successione complementare di (p) , i valori di (σ) non appartengono nè a (q) nè a (r) . Dunque le a_σ appartengono alle a_v ;

le b_σ alle b_μ ; e pertanto

$$\lim (a_\sigma + b_\sigma) = \lim a_\sigma + \lim b_\sigma = \lim a_\nu + \lim b_\mu = \alpha + \beta,$$

mentre la complementare ha frequenza nulla.

Perciò

$$\text{pslim} (a_n + b_n) = \text{pslim} a_n + \text{pslim} b_n.$$

Dimostrazione analoga vale per il prodotto; e quindi restano estese allo pseudolimito tutte le ordinarie proprietà del limite.

In modo del tutto analogo si vedrebbe che valgono le proprietà:

1° lo pslim di una successione resta invariato sopprimendo dalla successione S data una parziale; purchè gli elementi comuni con quella S' che serve a definire lo pslim , formino una S'' di frequenza nulla (tanto rispetto ad S quanto rispetto ad S');

2° si può aggiungere ad S una qualunque altra successione, senza alterare lo pslim , purchè soppressi gli elementi di questa che formino sottosuccessione il cui pslim è quello di S , resti una successione di frequenza nulla;

3° si può modificare l'ordine della successione S data, purchè resti unitaria la frequenza di S' : in particolare si possono scambiare comunque gli elementi di S' fra loro; quelli della complementare fra loro; ed una sottosuccessione di S' con una della complementare purchè ambedue abbiano frequenza nulla;

4° se due successioni a'_n, a''_n hanno lo stesso pslim α , e se una terza b_n è tale che i suoi elementi sono compresi fra due corrispondenti delle prime — salvo al più una sottosuccessione di frequenza nulla — allora anche

$$\text{pslim} b_n = \alpha.$$

Non vale ovviamente il principio che lo pslim di una successione estratta da una data esiste e sia eguale a quello della data; tuttavia si può dire che le sottosuccessioni per cui tale proprietà resta conservata hanno frequenza 1 nell'insieme delle sottosuccessioni di S (definiremo meglio ciò altrove).

4. Condizioni per l'esistenza dello pseudolimito.

Dalla stessa definizione da noi data, emergono le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza dello pslim : basta riprendere lo stesso procedimento che per la definizione di limite.

In effetti

$$\text{pslim} a_n = \xi$$

equivale a spezzare la successione degli indici in due $(p), (q)$ di cui per la prima

$$\lim a_p = \xi$$

mentre la seconda ha frequenza nulla.

Quindi, dato σ , se esiste ξ si deve poter determinare la successione (p) , parziale fra $1, 2, \dots, n, \dots$, tale che per qualunque σ piccolo esista un indice m pel quale

$$|a_\mu - a_\nu| < \sigma \quad \mu, \nu > m, \text{ in } (p)$$

mentre tale disequaglianza non è soddisfatta se uno degli indici appartiene a (q) .

All'impiccolire di σ alcuni dei valori di (p) passano a far parte di (q) e ciò indefinitamente; avendosi

$$\begin{aligned} (p) &\supseteq (p') \supseteq (p'') \supseteq (p'''), \dots \\ (q) &\supseteq (q') \supseteq (q'') \supseteq (q'''), \dots \end{aligned}$$

ove il segno di \supseteq sta per « contenuto in ».

Tuttavia la frequenza di $(q), (q'), (q''), \dots$, sottosuccessioni di (n) deve sempre restar nulla.

In altri termini: la successione di indici ρ_1 pei quali sia verificata la

$$|a_{\rho_1} - a_n| > \sigma_1$$

per ogni valore di n (o per una sottosuccessione di frequenza uno); l'altra successione ρ_2 , per cui

$$\sigma_1 \supseteq |a_{\rho_2} - a_n| > \sigma_2$$

e così via, devono formare nel loro insieme una successione R

$$R \equiv (\rho_1) + (\rho_2) + (\rho_3) + \dots$$

di frequenza nulla allorchè $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3, \dots, \rightarrow 0$.

Si vede d'altra parte che la particolare scelta delle σ non ha alcuna influenza sulla formazione di (R) , poichè partendo da un valore di σ abbastanza grande e scegliendo delle σ' invece delle σ , si avrebbe una (R') che comprende (R) e reciprocamente: cioè l'equivalenza fra (R) ed (R') ; ed invero siccome le σ e le σ' si alterneranno, tutte le ρ' che soddisfano ad una di quelle disequaglianze saranno tutte comprese fra le ρ per indice opportunamente elevato; e reciprocamente.

In modo analogo, soddisfatte che siano queste condizioni, si potrà costruire lo *pslim* con lo stesso processo che si usa per il limite.

Dunque le condizioni sopra date sono necessarie e sufficienti.

5. *Confronto con le altre definizioni di limite generalizzato.*

Come abbiamo detto sin da principio, il procedimento usato per definire lo *pseudolimit* è essenzialmente diverso dalle attuali generalizzazioni. In effetti può benissimo esistere il limite generalizzato secondo una certa legge di medie, senza che esista lo *pslim*; e reciprocamente. Ciò si può subito vedere.

Sia S' una successione a'_n ; S'' una di a''_n — di cui la prima abbia come limite comune α e la seconda arbitraria. — Se da S' ed S'' ricaviamo in qualsiasi modo una S — con la sola avvertenza di distribuire le a''_n con frequenza nulla — la S avrà come pslim sempre α , qualunque siano i valori numerici, anche divergenti, dati alle a'' .

Dunque in tal caso *esiste lo pslim, sempre*, mentre il limite generalizzato o manca o varia colla scelta di S'' .

Invece se scegliamo la S'' che tenda ad un limite β , e formiamo la S , alterpando le S' ed S'' con la frequenza $\frac{1}{2}$, allora qualunque processo di medie ci condurrà ad assegnare alla S il limite generalizzato $\frac{\alpha + \beta}{2}$, mentre lo pseudo-limite *non esisterà mai*.

Dunque resta dimostrato che si tratta di definizioni del tutto indipendenti, e che eventualmente si possono comporre fra loro.

Matematica (Calcolo numerico). — *Studio e tabellazione di una particolare funzione definita da un integrale improprio* ⁽¹⁾. Nota di GIUSEPPINA DELLA MOGLIE, presentata ⁽²⁾ dal Corrispondente G. SCORZA.

Il prof. Pistolesi della R. Scuola d'Ingegneria di Pisa ha proposto all'Istituto di Calcolo della R. Università di Napoli uno studio della seguente funzione del parametro λ :

$$\varphi(\lambda) = \int_0^{+\infty} \left(x + \frac{1}{2} - \sqrt{x + x^2} \right) \text{sen}(\lambda x) dx,$$

presentatagli in sue ricerche, allo scopo di pervenire ad una valutazione numerica di essa per valori di λ compresi fra zero e uno, con un errore non superiore a $1/10^3$.

Non pare facile una diversa espressione analitica della funzione $\varphi(\lambda)$ che ne consenta il calcolo numerico fondandosi su funzioni di cui già si possiedono tabelle numeriche. Scopo di questa Nota è di comunicare come io sia pervenuta direttamente allo studio qualitativo della funzione $\varphi(\lambda)$ e alle richieste determinazioni numeriche per essa.

1. Premettiamo alcune osservazioni che si giustificano quasi immediatamente.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Calcolo della R. Università di Napoli.

(2) Nella seduta del 30 maggio 1930.

Sia $y(x, \lambda)$, una funzione reale di x e di λ definita per λ variabile nell'intervallo (λ', λ'') , finito o infinito, e x variabile nell'intervallo $(0, +\infty)$, la quale, per ogni fissato valore di λ nel detto intervallo, riesca funzione di x positiva, decrescente e infinitesima per $x \rightarrow \infty$. Si ha allora, posto

$$I(\lambda) = \int_0^{+\infty} y(x, \lambda) \sin x \, dx,$$

che la funzione $I(\lambda)$ riesce ben determinata, finita e positiva nell'intervallo (λ', λ'') . Si ha inoltre, per il secondo teorema della media,

$$I(\lambda) = y(0, \lambda) \int_0^{\xi(\lambda)} \sin x \, dx,$$

ove $\xi(\lambda)$ ha un certo valore positivo; onde segue

$$I(\lambda) < 2 y(0, \lambda).$$

Ricordiamo anche ⁽¹⁾ che l'integrale $I(\lambda)$ riesce uniformemente convergente, al variare di λ in (λ', λ'') , se al variare in tal modo di λ la funzione $y(x, \lambda)$ è uniformemente infinitesima per $x \rightarrow \infty$. Si può dimostrare con tutto rigore e anche dedurre, per esempio, dalle tavole di Jahnke e Emde che, comunque si prendano i numeri positivi p e q , sussistono le seguenti limitazioni:

$$\left| \int_p^q \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt < 1,86,$$

$$\left| \int_p^q \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \right| \leq \int_0^\pi \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt < 1,80, \quad \left| \int_p^q \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt \right| \leq \int_0^\pi \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt < 1,96$$

mentre è ben noto che:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \right)^2 = \left(\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt \right)^2 = \frac{\pi}{2}.$$

2. Veniamo ora alla funzione $\varphi(\lambda)$ che considereremo esclusivamente per valori di λ positivi. Con un cambiamento della variabile di integrazione, la scriveremo:

$$\varphi(\lambda) = \frac{I(\lambda)}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{+\infty} \left[x + \frac{\lambda}{2} - \sqrt{x(x + \lambda)} \right] \sin x \, dx.$$

(1) Cfr. PICONE, *Lezioni di Analisi infinitesimale*. «Circolo matematico di Catania». Catania, R. Università, 1923, n. 107.

La funzione

$$y(x, \lambda) = x + \frac{\lambda}{2} - \sqrt{x(x + \lambda)},$$

riesce, per ogni valore di λ positivo, funzione di x positiva, decrescente ed infinitesima per $x \rightarrow \infty$, ed avendosi

$$y(x, \lambda) < \frac{\lambda^2}{8x},$$

essa riesce uniformemente infinitesima per $x \rightarrow \infty$, al variare di λ in ogni intervallo finito. L'integrale $I(\lambda)$ riesce dunque positivo ed uniformemente convergente per λ variabile in un intervallo finito e si ha inoltre $I(\lambda) < \lambda$. Ne segue

$$\varphi(\lambda) > 0, \quad \varphi(\lambda) < \frac{I}{\lambda}, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi(\lambda) = 0.$$

Fondandosi sempre sulle osservazioni premesse, si dimostra pure facilmente la uniforme convergenza, per λ variabile in ogni intervallo finito, degli integrali:

$$I'(\lambda) = \int_0^{+\infty} y_\lambda(x, \lambda) \sin x \, dx, \quad I''(\lambda) = \int_0^{+\infty} y_{\lambda\lambda}(x, \lambda) \sin x \, dx,$$

onde segue⁽¹⁾ che questi integrali sono rispettivamente le derivate prima e seconda di $I(\lambda)$. Si ha dunque

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} I(\lambda) = I(0) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} I'(\lambda) = I'(0) = 0,$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} I''(\lambda) = I''(0) = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{8}.$$

La regola di L'Hospital dà pertanto:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{I(\lambda)}{\lambda^2} = \frac{\pi}{16}.$$

La dimostrata possibilità di derivare sotto il segno integrale in $I(\lambda)$ ci consente di scrivere subito

$$\varphi'(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^3} \int_0^{+\infty} \left(2x + \frac{\lambda}{2} - \frac{\sqrt{x(4x + 3\lambda)}}{2\sqrt{x + \lambda}} \right) \sin x \, dx,$$

$$\varphi''(\lambda) = \frac{1}{\lambda^4} \int_0^{+\infty} \left(6x + \lambda - \frac{(24x^2 + 40x\lambda + 15\lambda^2)\sqrt{x}}{4\sqrt{x + \lambda}(x + \lambda)} \right) \sin x \, dx.$$

(1) Cfr. PICONE, loc. cit.

Le funzioni di x che moltiplicano $\sin x$ sotto il segno integrale nelle espressioni di $\varphi'(\lambda)$ e $\varphi''(\lambda)$ sono, per ogni fissato valore di λ , positive e decrescenti, come si vede facilmente, onde segue che è sempre $\varphi'(\lambda) < 0$, $\varphi''(\lambda) > 0$. Pertanto la curva $\varphi = \varphi(\lambda)$, partendo dal punto di ordinata $\pi/16$ dell'asse delle y , ha una ordinata sempre positiva e sempre decrescente al crescere di λ , ed infinitesima per $\lambda \rightarrow \infty$, mentre volge costantemente la concavità verso l'asse φ . La curva menzionata è riprodotta nella tavola annessa. Si deve pure osservare, come si dimostra con un'analisi ⁽¹⁾ piuttosto delicata, che, per $\lambda \rightarrow 0$, $\varphi'(\lambda)$ tende verso $-\infty$ come $\log \lambda$, onde segue che la curva $\varphi = \varphi(\lambda)$ tocca l'asse φ nel suo punto iniziale.

3. Per quanto riguarda la valutazione numerica di $\varphi(\lambda)$, laddove riesce facile trovare di essa uno sviluppo asintotico rapidamente convergente per $\lambda > 1$, ciò che sarà visto nel numero seguente, non è possibile per valori di $\lambda \leq 1$ che seguire la faticosa via che ora descriveremo e che del resto è valida qualunque valore positivo abbia λ . Si ha ovviamente:

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^{\pi} y(x + k\pi, \lambda) \sin x \, dx,$$

$$0 < \int_0^{\pi} y(x + k\pi, \lambda) \sin x \, dx < \frac{\lambda^2}{4k\pi},$$

e pertanto $\varphi(\lambda)$ riesce la somma di una serie con termini a segni alternati, il cui termine generale decresce sempre al crescere dell'indice k ed è infinitesimo per $k \rightarrow \infty$. Ponendo dunque

$$(1) \quad \varphi(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^{\pi} y(x + k\pi, \lambda) \sin x \, dx$$

si commette un errore R_n che in valore assoluto riesce minore di $1/(4n\pi)$. Pertanto, per essere sicuri che la (1) fornisce $\varphi(\lambda)$ con un errore minore di $1/10^3$, bisogna prendere $n \geq 80$. Ho dovuto dunque calcolare l'integrale

$$\frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\pi} \left[\sum_{k=0}^{79} (-1)^k y(x + k\pi, \lambda) \right] \sin x \, dx,$$

nel quale consiste la somma dei primi ottanta termini della serie considerata, con un errore minore di $1/10^3$. Tale calcolo ha richiesto molto tempo e non poca fatica. Ho applicato la formola d'integrazione approssimata Cavalieri-Simpson, spingendo le suddivisioni dell'intervallo $(0, \pi)$ fino a quando si è potuta accertare la stabilità delle cifre decimali fino a quella inclusa

(1) Che sarà esposta nella mia tesi di laurea.

dei millesimi⁽¹⁾. Volta a volta ho calcolato i valori di $y(x + k\pi, \lambda)$ sen x con tante cifre decimali quante ne occorrono per assicurare che le somme approssimatrici dell'integrale indicato sono, esse stesse, approssimate a meno di $1/10^3$. Ho così ottenuto i seguenti valori di $\varphi(\lambda)$:

TABELLA I

λ	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2	3	4
$\varphi(\lambda)$	0,196	0,147	0,134	0,124	0,115	0,108	0,083	0,067	0,059

4. Per valori di $\lambda \geq 5$ mi sono valsa degli sviluppi asintotici di cui vado rapidamente a parlare. Con una integrazione per parti si ha

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \left(\sqrt{x} - \frac{1+2x}{2\sqrt{1+x}} \right) \frac{\cos(\lambda x)}{\sqrt{x}} dx.$$

La funzione che moltiplica $(\cos \lambda x)/\sqrt{x}$ sotto il segno integrale vale $-1/2$ per $x=0$, è sempre negativa, crescente ed infinitesima per $x \rightarrow \infty$; onde segue:

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{2\lambda} \int_0^{\xi(\lambda)} \frac{\cos(\lambda x)}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{2\lambda^{3/2}} \int_0^{\lambda^{1/2}\xi(\lambda)} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$$

(1) Cfr. PICONE, *Possibilità di calcolo numerico nei problemi continui di matematica attuariale*. «Atti dell'Istituto Nazionale delle Assicurazioni», 1929. Con maggiore rigore si sarebbe potuto procedere così: Calcolare prima, a meno di $1/10^5$, ciascun integrale

$$(a) \quad \frac{(-1)^k}{\lambda^2} \int_0^\pi y(x + k\pi, \lambda) \sin x \, dx,$$

fondandosi sulla limitazione

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^{2n-1} \frac{(-1)^v}{\lambda^2} \int_0^\pi y(x + k\pi, \lambda) \frac{x^{2v+1}}{(2v+1)!} dx &< \frac{1}{\lambda^2} \int_0^\pi y(x + k\pi, \lambda) \sin x \, dx < \\ &< \sum_{v=0}^{2n} \frac{(-1)^v}{\lambda^2} \int_0^\pi y(x + k\pi, \lambda) \frac{x^{2v+1}}{(2v+1)!} dx, \end{aligned}$$

e sulla circostanza che gli integrali

$$\int_0^\pi y(x + k\pi, \lambda) x^{2v+1} dx,$$

sono calcolabili per via elementare; indi sommare gli ottanta integrali (a) ottenuti per $k=0, 1, \dots, 79$. Ma tale procedimento si rivelò subito poco pratico per il grandissimo tempo che richiedeva.

e quindi (cfr. n. 1)

$$\frac{1}{2\lambda} > \varphi(\lambda) > \frac{1}{2\lambda} - \frac{1,96}{2\lambda\sqrt{\lambda}}.$$

Ponendo dunque $\varphi(\lambda) = 1/(2\lambda)$ si commette un errore (per eccesso) che riesce minore di $1/10^3$ per $\lambda \geq 99$. Si ha:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \cos(\lambda x) dx = \\ &= \frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{2\lambda} \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{\sqrt{x}} dx + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \cos(\lambda x) dx = \\ &= \frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{2\lambda^{3/2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \cos(\lambda x) dx, \end{aligned}$$

ed integrando per parti

$$(2) \quad \varphi(\lambda) = \frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{2\lambda^{3/2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4\lambda^2} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{x^{3/2}} - \frac{1}{x^{3/2}(1+x)^{3/2}} \right) \sin(\lambda x) dx.$$

Osservando che la funzione che moltiplica $(\sin \lambda x)/\sqrt{x}$ sotto il segno di integrale vale $3/2$ per $x=0$, è sempre positiva, decrescente ed infinitesima per $x \rightarrow \infty$, ne deduciamo per $\varphi(\lambda)$ la seguente espressione

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{2\lambda^{3/2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{8\lambda^{5/2}} \int_0^{\lambda \xi(\lambda)} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx,$$

ove $\xi(\lambda)$ è una certa funzione di λ non negativa. Onde possiamo asserire (cfr. n. 1) che ponendo

$$(3) \quad \varphi(\lambda) = \frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{2\lambda^{3/2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

si commette un errore (per difetto) non superiore a $(3 \times 1,8)/(8\lambda^{5/2})$. Ne segue che la (3) fornisce $\varphi(\lambda)$ con un errore minore di $1/10^3$ per $\lambda \geq 13,54$. Il calcolo della (3), con esatte le cifre fino a quella dei millesimi, dà i valori della seguente tabella:

TABELLA II

λ	14	15	16	17	18	19	20
$\varphi(\lambda)$	0,024	0,023	0,0215	0,0205	0,020	0,019	0,018

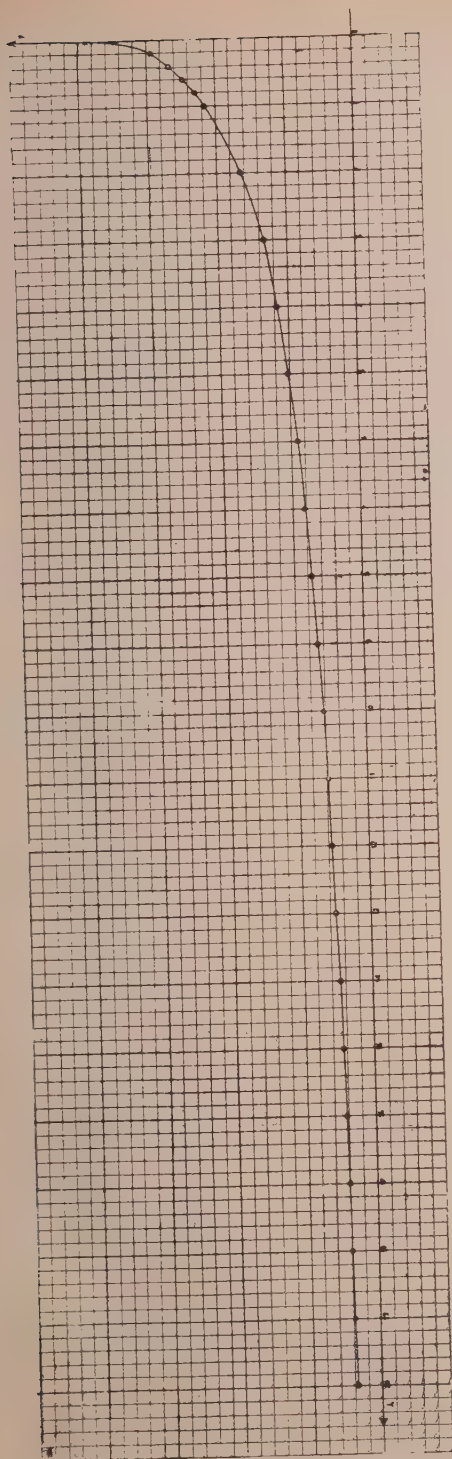


Grafico della funzione $\varphi(\lambda) = \int_0^\infty \left(x + \frac{1}{2} - \sqrt{x + \frac{1}{x^2}} \right) \sin(\lambda x) dx$.

Il rapporto fra l'unità di misura adottata per le ascisse e quella adottata per le ordinate è $1/20$.

Aggiungendo e togliendo $\frac{3}{2} \sqrt{x}$ alla funzione che moltiplica $\sin(\lambda x)$ sotto il segno di integrale nella (2), si può scrivere:

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{2\lambda^{3/2}} \left| \frac{\pi}{2} + \frac{3}{8\lambda^{5/2}} \right| \frac{\pi}{2} + \\ + \frac{1}{4\lambda^2} \int_0^\infty \left(\frac{1}{x^{3/2}} - \frac{3}{2x^{5/2}} - \frac{1}{x^{7/2}(1+x)^{3/2}} \right) \sin(\lambda x) dx,$$

e con un'integrazione per parti:

$$(4) \quad \varphi(\lambda) = \frac{1}{2\lambda} - \left(\frac{1}{2\lambda^{3/2}} - \frac{3}{8\lambda^{5/2}} \right) \left| \frac{\pi}{2} + \right. \\ \left. + \frac{3}{8\lambda^2} \int_0^\infty \left(\frac{1}{2x^{3/2}} + \frac{1+2x}{(x+x^2)^{3/2}} - \frac{1}{x^{5/2}} \right) \cos(\lambda x) dx \right|.$$

Aggiungendo e togliendo $\frac{5}{8} \sqrt{x}$ alla funzione che moltiplica $\cos(\lambda x)$ sotto il segno di integrale si ha anche

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\lambda} - \left(\frac{1}{2\lambda^{3/2}} - \frac{3}{8\lambda^{5/2}} + \frac{15}{64\lambda^{7/2}} \right) \left| \frac{\pi}{2} + \right. \\ \left. + \frac{3}{8\lambda^2} \int_0^\infty \left(\frac{1}{2x^{3/2}} + \frac{1+2x}{(x+x^2)^{3/2}} - \frac{1}{x^{5/2}} + \frac{5}{8x^{7/2}} \right) \cos(\lambda x) dx \right|$$

e con un'integrazione per parti:

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\lambda} - \left(\frac{1}{2\lambda^{3/2}} - \frac{3}{8\lambda^{5/2}} + \frac{15}{64\lambda^{7/2}} \right) \left| \frac{\pi}{2} + \frac{3}{8\lambda^2} \int_0^\infty y(x) \frac{\sin(\lambda x)}{\sqrt{x}} dx \right|,$$

ove

$$y(x) = \frac{(5x^2 + 12x - 40)(1+x)^{7/2} + 128x^2 + 128x + 40}{16x^3(1+x)^{7/2}}.$$

La funzione $y(x)$ vale $-105/96$ per $x=0$, consegue il suo massimo valore nel punto $x_0 = 1,142 \dots$ riuscendo $0 < y(x_0) < 0,2$, mentre che la $y(x)$ è sempre crescente nell'intervallo $(0, x_0)$, decrescente nell'intervallo $(x_0, +\infty)$ ed infinitesima per $x \rightarrow +\infty$. Detto pertanto x_1 l'unico punto di zero della $y(x)$ - che riesce interno all'intervallo $(0, x_0)$ - esisteranno tre certe funzioni $\xi_1(\lambda)$, $\xi_2(\lambda)$, $\xi_3(\lambda)$, verificanti le limitazioni $0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_0 \leq \xi_3$, per le quali si ha:

$$\int_0^\infty y(x) \frac{\sin(\lambda x)}{\sqrt{x}} dx = -\frac{105}{96} \int_0^{\xi_1(\lambda)} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx + 0,2 \int_{\xi_2(\lambda)}^{\xi_3(\lambda)} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx,$$

onde segue (cfr. n. 1) che ponendo

$$(5) \quad \varphi(\lambda) = \frac{1}{2\lambda} - \left(\frac{1}{2\lambda^{3/2}} - \frac{3}{8\lambda^{5/2}} + \frac{15}{64\lambda^{7/2}} \right) \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

si commette un errore che in valore assoluto non supera la quantità

$$\frac{3}{8\lambda^{9/2}} \left(\frac{105}{96} + 0,2 \right) \times 1,8 < \frac{0,874}{\lambda^{9/2}}.$$

Se ne deduce che la (5) fornisce il valore di $\varphi(\lambda)$ con un errore minore di $1/10^3$ per $\lambda \geq 4,5$.

Il calcolo della (5) con esatte le cifre fino a quella dei millesimi dà i valori della seguente tabella:

TABELLA III

λ	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\varphi(\lambda)$	0,051	0,045	0,041	0,037	0,034	0,031	0,029	0,0275	0,026

Coi valori numerici indicati nelle tabelle I, II, III, si è tracciato il diagramma della funzione $\varphi(\lambda)$ riprodotto nella tavola annessa.

Matematica. — *Calcolo di π colla serie di Leibniz.* Nota di F. AUDISIO, pres. dal Socio G. PEANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sur les suites de M. Fubini.* Nota di S. FINIKOFF, pres. dal Corrisp. G. FUBINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Le discendenze normali dei gruppi cremoniani geometrici.* Nota di D. MONTESANO, pres. dal Socio R. MARCOLONGO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Théorèmes de moyenne pour les fonctions de deux variables réelles.* Nota di MIRON NICOLESCO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio V. VOLTERRA.

1. Dans un travail relativement récent, M. Mauro Picone établit quelques propriétés très élégantes de moyenne pour les solutions de certaines équations aux dérivées partielles ⁽²⁾. Tout d'abord, il remarque que pour une fonction $u(x, y)$, harmonique dans un domaine C , on a les formules suivantes de moyenne, en nombre infini :

$$(1) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + \rho \cos \theta, y + \rho \sin \theta) e^{in\theta} d\theta = \frac{\rho^n}{n! 2^n} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^n u(x, y),$$

($n = 0, 1, 2, \dots$).

Bien entendu, le point (x, y) est supposé situé à l'intérieur du domaine C et le nombre positif ρ tel que le cercle $\Gamma_\rho(x, y)$, de centre (x, y) et de rayon ρ soit compris dans le domaine C . Dans la même Note, M. Picone fait voir que sa formule est valable pour des fonctions plus générales que les fonctions harmoniques: *Si une fonction $u(x, y)$ possédant des dérivées continues dans C , jusqu'à l'ordre n , vérifie la formule (1), la fonction*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^n u(x, y)$$

est harmonique ⁽³⁾.

Ce sera, pour nous, le *théorème de M. Picone*.

2. Les lignes qui suivent sont consacrées à l'établissement d'une formule générale dont la plupart des résultats contenus dans la Note de M. Picone en seront des conséquences immédiates. La même formule nous permettra aussi de généraliser le théorème de M. Picone.

J'énonce tout de suite le théorème:

(1) Nella seduta del 30 maggio 1930.

(2) M. PICONE, *Teorema di media per le soluzioni di talune equazioni alle derivate parziali*, « Rendiconti del Circ. Matem. di Palermo », t. LI, 1927, pp. 25-37.

(3) Peu de temps après l'apparition de la Note de M. Picone, M. Francesco Sbrana a donné une démonstration directe de cette propriété. Voir: FR. SBRANA, *Teoremi di media per le soluzioni di certe equazioni alle derivate parziali*, « Rendiconti dei Lincei », serie VI, vol. VI, 1927, pp. 92-96.

Si $u(x, y)$ est une fonction possédant dans C des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre $n + 2p$ inclus, on aura, pour tout point (x, y) de $C_R^{(1)}$,

$$(2) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + \rho \cos \theta, y + \rho \sin \theta) e^{in\theta} d\theta = \\ = \sum_{k=0}^{k=p} \frac{\rho^{n+2k}}{k! (n+k)! 2^{n+2k}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^n \Delta_{kll}, \quad (\rho \leq R).$$

Les divers termes de la somme du second membre sont calculés au point (x, y) , sauf le dernier qui est calculé en un point (x', y') convenablement choisi à l'intérieur du cercle $\Gamma_0(x, y)$.

On a posé

$$\Delta_0 = 1, \Delta_1 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Delta_k = \Delta(\Delta_{k-1}).$$

Pour démontrer cette formule, nous procéderons par induction. Nous la supposerons vraie pour $n = v$ et nous montrerons qu'elle vraie pour $n = v + 1$. Nous mettrons, pour cela, à contribution une formule établie par M. Fr. Sbrana dans la Note citée plus haut. En posant

$$M_v(x, y, \rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + \rho \cos \theta, y + \rho \sin \theta) e^{iv\theta} d\theta,$$

M. Sbrana obtient la formule suivante:

$$(3) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \int_0^R \rho^{v+1} M_v(x, y, \rho) d\rho = R^{v+1} M_{v+1}(x, y, R).$$

Or, on a, par hypothèse,

$$(4) \quad M_v(x, y, \rho) = \sum_{k=0}^{k=p} \frac{\rho^{v+2k}}{k! (v+k)! 2^{v+2k}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^v \Delta_{kll}(x, y).$$

On en déduit:

$$(5) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \int_0^R \rho^{v+1} M_v(x, y, \rho) d\rho = \\ = \sum_{k=0}^{k=p} \frac{R^{2v+2k+2}}{k! (v+k+1)! 2^{v+2k+1}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^{v+1} \Delta_{kll},$$

(1) D'après une notation de M. E. E. Levi, C_R est le domaine tel que tout cercle de rayon R et dont le centre est à l'intérieur de C_R , soit compris dans C . Voir E. E. LEVI, *Sopra una proprietà caratteristica delle funzioni armoniche*, « Rendiconti dei Lincei », 1909, pp. 10-15.

donc, par comparaison avec (3),

$$M_{v+1}(x, y, R) = \sum_{k=0}^{k=p} \frac{R^{v+2k+1}}{k! (v+k+1)! 2^{v+2k+1}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^{v+1} \Delta_k u.$$

Or, la formule (2), pour $n=0$, n'est autre chose que la formule de M. P. Pizzetti (1). Elle est donc vraie pour $n=0$. Le calcul fait plus haut montre qu'elle le sera aussi pour $n=1$. Donc elle est vraie pour toute valeur de n .

Dans notre démonstration il y a une petite difficulté en ce qui concerne la dérivation du dernier terme au second membre de (4), mais cette difficulté s'enlève facilement en remarquant que notre formule n'est, au fond, que le développement taylorien de $M_v(x, y, \rho)$ par rapport à la variable ρ . On a donc

$$u_k(x, y) = \frac{C_{v+2k}^k}{2^{v+2k}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^n \Delta_k u(x, y) = \left[\frac{\partial^{v+2k} M_v(x, y, \rho)}{\partial \rho^{v+2k}} \right]_{\rho=0}$$

et

$$u_p(x'_p, y'_p) = \left[\frac{\partial^{v+2p} M_v}{\partial \rho^{v+2p}} \right]_{\rho=\rho'_p} \quad (\rho'_p < \rho).$$

On posera

$$\left[\frac{\partial^{v+2p} M_v}{\partial \rho^{v+2p}} \right]_{\rho=\rho'_p} = \left[\frac{\partial^{v+2p} M_v}{\partial \rho^{v+2p}} \right]_{\rho=0} + \varepsilon_p,$$

ε_p étant, en vertu de la continuité, infiniment petit avec ρ . On aura aussi

$$u_p(x'_p, y'_p) = u_p(x, y) + \varepsilon_p.$$

Par l'opération qui fait passer de (4) à (5), $u_p(x'_p, y'_p)$ deviendra donc

$$u_{p+1}(x, y) + \bar{\varepsilon}_p,$$

$\bar{\varepsilon}_p$ indiquant le résultat de cette opération sur ε_p . En comparant ceci avec le développement taylorien de $M_v(x, y, \rho)$, poussé cette fois-ci jusqu'à l'ordre $v+2p+2$, on déduit

$$\bar{\varepsilon}_p = \varepsilon_{p+1}.$$

Donc on pourra poser

$$u_{p+1}(x, y) + \bar{\varepsilon}_p = u_{p+1}(x, y) + \varepsilon_{p+1} = u_{p+1}(x'_{p+1}, y'_{p+1})$$

(x'_{p+1}, y'_{p+1}) étant, comme (x'_p, y'_p) , intérieur au cercle $\Gamma_q(x, y)$.

Le théorème est ainsi complètement démontré.

(1) P. PIZZETTI: *Sulla media dei valori che una funzione dei punti dello spazio assume alla superficie di una sfera*, « Rendiconti R. Acc. dei Lincei », 1909, pp. 182-185; *Sul significato geometrico del secondo parametro differenziale di una funzione sopra una superficie qualunque*, « Rendiconti dei Lincei », 1909, pp. 309-316.

3. Les résultats de M. Picone, rappelés au début de cette Note, se lisent maintenant facilement sur notre formule (2). On peut obtenir encore une propriété: Divisons les deux membres de notre formule par ρ^n et faisons tendre ρ vers zéro. On obtient

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2\pi\rho^n} \int_0^{2\pi} u(x + \rho \cos \theta, y + \rho \sin \theta) e^{in\theta} d\theta \right] = \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^n u(x, y).$$

C'est le théorème IV de la Note citée de M. Picone.

Voici maintenant la généralisation du théorème de M. Picone:

Supposons que l'on ait, quel que soit ρ , et le point (x, y) ,

$$(6) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + \rho \cos \theta, y + \rho \sin \theta) e^{in\theta} d\theta = \\ = \sum_{k=0}^{k=\rho} \frac{\rho^{n+2k}}{k! (n+k)! 2^{n+2k}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^n \Delta_k u,$$

tous les termes du second membre (donc le dernier aussi) étant calculés au point (x, y) . On peut alors affirmer que $u(x, y)$ est solution de l'équation suivante aux dérivées partielles:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^n \Delta_{\rho+1} u(x, y) = 0.$$

Une fois de plus, nous mettrons à contribution les résultats de M. Fr. Sbrana. On a

$$\Delta \int_0^R \rho^{n+1} M_n(x, y, \rho) d\rho = R^{n+1} \frac{\partial M_n(x, y, R)}{\partial R} - n R^n M_n(x, y, R) \quad (1).$$

En appliquant cette formule au second membre de (6), on obtient

$$\sum_{k=0}^{k=\rho} \frac{R^{n+2k+2}}{k! (n+k+1)! 2^{n+2k+1}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^n \Delta_{k+1} u = \\ = \sum_{k=0}^{\rho} \frac{R^{n+2k}}{(k-1)! (n+k)! 2^{n+2k-1}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^n \Delta_k u,$$

(1) FR. SBRANA, Note citée, formule (8).

d'où il s'ensuit immédiatement que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right)^n \Delta_{p+1} u(x, y) = 0.$$

Pour $p = 0$, on obtient le théorème de M. Picone.

Pour $n = 0$, on obtient un théorème de M. Fr. Sbrana ⁽¹⁾, généralisant un théorème de M. E. E. Levi ⁽²⁾.

Matematica. — *Remarques sur les équations intégrales-fonctionnelles.* Nota di C. POPOVICI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Determinazione delle tensioni in un mezzo elastico dovute ad un piccolo spostamento di una sfera rigida immersa.* Nota di ENRICO VOLTERRA, presentata ⁽³⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Impostazione della questione.

In una Nota precedente abbiamo studiato la deformazione di un mezzo elastico dovuta ad un piccolo spostamento di una sfera rigida immersa. Vogliamo ora determinare le tensioni che nascono nell'interno di tale mezzo. Poniamo coll'Almansi

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = (R^2 - r^2) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda, \\ v = (R^2 - r^2) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu, \\ w = (R^2 - r^2) \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \nu; \end{array} \right.$$

u, v, w sono le componenti dello spostamento dei punti del mezzo, R il raggio della sfera, r la distanza del punto generico nel quale si vogliono determinare le u, v, w dal centro della sfera; λ, μ, ν e φ sono delle fun-

(1) FR. SBRANA, *Sopra una proprietà caratteristica delle funzioni poliarmoniche e delle soluzioni dell'equazione delle membrane vibranti*, « Rendiconti R. Accad. dei Lincei », 1925, pp. 369-371.

(2) Note citée.

(3) Nella seduta del 30 maggio 1930.

zioni armoniche incognite da determinare caso per caso in base ai dati della questione. Noti i valori di u, v, w sulla superficie della sfera restano determinati i valori superficiali delle funzioni λ, μ e ν e quindi le funzioni stesse in quanto armoniche e regolari all'esterno e nulle all' ∞ . La φ viene determinata per mezzo delle equazioni di elasticità nel caso di forze di massa nulle, cioè dalle condizioni

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 u = -k \frac{\partial \theta}{\partial x}, \\ \Delta^2 v = -k \frac{\partial \theta}{\partial y}, \\ \Delta^2 w = -k \frac{\partial \theta}{\partial z}. \end{array} \right.$$

a cui le (1) devono soddisfare. Le (2) si riducono all'unica condizione

$$(3) \quad \varphi + r \frac{\partial \varphi}{\partial r} (2 + k) + \frac{k}{2} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} \right) = c$$

ove c costante arbitraria si dimostra essere $= 0$.

La (3), integrata, designando per brevità con m la costante $\frac{1}{2+k}$ e fissando la costante di integrazione in modo che φ si annulli all' ∞ , ci dà:

$$(4) \quad \varphi = \frac{km}{2r^m} \int_0^\infty r^{m-1} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} \right) dr.$$

Dalle (1) ricaveremo

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} = (R^2 - r^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial x}, \\ \gamma_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} = (R^2 - r^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial y}, \\ \gamma_{33} = \frac{\partial w}{\partial z} = (R^2 - r^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - 2z \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \nu}{\partial z}, \\ \gamma_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} x + \frac{\partial \varphi}{\partial x} y \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial x} + 2(R^2 - r^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \\ \gamma_{13} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} x + \frac{\partial \varphi}{\partial x} z \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial z} + \frac{\partial \nu}{\partial x} + 2(R^2 - r^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}, \\ \gamma_{23} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} y + \frac{\partial \varphi}{\partial y} z \right) + \frac{\partial \mu}{\partial z} + \frac{\partial \nu}{\partial y} + 2(R^2 - r^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}; \\ \theta = \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33} = -2r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z}. \end{array} \right.$$

2. Rotazione di componente ω intorno all'asse x .

Sarà in tal caso:

$$\lambda = 0, \quad \mu = \omega R^3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}, \quad \nu = -\omega R^3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y}, \quad \varphi = 0.$$

Le (5) diverranno:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= 0, & \gamma_{12} &= \omega R^3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y}, \\ \gamma_{22} &= \omega R^3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2}, & \gamma_{13} &= -\omega R^3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z}, & \theta &= 0, \\ \gamma_{33} &= -\omega R^3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}, & \gamma_{23} &= \omega R^3 \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

Le tensioni saranno

$$(6) \quad \begin{aligned} t_{11} &= 0, & t_{12} &= \frac{E}{1+m} \omega R^3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y}, \\ t_{22} &= \frac{E}{1+m} \omega R^3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2}, & t_{23} &= -\frac{E}{1+m} \omega R^3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z}, \\ t_{33} &= -\frac{E}{1+m} \omega R^3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}, & t_{23} &= \frac{E}{1+m} \omega R^3 \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

Sulla superficie della sfera le (6) diventano

$$\begin{aligned} t_{11} &= 0, & t_{12} &= 3\omega \frac{E}{1+m} \frac{x y}{R^2}, \\ t_{22} &= 3\omega \frac{E}{1+m} \frac{y^2}{R^2}, & t_{23} &= -3\omega \frac{E}{1+m} \frac{x y}{R^2}, \\ t_{33} &= -3\omega \frac{E}{1+m} \frac{z^2}{R^2}, & t_{23} &= 3\omega \frac{E}{1+m} \frac{z^2 - y^2}{R^2}. \end{aligned}$$

Si hanno quindi le componenti locali dello sforzo:

$$\begin{aligned} X' &= t_{11} \alpha + t_{12} \beta + t_{13} \gamma & \alpha &= \frac{x}{R}, \\ Y' &= t_{21} \alpha + t_{22} \beta + t_{23} \gamma & \beta &= \frac{y}{R}, \\ Z' &= t_{31} \alpha + t_{32} \beta + t_{33} \gamma & \gamma &= \frac{z}{R}. \end{aligned} \quad \text{ove}$$

perciò indicando con $M_x, M_y, M_z; X, Y, Z$ i momenti risultanti e le componenti del risultante delle forze agenti sulla sfera per una rotazione di componente ω intorno all'asse delle x , otterremo:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{\Omega} (Y'_z - Z'_y) d\Omega & X &= \int_{\Omega} x' d\Omega \\ M_y &= \int_{\Omega} xZ' d\Omega & Y &= \int_{\Omega} y' d\Omega \\ M_z &= - \int_{\Omega} xY' d\Omega & Z &= \int_{\Omega} z' d\Omega \end{aligned}$$

ove l'integrazione va estesa a tutta la superficie Ω della sfera. Effettuando le integrazioni risulta

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_x = \frac{32}{5} \omega \pi \frac{E}{1+m} R^3 \\ M_y = 0 \\ M_z = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X = 0 \\ Y = 0 \\ Z = 0 \end{array} \right.$$

e va notato che era evidente *a priori* per ragione di simmetria l'annullarsi di M_y, M_z, Y, Z .

Analogamente, considerando rotazioni di componenti χ e ρ intorno agli assi y e z , otterremo i valori corrispondenti di M_y e M_z

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_y = \frac{32}{5} \chi \pi \frac{E}{1+m} R^3 \\ M_z = \frac{32}{5} \rho \pi \frac{E}{1+m} R^3 \end{array} \right.$$

indicando quindi con ω il vettore rotazione con M il momento con H l'espressione $\frac{32}{5} \pi \frac{E}{1+m} R^3$ potremo enunciare il seguente teorema:

Se una sfera rigida immersa in un mezzo elastico subisce una rotazione ω nasce un momento rispetto all'asse di rotazione M tale che

$$M = H \omega.$$

3. Traslazione di ampiezza a secondo l'asse delle x .

Sarà in tal caso

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{Ra}{r} \\ \mu = 0 \\ \nu = 0 \end{array} \right. \quad \varphi = \frac{k Ra x}{2(\bar{\kappa} - 1) r^3}$$

Le (5) diventano sulla superficie della sfera

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{11} = -2x \frac{R^2 - 3x^2}{R^4} \frac{ka}{2(k+1)} - \frac{ax}{R^2} \\ \gamma_{22} = \frac{3ka}{k+1} \frac{xy^2}{R^4} \\ \gamma_{33} = \frac{3ka}{k+1} \frac{xz^2}{R^4} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{12} = \frac{ka}{k+1} \frac{6x^2y - R^2y}{R^4} - \frac{ay}{R^2} \\ \gamma_{13} = \frac{ka}{k+1} \frac{6x^2z - R^2z}{R^4} - \frac{az}{R^2} \\ \gamma_{23} = \frac{ka}{k+1} \frac{6xyz}{R^4} \end{array} \right.$$

ed indicando al solito con $X, Y, Z; M_x, M_y, M_z$ le componenti del risultante delle forze ed i momenti risultanti agenti sulla sfera, otterremo:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{2aR\pi E}{15(1-m^2)} \frac{10m^2 - 6m + 3}{2m - 1} \\ M_x = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} Y = 0, Z = 0; \\ M_y = 0, M_z = 0. \end{array}$$

Qui pure segue senza alcun calcolo la semplice considerazione di simmetria che $Y = Z = M_y = M_z = 0$.

Analogamente, per delle traslazioni di ampiezza b e c secondo gli assi y e z , otterremo

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y = \frac{2bR\pi E}{15(1-m^2)} \frac{10m^2 - 6m + 3}{2m - 1} \\ Z = \frac{2cR\pi E}{15(1-m^2)} \frac{10m^2 - 6m + 3}{2m - 1} \end{array} \right.$$

Indicando quindi con t il vettore traslazione con F la forza con K l'espressione $\frac{2R\pi E}{15(1-m^2)} \frac{10m^2 - 6m + 3}{2m - 1}$ potremo enunciare il seguente teorema:

Se una sfera rigida immersa in un mezzo elastico subisce una traslazione t nasce una forza F tale che

$$F = Kt.$$

Le formule (7), (8), (9), (10) ci permettono di determinare, note le sei caratteristiche dello spostamento della sfera rigida, cioè le tre componenti della rotazione e le tre componenti della traslazione, le sei caratteristiche degli sforzi, cui sottostà la sfera, cioè le tre componenti del risultante e i tre momenti risultanti.

Meccanica. — *Indagini circa i momenti baricentrici, scalare e vettore, delle quantità di moto per un sistema materiale.* Nota di F. LAMBERTI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Stokes, per giungere alla sua definizione ⁽²⁾ *meccanica* del vettore vortice che, ad un istante t stabilito, corrisponde ad un qualsiasi punto P interno ad una massa fluida in moto, si riferisce al fluido σ situato internamente ad una sfera piccolissima con centro in P ed immagina che, soppresso il fluido circostante a σ e cessata sulle molecole di σ ogni altra azione esterna, siano simultaneamente introdotti i vincoli che rendono invariabili le attuali mutue distanze delle stesse molecole. Degli atti di moto traslatorio e rotatorio di σ , dopo l'azione delle percosse dovute ai subitanei vincoli, il secondo è rappresentato dal vettore ω passante per il baricentro di σ . La definizione di Stokes consiste nell'identità di ω col vettore da definire.

Dal suddetto procedimento sorge l'idea, avuto riguardo al diverso ordine delle grandezze della particella σ e di un sistema discreto e finito, S , di punti materiali, di ricorrere ad un artificio che differisce da quello di Stokes per la circostanza che i vincoli cui si supporrà sottoposto il sistema S , anche ora in modo repentino, al generico istante t , sono del tipo di quelli che incontrammo per i sistemi denominati ametamorfì ⁽³⁾. Siccome risulterà che all'istante immediatamente successivo all'azione delle percosse che, in generale, avranno luogo simultaneamente all'introduzione di tali vincoli, le entità meccaniche elementari, quantità di moto e momenti intrinseci, scalare e vettore, delle quantità di moto, \mathbf{Q} , \mathbf{H} , \mathbf{K} , del sistema S , reso ametamorfò, avranno grandezze rispettivamente eguali a quelle delle entità \mathbf{Q} , \mathbf{H} , \mathbf{K} , all'istante t , dello stesso sistema per l'atto di moto naturale, così si vedrà anche che, sia pure in modo indiretto, nel procedimento annunciato consiste, in sostanza, un metodo per giungere ad un'interpretazione *meccanica* delle suddette entità. Inoltre, mediante la concezione di speciali sistemi, come riferimenti del sistema S in un moto relativo baricentrico, per i quali i punti dello spazio, individuati, che ne fanno parte non sono, come si è soliti supporre, invariabilmente collegati fra loro, bensì in un modo che ha

(1) Nella seduta del 30 maggio 1930.

(2) STOKES, *On the friction of fluids in motion*, « Trans. of the Cambridge Philosoph. Society », vol. VIII.

(3) *Sui moti elementari componenti del moto relativo baricentrico di un sistema materiale*, « Rendic. Accad. Lincei », vol. X, p. 336.

riscontro in quello dei punti di un sistema ametamorfo con polo G , sarà possibile giungere ad una visione più completa e sintetica delle proprietà del moto relativo \mathfrak{M}_r di S rispetto al solito sistema traslativo solidale con G , nelle quali se ne osservano di due specie, in relazione ai due distinti aspetti di detto moto che riflettono i suoi componenti di dilatazione e di turbolenza ⁽¹⁾ con polo G .

È premessa, essendo necessaria per svolgere il procedimento, la deduzione della terza equazione cardinale per moti impulsivi.

2. Sia il sistema S , come al solito, quello dei punti P_i di masse m_i ($i = 1, 2, \dots, N$) per il quale si ammette che, in qualche istante isolato, sia soggetto a percosse; sia t uno di questi istanti e, nell'ipotesi ammissibile che durante l'intervallo piccolissimo τ successivo a t al quale si collega, secondo il concetto classico, l'azione delle percosse, valga l'equazione cardinale della terna fondamentale:

$$\frac{dH_r}{dt} = 2 T_r + L_r$$

ove $H = H_r$, L_r sono i momenti scalari intrinseci delle quantità di moto e delle forze e T_r la forza viva relativa rispetto al baricentro, si applichi per essa il procedimento col quale sono dedotte, nel caso di moti impulsivi, le due equazioni cardinali note. Nel caso presente vi sarà, di speciale,

soltanto da notare che essendo il termine $\int_t^{t+\tau} T_r dt$ da trascurarsi per

$\tau \rightarrow 0$, perchè T_r è finito, anche nell'equazione cercata, che è la seconda delle (1), si trovano solo due termini. In conclusione, possiamo scrivere così completata la terna di equazioni cardinali per i moti impulsivi:

$$(1) \quad \Delta Q = \mathbf{R}, \quad \Delta H = L_r, \quad \Delta K = \mathbf{M}_r,$$

ove $\Delta Q, \Delta H, \Delta K$, dinotano gl'incrementi delle indicate entità per effetto delle percosse supposte all'istante t , delle quali $\mathbf{R}, L_r, \mathbf{M}_r$, sono il risultante e i soliti momenti rispetto a G . E nei riguardi della terna di equazioni cardinali in cui i momenti si riferiscano ad un polo distinto dal baricentro G di S , in essa le equazioni dei momenti sono, come facilmente si constata, combinazioni lineari-geometriche nella specie che corrisponde alla natura scalare o vettoriale del momento, delle equazioni della terna (1); cosicchè anche per i moti impulsivi si ha una terna fondamentale rispetto a tutte le altre, corrispondenti a poli distinti dal baricentro del sistema materiale.

(1) Su una terza equazione cardinale nella Dinamica dei sistemi materiali, «Rendic. Accad. dei Lincei», vol. VIII, p. 679.

Occorre infine notare che, ovviamente, i secondi membri delle (1) possono riferirsi soltanto alle percorse attive se all'istante t sono dagli eventuali vincoli di S consentiti sistemi di spostamenti virtuali scomponibili ciascuno in una traslazione d'insieme, una dilatazione omotetica ed una rotazione rigida, ognuna di grandezza arbitraria e le due ultime aventi come polo G .

3. Sia ora t un istante qualsiasi e s'immagini che durante il brevissimo intervallo (t, t_1) siano sopprese tutte le forze agenti sul sistema S , in special modo le eventuali percorse, nonché i vincoli sia interni che esterni se ne esistono, e per contro il sistema sia sottoposto a vincoli del tipo che s'incontra nella seconda Nota citata ⁽³⁾, mediante i quali vennero definiti i sistemi ametamorfici. Se τ è la durata delle forze grandissime che si sostituiscono alle percorse, da qualificarsi interne, che in generale hanno luogo simultaneamente all'introduzione dei suddetti vincoli, e, ricordando che $\tau \rightarrow 0$, si pone $\tau < t_1 - t$, le componenti $v_i^{(e)}, v_i^{(\tau)}$, secondo le direzioni di $\varphi_i \equiv GP_i$ ed ortogonale della velocità relativa $v_i^{(r)}$, rispetto a G , del generico punto P_i saranno durante l'intervallo $(t + \tau, t_1)$ espresse da:

$$(2) \quad v_i^{(e)} = n \varphi_i, \quad v_i^{(\tau)} = \omega \wedge \varphi_i,$$

ove n, ω , dinotano rispettivamente uno scalare ed un vettore indipendente da i . Facendo ora, simultaneamente a τ , tendere a zero anche l'intervallo $t_1 - t$, in modo però che esso si conservi sempre maggiore di τ , rimarranno definite e, dall'atto di moto naturale \mathfrak{M} all'istante t in cui per S furono fatte le precedenti ipotesi ideali, saranno univocamente determinate le velocità dei punti P_i nel conseguente atto di moto ametamorfo \mathfrak{M}_1 all'istante $t + \tau$. Se allo stesso moto impulsivo si applicano le (1), nelle quali i secondi membri, per le condizioni cui soddisfano i vincoli e stante l'assenza di percorse attive, diventano nulli, si dedurranno, come è preannunciato al n. 1 ove pure trovasi definito il significato dei simboli, le relazioni

$$(3) \quad Q = Q_1 \quad H = H_1 \quad K = K_1$$

le quali mostrano che le entità elementari del sistema S nell'atto di moto naturale \mathfrak{M} si sono trasferite con inalterato valore nell'atto di moto ametamorfo \mathfrak{M}_1 .

4. Dello stesso \mathfrak{M}_1 si possono calcolare le caratteristiche v_G, n, ω , perchè n si deduce dalla relazione:

$$(4) \quad H_1 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} J_G = n J_G,$$

per la seconda delle (3) e la prima delle (2), dove J_G è, al solito, il momento d'inerzia polare baricentrico, che si suppone noto insieme ad H , e

n, ω , si otterranno nell'identico modo che nel moto di un solido. Cosicché se si osserva come per \mathfrak{M} , siano assai semplici le relazioni di dipendenza fra le entità Q_i, H_i, K_i , e, rispettivamente, le caratteristiche v_0, n, ω , delle quali quella fra H_i ed n è la (4) e le altre sono ovviamente le stesse che valgono nel moto dei solidi, facilmente si riconosce che al procedimento col quale si giunse alle n, n, ω , è legata un'interpretazione meccanica delle entità Q, H, K , per l'atto di moto \mathfrak{M} , che è quella alla quale si è pure accennato nel n. 1.

5. Dalle seconda e terza delle (3), scritte:

$$(5) \quad \sum_i q_i \times m_i(v_i^{(q)} - n q) = 0$$

$$(6) \quad \sum_i q_i \wedge m_i(v_i^{(r)} - \omega \wedge q_i) = 0$$

si deducono rispettivamente a riguardo degli atti di moto $\mathfrak{M}_q, \mathfrak{M}_r$, per i quali le velocità del generico punto P_i sono $v_i^{(q)}, v_i^{(r)}$, proprietà valide istante per istante delle quali quelle che provengono dalla (6) sono note in una forma alquanto diversa dall'altra in cui, per l'opportuno coordinamento con le proprietà connesse alla (5), verranno prospettate. Si rileverà, infatti, che la (6), nel cui termine generale si può, per l'identità $q_i \cdot v_i^{(r)} = 0$, sostituire $v_i^{(r)}$ a $v_i^{(r)}$, diventa con ciò la relazione⁽¹⁾ che dà la rotazione ω del riferimento minimizzante, che indicheremo con σ , solidale con G , per l'energia cinetica relativa di S .

Per dare le stesse proprietà nella forma che ci interessa osserveremo che se si considerano tutti i simultanei sistemi di riferimento σ che corrispondono alle rotazioni ω , dove ω è un vettore applicato in G , fra i quali è σ , e per ognuno di essi si scompone \mathfrak{M}_r nei due $\mathfrak{M}'_r, \mathfrak{M}''_r$, per cui le velocità del generico punto P_i sono rispettivamente $\omega \wedge q_i, v_i^{(r)} - \omega \wedge q_i$, cosicché si può raffigurare $\mathfrak{M}'_r, \mathfrak{M}''_r$, quali componenti di trascinamento e relativo dell'atto di moto \mathfrak{M}_r rispetto al generico riferimento σ , risulta che, fra tutti i sistemi σ , σ è riferimento minimizzante anche per l'energia cinetica T'' corrispondente a \mathfrak{M}''_r . Infatti, in base all'accennata decomposizione, espressa da $\mathfrak{M} = (\mathfrak{M}_q - \mathfrak{M}'_r) + \mathfrak{M}''_r$, dove $\mathfrak{M}_q - \mathfrak{M}'_r$ è l'atto di moto relativo rispetto a σ , nella energia cinetica corrispondente a questo, $T_q + T''$, il termine T_q non varia al variare di ω , quindi il minimo di detta energia e quello di T'' si verificano simultaneamente col riferi-

(1) « Lezioni di Meccanica Razionale » di LEVI-CIVITA e AMALDI, vol. II, parte I^a p. 317.

mento σ . È ovvio che tale risultato può, col solito procedimento, ottenersi direttamente risolvendo il problema di trovare fra i riferimenti σ quello per cui l'energia T''_{τ} ha il minimo valore.

Così nella forma voluta la prima proprietà a riguardo del particolare sistema σ , fra quelle che si tratta di rilevare, corrisponde alla circostanza che σ è riferimento minimizzante per l'energia cinetica di S per il componente atto di moto \mathfrak{N}''_{τ} . Circa le altre proprietà, con manifesto significato dei simboli che saranno in seguito usati, in corrispondenza degli atti di moto cui si riferiscono i quali appariranno dai rispettivi apici ed indici, costituisce semplice interpretazione della (6) la seconda proprietà, relativa alle quantità di moto di S , per cui il momento vettore baricentrico \mathbf{K}_{τ} è eguale agli analoghi momenti \mathbf{K}_{τ} , (onde $\mathbf{K}''_{\tau} = 0$), \mathbf{K}_r e, infine, \mathbf{K} , che corrisponde all'atto di moto assoluto \mathfrak{N} , mentre la terza proprietà, espressa dalla seguente relazione fra energie cinetiche di S :

$$T_{\tau} = T'_{\tau} + T''_{\tau},$$

risulta per avere:

$$\sum_i^N m_i (\omega \wedge \mathbf{q}_i) \times (\mathbf{v}_i^{(\tau)} - \omega \wedge \mathbf{q}_i) = \omega \times \sum_i^N \mathbf{q}_i \wedge m_i (\mathbf{v}_i^{(\tau)} - \omega \wedge \mathbf{q}_i) = 0.$$

Ora alle suddette, che possono dirsi relative ad \mathfrak{N}_{τ} , fanno riscontro altrettante proprietà riferentisi in modo simile ad \mathfrak{N}_0 nei riguardi della decomposizione fattane mediante un particolare sistema di riferimento fra quelli, σ^* , di una speciale classe, per ciascuno dei quali la totalità dei punti dello spazio individuati come appartenenti ad esso è, istante per istante, dotata di un atto di moto di dilatazione omotetica, di caratteristica \bar{n} (funzione di t), con polo G . È ovvio che il criterio col quale si procede per \mathfrak{N}_0 a tali decomposizioni è quello solito, cioè la velocità del punto P_i di S nel componente atto di moto di trascinamento, \mathfrak{N}'_0 , è $\bar{n} \mathbf{q}_i$, velocità del punto P_i di σ^* per cui P_i viene a passare nello stesso istante, e quella del relativo, \mathfrak{N}''_0 , è espressa da $\mathbf{v}_i^{(0)} - \bar{n} \mathbf{q}_i$. Con procedimento nei riguardi della (5) che non sarebbe se non la parafrasi, nella rispettiva specie del moto di cui si tratta, del procedimento seguito per la (6), si deduce che per il particolare riferimento σ^* che corrisponde al valore n , per \bar{n} , dato dalla (5), l'energia cinetica T''_0 di S per \mathfrak{N}_0 ha il valore minimo; che, nei riguardi delle quantità di moto di S , il momento scalare baricentrico H_0 è eguale agli analoghi momenti H_0 (per cui $H''_0 = 0$), H_r ed infine H , il quale corrisponde all'atto di moto assoluto \mathfrak{N} ; e così pure sussiste l'altra proprietà circa le indicate energie cinetiche di S :

$$T_0 = T'_0 + T''_0.$$

Dopo ciò sorge naturale l'idea di considerare le precedenti proprietà relative a due distinti aspetti di un medesimo riferimento fra quelli, *ammettiamorfi*, (σ) definiti ciascuno dalle rispettive caratteristiche \bar{n} , ω , mediante i quali, seguendo il solito criterio, sono operate le corrispondenti decomposizioni dell'atto di moto \mathfrak{M}_r . Si ottengono così come componenti, per ciascun riferimento, due atti di moto \mathfrak{M}_{t_i} , \mathfrak{M}_{r_i} , di trascinamento e relativo, per i quali si ha $\mathfrak{M}_{t_i} = \mathfrak{M}'_e + \mathfrak{M}'_r$, $\mathfrak{M}_{r_i} = \mathfrak{M}''_e + \mathfrak{M}''_r$. Ne viene che se il riferimento è quello particolare (σ) le cui caratteristiche n , ω , sono date dalle (5), (6), valendo simultaneamente le due specie di proprietà dianzi rilevate, facilmente risulta che: l'energia cinetica relativa T_{r_i} di S ha il valore minimo; a riguardo delle quantità di moto di S , i momenti scalare e vettore baricentrici H_{t_i} , \mathbf{K}_{t_i} , sono rispettivamente eguali agli analoghi momenti H_r , \mathbf{K}_r , (per cui $H_{r_i} = 0$, $\mathbf{K}_{r_i} = 0$) ed H , \mathbf{K} (per \mathfrak{M}); e, finalmente, circa l'energia cinetica di S per \mathfrak{M}_r , si ha ancora la decomposizione:

$$T_r = T_{t_i} + T_{r_i}.$$

Meccanica. — *Su alcuni teoremi fondamentali dell'elettrodinamica e della statica dei solidi elastici.* Nota di D. BONVICINI, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una Memoria pubblicata nei « Rendiconti » di questa Accademia il prof. Lelli⁽²⁾ osserva alla fine come i due teoremi di minimo calore dell'elettrodinamica possano trovare applicazione anche in altri campi della meccanica. Qui si vuol mettere a confronto tutta quella parte dell'elettrodinamica cui i teoremi medesimi si riferiscono, cioè la teoria della distribuzione della corrente elettrica in regime permanente in un conduttore di forma qualunque, colla statica dei solidi elastici: dei due suddetti teoremi si dimostrerà l'uno del tutto analogo al teorema di Menabrea, l'altro ad una proposizione molto ovvia, ma che non mi risulta sia stata mai esplicitamente enunciata.

Sia (S) lo spazio occupato rispettivamente da un conduttore e da un solido elastico: corpi che non si voglion supporre nè isotropi nè omogenei; e questo spazio, che potrà aver connessione semplice o multipla, sia limitato da una superficie, o un sistema di superficie, che indicheremo con (Σ) . Indicheremo con \mathbf{I} la corrente elettrica (riferita all'unità di area normale); la quale non porremo che soddisfaccia sempre alla condizione $\text{div } \mathbf{I} = 0$, ammettendo, come nella memoria surricordata del prof. Lelli, che possa

(1) Nella seduta del 30 maggio 1930.

(2) Sul teorema del minimo calore di W. Thomson. « Rend. Acc. Lincei », 1929.

darsi cessione o sottrazione di carica elettrica dall'esterno al conduttore considerato, oltre che nei punti della superficie per contatto con altri conduttori, anche direttamente in punti interni del conduttore medesimo (sorgenti o pozzi d'assorbimento di corrente). La divergenza di \mathbf{I} , funzione del punto in (S) , rappresenterà dunque — secondo la convenzione usuale sul senso della corrente — la carica positiva immessa in ciascun punto per unità di volume nell'unità di tempo; mentre la carica positiva immessa per unità di area in ciascun punto della superficie (Σ) sarà data evidentemente dall'espressione $\mathbf{I} \times \mathbf{n}$, rappresentando \mathbf{n} il vettore unitario diretto secondo la normale interna. Ad \mathbf{I} , vettore, facciamo corrispondere nel caso dell'elasticità l'omografia β della tensione; alla quantità scalare $\text{div. } \mathbf{I}$ il vettore ($-\text{grad } \beta$), che com'è noto rappresenta la forza di massa agente in ciascun punto di (S) , per unità di volume; mentre il vettore $\beta \mathbf{n}$ rappresenta nei punti della (Σ) la forza di superficie per unità di area.

Indicheremo con \mathbf{E} la forza elettrica, legata alla corrente dalla relazione

$$\mathbf{I} = \lambda \mathbf{E}$$

essendo λ un'omografia, e più precisamente una dilatazione, che nel caso di un conduttore isotropo si riduce ad un moltiplicatore scalare (conducibilità). Indicheremo con α l'omografia della deformazione elastica, legata all'omografia β della tensione, che è notoriamente una dilatazione, dalla relazione

$$\beta = \Lambda D\alpha$$

essendo Λ un operatore lineare tra dilatazioni (cosicchè il prodotto ΛD rappresenta, come D , un'iperomografia degenera). Le omografie α e β si penseranno scisse in due parti: l'una, che indicheremo con α_0, β_0 , rappresentante la deformazione e la tensione già presente nello stato naturale del corpo, vale a dire quando questo sia libero da ogni forza esterna, e si dirà rispettivamente deformazione e tensione iniziale; l'altra, che indicheremo con α_1, β_1 , dovuta all'azione delle forze esterne. Allo stesso modo i vettori \mathbf{E} ed \mathbf{I} si penseranno composti di una parte $\mathbf{E}_0, \mathbf{I}_0$, già presente quando il conduttore sia del tutto isolato (cioè non riceva e non ceda carica elettrica nè in punti della superficie, nè in punti interni), la quale potrà chiamarsi rispettivamente forza elettrica e corrente iniziale, e di una parte $\mathbf{E}_1, \mathbf{I}_1$, dovuta agli scambi coll'esterno. La deformazione α sarà detta congruente quando dipenda da uno spostamento continuo \mathbf{s} , cioè quando possa porsi in tutto lo spazio (S) $\alpha = \frac{d\mathbf{s}}{d\mathbf{p}}$, essendo il vettore \mathbf{s} funzione monodroma e continua nello spazio medesimo: condizione necessaria è che sia in tutto (S) $\text{Rot } K\alpha = 0$. Proprietà corrispondente a questa sarà per la forza elettrica il costituire un campo lamellare, o potenziale, intendendosi anche

qui che il potenziale U dal quale essa dipende secondo la relazione

$$\mathbf{E} = - \text{grad } U$$

debba essere nel detto spazio funzione monodroma e continua: condizione necessaria è qui $\text{rot } \mathbf{E} = 0$.

Nello svolgimento della teoria dell'elasticità si fa spesso ricorso ad un lemma, noto come teorema dei lavori virtuali. Dato il nome di lavoro virtuale interno per unità di volume, relativo alla deformazione virtuale $\delta \alpha$, alla quantità $I_1(\beta \delta \alpha) = I_1(\beta D \delta \alpha)$, si dimostra facilmente che se $\delta \alpha$ è congruente il lavoro virtuale interno totale, cioè l'integrale in (S) di tale quantità, è uguale al lavoro virtuale di tutte le forze esterne per lo spostamento $\delta \mathbf{s}$ dal quale la deformazione medesima dipende. Basta scrivere, applicando una nota formula di analisi vettoriale,

$$\text{div}(\beta \delta \mathbf{s}) = \text{grad } \beta \times \delta \mathbf{s} + I_1\left(\beta \frac{d\delta \mathbf{s}}{dP}\right),$$

ed integrare in (S) ricordando che $(-\text{grad } \beta)$ rappresenta la forza di massa, e che

$$\begin{aligned} \int_{(S)} \text{div}(\beta \delta \mathbf{s}) dV &= - \int_{(\Sigma)} \beta \delta \mathbf{s} \times \mathbf{n} dA = - \int_{(\Sigma)} \beta \mathbf{n} \times \delta \mathbf{s} dA = \\ &= \text{lavoro delle forze di superficie.} \end{aligned}$$

Per il caso della corrente elettrica si può scrivere analogamente

$$\text{div}(\delta U \cdot \mathbf{I}) = \text{div } \mathbf{I} \delta U + \mathbf{I} \times \text{grad } \delta U,$$

ed integrare in (S) ricordando che

$$\int_{(S)} \text{div}(\delta U \cdot \mathbf{I}) dV = - \int_{(\Sigma)} \mathbf{I} \times \mathbf{n} \delta U dA;$$

posto allora $\delta \mathbf{E} = - \text{grad } \delta U$, si ha la formula

$$\int_{(S)} \mathbf{I} \times \delta \mathbf{E} dV = \int_{(S)} \text{div } \mathbf{I} \delta U dV + \int_{(\Sigma)} \mathbf{I} \times \mathbf{n} \delta U dA,$$

che corrisponde al suddetto teorema dei lavori virtuali. Il primo membro rappresenta infatti il lavoro in più che compirebbero nell'unità di tempo le correnti che percorrono il conduttore, supposte invariate, per l'incremento virtuale δU del potenziale, ossia per la forza elettrica virtuale lamellare $\delta \mathbf{E}$; il secondo il corrispondente aumento della perdita d'energia subita nell'unità di tempo dalle cariche esterne.

Se dai lavori virtuali si passa ai lavori effettivi, si viene a considerare nella teoria dell'elasticità il potenziale elastico unitario

$$\varphi = \frac{1}{2} I_1(\beta \alpha) = \frac{1}{2} I_1(\beta D \alpha),$$

somma dei lavori interni per i successivi incrementi della deformazione effettiva, dallo stato naturale di ogni elemento, nel quale sia nulla la deformazione e la tensione, fino allo stato di deformazione che si considera.

Posto allora $\varphi_0 = \frac{1}{2} I_1 (\beta_0 \alpha_0)$ — potenziale elastico unitario per lo stato naturale del corpo, quale sopra fu definito —, $\varphi_1 = \frac{1}{2} I_1 (\beta_1 \alpha_1)$, si avrà ovviamente

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \frac{1}{2} I_1 (\beta_0 \alpha_1) + \frac{1}{2} I_1 (\beta_1 \alpha_0);$$

o anche per la relazione d'elasticità $\beta = \Lambda D \alpha$,

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + I_1 (\beta_0 \alpha_1) = \varphi_0 + \varphi_1 + I_1 (\beta_1 \alpha_0).$$

Indicheremo con Φ, Φ_0, Φ_1 gli integrali in (S) di $\varphi, \varphi_0, \varphi_1$: i due primi rappresentano il potenziale elastico totale rispettivamente per lo stato che si considera e per lo stato naturale del corpo; l'ultimo è uguale, per il teorema dei lavori virtuali, al lavoro delle forze esterne nel passaggio tra i due stati. Per questi integrali vale la relazione fondamentale

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1,$$

risultando immediatamente dallo stesso teorema ora ricordato che

$$\int_{(S)} I_1 (\beta_0 \alpha_1) dV = 0.$$

E poichè dal teorema medesimo risulta d'altra parte che la deformazione iniziale α_0 non può mai essere congruente (perchè posto che sia tale, ne viene che dev'esser nullo il potenziale Φ_0 , e nulla pertanto la deformazione medesima), la relazione precedente viene ad esprimere il *teorema di Menabrea*: *A parità di forze esterne il potenziale elastico totale è minimo nel caso che sia nulla in tutto (S) la deformazione iniziale, vale a dire che la deformazione attuale sia congruente.*

Al potenziale elastico unitario ed a quello totale corrispondono nell'elettrodinamica rispettivamente il calore di Joule unitario $q = \mathbf{I} \times \mathbf{E}$ e il calore di Joule totale

$$Q = \int_{(S)} q dV = \int_{(S)} \mathbf{I} \times \mathbf{E} dV$$

che rappresentano, rispettivamente per l'unità di volume in un punto generico di (S) e per tutto il conduttore, il lavoro effettivo compiuto nell'unità

di tempo dalle correnti che percorrono il conduttore medesimo. Posto allora

$$Q_0 = \int_{(S)} q_0 dV = \int_{(S)} \mathbf{I}_0 \times \mathbf{E}_0 dV,$$

$$Q_1 = \int_{(S)} q_1 dV = \int_{(S)} \mathbf{I}_1 \times \mathbf{E}_1 dV,$$

vale anche qui, in virtù del lemma che abbiamo visto corrispondere al teorema dei lavori virtuali, la relazione

$$Q = Q_0 + Q_1,$$

ed esprime il teorema di minimo calore di *W. Thomson*: *A parità di cariche scambiate coll'esterno il calore di Joule totale è minimo nel caso che sia nulla in tutto (S) la forza elettrica iniziale, vale a dire che il campo attuale di forza elettrica sia lamellare.*

L'altro teorema di minimo calore, stabilito nella Nota sopra ricordata del prof. Lelli, può enunciarsi così: *A parità di potenziale nei punti di una parte (Σ_1) quale si voglia della superficie il calore di Joule totale è minimo nel caso che sia nulla in ogni punto interno di (S) e in tutta la rimanente parte (Σ_2) della superficie medesima la carica immessa; vale a dire che la corrente soddisfaccia in (S) alla condizione $\text{div } \mathbf{I} = 0$, e alla condizione $\mathbf{I} \times \mathbf{n} = 0$ in (Σ_2). Come il teorema precedente non è che l'espressione dell'ortogonalità tra la corrente dovuta alle cariche scambiate coll'esterno e la forza elettrica iniziale, o tra la corrente iniziale e la forza dovuta alle cariche suddette, così quest'ultimo esprime l'ortogonalità tra la corrente dovuta alle cariche che diremo direttamente cedute o sottratte, la quale indicheremo con $\mathbf{I}_i^{(0)}$, e la forza elettrica provocata da potenziali assegnati in superficie, che indicheremo con $\mathbf{E}_i^{(0)}$ — o tra la corrente $\mathbf{I}_i^{(0)}$ corrispondente a quest'ultima e la forza $\mathbf{E}_i^{(0)}$ dovuta alle suddette cariche:*

$$\int_{(S)} \mathbf{I}_i^{(1)} \times \mathbf{E}_i^{(0)} dV = \int_{(S)} \mathbf{I}_i^{(0)} \times \mathbf{E}_i^{(1)} dV = 0.$$

La corrente $\mathbf{I}_i^{(1)}$ e la forza $\mathbf{E}_i^{(1)}$ si vuol intendere che siano quelle determinate da valori assegnati di $\text{div } \mathbf{I}$ nei punti di (S) e di $\mathbf{I} \times \mathbf{n}$ nei punti di (Σ_2), quando l'altra parte (Σ_1) della superficie si supponga tutta isolata all'infuori di un punto mantenuto ad un certo potenziale arbitrario (condizione necessaria per lo stabilirsi di un regime permanente ove non sia $\int_{(S)} \text{div } \mathbf{I} dV + \int_{(\Sigma_2)} \mathbf{I} \times \mathbf{n} dA = 0$). La corrente $\mathbf{I}_i^{(0)}$ e la forza $\mathbf{E}_i^{(0)}$, saranno quelle che vengano ad aggiungersi alle precedenti per il fatto di assegnare

un potenziale determinato (rispetto a quello arbitrario suddetto) ad ogni altro punto della (Σ) . Coll'applicazione del solito lemma si dimostra subito che quest'ultima parte risulta indipendente dalla presenza della prima, come tutt'e due della presenza di correnti iniziali, e che sussiste tra le due parti la sopra espressa relazione d'ortogonalità.

A questo teorema corrisponde nella teoria dell'elasticità il seguente:
A parità di spostamenti nei punti di una parte qualsi voglia delle superficie (Σ) il potenziale elastico totale è minimo nel caso che sia in ogni punto di (S) $\text{grad } \beta = 0$, e $\beta n = 0$ in tutta la rimanente parte di (Σ) ; vale a dire che sia libero tutto il corpo da forze di massa, e libera quest'ultima parte di (Σ) da forze di superficie. In sostanza la tensione provocata da spostamenti assegnati in superficie (i quali andranno sempre considerati, s'intende, a meno di un movimento di corpo rigido, che corrisponde qui al potenziale arbitrario in un punto, di cui sopra si è detto) può anche includersi nella definizione della tensione iniziale, avendo in comune con questa, quale è stata sopra strettamente definita, la proprietà di essere ortogonale alla deformazione provocata da forze assegnate di massa e di superficie: è chiaro del resto che questo caso degli spostamenti assegnati su (Σ) può riguardarsi come limite di un caso particolare di deformazione iniziale, quello cioè che sia data una discontinuità dello spostamento su una superficie qualsiasi. Questa ampliata definizione della deformazione e della tensione iniziale è quella che di solito si prende in considerazione nella scienza delle costruzioni, dove si parla di tensioni indipendenti dai carichi; come appunto nell'enunciato usuale del teorema di Menabrea.

Fisica. — *L'interpretazione del principio di causalità nella meccanica quantistica.* Nota di E. FERMI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio O. M. CORBINO.

Lo scopo di questa Nota è di precisare fino a che punto si può, secondo la meccanica quantistica, parlare di causalità, e in che senso deve intendersi la affermazione che la meccanica quantistica non conduce a una determinazione degli avvenimenti futuri. Da questo stesso programma risulta che in questo lavoro non saranno contenuti che in minima misura risultati nuovi; ma verranno solo espresse, in una forma nuova, relazioni già conosciute. Per maggiore chiarezza di esposizione mi limiterò a considerare il caso della meccanica di un punto mobile lungo una retta; le considerazioni qui svolte potrebbero però facilmente estendersi al caso di sistemi più complicati.

Lo stato del sistema meccanico costituito da un punto mobile lungo una retta si determina, nella meccanica classica, indicando a un certo istante, p. es. $t = 0$, la posizione e la velocità 0 , che è lo stesso, la quantità di moto. Basta cioè, per individuare lo stato, dare, per $t = 0$, l'ascissa x del punto e la sua quantità di moto $p = m\dot{x}$. Se, come vogliamo supporre, è conosciuta l'energia potenziale $U(x)$ della forza che agisce sopra il punto, la conoscenza di x e p all'istante $t = 0$ determina univocamente i valori di queste due grandezze per tutti gli istanti passati e futuri; in questo senso si intende la affermazione che nella meccanica classica vale il principio di causalità; vale cioè la proprietà che la determinazione dello stato del sistema a un certo istante è sufficiente per determinare lo stato del sistema stesso in qualsiasi istante del passato o dell'avvenire; ben inteso, supponendo che il sistema considerato non venga perturbato dall'azione di altri sistemi non completamente conosciuti. In tutto quello che segue parleremo sempre di principio di casualità classico in questo senso preciso.

Naturalmente, sempre restando nel caso classico, non è necessario, per la determinazione dello stato del sistema, misurare proprio i valori di x e di p all'istante zero; si può anche p. es. misurare i valori di due funzioni indipendenti $f(x, p)$ e $g(x, p)$ della x e della p ; dal valore di queste si possono poi, volendo, ricavare i valori di x e di p .

Dobbiamo ora vedere come queste considerazioni vanno modificate quando le si trasportano nella meccanica quantistica. Dobbiamo perciò esaminare che cosa occorre conoscere di un sistema, secondo la meccanica

(1) Nella seduta del 30 maggio 1930.

quantistica, per poter dire di averne determinato lo stato. Heisenberg ha fatto vedere che non è possibile una misura contemporanea esatta di x di p ; che anzi, se si effettua una misura esatta della x , la quantità di moto p resta necessariamente del tutto indeterminata, e che viceversa resta completamente indeterminata la x se si misura con esattezza completa la p . In altre parole per un sistema avente, come il nostro, un solo grado di libertà, si può pensare di effettuare con precisione assoluta la misura di una sola grandezza fisica, p. es. x , oppure p , oppure una qualsiasi funzione $g(x, p)$. Dobbiamo dunque intendere che effettuare una simile misura determini lo stato del sistema a un certo istante, poichè ci rappresenta il massimo che noi possiamo sapere sopra la situazione del sistema a quell'istante. Ciò porta però con sè la conseguenza che la determinazione dello stato di un sistema può venir fatta in modi *essenzialmente differenti*, dipendentemente dalla particolare scelta della funzione $g(x, p)$ che viene misurata; mentre nel caso classico, in cui si ammette possibile la misura di due funzioni indipendenti f e g di x e p , vengono sempre ad essere determinate, in ultima analisi, queste due variabili.

Tornando al caso della meccanica quantistica, se, misurando una grandezza fisica $g(x, p)$ troviamo che essa ha il valore g' , possiamo facilmente dedurre quale è lo scalare di campo corrispondente. Esso si ottiene infatti, come è noto ⁽¹⁾, come soluzione dell'equazione

$$(1) \quad g(x, p) \psi(x) = g' \psi(x)$$

dove nel primo membro $g(x, p)$ deve intendersi come l'operatore che si ottiene sostituendo in $g(x, p)$ alla variabile p l'operazione $\frac{h}{2\pi i} \frac{d}{dx}$. Questa equazione p. es., nel caso che la grandezza $g(x, p)$ sia l'energia del sistema, si riduce alla ordinaria equazione di Schroedinger.

Se invece di $g(x, p)$ si fosse misurata un'altra grandezza $G(x, p)$ si sarebbe trovato uno scalare di campo differente; in modo che lo scalare di campo, che rappresenta lo stato del sistema viene a dipendere, oltre che dal sistema, anche dal modo particolare che noi seguiamo per determinarlo. Secondo la meccanica quantistica lo stato del sistema a un dato istante può dunque venire definito in due modi differenti; e cioè: *a*) misurando il valore di una grandezza fisica $g(x, p)$; *b*) dando, per l'istante considerato una funzione (generalmente complessa) della x ,

$$\psi(x) = \rho(x) e^{i\theta(x)}$$

che rappresenta lo scalare di campo a quell'istante.

È facile convincersi che questi due metodi sono completamente equivalenti tra di loro. Abbiamo già visto infatti (1) che, conoscendo il valore g'

(1) P. A. M. DIRAC, « Proc. Roy. Soc. », 113, 621, 1927.

che assume la grandezza $g(x, p)$ si può, a meno di una costante moltiplicativa inessenziale, determinare a quell'istante lo scalare di campo $\psi(x)$. Ci proponiamo ora di mostrare inversamente che, data una qualsiasi funzione complessa $\psi(x) = \rho e^{i\theta}$ che rappresenti a un certo istante lo scalare di campo, esiste sempre un operatore reale $g(x, p)$ tale che

$$(2) \quad g(x, p) \psi(x) = 0$$

per modo che si può dire che, se lo scalare di campo è $\psi(x)$ la grandezza $g(x, p)$ ha il valore 0. Così che lo stato del sistema che corrisponde allo scalare di campo $\psi(x)$ può anche definirsi come quello per cui $g(x, p) = 0$. Naturalmente, perchè questa considerazione abbia un significato fisico, è necessario che la grandezza $g(x, p)$ sia reale. Per dimostrare l'esistenza della grandezza $g(x, p)$ facciamo vedere che si può porre

$$(3) \quad g(x, p) = \left(p - \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{d\theta}{dx} \right)^2 + \frac{\hbar^2}{4\pi^2} \frac{1}{\rho} \frac{d^2\rho}{dx^2}.$$

Questa grandezza è infatti evidentemente reale, poichè ρ e θ sono due funzioni reali della x . Si verifica poi immediatamente che

$$(4) \quad g\left(x, \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{d}{dx}\right) \rho e^{i\theta} = 0$$

cioè che la grandezza g soddisfa alla (2). Naturalmente la grandezza (3) non è l'unica che soddisfa alla (2). P. es. soddisfano alla (2) anche le grandezze reali g^2, g^3, \dots . Per noi basta però aver dimostrato che esiste almeno una grandezza $g(x, p)$ soddisfacente alla (2).

Dobbiamo ora passare alla trattazione del problema specifico al quale è dedicata questa Nota; e cioè al problema di determinare quali elementi dello stato del sistema ad un istante futuro è possibile determinare per mezzo di esperienze fatte all'istante attuale.

Ci proponiamo di far vedere che, data una qualsiasi grandezza fisica $G(x, p)$, è sempre possibile conoscere il valore che essa avrà al tempo qualsiasi t_0 per mezzo di una esperienza, opportunamente scelta, da eseguirsi al tempo $t = 0$.

Per vedere questo supponiamo che, se si misura la grandezza G all'istante t_0 , si trovi per essa il valore G' . Da questo fatto si può dedurre, per mezzo della (1), quale è lo scalare di campo del sistema al tempo t_0 . Esso viene infatti determinato dall'equazione

$$(5) \quad G\left(x, \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{d}{dx}\right) \psi(x, t_0) = G' \psi(x, t_0).$$

Determinata così la ψ al tempo t_0 possiamo conoscerne il valore per un istante qualsiasi. Se infatti con $H(x, p)$ si indica l'energia del sistema, la funzione $\psi(x, t)$ soddisfa all'equazione di Schroedinger

$$(6) \quad H\left(x, \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x, t) = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

E siccome questa è di primo ordine rispetto al tempo, essa permette di determinare completamente la funzione ψ conoscendo i valori che essa assume all'istante $t = t_0$. Si può dunque per mezzo nella (6) conoscere quale deve essere lo scalare di campo $\psi(x, 0)$ all'istante $t = 0$. Nella funzione $\psi(x, 0)$ così determinata, figurerà naturalmente come parametro il valore G' che la grandezza $G(x, p)$ ha per ipotesi al tempo t_0 ; metteremo ciò in evidenza scrivendo $\psi(x, 0, G')$ in luogo di $\psi(x, 0)$.

Abbiamo già fatto vedere (3) che è sempre possibile determinare una grandezza fisica reale $g(x, p)$ tale che

$$(7) \quad g\left(x, \frac{h}{2\pi i} \frac{d}{dx}\right) \psi(x, 0, G') = 0.$$

Ciò significa che se, misurando la grandezza $g(x, p)$ si trova che essa ha il valore zero, l'autofunzione è $\psi(x, 0, G')$. Se dunque, mediante una misura effettuata all'istante $t = 0$ si trova $g(x, p) = 0$, possiamo concludere che, misurando al tempo t_0 la grandezza $G(x, p)$ si troverà per essa il valore G' .

Siccome nella $\psi(x, 0, G')$ interviene il parametro G' , lo stesso parametro sarà contenuto anche in $g(x, p)$, ciò che possiamo esprimere scrivendo $g(x, p, G')$. La condizione necessaria e sufficiente perchè al tempo t_0 si trovi $G(x, p) = G'$ è dunque che al tempo $t = 0$ si trovi

$$g(x, p, G') = 0.$$

Risolvendo questa equazione rispetto a G' , troviamo

$$A(x, p) = G'.$$

Possiamo dunque concludere che il valore G' che avrà la grandezza $G(x, p)$ al tempo t_0 si ottiene misurando all'istante $t = 0$ la grandezza $A(x, p)$. Resta con questo risolto il problema che ci eravamo proposti.

Possiamo illustrare l'applicazione di questo metodo, sopra un esempio concreto estremamente semplice. Consideriamo un punto mobile sopra una retta, sul quale non agisca alcuna forza, e cerchiamo quale è la grandezza che si deve misurare al tempo $t = 0$ per determinare che valore avrà l'ascissa del punto al tempo t_0 . Supponiamo per questo che al tempo t_0

il punto abbia ascissa x_0 . La funzione di Schroedinger al tempo t_0 sarà allora evidentemente

$$(8) \quad \psi(x, t_0) = \delta(x - x_0)$$

essendo δ il simbolo della funzione impropria di Dirac. Nel caso che sul nostro punto non agiscano forze, la sua Hamiltoniana si riduce a $H = p^2/2m$; l'equazione di Schroedinger (6) diventa dunque

$$(9) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{4\pi m i}{h} \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Dobbiamo cercarne una soluzione che, per $t = t_0$ si riduca alla (8). È facile verificare che tale soluzione può porsi a meno di una costante moltiplicativa nella forma⁽¹⁾

$$\psi(x, t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{t_0 - t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{t_0-t} \left[\alpha + \frac{\pi i m}{h} \right]}$$

e si ha quindi, a meno di una costante moltiplicativa,

$$\psi(x, 0) = e^{-\frac{\pi i m}{h t_0} (x - x_0)^2}.$$

Per determinare $g(x, p, x_0)$ dobbiamo dunque porre nella (3)

$$\theta = \frac{\pi m}{h t_0} (x - x_0)^2 \quad ; \quad \rho = 1.$$

Si ha dunque

$$g(x, p, x_0) = \left\{ p + \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi m}{h t_0} (x - x_0) \right\}^2 = \left\{ p + \frac{m}{t_0} (x - x_0) \right\}^2.$$

Se, misurando g al tempo zero si trova che esso ha valore zero, se cioè, per $t = 0$, si trova

$$(10) \quad \left\{ p + \frac{m}{t_0} (x - x_0) \right\}^2 = 0$$

il valore della ascissa al tempo t_0 sarà certamente x_0 . Risolvendo la (10) rispetto ad x_0 si trova

$$(11) \quad x_0 = x + \frac{t_0}{m} p$$

e cioè si arriva al risultato che, per conoscere l'ascissa al tempo t_0 basta misurare al tempo 0 la grandezza $x + \frac{t_0}{m} p$. Questo risultato era classica-

(1) E. H. KENNARD, « Zs. f. Phys. », 44, 326, 1927.

mente evidente, poichè p/m non è altro che la velocità del punto e questa è costante durante il tempo t_0 poichè, in assenza di forze, il moto è uniforme. In questo caso dunque siamo arrivati a un risultato banale. In casi più complessi invece il risultato della meccanica quantistica sarebbe essenzialmente diverso da quello della meccanica classica.

Da quanto precede possiamo dedurre le conclusioni seguenti: Tutto quello che è possibile conoscere dello stato di un sistema a un dato istante, mediante esperienze fatte a quell'istante, è possibile conoscerlo anche mediante opportune esperienze fatte ad un qualsiasi istante antecedente o seguente a quello che si considera. In questo senso dunque l'indeterminazione del sistema non viene per così dire a crescere col passare del tempo. Sarebbe però errato concludere da questo che i rapporti di causalità validi secondo la meccanica quantistica siano identici a quelli che valgono nelle teorie classiche. In queste ultime si può infatti, con opportune misure fatte sul sistema al tempo zero, prevedere il valore di qualsiasi grandezza fisica (funzione di x e p) a qualsiasi tempo. Invece, secondo la meccanica quantistica si può, al tempo zero fare una misura che permetta di conoscere il valore che avrà una determinata grandezza a un determinato tempo. Però se si volesse conoscere il valore di un'altra grandezza fisica o eventualmente anche della stessa grandezza a un istante diverso, occorrerebbe effettuare all'istante zero una misura differente, incompatibile, almeno in generale, con la precedente.

Fisica. — *Sulla relazione $E = h\nu$ nella meccanica ondulatoria.*

Nota di E. PERSICO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio A. GARBASSO.

1. È noto che la meccanica ondulatoria associa al movimento di un punto materiale di energia E un gruppo d'onde (onde di De Broglie) di frequenza ν legata ad E dalla relazione

$$(1) \quad E = h\nu$$

dove h è la costante di Planck. Tale relazione viene usualmente introdotta come un postulato, suggerito dal fatto sperimentale che in tutti gli scambi energetici tra radiazione e materia vale la (1). Ma se si pensa che in tali fenomeni la ν rappresenta la frequenza di una radiazione elettromagnetica, che è tutt'altra cosa dalle onde di De Broglie, si riconosce che tale postulato non si presenta affatto plausibile *a priori*, e può venire giustificato solo dal successo generale della teoria che su di esso si fonda. La quale giusti-

(1) Nella seduta del 30 maggio 1930.

ficazione, del resto, non prova affatto la *necessità* di stabilire tra E e v proprio la relazione (1).

Non sarà forse privo d'interesse mostrare che non è necessario ammettere la (1) come postulato, poichè, se si ammette solo che la frequenza delle onde di De Broglie stia in una relazione qualunque con l'energia, si può dimostrare che questa relazione *deve* essere

$$(1') \quad E = h\nu + b$$

dove b è una costante del tutto arbitraria finchè si resta entro l'approssimazione non relativistica. Nell'approssimazione relativistica invece resta fissato il valore della b .

2. L'equazione classica delle onde di qualsiasi natura è, come è noto, del tipo

$$(2) \quad \Delta\psi = N^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

dove N rappresenta l'inverso della velocità di propagazione, ossia (a meno di un fattore costante inessenziale) l'indice di rifrazione. Nel caso delle onde di De Broglie, la N viene di solito determinata con la condizione che: il movimento di un pacchetto d'onde di frequenza ν debba identificarsi (trascurando la diffrazione) con quello di un punto materiale di massa m , lanciato in un campo di potenziale $U(x, y, z)$ con energia $E = h\nu$: si trova allora

$$(3) \quad \Delta\psi = \frac{2m}{h^2\nu^2} (E - U) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

Noi invece identificheremo i due movimenti sotto la condizione più generale

$$(4) \quad E = E(\nu)$$

e ricercheremo quale forma debba avere questa funzione perchè l'identificazione sia possibile.

Confrontando il principio di Fermat

$$\delta \int N ds = 0$$

che determina la traiettoria del pacchetto d'onde, con quello della minima azione

$$\delta \int \sqrt{2m(E - U)} ds = 0$$

che determina la traiettoria del punto, si vede che, perchè si identifichino le due traiettorie, deve essere

$$(5) \quad N = C \sqrt{E - U}$$

con C costante rispetto a x, y, z .

Ricordando poi che la velocità v del gruppo d'onde è data da

$$v = \frac{d\nu}{d(N\nu)}$$

e quella del punto da

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - U}$$

si vede che perchè si identifichino anche le velocità deve essere

$$\frac{d(N\nu)}{d\nu} = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{E - U}}.$$

Introducendo in questa l'espressione (5) di N , e tenendo presente la (4), si ottiene

$$\frac{d(C\nu)}{d\nu} \sqrt{E - U} + \frac{C\nu}{2\sqrt{E - U}} \frac{dE}{d\nu} = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{E - U}}$$

ossia

$$(6) \quad \frac{d(C\nu)}{d\nu} (E - U) + \frac{C\nu}{2} \frac{dE}{d\nu} = \sqrt{\frac{m}{2}}.$$

Quest'equazione, qualora si precisasse la forma della funzione $E(\nu)$, determinerebbe la C come funzione di ν (a meno di una costante arbitraria). Ma si osservi che questa equazione contiene x, y, z che vi figurano, in modo generico, nella U , mentre la C non deve dipendere da x, y, z : dunque la (6) deve in realtà non contenere la U , ossia deve essere

$$\frac{d(C\nu)}{d\nu} = 0$$

da cui

$$(7) \quad C\nu = k$$

con k costante. Con ciò la (6) diviene

$$\frac{dE}{d\nu} = a$$

ossia

$$(8) \quad E = a\nu + b$$

avendo posto

$$(9) \quad \frac{\sqrt{2m}}{k} = a$$

e avendo chiamato b un'altra costante arbitraria. La E deve dunque essere

una funzione lineare di v , affinchè sia possibile identificare il moto del punto con quello di un pacchetto di onde.

Tenendo conto della (7) e della (9), la (5) diventa

$$N = \frac{\sqrt{2m}}{av} \sqrt{E - U}$$

e quindi l'equazione delle onde (2) si scrive

$$(3') \quad \Delta\psi = \frac{2m}{a^2 v^2} (E - U) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

che differisce dalla (3) solo per avere, in luogo di h , la costante, ancora indeterminata, a .

3. La determinazione della costante a , si può fare in diversi modi, e cioè confrontando con l'esperienza una qualunque delle conseguenze della (3'). P. es., per il caso di un punto libero ($U = 0$) dalla (3') si ricava, nel modo solito, la nota espressione di ψ che caratterizza onde piane, e la lunghezza d'onda risulta

$$\lambda = \frac{a}{mv}.$$

Poichè Davisson e Germer hanno trovato sperimentalmente (tenuto conto della correzione di Bethe)

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

se ne deduce

$$a = h.$$

La costante b invece non figura esplicitamente nella (3') e non interviene, quindi, in nessuno dei fenomeni che da tale equazione dipendono. Essa non è altro, come si vede dalla (8), che l'ordinaria costante additiva dell'energia, ed è quindi arbitraria, finchè non si facciano intervenire considerazioni relativistiche. Perciò, restando in questo campo, si può più generalmente assumere la (1') in luogo della (1), con la b arbitraria: dalla scelta di questa dipendono bensì la frequenza e la velocità di fase delle onde di De Broglie, ma non la lunghezza d'onda nè la velocità di gruppo che sole sono misurabili: quindi l'accordo con l'esperienza si ha con qualunque valore di b , e in particolare, con $b = 0$ cioè con la (1).

È noto però che, se si vuole soddisfare esattamente il principio di relatività si deve modificare leggermente la (3), e inoltre sia in essa che nella (1), intendere conglobata in E non solo l'energia cinetica e potenziale, ma anche l'energia intrinseca $m_0 c^2$ della massa (di quiete) m_0 . Ciò significa evidentemente (se per E si vuol conservare il significato comune) sostituire alla (1) la (1'), attribuendo però alla b il valore $-m_0 c^2$.

Fisica. — *Sulla legge di emissione del Nichel.* Nota di WASHINGTON DEL REGNO presentata ⁽¹⁾ dal Socio M. CANTONE.

Fra i metalli, in generale tutti assai poco studiati come radiatori integrali, il Nichel è fra quelli il cui comportamento è meno conosciuto.

Dalle poche ricerche eseguite si desume che l'emissione totale di questo metallo può esprimersi con la relazione del tipo Stefan-Boltzmann

$$E = K T^n$$

ma assai discordanti sono i valori di n ottenuti dai diversi sperimentatori cioè i valori dell'esponente che caratterizza appunto il metallo come radiatore.

Si ha difatti:

Suydam ⁽²⁾	[463°-1283°]	$n = 4.648$
Schmidt e Futhermann ⁽³⁾	[500°-650°]	$n = 4.814$
Kahanowicz ⁽⁴⁾	[540°-800°]	$n = 5.50$

quest'ultimo valore assai diverso dai precedenti tale da conferire al Nichel un carattere spiccato di radiatore fortemente colorato.

Il problema è stato ripreso in esame con le recentissime esperienze del Barnes ⁽⁵⁾ e dell'Utterbach ⁽⁶⁾: il primo trova nell'intervallo 400°-1400° T il valore 4.77 che corrisponde alla media dei valori di Suydam e Schmidt e Futhermann, il secondo invece ottiene, e per la prima volta, una variazione dell'esponente che uguale a 5.29 nell'intervallo 650°-1400° T si riduce a 4.75 per temperature da 1450° a 1600°, la variazione avendo luogo nell'intervallo 1400°-1450° T.

Molto complesso appare dunque il comportamento di questa sostanza la cui legge di emissione non è quindi possibile determinare studiandola in intervalli di temperatura di poche centinaia di gradi od intervalli che comprendano l'intervallo di trasformazione magnetica. Inoltre se una variazione della legge di emissione effettivamente ha luogo nell'intervallo 1400°-1450° per la variazione di suscettività magnetica, ivi notata da Therry ⁽⁷⁾,

(1) Nella seduta del 30 maggio 1930.

(2) SUYDAM, «Physical Review», (2), 5, 1915.

(3) *Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften*, 1928, p. 342.

(4) KAHANOWICZ, «Atti R. Acc. Lincei», 30, (2), 1921.

(5) BARNES, «Physical Review», vol. 34. n.° 7, seconda serie, ottobre 1929.

(6) UTTERBACH, vol. 34, n.° 5, seconda serie, settembre 1929.

(7) E. M. THERRY, «Physical Review», 9, 394, 1917.

Weiss e Foëx ⁽¹⁾, una variazione analoga non dovrebbe mancare in corrispondenza al passaggio per la temperatura del punto di Curie quando cioè cambia del tutto la natura del comportamento magnetico della sostanza con la scomparsa del campo molecolare di Weiss sul quale oggi non si ha più alcun dubbio in seguito alle conclusioni teoriche dell'Heisemberg.

La variazione notata dall'Utterbach ha però bisogno di esser confermata per la grande incertezza di determinazioni di questo genere specie di temperature con i metodi della pirometria ottica. Inoltre questa variazione sembra troppo grande se la si vuole attribuire unicamente alla variazione magnetica: in generale tutti i metalli ad alte temperature assumono un comportamento che si avvicina a quello del corpo nero e quindi una diminu-

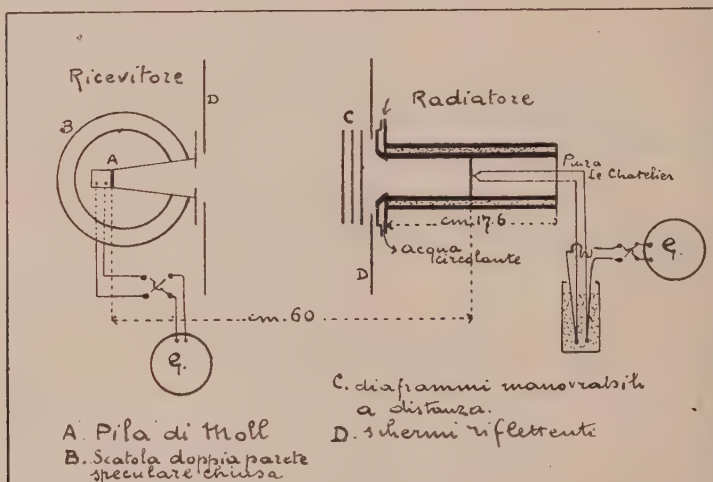


Fig. 1.

zione per tutti dell'esponente n (Hagen, Rubens ⁽²⁾, Aschinkinass ⁽³⁾) e d'altra parte il Nichel è sostanza sui *generis* dal punto di vista del comportamento elastico, dotata di notevole plasticità che aumenta con la tensione e quindi con la temperatura: è dunque probabile che in questa variazione intervenga anche la notevole modificazione della coesione che ha luogo già molto prima del passaggio allo stato liquido e che di conseguenza una diversa legge di emissione differenzi lo stato ferromagnetico dallo stato paramagnetico di questa sostanza con una ulteriore variazione nelle vicinanze della temperatura di fusione.

(1) E. FOËX, « Ann. d. Physik », 16, 174, 1921; WEISS e FOËX, « An. des Sc. Phys. e Nat. », 31, 85, 1911.

(2) HAGEN e RUBENS, « Ann. d. Physik », 11, 873, 1903.

(3) E. ASCHINKINASS, « Ann. d. Physik », 17, 960, 1905.

Lo studio della emissione del Nichel nello stato ferromagnetico richiede un ricevitore di altissima sensibilità se si vuole arrivare sino alle temperature ordinarie: può all'uopo servire assai bene il dispositivo già da me impiegato nello studio dell'emissione del Bismuto i cui particolari sono accennati in una precedente mia nota⁽¹⁾. Nella presente aggiungo il grafico dal quale si rilevano gli accorgimenti sperimentali ai quali si è ricorso per avere con sicurezza sul ricevitore, costituito da una grande pila superficiale di Moll da 86 elementi, resa più sensibile col togliere la lamina protettiva di salemma, unicamente l'energia irraggiata dalla lamina emittente la cui temperatura, per il metodo di riscaldamento impiegato, sicuramente corrisponde a

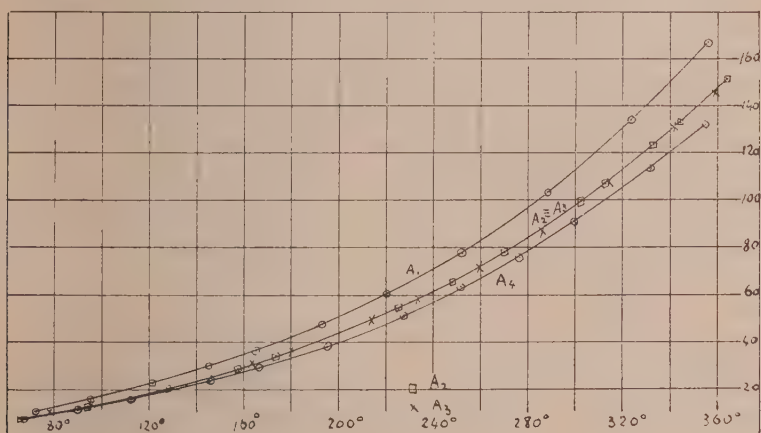


Fig. 2.

quella della pinza termo-elettrica Le Chatelier suscettibile di essere determinata con grandissima esattezza. Mi sono servito di Nichel purissimo fornito da Kalbaum in lamina, ma poichè determinazioni fatte su di un solo tipo di lamina non avrebbero avuto un carattere di generalità nel senso che l'emissione della lamina è indubbiamente influenzata dallo speciale assetto interno assunto dal metallo in seguito ai processi termici e meccanici ai quali è stato sottoposto, ho sperimentato su due lamine di diverso spessore iniziale di cui ho ulteriormente modificata la struttura interna e superficiale mediante incrudimento e ricuocimenti.

Le lamine studiate sono state cinque, cioè:

lamina A_1	da mm. 0,1
» A_2	A_1 incrudita al laminatoio
» A_3	A_2 portata a 500°
» A_4	da mm. 0,2
» A_5	A_4 fortemente incrudita.

(1) W. DEL REGNO, « Rend. Acc. dei Lincei », vol. X, fasc. 1-2, 1929, p. 77.

Riporto nella tabella una delle serie di determinazioni e nel grafico delle curve di emissione dalle quali si rileva che l'emissione varia da una lamina all'altra e per la stessa lamina col trattamento: notevole la sovrapposizione delle curve relative alle due lamine A_2 ed A_3 cioè la nessuna variazione nell'emissione prodotta dal ricuocimento alla temperatura di 500° ciò che vale ad assicurarci che sui valori determinati non ha nessuna influenza la durata del riscaldamento per portare la lamina ad una determinata temperatura e quindi anche il senso, il che per altro io avevo assodato anche in modo diretto.

A_1		A_2		A_3		A_4		A_5	
T	d	T	d	T	d	T	d	T	d
344 $^\circ$.7	10.0	338 $^\circ$.5	7.20	338 $^\circ$.0	7.0	339 $^\circ$.9	7.0	358 $^\circ$.9	11.0
368 $^\circ$.3	15.3	367 $^\circ$.1	12.40	351 $^\circ$.2	9.8	363 $^\circ$.0	11.0	381 $^\circ$.2	16.0
394 $^\circ$.1	22.0	388 $^\circ$.6	17.05	368 $^\circ$.3	13.0	384 $^\circ$.9	15.5	415 $^\circ$.6	24.0
417 $^\circ$.7	29.3	400 $^\circ$.8	20.30	391 $^\circ$.9	20.0	417 $^\circ$.7	22.5	463 $^\circ$.0	41.0
438 $^\circ$.1	36.3	430 $^\circ$.25	28.40	419 $^\circ$.3	25.0	438 $^\circ$.6	29.0	500 $^\circ$.9	57.3
466 $^\circ$.5	47.0	445 $^\circ$.30	33.70	436 $^\circ$.0	31.0	468 $^\circ$.0	38.0	537 $^\circ$.0	77.0
493 $^\circ$.0	60.0	497 $^\circ$.8	54.50	452 $^\circ$.6	36.0	500 $^\circ$.2	51.0	583 $^\circ$.9	107.6
524 $^\circ$.6	77.3	520 $^\circ$.85	65.20	485 $^\circ$.5	48.6	524 $^\circ$.1	63.5	630 $^\circ$.2	147.6
561 $^\circ$.4	103.3	542 $^\circ$.8	77.70	506 $^\circ$.3	58.0	548 $^\circ$.7	75.0	642 $^\circ$.8	160.5
596 $^\circ$.2	133.6	575 $^\circ$.4	99.50	523 $^\circ$.3	71.0	572 $^\circ$.25	90.3		
628 $^\circ$.9	167.5	585 $^\circ$.3	107.40	558 $^\circ$.9	87.0	604 $^\circ$.1	112.6		
		606 $^\circ$.4	123.40	586 $^\circ$.6	107.3	628 $^\circ$.45	132.0		
		617 $^\circ$.5	133.30	614 $^\circ$.4	131.3				
		636 $^\circ$.6	151.50	631 $^\circ$.6	145.3				

Formulando i risultati da me ottenuti nelle diverse determinazioni risultano per n i seguenti valori

lamina	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
n	4.547	4.60	4.60	4.636	4.558

e come media il valore

$$n = 4,588 \pm 0,031$$

Il seguente specchietto permette il confronto dei risultati di cui oggi si dispone:

	Intervallo esplorato	<i>n</i>
Suydam (1915)	$360^{\circ}-190^{\circ} = 170^{\circ}$	4.648
Kahanowicz (1921)	$360^{\circ}-267^{\circ} = 93^{\circ}$	5.50
Schmidt e Futhermann (1928)	$360^{\circ}-227^{\circ} = 133^{\circ}$	4.814
Barnes (1929)	$360^{\circ}-127^{\circ} = 233^{\circ}$	4.77
Del Regno (1930)	$360^{\circ}-60^{\circ} = 300^{\circ}$	4.586

Con quest'ultima determinazione:

- 1) si estende l'intervallo nel quale la legge è studiata;
- 2) si ottiene un valore in base al quale la sostanza è da classificarsi fra quelle il cui comportamento nell'intervallo di esistenza del ferromagnetismo si discosta non molto da quello del radiatore grigio;
- 3) si danno i particolari di un dispositivo diverso da quello degli altri sperimentatori con qualche vantaggio di semplicità e certamente di sicurezza nella determinazione della temperatura della lamina emittente che rappresenta indubbiamente la parte più delicata in un tal genere di ricerche.

Fisica. — *Sulla cattura degli elettroni da parte degli ioni.* Nota di G. WATAGHIN, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. A. POCHETTINO.

Recentemente Bergen Davis e A. H. Barnes⁽²⁾ hanno eseguito delle interessanti esperienze sulla cattura degli elettroni da parte delle particelle α . Il risultato importante di queste esperienze sta nella dimostrazione, che la probabilità di una ricombinazione è massima se l'energia cinetica degli elettroni relativa ai nuclei di He è nulla oppure è eguale a uno dei dislivelli energetici di elio ionizzato, che corrispondono alle transizioni quantiche di questo (precisamente la probabilità di una ricombinazione è massima quando

$$\frac{1}{2}mv^2 = E_n, \text{ ove } E_n \text{ è il termine spettrale } n^{mo} \text{ dello ione di He: } E_n = \frac{54.16}{n^2} [\text{volt}].$$

Gli Autori non danno alcuna spiegazione del fenomeno e pongono il quesito; quale è la frequenza della luce emessa nel processo di ricombinazione?

(1) Nella seduta del 30 maggio 1930.

(2) « Phys. Rev. », 34, 152 (July 1, 1929); 35, 217 (February 1, 1930).

Nella presente Nota trovasi esposta la teoria quantistica delle esperienze di Davis e Barnes. Ci è sembrato non privo di interesse il fatto che, mentre l'antica teoria dei quanti non permette di giustificare il risultato sperimentale citato⁽¹⁾, tale giustificazione può essere facilmente data applicando la meccanica ondulatoria. In questa teoria il processo della ricombinazione di un ione con un elettrone (come anche il reciproco della ionizzazione) può essere trattato con vari metodi. Una trattazione rigorosa richiederebbe l'uso dell'elettrodinamica quantistica con l'applicazione delle equazioni di Dirac⁽²⁾.

Ma una semplice interpretazione del risultato sperimentale di Davis e Barnes si può ottenere anche col metodo di Schrödinger completato dalla teoria delle perturbazioni.

Infatti, possiamo determinare le leggi statistiche della ricombinazione fra le particelle α (considerate fisse) e gli elettroni incidenti con velocità v , scrivendo l'equazione di Schrödinger per un elettrone che si muove nel campo di un nucleo di α , e tenendo conto, nel modo indicato da Jordan e Klein⁽³⁾, dell'azione reciproca fra gli elettroni. Precorrendo l'esposizione diciamo che la cattura di un elettrone appare come l'effetto indotto per risonanza dalle onde di De Broglie associate agli elettroni e i « salti quantici » dello ione. Il fenomeno presenta molte analogie con l'assorbimento di onde elettromagnetiche e potrebbe essere definito come « assorbimento delle onde elettroniche ». La condizione favorevole all'assorbimento (corrispondente alla probabilità massima della cattura) si riduce alla condizione di risonanza fra la frequenza $\nu' = \frac{E_n}{h}$ propria al salto quantico dello ione

e una « frequenza di battimento » delle onde elettroniche: $\nu = \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{2} mv^2$, corrispondente al passaggio di un elettrone dallo stato di moto coll'energia cinetica $\frac{1}{2} mv^2$ allo stato stazionario nell'atomo. È manifesta anche l'analogia fra il fenomeno considerato e l'effetto Ramsauer. Ma nella teoria quantistica di questo effetto del Holtsmark, come anche nell'interessante ricerca di G. Beck⁽⁴⁾ non si tiene conto dell'azione reciproca fra gli elettroni, e l'effetto di risonanza di Barnes non è previsto.

L'equazione di Schrödinger:

$$(1) \quad \left(H + \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi = 0$$

(1) Cfr. il riassunto di SEELIGER, « Phys ZS », 329, 1929.

(2) « ZS. f. Phys. », 56, 1, 1929; 59, 168, 1930.

(3) « ZS. f. Phys. », 45, 751, 1927.

(4) G. BECK, « ZS. f. Phys », 62, 331, 1930; HOLTSMARK, « ZS. f. Phys. », 45, 307, 1927; 48, 231, 1928; 52, 485, 1929.

corrispondente all'incontro di un elettrone con un nucleo di He, si ottiene notoriamente ponendo per l'operatore Hamiltoniano H:

$$(2) \quad H_0 = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{2e^2}{r} + mc^2$$

ove

$$p_x = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}, \text{ ecc.}$$

Per tener conto dell'azione reciproca fra gli elettroni si può utilizzare i metodi della teoria delle perturbazioni e aggiungere all'operatore H_0 un nuovo operatore H' che rappresenti la perturbazione corrispondente. Jordan e Klein⁽¹⁾ usano a tale scopo il potenziale scalare ϕ deducibile dall'equazione di Poisson

$$\Delta\phi = -4\pi e\psi\bar{\psi}$$

ove $\psi\bar{\psi}$ rappresenta la densità (statistica) degli elettroni.

Nel caso di un flusso di elettroni è opportuno introdurre inoltre il potenziale-vettore. Nell'elettrodinamica maxwelliana combinata colle equazioni di Dirac si dimostra, che tale vettore potenziale è deducibile assieme alla ϕ da una distribuzione di correnti e di cariche data dalle relazioni di Dirac⁽²⁾:

$$(3) \quad \rho = -\sum_k e\psi_k\bar{\psi}_k, \quad i_l = e\sum_{bk} \alpha_{bk}^l \psi_b\bar{\psi}_k.$$

Quel che ci interessa in queste formole è che i potenziali e quindi anche la funzione perturbatrice vengono a dipendere dalle funzioni (3) quadratiche nelle ψ_k (funzioni ondulatorie). Come giustamente osserva il Weyl⁽³⁾, questa circostanza determina la comparizione nei fenomeni delle transizioni quantiche (accompagnate da assorbimento o emissione della luce) delle frequenze che sono le differenze delle frequenze di onde materiali. Così anche nel caso nostro, trattandosi della cattura di elettroni incidenti con velocità v e essendo presenti anche elettroni legati agli atomi (che formano una distribuzione stazionaria), dovremo considerare ognuna delle ψ_k di Dirac composta di due funzioni:

$$\psi_k = c'_k \psi'_k + c''_k \psi''_k$$

di cui una (ψ'_k) è associata alle onde di De Broglie aventi una frequenza⁽⁴⁾

(1) Vedi loc. cit. oppure FRENKEL, «Einführung in die Wellenmechanik», 1929, p. 73.

(2) «Proc. Roy. Soc.», 117, 610, 1928; HEISENBERG e PAULI, loc. cit.

(3) *Gruppentheorie u. Quantenmechanik*, 1928, p. 200.

(4) ove m è la massa «di quiete» dell'elettrone. Adoperiamo l'espressione approssimata dell'energia: $\frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = h\nu$.

$\nu' = \frac{mc^2 + \frac{1}{2}mv^2}{h}$ corrispondente agli elettroni che si muovono con velocità v ; e un'altra (ψ_k'') avente la frequenza $\nu'' = \frac{mc^2}{h}$ corrispondente agli elettroni già catturati dai nuclei di He; per questi ultimi elettroni si deve avere una distribuzione stazionaria della densità ($v = 0$).

Nelle espressioni (3) figura di conseguenza la frequenza di battimento:

$$\nu = \nu' - \nu'' = \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{2} mv^2$$

ed è quella che determina i salti quantici degli ioni nelle esperienze di Davis e Barnes. Infatti, l'operatore H' dipende dai potenziali elettro-magnetici e quindi contiene, a causa delle (3), dei termini periodici nel tempo con frequenza ν .

Dobbiamo perciò porre sopprimendo una costante additiva inessenziale:

$$H' = T' \cos 2\pi\nu t$$

ove T' è l'amplitudine dell'operatore H' , che supponiamo indipendente dal tempo. Orbene, sono precisamente questi operatori variabili, che determinano i passaggi da uno stato quantico a un altro ⁽¹⁾.

Posto nella (1): $H = H_0 + H'$, si ha un problema tipico della teoria delle perturbazioni, che è stato già più volte studiato ⁽²⁾. Possiamo ad esempio risolverlo col metodo della variazione delle costanti. Poniamo col Dirac:

$$\psi = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 + \dots$$

ove le ψ_k sono le autofunzioni del problema non perturbato. Si trova facilmente che le c_k si determinano dalle equazioni differenziali:

$$-\frac{h}{2\pi i} \frac{dc_k}{dt} = \sum_n \frac{1}{2} T'_{kn} c_n [e^{2\pi i(\nu_{kn} + \nu)t} + e^{2\pi i(\nu_{kn} - \nu)t}]$$

ove

$$T'_{kn} = \int_{\tau} \bar{\psi}_k T' \psi_n d\tau.$$

Supposto che lo stato iniziale degli atomi sia quello ionizzato ($n = \infty$; $E_{\infty} = 0$) si trova con procedimenti noti:

$$c_n = -\frac{1}{2h} T'_n \left[\frac{e^{2\pi i(\nu_n + \nu)t} - 1}{\nu_n + \nu} + \frac{e^{2\pi i(\nu_n - \nu)t} - 1}{\nu_n - \nu} \right].$$

(1) Cfr. BORN e JORDAN, *Elementare Quantenmechanik*, § 61.

(2) Cfr. p. es. FRENKEL, loc. cit., p. 171 e sg.

In pratica interessano soltanto i termini per cui si ha la risonanza:

$$\nu_n = \nu$$

perchè per questi, C_n e quindi anche la probabilità della transizione dallo stato di ionizzazione allo stato quantico n^{mo} è massima. Ma la precedente equivale alla relazione

$$E_n = \frac{1}{2} m v^2$$

essendo

$$E_n = h \nu_n \quad \text{e} \quad h \nu = \frac{1}{2} m v^2.$$

Questa relazione esprime precisamente il risultato sperimentale di Davis e Barnes. Il Barnes trova in più dei massimi nuovi per la ricombinazione « doppia », che conduce all'atomo neutro di He (cattura di due elettroni). È naturale che per questi si debbano trovare i massimi corrispondenti agli stati quantici di He neutro.

Il metodo sperimentale di Davis e Barnes è suscettibile di una ovvia generalizzazione al caso degli ioni di altri atomi. Ho iniziato nel laboratorio dell'Accademia Militare di Torino delle esperienze coi raggi canale che dovrebbero permettere di verificare alcune conseguenze della teoria esposta e di procurare i valori dei termini spettrali E_n .

La teoria esposta può essere facilmente completata nei riguardi del campo elettromagnetico, che evidentemente prende parte importante nel fenomeno di ricombinazione. Basta immaginare che il nucleo e gli elettroni si trovano in un involucro contenente della radiazione di un corpo nero e « quantizzare » tale radiazione col metodo ben noto di Dirac⁽¹⁾. L'accoppiamento fra il campo e l'atomo deve essere considerato debole (trascurabile in prima approssimazione). La teoria della « risonanza interna »⁽²⁾ fra i sistemi accoppiati può essere applicata in questo caso. La conclusione a cui si giunge è che nel processo di ricombinazione sopra considerato ha luogo l'emissione di un quanto di luce per ogni elettrone catturato. La sua frequenza è uguale evidentemente al doppio della frequenza di risonanza:

$$\nu' = 2\nu_n = 2 \frac{E_n}{h}.$$

(1) DIRAC, « Proc. Roy. Soc. », 114, 245 e 710, 1927.

(2) Cfr. BORN e JORDAN *Elementare Quantenmechanik*, 1930, pp. 344 e 356.

Ottica. — *Le frange d'ombra nello studio delle aberrazioni sferiche piccolissime*⁽¹⁾. Nota di V. RONCHI, presentata⁽²⁾ dal Socio A. GARBASSO.

Il diffondersi sempre crescente dell'uso delle frange d'ombra come mezzo di prova dei sistemi ottici⁽³⁾ ha portato largo contributo di esperienza e di pratica; e mentre da una parte la teoria approssimata esposta nelle pubblicazioni precedenti⁽⁴⁾ ha avuto conferme e perfezionamenti⁽⁵⁾, dall'altra si è presentata spesso la domanda: quale sia il limite superiore di questo mezzo di indagine.

Nella Nota presente, appunto per rispondere a questa domanda, si studia uno dei casi fondamentali, cioè quello dell'aberrazione sferica semplice, e si giunge a dimostrare che le deformazioni a cui vanno soggette le frange sono ancora ben sensibili, quand'anche le immagini non risentono più della presenza dell'aberrazione sferica.

Perchè le conclusioni meritino quella fiducia generale che debbono avere, conviene prima mettere le equazioni delle frange in una forma il più possibile indipendente dalle condizioni sperimentali caratteristiche dei singoli casi. Per evitare di ripetere ragionamenti già fatti, riprenderemo le cose al punto in cui sono lasciate nel XII Capitolo delle citate *Lezioni di Ottica Fisica* e useremo senz'altro le notazioni ivi definite e adoperate.

L'aberrazione d'onda $w_p(b)$, rispetto alla sfera di riferimento col centro nel fuoco parassiale, risulta espressa da

$$w_p(b) = c_4 b^4,$$

secondo la definizione dell'aberrazione sferica semplice; c_4 è il coefficiente caratteristico del sistema ottico adoperato; b è il raggio della zona⁽⁶⁾ di

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Ottica in Arcetri, Firenze.

(2) Nella seduta del 30 maggio 1930.

(3) Cfr. fra l'altro l'« Annual Report of the Director of the Mount Wilson Observatory » del 1928 e del 1929.

(4) V. RONCHI, *Sul comportamento e l'impiego delle frange d'ombra nella prova dei sistemi ottici*. « Nuovo Cimento », 1927, n. 7; e « Revue d'Optique », 7, 1928 pp. 49-67. V. RONCHI, *Lezioni di Ottica Fisica*. Bologna, Zanichelli, 1928.

(5) Cfr. F. VILLANI, *Le frange d'ombra coi reticoli di alta frequenza*. « Nuovo Cimento », 1930, n. 4.

(6) Più generalmente b è il raggio dell'onda, nel piano di osservazione; ma per semplicità di concetto e di linguaggio, si riporta sempre questo piano, virtualmente, nel sistema ottico stesso.

questo che si considera. Sia H il valore massimo di h , cioè il raggio dell'orlo del sistema ottico. Per studiare casi in condizioni prestabilite, poniamo che l'aberrazione d'onda all'orlo, riferita alla sfera col centro nel fuoco parassiale, sia uguale a un certo numero b di lunghezze d'onda λ : in simboli:

$$w_p(H) = c_4 H^4 = b\lambda \quad ; \quad \text{donde } c_4 = \frac{b\lambda}{H^4}.$$

Nell'equazione della frangia di ordine $k^{(1)}$, che era stata scritta (loc. cit., p. 413)

$$4c_4 f_p (l^2 + g^2) l + \frac{f - f_p}{f_p} l - k \frac{\lambda}{\beta} = 0$$

conviene intanto introdurre il valore di c_4 così trovato.

Inoltre $f - f_p$, che indica la distanza del reticolo dal fuoco pasassiale,

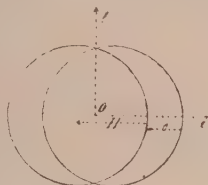


Fig. 1.

si può esprimere sempre come l'aberrazione longitudinale $L_p(l_0)$ di una certa zona di raggio l_0 , reale o immaginario, secondo la nota formula

$$f - f_p = L_p(l_0) = 4c_4 f_p^2 l_0^2.$$

Insieme $\beta/\lambda = m$ è la frequenza del reticolo; dunque

$$4b \frac{\lambda m f_p}{H^4} (l^2 + g^2 + l_0^2) l = k.$$

Ricordiamo poi che $H/f_p = \alpha$ è la semiapertura angolare del sistema ottico e che $\beta = \lambda m$ è l'angolo di deviazione delle onde diffratte dal reticolo: dunque il rapporto

$$\frac{\lambda m f_p}{H} = \frac{\beta}{\alpha} = \varepsilon$$

ci esprime di quale frazione di raggio H un'onda è spostata rispetto alla successiva: infatti lo spostamento lineare s nel piano della figura (fig. 1)

(1) Se il reticolo ha un tratto chiaro sull'asse, come supporremo sempre in seguito, k intero corrisponde a una frangia chiara e k semidispari a una oscura; il contrario avviene quando il reticolo ha un tratto nero sull'asse.

di un'onda rispetto alla successiva è $s = \lambda m f_p$. Chiameremo ε questo rapporto s/H .

Infine, in luogo delle coordinate l, g , misurate con unità di lunghezza arbitrarie, useremo le coordinate x, y , dedotte dalle precedenti, prendendo come unità di misura il raggio H :

$$x = l/H, \quad y = g/H.$$

Con queste sostituzioni, l'equazione della k -esima frangia diviene:

$$\left(x^2 + y^2 + \frac{l_0^2}{H^2}\right)x = \frac{k}{4b\varepsilon}.$$

Quando il reticolo passa per il fuoco parassiale, è $l_0 = 0$; quando passa per fuoco marginale, è $l_0^2 = -H^2$; dunque porre $l_0^2/H^2 = -1$ significa porre il reticolo a una distanza dal fuoco parassiale uguale alla lunghezza della caustica sull'asse. In generale tutte le volte che il reticolo occupa una posizione distante di τ dal fuoco parassiale, possiamo porre

$$l_0^2 = \frac{\tilde{\tau}}{4c_4 f_p^2},$$

e quindi $l_0^2/H^2 = C$ è un numero (puro) che ci dice quante volte la distanza τ comprende la lunghezza della caustica sull'asse, vale a dire misura la distanza τ prendendo come unità la lunghezza della caustica $L_p(H)$. Con questo diremo che un reticolo dista dal fuoco parassiale di una, due, ..., C caustiche e $C > 0$ significa oltre la punta della caustica; mentre $C < 0$ significa verso o oltre la coda.

L'equazione della k -esima frangia allora diviene

$$x^3 + (y^2 + C)x = \frac{k}{4b\varepsilon};$$

ed è indipendente da tutte le costanti contingenti di ogni singolo caso. Rimane esplicito ciò che vi è di essenziale e cioè:

b = numero delle lunghezze d'onda a cui ammonta l'aberrazione d'onda all'orlo del sistema ottico, rispetto alla sfera col centro nel fuoco parassiale.

ε = spostamento delle onde diffratte, riferito al raggio del sistema ottico.

C = numero di caustiche di cui il reticolo dista dal fuoco parassiale.

*
* *

Mediante l'equazione così ottenuta si sono calcolate le frange che si presentano nel campo quando l'aberrazione d'onda assume i piccoli valori corrispondenti ai casi limiti più importanti:

1° caso: $b = 1.4$. Questo caso è notevole, perché se il centro della sfera di riferimento si porta nel punto che dista dal fuoco parassiale

di $C = -0.41$ (cioè poco prima di metà della caustica) l'aberrazione

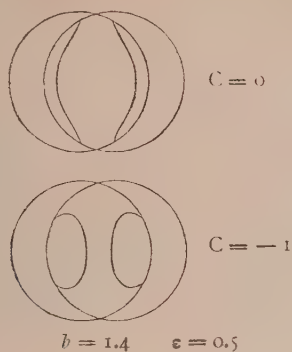


Fig. 2.

all'orlo è $\pm \lambda/4$ e per qualunque valore di h , fra zero e H , non assume

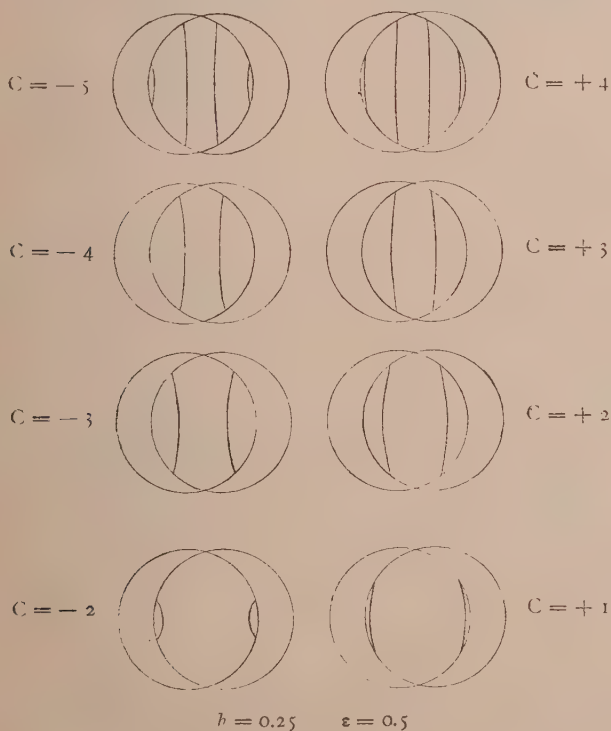


Fig. 3.

mai valori superiori a $\lambda/4$. Così, secondo la legge di Lord Rayleigh, l'immagine in questo punto della caustica è otticamente perfetta (cfr. op. cit.,

pp. 388-392). La fig. 2 riproduce l'aspetto del campo quando il reticolo passa per il fuoco parassiale ($C = 0$) e per il fuoco marginale ($C = -1$). Si è posto $\varepsilon = 0.5$ per ragioni che diremo tra poco. La linea nera indica l'asse della prima frangia nera ($k = \pm 0.5$). La distorsione è così evidente che non può sfuggire ad alcun osservatore.

2° caso: $b = 0.25$. In queste condizioni, secondo la regola di Lord Rayleigh, l'immagine è otticamente perfetta in qualunque punto della caustica, compresi gli estremi. Ponendo ancora $\varepsilon = 0.5$, il campo risulta privo di frange finchè il reticolo si trova in un intervallo lungo circa due caustiche, tra $C = +0.5$ e $C = -1.5$. Però per valori di C oltre questi limiti le frange appaiono nel campo e ancora notevolmente deformate. La fig. 3 riproduce l'aspetto dell'asse della frangia $k = \pm 0.5$ e poi anche

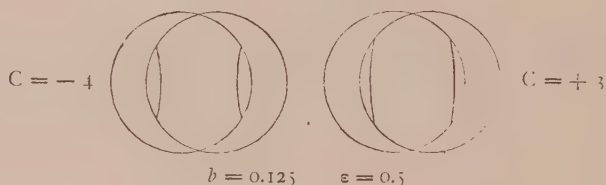


Fig. 4.

della seconda frangia nera ($k = \pm 1.5$) per $C = +1, +2, +3$ e $+4$, e per $C = -2, -3, -4$ e -5 .

3° caso: $b = 0.125$. Basterebbero i risultati già esposti per concludere che la sensibilità del metodo è più che sufficiente per gli usi pratici. Ma per dimostrare la potenza del mezzo di indagine, si sono calcolate e disegnate le frange corrispondenti a $b = 1/8$, ancora per $\varepsilon = 0.5$, e per valori di $C = -4$ e $+3$ (per valori di C compresi in quest'intervallo il campo appare uniforme) (fig. 4). La distorsione è ancora sensibile; ma siamo al limite, e una ulteriore diminuzione nell'aberrazione d'onda porterebbe a ottenere delle frange praticamente rettilinee. Ma deve si notare che il valore di $\lambda/8$ ora studiato è $w_p(H)$, cioè rispetto alla sfera di riferimento col centro nel fuoco parassiale; e che se si trasporta questo centro nel miglior fuoco ($C = -0.41$), $w(H)$ diviene

$$0.18 w_p(H) = 0.022 \lambda = \lambda/45.$$

Dunque si può concludere che colle frange d'ombra si possono rivelare aberrazioni d'onda fino a $22/1000$ di λ .

*
* *

Siccome il valore massimo che può essere assunto dall'ascissa l è dato da $H - s/2$ (cfr. fig. 1), il valore massimo dell'ascissa $x = l/H$ è dato da

$$X = \frac{1}{H} \left(H - \frac{s}{2} \right) = 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Data una terna di valori di ε , b e C , il valore di k all'orlo si ottiene ponendo $x = X$ nella formola della k -esima frangia. Quando il reticolo è nel fuoco parassiale, il valore di k all'orlo, per $y = 0$, è anche il massimo valore di k .

Ciò posto, ci possiamo proporre di determinare il valore di ε per cui, fatto $C = 0$, risulta massimo il valore di k all'orlo, per un qualunque valore di b . Ciò equivale a cercare le condizioni di massima sensibilità, perchè, data una certa aberrazione d'onda, l'osservatore ha tutto l'interesse a procurare il maggior numero di frange nel campo, proprio quando il reticolo occupa quella posizione ($C = 0$) per cui, se l'onda fosse sferica, non ve ne dovrebbero essere affatto.

Dobbiamo allora, nell'equazione della k -esima frangia, porre $C = 0$, $y = 0$ e $x = 1 - \varepsilon/2$:

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right)^3 = \frac{k}{4b\varepsilon}.$$

Si deriva rispetto a ε e si risolve l'equazione ottenuta annullando la derivata:

$$\varepsilon^3 - \frac{9}{2} \varepsilon^2 + 6\varepsilon - 2 = 0.$$

La radice $\varepsilon = 0.5$ corrisponde al massimo di k che si cercava. Per questo abbiamo posto $\varepsilon = 0.5$ nei calcoli precedenti.

Non devesi tacere per altro che se ripetessimo lo stesso calcolo per valori di C diversi da zero, si troverebbero dei valori di ε diversi da 0.5; tuttavia in pratica conviene attenersi a valori prossimi a questo. Una tale varietà di risultati spiega come mai, se $b = 0$, le migliori condizioni si hanno per $\varepsilon = 1$, indipendentemente dalla posizione del reticolo⁽¹⁾.

*
* *

Dal punto di vista applicativo, uno dei grandi vantaggi del metodo delle frange d'ombra per la prova dei sistemi ottici sta nel fatto che le frange assumono forme caratteristiche, da cui a prima vista si deduce il tipo di aberrazione presente, senza essere costretti a dedurre le conclusioni

da misure. Nelle memorie precedenti sono date anche le regole, per dedurre i valori numerici dei coefficienti c_4 e c_6 caratteristici delle aberrazioni sferica e zonale; ma tali regole in pratica servono quando le aberrazioni sono di una certa entità.

Quando si tratta di misurare aberrazioni dell'ordine di quelle studiate in questa Nota, conviene calcolare coll'aiuto delle formule qui riportate e disegnare una serie di tavole, in cui figurino le frange corrispondenti a $b = 0.125, 0.25, 0.50, 0.75, 1, \dots$, e per $\epsilon = 0.25, 0.50, 0.75$.

Messo in prova un certo obbiettivo, se ne calcola ϵ , (facilmente, come rapporto β/α); quindi un semplice confronto fra le tabelle corrispondenti e le frange che si osservano permette di dedurre b e insieme $w_p(H)$ e c_4 , evitando misure minuziose, difficili e lunghe, e con un'approssimazione più che sufficiente per gli usi ordinarii.

Con questo la *misura* di un'aberrazione sferica semplice richiede un tempo dell'ordine del minuto primo.

Fisica. — *Velocità caratteristiche degli elettroni diffusi dalle superfici metalliche.* Nota di G. BERNARDINI, presentata dal Socio A. GARBASSO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sopra l'elettrodinamica quantistica.* Nota di G. RACAH, presentata dal Socio A. GARBASSO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) V. RONCHI, *La prova dei sistemi ottici*. Bologna, Zanichelli, 1925, p. 72.

Chimica. — *Ossidazione dei cloriti a clorati con i permanganati* ⁽¹⁾. Nota di G. R. LEVI e D. GHIRON, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. BRUNI.

Il comportamento dei cloriti con i permanganati non è stato finora oggetto di ricerche precise. Millon aveva trovato ⁽³⁾ che i cloriti alcalini reagiscono coi sali manganosi dando perossido idrato di manganese e più tardi Bruni e Levi ⁽⁴⁾ avevano mostrato che in soluzione acida i permanganati vengono ridotti dai cloriti a perossido di manganese. A queste osservazioni non corrisponde nulla di preciso da un punto di vista quantitativo rispetto all'acido cloroso perchè l'azione risultante è piuttosto da attribuirsi ai prodotti di decomposizione dell'acido cloroso, che possono agire sia sui sali manganosi ossidandoli che sui permanganati riducendoli. Le diverse cause che influenzano la decomposizione dell'acido cloroso tolgono ogni interesse analitico a queste reazioni.

Questo comportamento, sia pure variabile, dei cloriti coi composti di manganese li differenzia dai clorati che, con i permanganati, non reagiscono nemmeno in soluzione acida ⁽⁵⁾.

Fürst ⁽⁶⁾ ha trovato che il biossido di cloro viene ossidato dai permanganati nel rapporto 3 a 1: si ottiene perciò da una soluzione neutra un liquido acido. La reazione fu condotta versando il permanganato in difetto nella soluzione di ClO_2 e eliminando l'eccesso di questo dopo filtrazione del MnO_2 . Il liquido dopo di ciò contiene acido clorico e clorati e risulta esente da cloruri e perclorati.

I sali manganosi non vengono ossidati dall'acido clorico ⁽⁷⁾ e, a meno di non essere in presenza di catalizzatori assai attivi, p. es. tetrossido di osmio, i clorati non reagiscono coi sali manganosi. Alcuni clorati assai facilmente idrolizzabili, p. es. il clorato di alluminio, possono però precipitare il perossido di manganese dai sali manganosi ⁽⁸⁾.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale e Chimica-Fisica della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 30 maggio 1930.

(3) « Ann. Chim. Phys. » (3) 7, p. 330 (1843).

(4) « Gazzetta », 45, 11, p. 172 (1915).

(5) LENHER, STONE, SKINNER, « J. Am. Soc. Chem. », 44, p. 143 (1922) e MACK, « J. phys. Chem. », 21, p. 257 (1917).

(6) « Lieb. Ann. », 206 (1881), p. 75.

(7) VITALI, « Boll. Chim. Farm. », 37, p. 545 (1898) e 38, p. 201 (1899).

(8) DOBROSSERDOW, « J. Russ. Ges. Chem. », 37, p. 468 (1901).

In conclusione i clorati alcalini e alcalino terrosi, a meno che non intervengano altre cause, sono stabili sia in presenza di sali manganosi che di permanganati.

Curioso, variabile e abbastanza incerto appare il comportamento delle soluzioni degli ipocloriti studiate generalmente in presenza di cloruri. Il biossido di manganese precipitato reagisce secondo Gay-Lussac⁽¹⁾ a caldo con le soluzioni di ipocloriti trasformandosi in permanganato. Secondo Böttger⁽²⁾ gli ipocloriti in soluzione alcalina non ossidano $Mn(OH)_2$; il biossido idrato si trasforma con cloruro di calce in permanganato. Secondo Blattner⁽³⁾ l'idrato manganoso è ossidato dalla soluzione di ipoclorito sodico, si ha ossidazione talvolta fino a permanganati e il deposito di perossido idrato si ottiene anche operando a freddo⁽⁴⁾. In presenza di idrato sodico e con soluzioni concentrate a caldo $MnCl_2$ passa a permanganato⁽⁵⁾.

La presenza di tracce di sali di rame, anche di cobalto e nichelio, catalizza l'ossidazione dei sali manganosi a permanganati in modo da realizzare talvolta la trasformazione completa⁽⁶⁾.

In relazione a questi fatti abbiamo studiato il comportamento dei cloriti con le soluzioni neutre dei permanganati. Facciamo osservare che ricerche precise in proposito sono per noi assai importanti per l'elaborazione di metodi analitici di dosaggio dei cloriti accanto a clorati, ipocloriti e cloruri. Il problema del dosaggio di ipocloriti e cloriti è stato recentemente studiato da Schleicher e Wesly⁽⁷⁾ titolando elettrometricamente gli ipocloriti con acido arsenioso e con ioduri i cloriti rimasti assieme all'arseniato formatosi. Questi autori hanno usato nello studio delle soluzioni pure di cloriti preparate per loro dal sig. Dolch.

PARTE SPERIMENTALE.

I permanganati alcalini ossidano lentamente i cloriti alcalini in ambiente neutro ma la reazione non procede per l'alcalinizzarsi del liquido: adoperando al posto del clorito potassico del clorito di calcio la reazione avviene facilmente, usando i rapporti corrispondenti dei due sali, se le soluzioni sono abbastanza concentrate: la precipitazione del manganito di calcio con conseguente neutralizzazione del liquido facilita la reazione stessa che va

(1) « C. R. », p. 949 (1842).

(2) « J. prakt. Chem. », 95, p. 375 (1865).

(3) « Bul. Soc. Chim. », (3) 7, p. 705 (1892).

(4) DITZ e KNÖPFELMACHER, « Z. ang. Chem. », 12, p. 1222 (1899).

(5) BAXTER, FREVERT « J., Am. Soc. Chem. », 34, p. 114 (1905).

(6) DIXON e WHITE « J., Chem. Soc. », p. 1469 (1927).

(7) « Z. anal. Chem. », 65, p. 409 (1924-25).

secondo lo schema sottoindicato purchè si neutralizzi l'alcalinità man mano che si forma p. es. con un sale di calcio, magnesio, zinco:



o in ioni:



In queste prove abbiamo usato del clorito di calcio purissimo *esente da cloruri* preparato con un metodo che uno di noi ha altra volta avuto occasione di descrivere e che all'analisi dava:

‰ Ca dosato come CaO: 22,80 e 22,88: calcolato 22,90.

Va da se che tutto il valore del risultato analitico è legato all'*assenza* dei cloruri.

1° *esperimento*. — Tenendo conto che la reazione avviene secondo i rapporti $3\text{Ca}(\text{ClO}_2)_2 + 2\text{KMnO}_4$ abbiamo mescolato gr. 2,625 di $\text{Ca}(\text{ClO}_2)_2$ con gr. 1,580 KMnO_4 il tutto in 100 cc. di acqua, avendo l'avvertenza di sciogliere le due sostanze separatamente prima di mescolare. La soluzione scaldata due ore a bagno maria fu poi analizzata a scolorimento completo:

Cloro teorico presente gr. 1,063: trovato come cloruro gr. 0,0984.

» » cloruro + clorato gr. 1,056.

Il cloro totale fu sempre determinato dopo riduzione con acido solforoso: quello dei cloruri col metodo di Mohr.

2° *esperimento*. — L'esperienza analoga alla precedente, ma lasciando una notte a temperatura ambiente, diede analogo risultato e cioè scolorimento del permanganato, la quantità di cloruri formati si ridusse però assai:

Cloro teorico presente gr. 1,063 trovato come cloruro gr. 0,0434

» » cloruro + clorato gr. 1,012.

Le perdite di cloro rispetto al calcolato sono da attribuirsi alla difficoltà di lavare completamente il manganito di calcio.

3° *esperimento*. — Furono adoperati come sopra gr. 2,625 di $\text{Ca}(\text{ClO}_2)_2$ ma un eccesso di KMnO_4 e precisamente gr. 3,160 cioè il doppio delle precedenti esperienze. Anche dopo 12 ore di riposo a temperatura ambiente il liquido non era scolorato: aggiungendo alcune gocce d'alcool e scaldando a bagno maria il liquido si scolorò, all'analisi si ottenne:

Cloro teorico presente gr. 1,063 trovato come cloruro gr. 0,0492

» » cloruro + clorato gr. 1,044

Nessuna azione ha perciò un eccesso di permanganato sulla reazione.

4^o *esperimento*. — Abbiamo pensato dai risultati delle esperienze 1 e 3 che la presenza dei cloruri in piccola quantità fosse semplicemente dovuta a spontanea alterazione delle soluzioni dei cloriti; la supposizione è stata confermata dall'esperienza. Infatti gr. 1,000 di $\text{Ca}(\text{ClO}_2)_2$ sciolti assieme 1,000 di KMnO_4 in 350 cc. di acqua lasciati una notte a se decolorati poi con alcune gocce d'alcool diedero:

Cloro teorico presente gr. 0,4053; trovato come clorato gr. 0,4020.
Cloruri assenti.

Se si sostituisce il clorito di calcio con la corrispondente quantità di clorito potassico la reazione non si completa: operando coi rapporti calcolati non si arriva cioè allo scolorimento del liquido.

Operando in soluzioni diluite N/10, come può interessare la chimica analitica, la reazione procede lentamente anche pel clorito di calcio ed è quasi nulla pei cloriti alcalini: in tal caso occorre aggiungere del solfato di zinco alla soluzione e scaldare dopo aver aggiunto buona parte del permanganato alcalino, per aiutare la coagulazione del manganito di zinco. Si completa così facilmente la reazione anche in soluzione diluita.

La reazione però non si presta ad un impiego analitico: i risultati ottenuti portano sempre a valori troppo bassi in clorito.

È questo il primo esempio di ossidazione totale del clorito a clorato per via chimica senza contemporanea formazione di cloruri. Uno di noi ha trovato anni fa che l'ozono ossida i cloriti a ClO_2 ⁽¹⁾ liberandosi alcali; poichè ClO_2 dà clorito e clorato è possibile in ultima analisi, anche con l'ozono, ossidare tutto il clorito: non è però una reazione direttamente completa come quella col permanganato.

Riassumendo. — Viene dimostrato che i cloriti vengono ossidati quantitativamente a clorati dai permanganati in soluzione neutra anche a freddo: l'aggiunta di sali di calcio, zinco ecc. rende la reazione più rapida e completa perchè si neutralizza l'alcalinità del processo:



Un eccesso di permanganato non altera l'andamento del processo soprascritto.

(1) G. R. LEVI, « Rend. Lincei », 31 (5) 1, p. 370.

Chimica. — *Struttura dei gas inerti.* — I. *Esame dello Xeno*⁽¹⁾.
Nota di G. NATTA e di A. NASINI, presentata⁽²⁾ dal Socio
G. BRUNI.

Speciale interesse ha sempre destato nei ricercatori lo studio della costituzione e delle proprietà dei gas inerti, elementi che sono alla base del sistema periodico, in quanto alla loro struttura si connette quella di tutti gli altri elementi, che nell'aggruppamento dei loro costituenti primi tendono alle disposizioni elettroniche a massima stabilità proprie dei gas nobili.

Sinora ci risulta nota solamente la struttura dell'Argo⁽³⁾, che presenta un reticolo cubico a facce centrate, similmente ad una gran parte degli elementi a molecole monoatomiche, quali i metalli duttili, struttura che porta, insieme con quella esagonale compatta, a reticoli a densità massima per atomi sferici tra loro eguali. Si hanno però numerosi metalli esagonali ed alcuni che cristallizzano in ambedue le forme compatte. Era quindi interessante vedere mediante l'analisi röntgenografica la struttura reticolare degli altri gas rari, in special modo di quelli più pesanti, che possiedono una struttura elettronica complessa.

Un altro dato che può fornire la ricerca röntgenografica e che può portare a confronti degni di nota è la determinazione dei diametri atomici, che, per i gas inerti, da molti autori sono stati calcolati per vie diverse e che hanno avuto gran parte nelle moderne teorie elettroniche della valenza.

Varie difficoltà si presentavano per l'esame dei gas non ancora esperimentati. Per il Neo occorrerebbe operare a temperature bassissime quali quelle di ebollizione dell'idrogeno liquido a pressione ridotta e quindi con difficoltà sperimentali notevoli, abbiamo perciò per il momento tralasciato di occuparcene. Difficoltà ancora maggiori si presenterebbero per l'elio. Il Kripto e lo Xeno si prestano invece bene per la loro temperatura di fusione relativamente alta, ma era d'altra parte difficile ottenerli in misura sufficiente dato il loro alto costo e la poca disponibilità. Abbiamo dovuto ricorrere quindi ad artifici che ci permettessero di operare un'analisi accurata su piccole quantità di gas.

In questa Nota riportiamo i risultati ottenuti per lo Xeno, mentre in una successiva riferiremo sui dati per il Kripto e discuteremo i valori ottenuti. L'esame del Kripto ha reso inoltre necessaria una modificazione dell'apparecchio usato per lo Xeno.

(1) Lavoro eseguito nel R. Politecnico di Milano.

(2) Nella seduta del 30 maggio 1930.

(3) F. SIMON e C. v. SIMSON, «Zeitschr. f. Phys.», 25, 160 (1924); J. DE SMEDT e W. H. KESOM, «Comm. Phys. Lab. Leiden», 178, 19 (1926).

Fotogramma dello Xeno.
Fe/ant.

sen $\frac{\theta}{2}$	d	hkl	a	Intensità	
				Osservata	Calcolata
0.2784	3.474	111	6.019	d	4.61
0.3200	3.021	200	6.042	dd	3 —
0.4514	2.143	220	6.062	m	4.24
0.4800	(1.826)	(β 113)	(6.057)	d	—
0.5287	1.829	113	6.067	ff	7.23
0.5519	1.753	222	6.072	d	3.46
0.6360	1.521	004	6.084	d	1.50
0.6915	1.399	331	6.099	mf	5.50
0.7080	1.366	240	6.109	m	5.37
0.7753	1.247	224	6.110	md	4.90
0.8200	1.179	115	6.127	md	4.62
0.8897	1.087	440	6.148	dd	2.22
0.9070	(0.967)	(β 206)	(6.125)	dd	—
0.9271	1.043	351	6.170	mf	8.12
0.9397	1.029	006	6.174	md	1 —
		244			3 —

Per l'esame dello Xeno ci siamo serviti di un dispositivo analogo a quello usato da uno di noi per l'esame dell'idrogeno solforato e di quello seleniato⁽¹⁾. Il gas veniva immesso in una piccola camera di vetro su cui era fissato, mediante un giunto a smeriglio a perfetta tenuta, un Dewar di quarzo terminante a capillare di circa 1 mm. di diametro interno. La camera di vetro era munita di due rubinetti comodamente manovrabili, sia per ottenere il vuoto, sia per l'immissione di gas secchi e non condensabili alla temperatura dell'aria liquida. Nella camera di vetro veniva prima fatto il vuoto mediante una pompa a mercurio e poi veniva introdotto cautamente il gas. Si poteva così seguire il processo di solidificazione del gas sul capillare, e regolarne volendo anche lo spessore dello strato. Conoscendo la quantità di gas immesso si poteva calcolare anche approssimativamente lo spessore dello strato. Si può ritenere che nel nostro caso lo strato conden-

(1) G. NATTA, «Rend. R. Acc. Lincei», XI, 680 (1930).

sato fosse di 0.004 cm. Ottenuta la condensazione del gas sul capillare si faceva rientrare aria secca nella camera di vetro, si toglieva il tubo di Dewar e lo si adattava, pure mediante un giunto a smeriglio, sulla camera di Debye, preessicata, centrando opportunamente il preparato nel modo solito. Ad operazione finita si poteva poi recuperare totalmente il gas, data la sua bassissima tensione di vapore alla temperatura dell'aria liquida, eseguendo le operazioni inverse.

I fotogrammi sono stati ottenuti mediante un tubo Philips ad elettroni usando un anticatodo di ferro. Si leggono 15 linee, di cui due β . Nella unita tabella riportiamo i dati del calcolo usando i simboli noti.

Gli indici attribuiti alle diverse linee corrispondono ad un ordinamento cubico tipo faccie centrate. Difatti mancano completamente riflessioni corrispondenti a faccie ad indici misti.

I valori indicati per d nella tabella non sono stati corretti dallo spostamento dovuto all'opacità ed al diametro del preparato, che in questo caso praticamente corrisponderebbe al diametro del capillare di quarzo. Dobbiamo perciò assumere come valore corretto del lato della cella elementare il valore limite massimo, per angoli di riflessione tendenti a 180° , dei valori medi sperimentali.

Risulta così un lato della cella elementare $a = 6.18 \pm 0.02 \text{ \AA}$, ad una temperatura che, data la dispersione termica dell'apparecchio, si può stimare eguale a circa 100° assoluti. Nelle due ultime colonne della tabella sono raffrontate le intensità stimate con quelle calcolate colla formula semplificata:

$$J = K \frac{nS}{\sqrt{h^2 + K^2 + l^2}}$$

dove KS si è posto eguale ad 1 essendo il fattore di struttura eguale per tutte le faccie ad indici tutti pari o tutti dispari.

Il volume della cella elementare risulta $236 \cdot 10^{-24} \text{ cc.}$; la densità, supponendo che la cella contenga 4 atomi e che il peso dell'atomo di idrogeno sia $1.65 \cdot 10^{-24} \text{ gr.}$, risulta 3.64. Pur non essendo stata determinata sinora sperimentalmente la densità dello Xeno solido, riteniamo questo valore attendibile possedendo lo Xeno allo stato liquido una densità $3.06^{(1)}$ alla temperatura di ebollizione. Dobbiamo quindi ritenere che la cella dello Xeno, analogamente a quella dell'Argo, contenga 4 atomi. Il raggio apparente dell'atomo dello Xeno risulta dai dati röntgenografici da noi ottenuti eguale a 2.18 \AA , ammettendo la tangenza nel reticolo di atomi sferici.

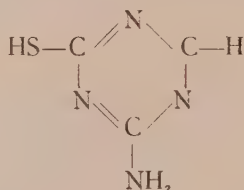
In una prossima Nota, nella quale riferiremo i risultati dell'esame del Kripto, discuteremo i valori ottenuti.

(1) H. S. PATTERSON, R. S. CRIPPS e R. WHYTLAW-GRAY, «Proc. Roy. Soc.», A 86, 579 (1912).

Chimica. — *Ricerche sulle γ -triazine. Sintesi della etil- e della propil-amino-tiol-triazina con alcuni nuovi dati sulla metil-amino-tiol-triazina*⁽¹⁾. Nota di A. OSTROGOVICH e V. GALEA⁽²⁾, presentata⁽³⁾ dal Socio R. NASINI.

Nei « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », del febbraio 1912, è comparsa una Nota preliminare di uno di noi sulla sintesi della *metil-amino-tiol-triazina*⁽⁴⁾, che era la prima *alchil-tio-triazina* conosciuta e che fu preparata per condensazione della *cianguanidina* con l'acido *tiol-acetico*.

Ci è parso ora non privo d'interesse di riprendere lo studio di questa reazione per estenderla ad altri tioacidi ed ottenere così, non solo la *amino-tiol-triazina*



(oppure la sua forma imino-tionica)

capo della serie ed essa pure sconosciuta finora, ma anche parecchi altri suoi derivati in cui, al posto dell'idrogeno legato al primo atomo di carbonio del nucleo triazinico, si trovi un *alchile* o un *arile*, oppure anche un radicale misto, che chiameremo *ar-alchilico*, come sarebbe il *benzile*, lo *stirile*, ecc.

In quanto all'*amino-tiol-triazina*, capo della serie, ci riserbiamo di parlarne in un'altra Nota. La difficoltà di ottenere l'acido tioformico ci ha fatto rimettere a più tardi questa ricerca; ciò tanto più in quanto che la pratica

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale dell'Università di Cluj (Romania).

(2) Queste ricerche e le altre di cui si fa parola nelle tre Note che fanno seguito a questa, serviranno come tesi per la laurea in chimica al signor VIRGIL GALEA.

A. OSTROGOVICH.

(3) Nella seduta del 30 maggio 1930.

(4) A. OSTROGOVICH, « Rend. Acc. Lincei » (5), XXI, p. 213 (1912). In questa Nota, che fu presentata all'Accademia dal prof. senatore E. Paternò di Sessa, adottai il nome di *metil-imino-tio-triazina*, prendendo in considerazione la forma *imino-tionica* della sostanza invece dell'altra *amino-tiologica*. Ulteriori ricerche saranno necessarie per stabilirne la vera struttura.

acquisita nella sintesi delle altre tio-triazine ci servirà moltissimo durante le ricerche per ottenere il capo della serie.

Avendo a disposizione una serie di cloruri acidi, ancora da prima della guerra, tutti i tioacidi, da noi adoperati finora per queste sintesi, li abbiamo preparati col vecchio sistema con cui Jacquemin e Vosselmann hanno ottenuto l'acido tio-acetico ⁽¹⁾ e cioè facendo gocciolare lentamente una mole del cloruro acido rispettivo nella soluzione alcoolica raffreddata di circa 3 mole e mezza di idrossido potassico, saturata fino a rifiuto con idrogeno solforato. Una volta introdotto tutto il cloruro acido, si filtra il cloruro potassico deposto e si ha così la soluzione alcoolica del sale potassico del tioacido, mescolato ad una certa quantità di solfidrato di potassio.

Nonostante ciò, questa soluzione può essere adoperata tale e quale in molti casi, come diremo appresso.

Il voler applicare ad altri tioacidi il metodo di sintesi che ha permesso ad uno di noi di ottenere la *metil-amino-tiol-triazina*, ci ha offerto sul principio non poche difficoltà, soprattutto in quei casi in cui il tio-acido si altera con grande facilità ed è perciò assai malagevole di prepararne quantità alquanto rilevanti. Ma, dopo varie prove di orientamento, abbiamo osservato che ci si può dispensare benissimo dall'isolare il tio-acido come tale, adoperando in sua vece, come abbiamo già accennato, la soluzione alcoolica del suo sale potassico (nonostante che essa contenga una certa quantità di solfidrato di potassio) e ciò soprattutto ogni qual volta la *tiol-triazina*, che viene a formarsi, è insolubile o poco solubile a freddo in acqua e in alcool, com'è per es. il caso dei suoi derivati arilici e alcuni altri ancora.

Si procede perciò nel seguente modo:

Ad una quantità determinata di soluzione alcoolica del sale potassico si aggiunge una soluzione alcoolica calda di cianguanidina, nel rapporto di circa 2 mole di questa sostanza per 1 mole di tio-acido; quindi si sposta l'aria del pallone con una corrente d'anidride carbonica, che si mantiene durante tutta l'operazione, e agitando continuamente il liquido lo si acidifica leggerissimamente con SO_4H_2 acquoso (1:1), servendosi delle cartine esplosive al rosso di Congo.

In alcuni casi come per es. nella sintesi della *fenil-amino-tiol-triazina*, subito dopo l'acidificazione, tutto il liquido si rapprende in una massa di cristallini incolori; in altri casi abbisogna un tempo un po' più lungo affinché la reazione si completi ed allora si mantiene il tutto alcune ore in atmosfera di anidride carbonica, agitando di tanto in tanto per favorire la cristallizzazione della tiol-triazina. Si filtra poi il deposito, che è formato da solfato potassico e tiol-triazina, e si separa quest'ultima sostanza sciogliendo il tutto

(1) « C. R. », 49, p. 371 (1859). Questo metodo fu poi applicato da O. Kym, « Ber. », 32, p. 3533 (1899), per ottenere l'acido *tiol-benzoico* e da JOHNSON, « J. Am. Soc. Chem. », 28, p. 1457 (1906), per preparare l'acido *fenil-tiol-acetico*.

in idrossido potassico diluito e riprecipitando a freddo la tiol-triazina con acido acetico, esso pure diluito.

La sostanza così ottenuta è ordinariamente in cristallini minutissimi perfettamente incolori o di un colore crema pallidissimo appena percettibile.

Dalle acque madri alcooliche si può recuperare un'altra piccola porzione della tiol-triazina; ma questa porzione risulta sempre colorata in giallo e meno pura, cosicchè spesso non conviene neppure occuparsene, soprattutto quando la tiol-triazina si forma con forte rendimento ed è poco solubile a freddo. In ogni modo, nella parte sperimentale sarà menzionato il metodo per giungere a purificare sufficientemente anche questa porzione.

Quando invece la tiol-triazina è abbastanza solubile in alcool e in acqua, com'è appunto il caso della etil-, della propil- e della benzil-amino-tiol-triazina, il metodo accennato più sopra dà troppo scarsi rendimenti.

Abbiamo trovato che in questi casi si ottengono risultati molto migliori lavorando come segue:

Una quantità determinata di soluzione alcoolica del sale potassico del tio-acido si concentra nel vuoto facendo barbotare anidride carbonica attraverso il capillare; quindi si aggiunge acqua e si travasa in un estrattore a robinetto pieno di anidride carbonica, versandovi poi una certa quantità di etere etilico. Dopo ciò, si acidifica leggermente con SO_4H_2 diluito, fino a leggera colorazione azzurra delle cartine al rosso di Congo; si agita bene, procurando di mantenere sempre un'atmosfera inerte e la soluzione eterica del tio-acido si versa in un altro pallone (pieno anch'esso di anidride carbonica) aggiungendovi, come sopra, una soluzione alcoolica calda di *cianguanidina* nello stesso rapporto di circa 2 mole per una di tio-acido. A questo punto si porta all'ebullizione a pressione ordinaria sul bagnomaria e quindi (sempre in corrente di CO_2) si distilla lentamente l'etere e l'alcool. In questo modo, la cianguanidina e il tioacido vengono a trovarsi per un certo tempo a contatto ad una temperatura più alta dell'ordinaria e il rendimento in triazina è molto accresciuto. Quando l'etere e una gran parte dell'alcool se ne sono andati, incomincia a deporsi la tiol-triazina in piccoli cristallini, che aumentano sempre, provocando dei forti sussulti e che sono bagnati da un liquido giallo-rossastro dovuto ad una parte del tio-acido alterato. Si cessa il riscaldamento quando non distilla più alcool e dopo poco tempo si ha una massa cristallina appena inumidita dal liquido rossastro. Ottenuto ciò, si sbatte due o tre volte nel pallone con etere etilico per asportare il liquido rossastro e, per filtrazione e nuovo lavaggio sul filtro con etere, si ha una sostanza cristallina appena colorata in giallo-crema pallidissimo. È la tiol-triazina cercata. La si può purificare, sia per ricristallizzazione dall'acqua, con o senza aggiunta d'un po' d'alcool, oppure sciogliendola in poco idrossido di potassio o di sodio diluiti e, dopo aver filtrato se occorre, acidificando leggermente con acido acetico.

È curioso che tanto da questo picrato, quanto da quelli delle altre *tiol-triazine* da noi ottenute, è difficilissimo di avere buoni valori analitici per il carbonio, l'idrogeno e l'azoto. Essendo superfluo insistere per trovare le condizioni necessarie, ci siamo limitati alla sola determinazione dello zolfo, che riesce sempre bene.

$$\text{Sost} = \text{gr. } 0.1652 \quad ; \quad \text{SO}_4\text{Ba} = \text{gr. } 0.0994$$

	Trovato S % 8.26
per $\text{C}_5\text{H}_8\text{N}_4\text{S} \cdot \text{C}_6\text{H}_3\text{N}_3\text{O}_7$	Calcolato 8.32

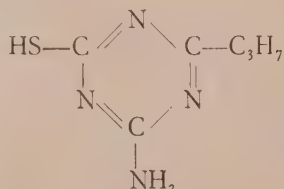
Se alla soluzione tiepida di etil-amino-tiol-triazina in ammoniaca diluita si aggiunge la quantità strettamente calcolata di soluzione normale di nitrato d'argento, si precipita il SALE D'ARGENTO sotto forma di aghettini microscopici bianchi, assai poco solubili in ammoniaca, un po' più in acido nitrico, i quali sono insensibili alla luce.

$$\text{Sost} = \text{gr. } 0.1387 \quad ; \quad \text{Ag} = \text{gr. } 0.0567$$

	Trovato Ag % 40.88
per $\text{C}_5\text{H}_7\text{N}_4\text{S} \cdot \text{Ag}$	Calcolato 41.01

È da notare che tutte le tiol-triazine, da noi ottenute finora, all'in fuori del derivato stirilico, danno nelle condizioni sopra descritte un sale bianco, qualche volta cristallino e che risulta insensibile alla luce. Se invece si adopera un eccesso di nitrato d'argento, il sale che si ottiene acquista una tinta leggerissima giallo-crema e diventa sensibile alla luce. È probabile che in queste condizioni si formi un complesso col nitrato d'argento.

Propil-amino-tiol-triazina:



(oppure la sua forma imino-tionica)

Anche questo derivato propilico normale si prepara come il precedente e una volta purificato si ottiene in lunghi aghi prismatici incolori, che si colorano in giallo verso 250°, quindi si contraggono molto e si fondono a 262-263° in un liquido rosso bruno, decomponendosi.

Il miglior solvente per ricristallizzarlo è l'acqua. In generale si può dire che la sua solubilità nei diversi solventi è all'incirca come quella del com-

posto precedente. Tuttavia, questo derivato propilico è sempre *un po' meno solubile* del precedente, il quale invece è *assai più solubile* del derivato metilico.

- I) Sost = gr. 0.1030 ; CO₂ = gr. 0.1601 : H₂O = gr. 0.0421
 II) Sost = gr. 0.00298 ; N cc. (corr.) 0.8918 a 20° e 738 mm.
 III) Sost = gr. 0.1622 ; SO₄Ba = gr. 0.2234.

	Trovato			Calcolato per C ₆ H ₁₀ N ₄ S
	I	II	III	
C %	42.39	—	—	42.35
H %	6.10	—	—	5.88
N %	—	33.05	—	32.94
S %	—	—	18.92	18.83

La *propil-amino-tiol-triazina* si scioglie anch'essa facilmente negli idrossidi alcalini e nell'ammoniaca, da cui si può precipitare nuovamente coll'acido carbonico o meglio con l'acetico.

Dà anch'essa un cloridrato e un solfato molto solubili che descriveremo in altro luogo.

Il PICRATO è formato da aghi prismatici lunghi, che stando a sè perdono la lucentezza primitiva e diventano molto fragili. Siccome in questo cambiamento non si ha alcuna perdita di peso, è probabile che si tratti di una modificazione nel sistema cristallino. Questo picrato è abbastanza solubile in acqua calda, poco in acqua fredda e si fonde con decomposizione a 153° dando un liquido giallo rossastro.

$$\text{Sost} = \text{gr. } 0.1765 \quad ; \quad \text{SO}_4\text{Ba} = \text{gr. } 0.1049$$

	Trovato	S %
per C ₆ H ₁₀ N ₄ S · C ₆ H ₃ N ₃ O ₇	Calcolato	8.16 8.03

Il SALE D'ARGENTO si prepara nello stesso modo del precedente. È una sostanza fioccosa bianca, poco solubile in ammoniaca e in acido nitrico, insensibile alla luce come l'altro.

$$\text{Sost} = \text{gr. } 0.1141 \quad ; \quad \text{Ag} = \text{gr. } 0.0448$$

	Trovato	Ag %
per C ₆ H ₉ N ₄ S · Ag	Calcolato	39.26 39.38

APPENDICE.

Alcuni nuovi dati sulla metil-amino-tiol-triazina.

Profittiamo di quest'occasione per menzionare che questa sostanza, già descritta da uno di noi, si può preparare anche nelle condizioni trovate adesso per i suoi omologhi superiori e per gli analoghi derivati arilici. Il rendimento, peraltro, è alquanto minore, cosicchè per essa è preferibile di adoperare il metodo originale, tanto più che l'acido tio-acetico si può averlo facilmente dal commercio e in qualunque quantità.

Desideriamo aggiungere inoltre i seguenti dati a quanto fu già pubblicato su questa sostanza.

Essa è molto meno solubile dell'omologo superiore *etilico* ed anche del *propilico*, il quale tuttavia è già un po' meno solubile dell'*etilico*. L'acqua è il suo miglior solvente, per quanto soprattutto a freddo essa ne sciogla ben poca. In alcool etilico e metilico è molto meno solubile che nell'acqua.

Lasciando evaporare lentamente a temperatura ordinaria la sua soluzione acquosa satura abbiamo ottenuto dei cristallini molto ben formati in forma di losanghe appiattite, che *contengono una molecola d'acqua di cristallizzazione*, mentre dall'acqua calda essa cristallizza *anidra*.

Sost = gr. 0.1241 ; perdita di peso in H_2O = gr. 0.0138

	Trovato	H_2O %	11.12
per $C_4H_6N_4S + H_2O$	Calcolato		11.25

Per confronto con le altre tiol-triazine, abbiamo preparato, sempre nello stesso modo, il suo SALE D'ARGENTO, che si presenta come una sostanza gelatinosa bianca, assai poco solubile in ammoniaca, alquanto di più in acido nitrico e che è insensibile alla luce.

	Trovato	Ag %	43.59
per $C_4H_5N_4S \cdot Ag$	Calcolato		43.32

Infine, abbiamo preparato anche il PICRATO che cristallizza in aghetti prismatici sottili, di color giallo-solfo, assai poco solubili in acqua, un po' più in alcool e che si fondono con decomposizione a 196-197° dando una massa vischiosa rosso-bruna.

	Trovato	S %	8.83 e 8.72
per $C_4H_6N_4S \cdot C_6H_3N_3O_7$	Calcolato		8.64.

RIASSUNTO.

In questa Nota si descrivono le condizioni per ottenere gli omologhi superiori della *metil-amino-tiol-triazina* già descritta da A. Ostrogovich, come pure alcuni derivati *arilici* e *aralchilici* dell'*amino-tiol-triazina* ancora sconosciuta.

Si descrive poi l'*etil-amino tiol-triazina*, fusibile a 257-258°, la *propil-amino-tiol-triazina*, fusibile a 262-263°, come pure alcuni loro sali tanto con i metalli quanto con gli acidi. Si danno inoltre alcuni nuovi dati sulla *metil-amino-tiol-triazina* già descritta.

Chimica. — *La struttura cristallina dei gas inerti.* — II. *Esame del Kripto.* Nota di A. NASINI e G. NATTA, presentata dal Socio G. BRUNI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Ricerche sulle γ -triazine. Sintesi di aril-amino-tiol-triazine.* Nota di A. OSTROGOVICH e V. GALEA, presentata dal Socio R. NASINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Ricerche sulle γ -triazine. Sintesi di due alcaril-amino-tiol-triazine.* Nota di A. OSTROGOVICH e V. GALEA, presentata dal Socio R. NASINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geologia. — *Sulla presenza del siluriano fossilifero nell'isola di Coo (Egeo).* Nota di A. DESIO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. DAL PIAZ.

Fra i materiali da me raccolti nell'isola di Coo durante la missione del 1924, v'erano alcuni campioni contenenti resti mal conservati di brachiopodi e briozoi che, insieme con altri ricchi di articoli di crinoidi, avevo attribuito al Paleozoico in base alla loro posizione stratigrafica e alle analogie di *facies* con regioni vicine. Nella stessa Coo era stato precedentemente raccolto dal Plieninger un corallo, determinato dal Frech come *Hallia cylindrica* M. E. e H., specie carbonifera, e che molto verosimilmente doveva appartenere al medesimo livello a crinoidi da me notato. Lo stesso orizzonte è stato da me ritrovato a Lero ⁽²⁾ e recentemente dal Migliorini anche a Rodi. Fra i materiali gentilmente comunicatemi dal Migliorini stesso, ho potuto riconoscere alcune forme di brachiopodi carbonifere ⁽³⁾.

Ma se con questa prova l'orizzonte a crinoidi viene posto definitivamente nel Carbonifero, rimaneva ancora un po' incerta l'età della serie sottostante. Avendo ripreso in esame in questi ultimi tempi tutto il materiale riportato in Patria dai viaggi del 1922-23 e del 1924, per ultimare una monografia sulle nostre isole egee, ho ricorso all'aiuto dell'amico prof. M. Gortani per tentare di riconoscere qualche specie fra i fossili raccolti sotto l'orizzonte a crinoidi. Per buona ventura, malgrado il loro stato poco buono di conservazione, è stato possibile determinare due forme, e cioè *Orthis Noctilio* Sharpe e *Fenestella corniculum* (Mgh.), specie dell'Ordoviciano superiore (Caradoc).

I fossili sono contenuti in uno scisto calcareo nero, lucente, con sottili veli arenacei giallo-verdastri alla superficie, che affiora sul versante meridionale del gruppo del M. Dicheo, il più elevato dell'isola, e più precisamente poco sotto il dosso contrassegnato col nome di « Rachi » sulla carta al 25.000 dell'Istituto Geografico Militare (Tav. Cardamena). Sopra questi scisti giacciono dei calcari cristallini grigio-scuri con macchie bianche, che forse rappresentano resti di fossili, a struttura più o meno decisamente scistosa, i quali sono ricoperti alla loro volta da potenti banchi di calcare saccaroide bianco. Inferiormente, gli scisti neri passano a calcari scistosi

(1) Nella seduta del 30 maggio 1930.

(2) DESIO A., *Cenni preliminari sulla costituzione geologica del Dodecaneso*. « Bollettino Soc. Geol. Ital. », vol. XLIII, Roma 1924, p. 113.

(3) (*Spirifer cameratus* Mort.). Nota in corso di stampa.

grigi, in sottili straterelli, con veli arenacei giallastri alla superficie e indi a calcescisti con intercalazioni di calcari saccaroidi.

Lateralmente, sia verso ovest, sia verso est, questa serie assume un carattere decisamente metaforico (scisti a cornubianite, scisti a chiastolite, quarziti, gneiss) e viene a contatto con ammassi e filoni di diorite quarzifera.

Gli strati siluriani formano il nucleo di un'anticlinale disturbata da faglie e da arricciamenti secondari che attraversa in direzione NE-SO il gruppo del M. Dicheo.

Sino ad ora il Siluriano non era noto nella regione egea e quei tre o quattro affioramenti di Ordoviciano scoperti in Asia Minore (Antitauro ed Amanos) sono molto lontani dalla nostra isola. Inoltre l'Ordoviciano anatolico è meno definito paleontologicamente di quello di Coö, poichè se nell'Antitauro è stato rivelato dalla presenza di un fossile problematico, il *Phycodes circinatum* Brgt. ⁽¹⁾, nell'Amanos si conoscono solo resti, indeterminabili specificamente, di trilobiti (*Acaste*) ⁽²⁾. Del resto anche nel Gotlandiano anatolico, segnalato finora in una sola località della Bitinia, è noto un unico fossile, l'*Halysites catenularia*.

Nell'Egeo i terreni fossiliferi più antichi di cui si aveva conoscenza erano i calcari a *Favosites cristatus* dell'isola di Chio, attribuiti al Devoniano medio e superiore (orizzonte di Agrepolos) ⁽³⁾. Essi coprono regolarmente una potente serie di strati arenacei e scistosi riferiti con incertezza al Devoniano inferiore (sistema di Armani e di Keramos), strati che nella parte inferiore contengono lenti e straterelli di calcare nero (sistema di Paparia). Non mi sembra improbabile che quest'ultimi, data una certa analogia di *facies*, possano rappresentare l'orizzonte siluriano di Coö.

(1) FUCHS TH., *Über einige Hieroglyphen und Fucoiden aus den paläozoischen Schichten von Hadjin in Kleinasien*. «Sitzungsber. k. k. Akad. Wiss. Wien», 1, CXI, 1902, p. 327; BROILI F., *Geologische und paläontologische Resultate der Grothe'schen Vorderasienexpedition 1906/07*, Leipzig 1910, p. II.

(2) FRECH FR., *Geologie Kleinasiens im Bereich der Bagdadbahn*. «Zeitschr. d. Deutsch. Geol. Gesellsch.», Bd: 68, Berlin, 1916, p. 206.

(3) KTENAS C. A., *Sur la découverte du Devonien a l'île de Chio*. «C. R. somm. Soc. Géol. France», mai 1921, Paris, p. 131.

Biologia (Biochimica). — *Azione dei raggi ultravioletti sulla germinazione dell'orzo, per la fabbricazione del malto.* Nota di ROMOLO DE FAZI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio E. PATERNÒ.

Le esperienze di laboratorio da me eseguite su l'azione dei raggi ultravioletti nella germinazione dell'orzo, per la fabbricazione del malto (1919-1923) ⁽²⁾ mi avevano già portato alle seguenti conclusioni:

1° L'azione dei raggi ultravioletti, in determinate condizioni, accelera anche a bassa temperatura (10°-15°), la germinazione.

2° L'azione dei raggi ultravioletti, evita, nella germinazione, la formazione di muffe, facilita la produzione degli enzimi di trasformazione e aumenta il contenuto in vitamine.

3° L'azione dei raggi ultravioletti, in determinate condizioni, permette di ridurre a soli 4-5 giorni il periodo di germinazione, senza influire per questo sulle qualità del malto ottenuto.

Le esperienze industriali hanno pienamente confermato i risultati di laboratorio.

GERMINAZIONE IN TAMBURI GALLAND

Tamburo Uviol

Orzo messo in opera: Q. 114.795.

Periodo di germinazione, giorni 3
ore 21 minuti 30.

Malto ottenuto: (sostanza secca)
Q. 91.9295.

Analisi del malto:

Umidità 4.25 %.

Estratto secco 79.815 %.

Sostanze azotate 9.52 %.

Sost. az. insolubili 6.20 %.

» » Solubili 3.32 %.

» » Coagulabili 0.40 %.

» » Non coagulabili 2.92 %.

Durata della saccarificazione: mi-
nuti 14.

Tamburo di confronto

Orzo messo in opera: Q. 114.790.

Periodo di germinazione, giorni 6,
ore 21.

Malto ottenuto: (sostanza secca)
Q. 88.1214.

Analisi del malto:

Umidità 4.04 %.

Estratto secco 78.646 %.

Sostanze azotate 9.26 %.

Sost. az. insolubili 5.92 %.

» » Solubili 3.34 %.

» » Coagulabili 0.28 %.

» » Non coagulabili 3.06 %.

Durata della saccarificazione: mi-
nuti 14.

(1) Nella seduta del 30 maggio 1930.

(2) Brevetto Italiano n. 173, 917/1919.

Tamburo Uviol

Tamburo di confronto

Odore del mosto in cottura: normale, aromatico.

Filtrazione rapida e brillante.

Colore del mosto in $\frac{n}{10}$ c. c. I. O. 18.

Odore del mosto in cottura: normale.

Filtrazione rapida e brillante.

Colore del mosto in $\frac{n}{10}$ c. c. I. o. 2.

GERMINAZIONE IN CASSE MÜGUER

Cassa Uviol

Cassa di confronto

Orzo messo in opera: Q. 106.825.

Periodo di germinazione: giorno 4, ore 18, minuti 20.

Malto ottenuto: (sostanza secca) Q. 85.126.

Analisi del malto:

Umidità 3.86 %.

Estratto secco 80.520 %.

Sostanze azotate 9.24 %.

Sost. az. insolubili 6.10 %.

» » Solubili 3.14 %.

» » Coagulabili 0.39 %.

» » Non coagulabili 2.75 %.

Durata di saccarificazione: minuti 12.

Odore del mosto in cottura: aromatico.

Filtrazione rapida e brillante.

Colore del mosto in $\frac{n}{10}$ c. c. I. o. 2.

Orzo messo in opera: Q. 106.810.

Periodo di germinazione: giorni 7, ore 20, minuti 15.

Malto ottenuto: (sostanza secca) Q. 81.238.

Analisi del malto:

Umidità 3.92 %.

Estratto secco 78.281 %.

Sostanze azotate 9.18 %.

Sost. az. insolubili 5.94 %.

» » Solubili 3.24 %.

» » Coagulabili 0.26 %.

» » Non coagulabili 2.98 %.

Durata di saccarificazione: minuti 14.

Odore del mosto in cottura: normale.

Filtrazione rapida e brillante.

Colore del mosto in $\frac{n}{10}$ c. c. I. o. 2.

La temperatura di germinazione, sia nel tamburo che nella cassa di confronto, è stata sempre superiore a quella del tamburo e della cassa Uviol.

In ogni singola esperienza, vennero usate due lampade in quarzo a vapore di mercurio, della Quarzlampen di Hanau (intensità luminosa 1200 candele).

L'uso dei raggi ultravioletti permette quindi una riduzione considerevole delle spese d'impianto, dovuta al minor periodo di germinazione, con un maggior rendimento in peso del 4 % sull'orzo messo in opera e del 2 % in estratto secco.

I risultati da me ottenuti nelle numerosissime esperienze eseguite dal 1919 ad oggi, esperienze che saranno in seguito pubblicate, mi permettono di affermare che nella germinazione dei cereali, sotto l'azione dei raggi ultravioletti, è possibile ottenere, in determinate condizioni, sia le vitamine dei

gruppi A-D, sia quelle dei gruppi B-C, e che tutte, sono intimamente legate ai pigmenti colorati.

Io ho notato che l'azione stimolante, esercitata da alcuni estratti organici, ricchi di vitamine, sullo sviluppo e la riproduzione del lievito, viene a mancare, quando questi estratti sono privati dei loro pigmenti colorati. Da ciò deriva la grande differenza dei lieviti, nel loro valore biologico, come possibili sorgenti di vitamine B.

Biologia (Embriologia). — *Primi risultati sperimentali sullo sviluppo dell'otocisti degli Anfibi urodeli* ⁽¹⁾. Nota di C. GUARESCHI presentata ⁽²⁾ dal Socio G. FANO.

Oggetto delle mie ricerche è lo studio dello sviluppo dell'otocisti degli Anfibi; applicando un nuovo metodo di indagine sono riuscito io per il primo a dimostrare sperimentalmente che l'otocisti degli Anfibi anuri è un sistema a mosaico, provando con esperienze decisive ciò che, prima di me, era soltanto oggetto di presupposti, o al massimo di esperienze incomplete e per nulla dimostrative ⁽³⁾.

Nei miei lavori precedenti ho annunziato esperienze sugli Urodeli, le quali non sono senza interesse, perchè sappiamo bene che sistemi regolativi o a mosaico in un gruppo possono comportarsi diversamente in altri.

Ricordo che la Kaan ⁽⁴⁾ ha, in *Amblystoma*, esposto i risultati più concreti che vi siano nella letteratura su tale questione, giungendo alla conclusione che, in seguito all'esportazione di una parte di coppa otica, si forma una otocisti completa nel 25 % dei casi, incompleta nel 75 % ⁽⁵⁾.

Tale differenza è spiegata dalla Kaan coll'ammettere che in quello stadio l'otocisti si trovi in uno stato di transizione fra la totipotenza e il mosaico. Io penso però che anche un'altra spiegazione molto più semplice si possa dare di tale fenomeno: l'otocisti è pressochè invisibile all'esterno; e quindi è abbastanza facile quando si taglia e si asporta una parte della zona otica non ledere affatto l'abbozzo dell'otocisti stessa. Per ovviare a quest'inconveniente io ho trapiantato negli Anuri, la parte asportata, ed è dal confronto

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio dell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 30 maggio 1930.

(3) È imminente la pubblicazione del mio lavoro in esteso sugli Anuri (GUARESCHI, « Arch. f. Entw.-Mech. », 1930).

(4) KAAH H. W. « J. Exp. Zool. », vol. 46, 1926; « An. Rec. », vol. 35, 1927.

(5) Recentemente la Kaan ha pubblicato altri due lavori sull'otocisti. In essi si occupa però solo dello sviluppo delle cartilagini periotiche: « An. Rec. », v. 42, 1929; « J. Exp. Zool. », vol. 55, 1930 (*Harrison Anniversary volume*).

tra l'embrione donatore e l'embrione ospite che ho ricavato le mie conclusioni. Tale metodo, oltre a darmi la certezza che avevo asportato realmente una parte della coppa o della vescicola otica, mi ha dato anche la prova irrefutabile dello sviluppo a mosaico, inquantochè la somma delle formazioni delle due vescicole sviluppatesi dalle due metà dell'abbozzo, non è mai stata superiore (a parte una eccedenza di epitelio indifferente) alle formazioni di una otocisti normale.

Quando però sono andato ad applicare lo stesso metodo sugli Urodeli, mi sono trovato di fronte a difficoltà non lievi.

Di $\frac{1}{2}$ coppie operate, 46 volte è morto il donatore, 4 volte l'ospite, 2 volte sono morti ambedue gli embrioni. In complesso non ho mai ottenuto una coppia completa. Mi limito perciò per ora a descrivere 7 casi di risultati sperimentali, 5 di ospiti e 2 di donatori, scartando tutti quelli in cui l'otocisti si è formata completa o con difetti di poco conto. Ho creduto di dover far ciò perchè, ammaestrato dalle esperienze fatte sugli Anuri, non mi sento di ammettere che l'otocisti, operata collo stesso metodo e nello stesso stadio, possa, come crede la Kaan, comportarsi in due modi perfettamente opposti. Credo più logico pensare, almeno provvisoriamente, che tali casi siano dovuti ad operazioni che non hanno interessato l'abbozzo che si ricercava.

Caso 1° - *Triton taeniatus*: asportazione di una parte della coppa otica. Si è sviluppata una otocisti piccola, piriforme, che si presenta mancante di tutti i canali semicircolari.

Caso 2° - *T. cristatus*: operazione simile alla precedente. Si è sviluppata una otocisti piccola, rotonda senza accenno dei canali semicircolari.

Caso 3° - *T. cristatus*: trapianto di una parte di coppa otica ventralmente alla normale. Si è differenziata un'otocisti provvista di un canale, l'accenno di un altro e l'epitelio di senso⁽¹⁾.

Caso 4° - *T. cristatus*: trapianto di una parte di vescicola otica nella zona ventrale dell'embrione. Si è differenziata una otocisti provvista del solo epitelio di senso.

Caso 5° - *T. cristatus*: trapianto di una parte di vescicola otica accanto alla normale, allo scopo di ottenere la fusione. Questa non si è avuta, si è invece sviluppata una piccolissima vescicoletta sferica, formata di un epitelio semplice, che non presenta alcuna delle formazioni caratteristiche dell'orecchio interno.

Caso 6° - *T. cristatus*: trapianto di una parte di vescicola otica al posto dell'occhio. Si è formata una otocisti con pareti di epitelio semplice provvista di un solo accenno di canale semicircolare.

(1) Come ho già detto in un mio precedente lavoro chiamo con questo termine, già usato da altri autori, la zona, formata di epitelio cilindrico, che darà origine alla *macula utricoli* e alla *macula sacculi*.

Caso 7° - *T. cristatus*: operazione simile alla precedente. L'otocisti sviluppatasi ha il solo epitelio di senso, senza canali né *ductus endolymphaticus*.

Come si vede da questi pochi casi descritti, pur potendosi concludere fin da ora che una parte di coppa o di vescicola otica non è capace di dare una otocisti completa, non si può escludere con assoluta certezza che non vi possa essere, anche all'intuori dell'epitelio indifferente alcun cenno di regolazione. È mancata cioè quella prova cruciale che nelle mie esperienze sugli Anuri è stata fornita precisamente dal controllo tra ospite e donatore.

A risolvere questa difficoltà ho pensato di modificare leggermente, e sto operando in tal senso, il metodo già da me usato: asportando completamente la vescicola otica di un embrione, dividendola in due parti, e trapiantando le due parti in due ospiti diversi, dovremmo, con molta probabilità ottenere la coppia necessaria al confronto. Con tale variazione infatti potremo prescindere dal donatore, che, come ho detto, si sono dimostrati poco resistenti.

Si può sempre obiettare che, come risulta dal mio ultimo lavoro (1), da tali casi, non essendo le condizioni spaziali ottime come dovrebbero, non si possono ricavare deduzioni incontestabili; ma le condizioni spaziali ottime si possono sempre creare asportando l'ascozzo di qualche organo dalla zona in cui si opera il trapianto (2).

Mi auguro pertanto che le operazioni con tale metodo modificato portino i risultati sperati; se poi qualche operatore di me più abile riuscirà, magari su materiale di Urodelti più resistenti a tenere in vita i donatori delle coppie sarò ben felice di prendere atto di risultati che ho ragione di presumere saranno di conferma a quanto ho già potuto dimostrare sugli Anuri.

Patologia. — *La rigenerazione del sistema nervoso centrale prima e dopo la nascita*. Nota di A. MIGLIAVACCA, pres. dal Socio F. BORTAZZI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) « Arch. f. Entw.-Mech. », 1930.

(2) Non avendo potuto avere, tra finiture ed ospite, la somma e completa delle formazioni dell'otocisti, può sempre rimanere il dubbio, in mancanza di una prova con decisione, che l'ascozzo dell'otocisti, per le condizioni normali in cui si tiene a tenere, tema azioni inibitrici, indipendentemente dalle sue potenze.

Commemorazione del Socio nazionale prof. Angelo Ruffini

letta dal Socio GIUSEPPE LEVI nella seduta del 30 maggio 1930.

Nell'aprile del 1900 si riuniva a congresso in Pavia l'« Anatomische Gesellschaft »; vi convennero i più illustri istologi di vari paesi d'Europa coll'intento di rendere omaggio a Camillo Golgi. La dimostrazione di preparati microscopici che Angelo Ruffini fece in occasione di quel memorabile convegno, fu per i più una vera rivelazione; Albert von Koelliker, più che ottantenne, ma tuttora agile di spirito, ebbe dall'esame di quei preparati una tale impressione che ne parlò lungamente nella relazione che dedicò al Congresso di Pavia. Ed Apáthy ne trasse argomenti a favore delle sue vedute sulla struttura del sistema nervoso; il risultato di quell'incontro fra il celebre istologo ungherese e Ruffini fu la pubblicazione della memoria in collaborazione sulle fibre nervose ultraterminali, nella quale è posto in luce un fatto fecondo, anche se, come vedremo, al medesimo viene oggi dai più data un'interpretazione diversa da quella espressa da Apáthy e da Ruffini.

Ruffini era a quel tempo medico condotto a Lucignano ed era poco conosciuto nel mondo scientifico, sebbene da oltre dieci anni lavorasse sulla struttura del sistema nervoso periferico e sebbene fin dal 1891 egli avesse scoperta una forma nuova di apparato nervoso terminale. Ma per molteplici circostanze, non ultima la scarsa diffusione che hanno in Germania i periodici italiani, le sue ricerche erano prima del Congresso di Pavia quasi ignorate fuori d'Italia. La stessa sorte doveva toccare alle sue ricerche di Embriologia, apparse quando Egli aveva digià conquistato fama come studioso del sistema nervoso periferico.

Ma di ben altre e più gravi avversità fu amareggiata la vita di Ruffini; sventure familiari, difficoltà economiche e di carriera; infatti anche in un periodo in cui l'interesse delle sue scoperte sugli organi nervosi terminali era apprezzato da tutti i competenti, Egli non aveva conquistata la situazione decorosa alla quale aveva diritto. Dopochè ebbe lasciata la condotta in Lucignano, fu nominato nel 1901, settore nell'Istituto anatomico di Siena, e nel 1903 Professore incaricato del corso complementare di Embriologia, ma solamente nel 1912, all'età di quarantotto anni, dopo aver vinto il concorso alla cattedra di Istologia e Fisiologia generale presso l'Uni-

versità di Bologna, ottenne la posizione accademica di cui era degno già da molto tempo.

Ma che importa tutto questo? Certo sarebbe stato desiderabile che Egli raggiungesse più presto una situazione indipendente, la quale gli permettesse di continuare a lavorare scientificamente senza essere angustiato da preoccupazioni materiali e di carriera; ma Ruffini, come tutte le menti elette, sentiva altamente di sè ed aveva piena coscienza del valore della propria opera; Egli sapeva che quanto aveva costruito onorava altamente l'Italia ed avrebbe lasciato una traccia imperitura nella storia delle scienze biologiche; cosicchè gli insuccessi nella carriera e le critiche espresse da chi era chiamato a giudicarlo, non potevano deprimerlo, ed anzi rappresentavano un incitamento a lavorare con fervore sempre più grande. Perchè Egli era animato nei suoi studi da quel soffio caldo di passione che mantiene alacre lo spirito anche a tarda età, malgrado gli insuccessi e le delusioni, lo spinge verso le vie nuove e vale a trascinare quanti lo circondano. Le gioie che Egli ritraeva da questo suo stato d'animo sono ben più pure e più nobili di quelle che gli avrebbero potuto dare i riconoscimenti ufficiali dell'importanza delle Sue scoperte.

Ruffini fu un vero autodidatta; Egli ebbe, è vero, a Bologna maestri di gran valore: Albertoni, Bellonci, G. V. Ciaccio, Murri, Tizzoni, ma nessuno di questi potè esercitare un'influenza sullo svolgimento del Suo pensiero; dei morfologi con cui venne a contatto, l'uno, il venerando Calori, dotto e paziente raccogliitore di variazioni scheletriche, non era certo la persona più adatta ad attrarre verso gli studi anatomici uno spirito indipendente e desideroso di novità quale era il Ruffini; l'altro G. V. Ciaccio, col quale Ruffini ebbe maggiori contatti, essendo stato da studente allievo interno nel Laboratorio di Anatomia comparata, era un abile tecnico ed un apprezzato studioso di terminazioni nervose, ma non di levatura tale da poter esercitare un'influenza decisiva su chi lo avvicinava. E Bellonci, giovane, intelligente, la nomina del quale era stata accolta con simpatia da quanti speravano in un ringiovanimento della Morfologia in Italia, era minato nella sua energia dalla malattia che lo condusse a morte ed anche dalle miso-neistiche ostilità che lo circondavano nell'ambiente bolognese: comunque Bellonci non ebbe stretti contatti con Ruffini.

Si aggiunga che nè da studente, nè nei cinque anni in cui diresse il Laboratorio della Clinica medica, frequentò un grande istituto scientifico ben organizzato, nel quale potesse apprendere tecnicismi delicati e complessi ed aprire la mente a nuove idee nella comunità intellettuale della diuturna vita di laboratorio. Egli ebbe sì, durante il periodo di Bologna, dimestichezza con vari giovani studiosi, fra i quali predilesse il Mazzoni, scopritore assieme a Golgi di una forma di organo nervoso terminale, ed alla memoria del quale Ruffini dedicò un lavoro, ricordandolo come suo unico maestro. Ma durante i sei anni trascorsi a Lucignano, necessariamente perdè ogni contatto

con altri studiosi. E quando si trasferì a Siena la Sua personalità scientifica era definitivamente foggia. Non visitò laboratori all'estero e non partecipò a congressi fuori d'Italia; i suoi rapporti coi colleghi stranieri si limitarono a relazioni epistolari.

Tutto quanto egli fece fu dunque il frutto del Suo originalissimo ingegno e della Sua iniziativa ed anche delle Sue attitudini tecniche, mercè le quali, costretto dalla necessità, seppe organizzare il lavoro con mezzi più che modesti e fra difficoltà che avrebbero scoraggiato qualunque altro. E di ciò Egli era veramente, e ben a ragione, fiero; sovente nei conversari amichevoli si vantava « di non essere asservito a nessuna scuola ».

In un primo tempo Ruffini studiò esclusivamente organi nervosi terminali periferici valendosi del metodo Löwit-Fischer al cloruro d'oro, da lui alquanto modificato, in modo da ottenere risultati di una finezza sconosciuta prima d'allora. La tecnica che Ruffini usava da lunghi anni, ma pubblicò soltanto nel 1905, è oggi diventata di uso comune e dà risultati così costanti, che ogni principiante può servirsene con successo. Queste ricerche sugli organi nervosi terminali furono iniziate a Bologna mentre era ancor studente; nella Sua dissertazione di laurea studia le alterazioni delle placche motrici in un caso di corea progressiva in un adulto (1888-1890); in questo primo periodo lavorò dapprima in un piccolo laboratorio, da Lui istituito mercè l'appoggio del chirurgo Bendandi, nell'Ospedale del ricovero di mendicità; poi, come ho sopra rammentato, per qualche mese nel Laboratorio di Anatomia comparata; dopo la laurea, nel Laboratorio annesso alla Clinica medica di quell'Università (1891-1895), ed infine a Lucignano (1896-1901).

Questo periodo della Sua vita scientifica si inizia con una scoperta, alla quale Egli ha in modo imperituro legato il Suo nome, e di cui potrebbe essere fiero qualsiasi istologo anche di gran fama; alla seduta del 12 novembre 1893 di quest'Accademia presentò una memoria nella quale è descritto un nuovo organo nervoso terminale del tessuto sottocutaneo dei polpastrelli delle dita, e che viene oggi chiamato « corpuscolo di Ruffini »; organo ch' Egli aveva scoperto sin dal 1891, cioè poco dopo aver conseguito la laurea, e che fu più tardi ritrovato da Ruffini stesso, da Sfameni, da Dogiel, da Crevatin, da Ceccherelli, da Ducceschi in molte altre regioni del connettivo sottocutaneo dell'uomo e di altri mammiferi, nelle tonache sottomucose, nel periostio, nelle capsule fibrose e nei legamenti di varie articolazioni; questi organi sarebbero, secondo Ducceschi, i punti di partenza delle sensazioni profonde di pressione e di quelle di trazione. Nella stessa memoria Ruffini dimostra l'esistenza di corpuscoli di Golgi-Mazzoni nel connettivo sottocutaneo della cute umana ed in un altro scritto apparso nel 1896 illustra forme intermedie fra i corpuscoli Golgi-Mazzoni e quelli di Pacini. E fin dal 1892 pone in luce l'esistenza di terminazioni nervose in quelle papille del derma cutaneo ritenute prima di allora puramente vascolari.

Nel 1898 pubblica il Suo magistrale scritto sull'innervazione del derma cutaneo dell'uomo, ricco di fatti prima d'allora ignorati; fra gli altri l'esistenza di quella forma di espansione che Egli chiamò ad anse avviticciate, della rete amielinica subpapillare, dei fiocchetti papillari, della varietà di transizione fra questi ed i corpuscoli di Meissner monolobati, di vari particolari sulla struttura dei corpuscoli di Meissner; forme ritrovate poi in varie regioni del corpo dell'uomo e degli animali, consacrandone così il valore generale. — La pubblicazione della costosa documentazione iconografica di questa memoria fu possibile in grazia alla liberalità della R. Accademia di Londra e del prof. Sherrington.

Contemporaneamente appaiono le Sue fondamentali ricerche sui fusi neuro-muscolari, esposte in forma preliminare nel 1892-93 ed ampiamente svolte e documentate nel 1898. A lui si deve la prima descrizione particolareggiata e completa del comportamento delle fibre nervose nei fusi e la scoperta delle terminazioni nervose a fiorami nei medesimi; e per il primo sostenne con validi argomenti la natura sensitiva delle terminazioni placoidi del fuso. Ed in altri scritti apparsi in quel periodo, fra il 1892 ed 1898, illustra corpuscoli di Pacini negli organi muscolo-tendinei ed un fine plesso intorno ai medesimi.

Nel 1896 descrive lo strozzamento caratteristico che si ritrova all'estremità di tutte le fibre nervose, prima di fornire la espansione periferica che chiamò preespansionale. Nel 1900, in collaborazione con Apáthy, descrive le sottili fibre che si dipartono dalle placche motrici dell'uomo e si portano a distanza sopra fibre muscolari vicine formandovi piccole piastrine (fibrille ultraterminali o più esattamente, secondo Ruffini, ultraespansionali). Il reperto era certamente importante, perchè si dimostrava che i corpuscoli nervosi ritenuti fino allora terminali, non sono veramente tali. Ma mentre Apáthy e Ruffini ritenevano molto probabile che le varie fibrille ultraespansionali si anastomizzino costituendo una rete simile a quella che Apáthy credeva di aver trovato nei Vermi, le ricerche successive non confermarono questa supposizione. L'interpretazione delle fibre ultraespansionali che oggi appare la più verosimile è quella formulata da A. Perroncito e da Fusari, che rappresentino rami collaterali equivalenti alle collaterali dei neuriti tanto frequenti negli organi nervosi centrali. Nel 1900-1907 svolge interessanti considerazioni critiche ed espone dati di fatto nuovi su quelle reti di fini fibre nervose che Timofeew aveva poco prima descritto in vari organi terminali e che Ruffini ritiene di natura simpatica; per il primo descrive l'apparato di Timofeew nei corpuscoli di Meissner.

Di già nelle Sue memorie di questo periodo sulle espansioni di senso nella cute e sui fusi neuro-muscolari, si manifesta la Sua qualità che apprezzo più di ogni altra. Nella convinzione intima e sincera, che Egli esprimeva sovente negli scritti e nelle discussioni amichevoli, essere lo studio della forma inteso come fine a sè stesso privo di contenuto scientifico, Egli si

sforzava sempre di rintracciare il valore funzionale delle strutture alle quali erano rivolti i Suoi studi.

Questo Egli faceva sobriamente, astenendosi dalle disquisizioni dottrinali che non avevano fondamento nei fatti. Possedeva la dote veramente rara di saper discriminare le ipotesi veramente feconde, perchè rappresentano il fermento di nuove ricerche, dalle vuote costruzioni senza contenuto reale.

Egli fu in questa Sua tendenza un precursore, perchè mentre nell'ultimo decennio, e specialmente dopo la pubblicazione del magnifico trattato di Anatomia di Braus, il tentativo di integrazione dei fatti morfologici e fisiologici diviene sempre più prevalente, durante il primo periodo della vita scientifica di Ruffini mancava qualsiasi contatto fra Fisiologia ed Anatomia.

Specialmente nei Suoi scritti sui fusi neuromuscolari Ruffini espone una dottrina originale sul fondamento strutturale del senso muscolare, la quale fu molti anni più tardi più estesamente svolta e documentata dalla Sua allieva Rappini. In opposizione alle idee esposte da Cajal e da Regaud, secondo le quali la funzione del fuso sarebbe paragonabile a quella di un dinamometro, Ruffini nega che i fusi siano organi contrattili, dato che non vi arrivano fibre motrici, bensì sarebbero organi recettori delle impressioni, le quali provengono dallo stato funzionale del muscolo circostante.

In quanto alla funzione specifica degli organi nervosi terminali del tegumento, Egli riconosce che è per il momento molto difficile, fondandosi sui dati morfologici, di precisarla.

Ducceschi più tardi intraprese ricerche sperimentali, le quali hanno portato un contributo importante alla soluzione di tale problema.

Negli anni successivi, ad intervalli, Ruffini si occupa ancora del sistema nervoso periferico, studia in modo completo (1905) la struttura delle guaine connettivali delle fibre nervose periferiche di senso dell'uomo, ponendo specialmente in luce l'esistenza di una guaina endoneurica o sussidiaria, descritta per la prima volta da Key e Retzius, poi da Ruffini stesso nel 1896.

Nel 1905 pubblica una diffusa monografia sulle espansioni nervose cutanee nell'uomo e nei Mammiferi, veramente preziosa per la copia di fatti che vi è lucidamente esposta. E durante il periodo in cui fu settore all'Istituto anatomico di Siena appaiono le ricerche di Sfameni, di Ceccherelli e di vari altri, che più o meno direttamente furono ispirate da Ruffini. Particolarmente notevole è la descrizione di Sfameni sulle espansioni nervose nei genitali femminili, divenuta classica, e di Ceccherelli sulle espansioni nervose di senso nella mucosa del cavo orale e della lingua dell'uomo, ove l'A. ritrovò, oltre a varie altre, le forme di espansioni ad anse avviticciate e le reti subpapillari che Ruffini aveva descritto nel tegumento molti anni prima.

Nel 1906 in una rassegna critica cerca di istituire una classificazione per le varie forme di espansioni nervose, espone le sue vedute sul modo come queste si sviluppano e discute se il comportamento delle fibre nervose alla periferia si accordi colla dottrina del neurone. Già in altre Sue opere

Ruffini si era mostrato decisamente contrario a quest'ipotesi dominante allora, come anche oggi, nella Neurologia; l'esistenza di sottili fibre di associazione fra corpuscoli terminali della stessa natura, e la continuità osservata in molti corpuscoli fra espansione principale ed il plesso di Timofeew parlano, secondo Ruffini, per l'esistenza di un circuito chiuso. Ruffini accetta i risultati di Kolmer sull'esistenza di una rete intracellulare nel neuroepitelio acustico, risultati che a quel tempo contrastavano colle idee prevalenti, ma che oggi sono pienamente confermati dalle indagini di Boeke e della sua scuola.

In complesso il principio fondamentale affermato da Ruffini della non costante terminazione libera delle fibre nervose alla periferia appare convalidato dalle indagini più moderne e specialmente da quelle molto importanti di Stefanelli. Se poi l'esistenza di circuiti chiusi alla periferia sia un argomento sufficiente per abbattere l'ipotesi dell'esistenza di individualità anatomiche nel sistema nervoso, come riteneva Ruffini, non è questo il momento di discutere.

Invece le considerazioni esposte in quella stessa memoria da Ruffini sulla derivazione e sullo sviluppo delle espansioni nervose, sono superate; esse risentono l'influenza delle ricerche di Coggi, che Ruffini seguì molto d'avvicino (Coggi insegnava allora a Siena) ed alle quali Egli dà eccessiva importanza. Così attualmente non si può accettare la veduta di Ruffini che le varicosità provviste di nucleo (reticolari) sono equivalenti embriologici di una cellula nervosa.

Il valore dell'opera complessiva di Ruffini sul sistema nervoso periferico può oggi essere prospettato imparzialmente; quest'opera risale infatti ad un periodo ormai lontano, ed il controllo e la critica ebbero tutto il tempo di manifestarsi. Ebbene la sua parte principale, e soprattutto l'illustrazione dei fatti reali, non fu minimamente intaccata; anzi fu da ogni parte confermata, ed è divenuta patrimonio definitivo della Morfologia; essa costituisce il contributo più vasto e più perfetto che sia stato portato dopo le ricerche fondamentali di Ranvier, di Meissner, di Krause e di Golgi alla conoscenza delle espansioni periferiche delle fibre nervose.

Contemporaneamente da Lucignano e da Siena Egli pubblica varie memorie sovra altri argomenti di Morfologia dell'uomo e degli animali, e di Embriologia, le quali tutte senza eccezione riflettono le preclare doti del Ruffini.

Nel 1899 scopre nelle larve di *Rana aesculenta* al limite fra futuro stomaco ed intestino (spira gastro-duodenale) un manicotto di ghiandole tubulari, il quale persiste durante tutta la vita larvale e si trasforma all'atto della metamorfosi. L'esistenza di questa formazione fu più tardi confermata da vari autori (Cotronei ed altri).

Nel 1900 dà una descrizione della vascolarizzazione della cute umana che a tutt'oggi è ripetuta in tutti i trattati; scopre nei tronchi nervosi un astuccio di capillari sanguigni che avvolge i fascetti di fibre, ed illustra la vascolarizzazione dei corpuscoli di Pacini.

Nel 1904 si occupò della forma delle cellule tendinee, inoltre dei rapporti materiali molto intimi fra fibrociti del derma e cellule epidermiche, che avrebbero importanza nel facilitare gli scambi nutritivi.

Nel medesimo periodo appaiono i Suoi scritti sullo sviluppo della milza negli Anfibi (1899) e nei Selaci (1904); in *Pristiurus*, in *Scyllium* quest'organo si forma sulla lamina destra del mesentere dorsale costituendo una cresta sporgente nel celoma; i suoi elementi derivano dall'epitelio celomatico, dall'epitelio del foglietto enteroghiandolare e dal mesenchima.

In una succinta nota sullo sviluppo del cristallino (1904) l'A. vuole dimostrare che negli Anfibi questo deriva dal foglietto sensitivo dell'ectoderma, il foglietto corneo non vi partecipa.

Nel 1908 appaiono due altre note di Embriologia; nell'una studia la produzione di calore delle uova di Anuri e la migrazione di esse dal centro alla periferia del cordone mucilaginoso che le contiene, per l'influenza degli stimoli luminosi. Nella seconda descrive l'espressione citologica degli scambi nutritivi fra cellule della muccosa uterina e cellule coriali nella semiplacenta diffusa di *Sus scrofa*. Altri scritti a contenuto embriologico appaiono più tardi nel 1913; trattano dell'origine, della sede e delle differenziazioni del sangue e dei vasi sanguigni nel blastoderma di pollo; e nel 1918 illustra un blastoderma di pollo senza embrione; gli argomenti svolti in queste due memorie sono trattati con maggiore ampiezza e profondità nella Sua opera maggiore « *Fisiogenia* ».

Fra le Sue opere di Anatomia macroscopica emergono quelle sull'organo dell'udito; nelle prime sulla cassa del timpano, sul labirinto osseo e sul fondo del condotto auditivo interno nell'uomo adulto, si dà una descrizione nuova del canale cocleare, e si illustra su base geometrica la topografia del fondo del condotto auditivo interno della chiocciola e del vestibolo. Ancor più interessante è la ricerca anatomica ed anatomo-comparativa sulla parte periotico-mastoidea del temporale, memoria corredata da moltissime eccellenti fotografie. Lo sviluppo della mastoide viene per la prima volta studiato in modo completo sovra un vasto materiale anatomico di uomo e di vari Mammiferi. Ruffini dimostrò che il primo accenno dell'antro mastoideo appare come un diverticolo dell'attico, il quale si spinge posteriormente verso la parte periotico-mastoidea.

L'apofisi mastoide al suo primo apparire è diploica; ma poi per invasione dell'antro e della spugnosa dello squamoso nella spugnosa periotica dell'apofisi, si formano in quest'ultima le ben note celle; ed a seconda della varia estensione di tale processo, il quale è in relazione causale colla pressione dell'aria del cavo timpanico, sorgono le forme di mastoide diploica, pneumatica, mista.

Pure importante è la relazione dimostrata da Ruffini fra il calibro della giugulare e della carotide e la comparsa della bolla timpanica da un lato e lo sviluppo della mastoide dall'altro; quando questo è considerevole, come

nell'uomo e negli Antropoidi, il diverticolo del cavo timpanico è costretto a portarsi indietro e ad invadere la regione mastoidea, mentre la bolla timpanica scompare.

Altri scritti di Anatomia macroscopica riguardano un caso di anomalia della staffa e di persistenza della parte timpanica della cartilagine del 2° arco branchiale; infine il muscolo digastrico della mandibola ed il m. interdigastrico (studiato con metodo statistico).

L'originalità di Ruffini si manifesta anche in un campo più modesto, nella tecnica, la quale a torto è da molti ritenuta di poco conto.

Certo Ruffini era troppo intelligente per non considerare la tecnica non come fine a sè stessa, ma come mezzo per l'indagine dei fatti; così fece per il metodo al cloruro d'oro di cui ho detto poco fa, e per i metodi per la fissazione e l'orientazione delle uova di Anfibi, dai quali trasse partito per le sue fondamentali ricerche sull'ontogenesi degli Anfibi. Certamente senza queste variazioni nella tecnica che egli fece conoscere di recente (1927) dopo la pubblicazione della sua opera principale, Egli non sarebbe arrivato ad ottenere in questo materiale così poco adatto a ricerche citologiche le immagini splendide, ammirate dai più competenti embriologi che le videro, e sulle quali s'impenna tutta la dottrina di Ruffini sui primi fenomeni dello sviluppo.

Altri scritti di tecnica d'importanza minore riguardano un nuovo termoregolatore elettrico per incubatrice, un dispositivo molto semplice ed economico per microfotografia che Egli suggerì alla Casa Koristka e che fu largamente usato nei Laboratori italiani; ed infine un ingegnoso metodo (1915) che permette di isolare lo scheletro fibroso della milza ed i fasci di cellule muscolari che ad esso aderiscono; ha utilizzato a questo scopo l'opera dei girini, i quali mangiano la polpa e lasciano intatto lo scheletro. Recentemente il Reissner dell'Istituto Anatomico di Monaco riferisce di aver adoperato questo stesso metodo, che gli sarebbe stato suggerito da A. Hartmann, ignorando evidentemente, come giustamente rilevò Giacomini nell'affettuosa necrologia che dedica nel « *Monitore zoologico* » a Ruffini, che questi aveva preceduto la Prof.^a Hartmann di quattordici anni!

E veniamo ora alla parte più originale dell'opera di Ruffini della quale Egli era maggiormente fiero, ma che rimase per molti anni quasi ignorata fuori d'Italia; intendo parlare delle Sue ricerche di Embriologia generale sui più precoci fenomeni dello sviluppo, che Egli iniziò a Lucignano, proseguì a Siena e fece svolgere ulteriormente dai Suoi allievi a Bologna. Ed è veramente meraviglioso che ad un'età non più giovanile (quando si trasferì a Siena aveva quasi quaranta anni) Egli abbia saputo affrontare con tanta originalità e con freschezza di spirito problemi difficili, per lui del tutto nuovi.

Il Suo primo scritto su tale argomento appare in forma preliminare nel 1906 negli « *Atti dell'Accademia dei Fisiocritici* » in Siena; nei due anni successivi pubblica memorie più diffuse e corredate da figure (nell'« *Archivio*

Ital. di Anatomia» e nell'« Anatomischer Anzeiger »). In queste Sue pubblicazioni si occupa soltanto delle prime fasi dello sviluppo negli Anfibi; contemporaneamente fece eseguire al Suo allievo Luigi Lanzi ricerche collo stesso indirizzo sulle uova di Teleostei. Più tardi a Siena ed a Bologna continuò a raccogliere un cospicuo materiale sullo stesso argomento, negli Anfibi e nel pollo, una parte del quale fu pubblicato dalla Sua allieva Marchetti.

Infine sedici anni dopo la Sua prima pubblicazione tratta, prendendo punto di partenza da quelle Sue prime ricerche, in un'opera di gran mole (*Fisiogenia. La biodinamica dello sviluppo*, ecc.) le prime fasi dello sviluppo degli Anfibi, dei Teleostei e del pollo e pone a raffronto quanto fu osservato in questi animali ed in altri Metazoi.

In una recensione apparsa nel « Monitore zoologico », anno 36° davo sovra quell'opera il seguente giudizio: « In questo poderoso libro scritto con eleganza di stile ed in forma lucida, vivace ed attraente è raccolto un vasto materiale di fatti personali ed è dato larghissimo svolgimento alle ricerche di altri Autori, sia descrittive che sperimentali. Mai prima d'oggi i problemi dell'Embriologia generale erano trattati in un modo così esauriente in un'opera organica... ».

Dei problemi principali che Ruffini volle risolvere, uno è d'indole morfologica, la prima origine dei foglietti e questo fu agitato fin dagli albori dell'Embriologia; l'altro problema è intimamente connesso al primo, ma il suo contenuto è più biologico che morfologico, quali sono i fattori determinanti i fenomeni dello sviluppo.

Ruffini riconobbe, fin dallo stadio di blastula, nelle uova di Anuri e di Urodeli le tre zone organogenetiche da cui traggono origine i foglietti del germe. L'introflessione gastrulare si produce non per epibolia dei micromeri sui macromeri, nè per delaminazione, come era stato detto, ma per invaginazione da parte degli elementi dell'entoderma e del mesoderma; i primi si spostano per quella particolare forma di movimento che Egli per il primo illustrò chiamandola sticotropismo o movimento di fila; invece gli elementi mesodermici camminano per movimento ameboide od isolatamente nel liquido della cavità di segmentazione o strisciando sull'entoderma.

Le ricerche successive dei Suoi allievi, di Max Clara e di altri dimostrarono che lo sticotropismo ha un valore molto più generale di quanto egli stesso sospettasse dapprima. Secondo il Suo allievo Lambertini, anche nelle metamorfosi tardive della forma e della struttura degli organi (formazione dei villi intestinali, piegheggiamento della corteccia cerebrale) lo sticotropismo ha una parte essenziale. E Max Clara recentissimamente, estendendo le ricerche di Lambertini, provò che la suddivisione delle ghiandole sebacee in unità secondarie (secondo le idee di Heidenhain) si produce pure per sticotropismo.

Ma per limitarci a parlare dell'invaginazione gastrulare, chè questo fu il punto di partenza della dottrina di Ruffini, prima di Lui tale fenomeno,

come qualsiasi altro mutamento di forma dell'embrione, era attribuito prevalentemente all'intensificarsi della moltiplicazione cellulare in determinati punti. Ruffini non contesta che questo fattore abbia nell'ontogenesi una parte notevole, ma non certo esclusiva; esso è sempre associato ad ameboidismo ed a secrezione.

Stricker, His e qualche altro avevano bensì parlato di movimenti ameboidi nelle cellule del germe, ma si era ben lontani da dare a questi movimenti importanza essenziale nella morfogenesi.

D'altra parte vari autori avevano prospettato il valore dei fenomeni secretori nell'ontogenesi (Loeb, Morgan, Brachet ed altri), ma nessuno ne diede la dimostrazione citologica. Ruffini integrando i Suoi reperti di cellule secernenti nella parte dell'entoderma che s'introflette, colle osservazioni di Davenport, di Schaper, di Backmann sulle oscillazioni nella quantità d'acqua e nella concentrazione molecolare delle cellule del germe, formula un'ingegnosa ed originale ipotesi, destinata a spiegare i fatti morfogenetici elementari.

La secrezione sarebbe morfogenetica, non in quanto è fenomeno di attività cellulare (come accade per l'ameboidismo), ma in quanto da tale attività deriva il secreto, che per le sue proprietà fisicochimiche diventa morfogenetico. Così i liquidi embrionali possono cooperare nella formazione degli organi primitivi ed anche più tardi nel foggare le forme embrionali. In una nota apparsa nel « *Monitore zoologico* » poco prima della stampa della Sua *Fisiogenia*, Ruffini con queste parole riassume lucidamente la Sua dottrina:

« Lo sticotropismo fa muovere alcune piccole regioni delle membranelle del germe (zone organogenetiche od abbozzi) per cui esse sono portate ad occupare quella situazione topografica che loro spetta nel corpo dell'embrione. La secrezione è di un'importanza eminente; i suoi prodotti si riversano dentro gli abbozzi cavitati o negli spazi umorali del corpo del germe, quivi determinando una pressione osmotica che è uno dei massimi fattori del modellamento delle forme del corpo. Di più gli stessi prodotti secretori contengono sostanze fisiologicamente attive (probabilmente ormoni), per cui gli organi primitivi e secondari, che si susseguono in catena, possono mettersi in correlazione genetica mediante i prodotti di secrezione che si susseguono anch'essi in catena. La moltiplicazione ha l'importantissimo ufficio di accrescere gli specifici materiali da costruzione (cellule).

« Quindi il lavoro organico del Germe è tutto quanto affidato alla ordinata operosità delle cellule del Germe stesso; le quali cellule, per poter costruire il nuovo corpo, si valgono delle medesime funzioni biologiche che sogliamo osservare anche nell'individuo adulto e nei processi patologici ».

Ruffini è convinto di aver costruito con questa dottrina un sistema che non può rientrare « nei programmi della metafisica, nè tampoco della meccanica, ma prende sede naturale del campo della Fisiologia generale; per cui esso merita il nome di *Fisiogenia* (la parola è di Haeckel, ma i

fatti sono miei). Si tratta quindi di dinamica dello sviluppo che ha come fine lo studio causale dei diversi movimenti ameboidi ».

Riterrei di far torto alla memoria del nobile mio amico scomparso, il quale poneva al disopra di ogni altra cosa la verità e la sincerità, se nel parlare di Lui tacevo il mio pensiero, che in questo non armonizza pienamente col Suo. Secondo il mio modesto avviso, l'interpretazione che Ruffini dà dei fenomeni ontogenetici è certamente originalissima e personale, ma non è un sistema nuovo, ed il suo metodo d'indagine non diverge in modo sostanziale da quello descrittivo classico. Egli si è valso di quanto ebbe la ventura di scoprire applicando una tecnica istologica più perfetta allo studio dei primi periodi dello sviluppo, per la spiegazione causale dei fenomeni. Ma già Wilhelm Roux, il quale ha introdotto il nome di Meccanica di sviluppo e ne formulò il programma, vi comprese anche lo studio dei fenomeni di citotropismo durante lo sviluppo dell'uovo, fenomeni i quali evidentemente rientrano nello stesso ordine di quelli scoperti da Ruffini, e sui quali la sua dottrina si fonda. Ed è merito grandissimo di quanti hanno contribuito all'ascesa magnifica della Meccanica dello sviluppo negli ultimi trent'anni — poco importa se questo nome non è felice come vuole Ruffini — di aver saputo integrare conquiste ottenute con metodo diverso, purché avessero orientamento causale; sia le ricerche con metodo descrittivo che le altre ottenute mediante l'esperimento (di W. Roux, Driesch, R. Zoja, Herlitzka, W. Lewis, Boveri, Braus, Harrison, Spemann, W. Vogt e tanti altri). Di questi due metodi certamente il secondo è superiore per l'interpretazione causale dei fenomeni; di ciò Ruffini non si rese forse ragione.

Ed al non aver valutato a sufficienza l'importanza dei fatti dimostrati con metodo sperimentale, si deve attribuire la Sua strenua difesa del punto di vista preformistico nell'ontogenesi; in favore del preformismo starebbero, secondo Ruffini, le differenze qualitative nel materiale dei territori organogenetici, visibili nei germi di alcune specie molto prima che in questi si manifesti differenziazione strutturale. Ma oggi, dopo le ricerche sperimentali di Spemann e della sua scuola sugli organizzatori, chi può negare che un territorio organogenetico in condizioni atipiche di sviluppo, quando si trovi sotto l'influenza di un organizzatore, possa prendere una via diversa da quella tipica?

Nella parte critica della Sua *Fisiogenia* scritta con grande vivacità si riflette una delle caratteristiche principali della Sua mente, l'assenza cioè di quell'elasticità di spirito che altri possiedono in alto grado e che permette loro, consci delle lacune e delle imperfezioni dei metodi d'indagine, di prospettare serenamente le eventualità che i risultati dell'osservazione e dell'esperimento possano essere nell'avvenire modificate. È questa una dote o un difetto? Non lo so. Certamente lo stato d'animo dubbioso è il più atto ad affinare lo spirito critico ed a perfezionare una costruzione scientifica, ma può anche paralizzare le iniziative e non di rado indurre allo

scetticismo ed allo scoramento il ricercatore, ancor prima della realizzazione del suo progetto, idea o sogno che sia. Certo è che Ruffini, come Gogi e come molti altri ricercatori di razza, non dubitava mai della realtà dei fatti da Lui osservati e di un'unica interpretazione, la Sua. Dagli scritti appare che le Sue convinzioni hanno radici profonde nella Sua mente; Egli non esita a proclamare gli errori di chi lo ha preceduto in un dato campo d'indagine ed il convincimento di aver per il primo colpito nel segno. Il che potrà forse dare un'impressione sgradevole, ma in chi ha conosciuto la sincerità di Ruffini e l'attaccamento profondo che Egli aveva per la propria opera onestamente costruita, il suo atteggiamento diviene degno di rispetto.

A me sembra che codesta attitudine spontanea, e direi pittoresca, rifletta la Sua originale personalità di ricercatore, la quale voleva in tutto formarsi una convinzione « de visu » prima di accettare quanto era stato osservato da altri; tale aspetto del Suo temperamento scientifico deriva dall'esser Egli, come ho detto, un autodidatta, per modo che venne a mancargli l'opportunità di affinare il proprio spirito critico obbiettivo e di sviluppare la propria capacità di adattamento negli scambi d'idee così frequenti e fecondi nei laboratori fra allievi e Maestro e tra compagni di lavoro.

Del resto l'impressione di sorpresa che si poteva forse ritrarre nella lettura di alcuni Suoi scritti, da qualche asprezza di giudizio sull'opera di insigni studiosi, si attenuava e si cancellava in chi si avvicinava a Lui e sentiva il calore della Sua personalissima tempra d'indagatore e di pensatore; chi ebbe la fortuna di conoscerlo da vicino era ben presto conquiso dai Suoi modi franchi ed affabili, dalla Sua piacevole conversazione e dal rispetto per l'operosità altrui, anche se discorde dalla Sua.

E comunque, le parti dell'opera di Ruffini suscettibili di critica non intaccano il grandissimo valore intrinseco delle sue realizzazioni scientifiche. Perciò ritengo sommamente ingiusto che l'illustrazione che Egli ha dato sin dal 1907 dei fenomeni dello sviluppo e dei fattori che li determinano non sia stata valutata quanto si merita nella pleiade di pubblicazioni apparse durante questo lungo periodo sul medesimo argomento (1).

(1) Nella voluminosa ed importante monografia che W. VOGT ha pubblicato di recente (*Gestaltungsanalyse am Amphibienkeim mit örtlicher Vitalführung*, II. Teil: *Gastrulation und Mesodermbildung bei Urodelen und Anuren*, W. Roux's, « Arch. für Entwicklungsmechanik der Organismen », 120. Bd. Festschrift f. H. Spemann), egli cerca di dimostrare infondato l'appunto che io avevo mosso a Lui ed a Goertler in una recensione scritta prima della morte di Ruffini (Recensione del vol. III e IV del *Trattato di v. Möllendorf*, « Riv. di Pat. nerv. e ment. », vol. 33 f. 4, 1929) che molti dei fatti da Lui illustrati erano stati già descritti da Ruffini. Non intendo di sviluppare qui a fondo tale controversia per due ragioni: anzitutto perchè ciò mi sembrerebbe irriverente per la memoria di Ruffini; in secondo luogo perchè non desidero di inasprire una polemica con un ricercatore di gran valore qual è Vogt che, pur seguendo vie diverse da quelle battute da Ruffini, ha fatto progredire validamente il campo di studi trattato molti anni prima dal Nostro, tanto più

La grande indipendenza di spirito di Ruffini, che era una delle Sue qualità migliori ed alla quale almeno in parte si deve l'originalità del Suo indirizzo, appare anche dalla posizione nettamente avversa alla tendenza filogenetica in Morfologia, sin al principio di questo secolo in gran voga e che esplicò influenza non certo favorevole sul progresso di questa scienza.

Ruffini aveva saputo acquistare una vasta coltura, sebbene la lettura dei libri e dei periodici scientifici, proprio negli anni migliori, gli riuscisse estremamente difficile, perchè confinato nella condotta di Lucignano, ed anche per l'imperfetta conoscenza delle lingue straniere. Eppure Egli seppe vincere anche questo ostacolo mercè la Sua indomabile energia.

Dal Suo libro *Fisiogenia* appare che divenne padrone della vasta e complessa bibliografia sovra argomenti di Embriologia sperimentale e che per di più aveva una conoscenza non superficiale di altre discipline, le quali non avevano attinenza diretta colla Morfologia e specialmente della Fisico-chimica. Ed Egli era pieno di fede nell'avvenire dell'orientamento fisico chimico nelle scienze biologiche.

Conosceva a fondo anche le opere degli antichi biologi italiani e stranieri e specialmente quelle di Spallanzani e di Rusconi; per quest'ultimo professava un'immensa ammirazione e volle dedicare la Sua *Fisiogenia* alla memoria del grande discepolo di Spallanzani.

Ruffini non fu soltanto ricercatore sommo, ma Maestro nel senso più elevato della parola; a Siena ed a Bologna egli seppe guidare persone di valore in ricerche notevoli, improntate tutte al proprio indirizzo personale; ne ricorderò soltanto alcuni: Sfameni, Ceccherelli, Lanzi, Cotronei, Bianchini, Palmieri, Olivieri, Bagini, Marchetti, Rappini, Lambertini, Rondinini, Vignoli. Ed Egli possedeva pure rare qualità didattiche; le Sue lezioni di Istologia e di Embriogenia apparse in dispense litografate in due edizioni successive sono ammirevoli per chiarezza e per ordine; di rado accade di veder trattate in forma accessibile ad ogni studente questioni così difficili ed intricate, come quelle attinenti ai primi fenomeni dello sviluppo, all'origine del sangue, ecc.

Egli sapeva trasmettere il Suo entusiasmo ed il Suo amore per le ricerche

che non era affatto nelle mie intenzioni, come del resto emerge dal testo della mia recensione, di diminuire il valore dei risultati di Vogt; risultati, ripeto, fra i più notevoli di questo periodo, anche perchè integrano le scoperte di Spemann e della sua scuola sui territori del germe dotati di potere organizzatore.

Comunque anche, se come ritiene Vogt (ed io non lo contesto), Ruffini non ha veduto giusto nel ritenere la notocorda d'origine entodermica ed anche se, come io stesso son convinto e come ho rilevato in passato, Egli ha attribuito importanza eccessiva al fattore secrezione come determinante la gastrulazione, è indiscutibile che Egli ha assodato l'origine peristomale del mesoderma (afferмата è vero anche prima di Lui), certamente il contenuto dei suoi scritti del 1907-1908 ha stretta attinenza coi problemi trattati da Vogt e da Goertler, cosicchè questi scritti avrebbero dovuto essere ricordati, almeno nella monografia di Goertler nella quale vi è un'ampia critica dei risultati antecedenti.

biologiche ai Suoi studenti, e questi subivano il fascino che ne emanava, e sentivano il prestigio dell'onesto ed intelligente operaio della scienza.

L'opera di Ruffini fu altrettanto eccellente nella Biologia generale che nella Morfologia; l'appunto che Gli era stato mosso che non fosse padrone del metodo Morfologico non ha fondamento, ed anzi in lui erano spiccatissime le qualità indispensabili nelle indagini anatomiche; lo spirito analitico al quale non sfugge alcun particolare, la pazienza, l'ordine, l'esattezza nella descrizione delle forme. La Sua opera multiforme è una nuova prova che lo studio dell'una e dell'altra non richiedono attitudini mentali diverse, come qualcuno erroneamente ritiene. Chi ha spirito d'osservazione e pazienza, ma non ha attitudine alla sintesi saprà descrivere delle forme, ma non sarà mai un cultore di scienze morfologiche; come d'altro canto chi non ha la mente ordinata che il metodo morfologico richiede, non può avere preparazione adeguata agli studi di Biologia generale.

Ruffini possedeva veramente tutte le doti di un grande ricercatore: acuto spirito d'osservazione, precisione, attitudini tecniche, mente originale e lucida, spirito d'iniziativa e grande tenacia. Egli sapeva cogliere nella congerie dei fatti quelli di maggiore importanza, sintetizzarli, trarne con acume deduzioni teoriche e formularle lucidamente.

E se riflettiamo che Egli seppe porre in valore queste Sue doti in mezzo a difficoltà esteriori d'ogni genere, e che con abnegazione rara e con disinteresse da ogni argomento utilitario non si curò di conquistare posizione e rinomanza più vistosa quali ingegno ed attitudini potevano largirgli, non possiamo a meno di riconoscere in Lui uno di quegli spiriti di eccezione, dai quali l'umanità è maggiormente nobilitata ed ammaestrata.

CARRIERA SCIENTIFICA DI ANGELO RUFFINI.

1864 - nato a Pretare (frazione di Arquata del Tronto, prov. di Ascoli Piceno) il 17 luglio. Compie gli studi ginnasiali e liceali ad Ascoli Piceno.

1884 - si iscrive alla Facoltà di Medicina nell'Università di Bologna.

1888 - istituisce un piccolo laboratorio di Istologia nel ricovero di Mendicizia.

1890 - si laurea con pieni voti assoluti e lode il 9 luglio.

1890-1895 - dirige il laboratorio di Istologia normale e patologica annesso alla Clinica medica.

1891 - gli viene assegnato il premio Vittorio Emanuele II (relatore Giuseppe V. Ciaccio).

1894 - ottiene la libera docenza per titoli in Istologia.

1895 - ottiene un premio d'incoraggiamento dalla R. Accademia di Medicina di Londra.

1895-1901 - medico condotto e Direttore dell'Ospedale a Lucignano (Prov. di Arezzo).

1897 - trasferisce la libera docenza da Bologna a Siena.

1900 - prende parte al Congresso dell'Anatomische Gesellschaft in Pavia.

1901 - nominato settore-capo dell'Istituto anatomico dell'Università di Siena. Nominato Socio dell'Accademia dei Fisiocritici.

1903 - incaricato di un corso di Embriologia nella Facoltà medica di Siena.

1907 - prende parte al concorso per la cattedra di Anatomia umana nell'Università di Parma.

1909-1910 - prende parte a due concorsi successivi per le cattedre di Anatomia umana per le Università di Cagliari e Sassari.

1910 - ottiene due premi di incoraggiamento all'Accademia dei Lincei.

1910 - nominato Socio corrispondente dell'Accademia dei Lincei.

1910 - gli viene assegnata la grande medaglia dell'Accademia dei XL.

1912 - prende parte al concorso per la cattedra di Istologia e Fisiologia generale dell'Università di Bologna, fu classificato primo e fu nello stesso anno nominato a questa cattedra.

1913 - nominato Socio onorario dell'Accademia delle Scienze dello Studio bolognese.

1914 - nominato Socio dell'Accademia medica di Roma.

1919 - nominato Socio della « Société des Sciences médicales et naturelles » di Bruxelles.

1922 - nominato Socio dell'Accademia di Medicina di Torino.

1923 - gli viene assegnato dal comune di Bologna il premio Sacchetti.

1925 - nominato Socio nazionale dell'Accademia dei Lincei.

1927 - nominato Socio dell'Accademia marchigiana di Scienze, Lettere ed Arti.

1929 - nominato Socio Benedettino dell'Accademia delle Scienze dello Studio bolognese.

1929 - si spegne il 7 settembre 1929 a Baragazza.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI DI ANGELO RUFFINI.

1. « Su due casi di anastomosi diretta fra i prolungamenti protoplasmatici delle cellule gangliari del cervello (con una tavola) ». (Boll. delle Scienze mediche), serie VI, vol. 24, Bologna 1889.

2. « Sulle alterazioni del sistema nervoso in un caso di corea minore non ereditaria in un adulto. Tesi di laurea (con tre tavole) ». (Boll. delle Scienze mediche), serie VII, vol. 1, Bologna 1890.

3. « Intorno a due casi di processi infiammatori iperplastici del connettivo sottocutaneo del piede (con una tavola) ». (Boll. delle Scienze mediche), serie VII, vol. 1, Bologna 1890.

4. « Di un caso assai raro di colite iperplastica diffusa a tutte e tre le porzioni del colon ». (Boll. delle Scienze mediche); serie VII, vol. 3°, Bologna 1892.

5. « Sopra una nuova forma di atrofia muscolare neuropatica riscontrata in un caso di corea cronica progressiva, con considerazioni cliniche ed anatomo-patologiche intorno al caso stesso. Nota seconda (con una tavola) ». (Boll. delle Scienze mediche), serie VII, Bologna, 1892.

6. « Di una particolare reticella nervosa e di alcuni corpuscoli del Pacini che si trovano in connessione cogli organi muscolo-tendinei del gatto. Nota preventiva, con 2 figure ». (Rendic. R. Accad. dei Lincei), Classe di Scienze fisiche mat. e nat., vol. 1, f. 12, Roma, 1892.

7. « Sulla terminazione nervosa nei fusi muscolari e sul loro significato fisiologico. Nota preventiva ». (Rendic. R. Accad. dei Lincei), Classe di Scienze fisic. matem. e nat. Ser. V, vol. 1, sem. 2°, fasc. I, Roma, 1892.

8. « Sulla presenza dei nervi nelle papille vascolari della cute dell'uomo (con una figura) ». (Rend. R. Accad. dei Lincei); Vol. 1, sem. 2°, Roma, 1892.

9. « Osservazioni critiche allo studio del Dr. Andrea Rossi sulle terminazioni nervose di senso nella pelle dell'uomo ». (Arch. intern. specialità med. chirur.), f. XI, Napoli 1893.

10. « Considerazioni critiche sui recenti studi dell'apparato nervoso sui fusi neuromuscolari ». (Anat. Anzeiger), IX, Jena 1893.

11. «Di un nuovo organo nervoso terminale e sulla presenza dei corpuscoli Golgi-Mazzoni nel connettivo sottocutaneo dei polpastrelli delle dita dell'uomo (con due tavole)». (Mem. R. Accad. dei Lincei), serie IV, vol. 7, Roma, 1894.
12. «Sopra un caso di eterotopia di sostanza grigia nel midollo spinale di un tabetico (con 12 fig.)», (Beiträge z. pathol. Anat. und zur allgem. Pathol.), Bd. XVI, 1894.
13. «Un metodo facile per attaccare in serie le sezioni in celloidina e sopra una modificazione al metodo di Weigert (con tre fig.)», (Mon. zool. Ital.), anno V, Firenze 1894.
14. «Sulla presenza di nuove forme di terminazioni nervose nello strato papillare della cute dell'uomo, con un contributo allo studio della struttura dei corpuscoli del Meissner (seconda nota preventiva)», (Mon. zool. Ital.), anno VI, f. 8-9, Firenze, 1895.
15. «Sulla fine anatomia dei fusi neuro-muscolari del gatto e sul loro significato fisiologico». (Monit. zool. Ital.), anno VII, f. 3, Firenze 1896.
16. «Sullo strozzamento preterminale nelle diverse forme di terminazioni nervose periferiche (con una tavola)». (Monit. zool. ital.), anno VII, f. 5, Firenze 1896.
17. «Ulteriori ricerche sugli organi nervosi terminali nel connettivo sottocutaneo dei polpastrelli dell'uomo e sulle diverse forme di corpuscoli di Pacini che si osservano nello stesso tessuto (con una tavola)». (Ricerche fatte nel Laboratorio di Anat. normale della R. Università di Roma e in altri laboratori biologici). Vol. 5, f. 3°, Roma, 1896.
18. «Di una nuova guaina nel tratto terminale delle fibre nervose periferiche (con una fig.)». (Anat. Anzeiger) Bd. XII, nn. 19-20, 1896.
19. «Sopra due speciali modi di innervazione degli organi muscolo tendinei di Golgi, con riguardo speciale alla struttura del tendinetto dell'organo muscolo-tendineo ed alla maniera di comportarsi delle fibre nervose vasomotorie del perimio del gatto». (Monit. zool. Ital.), anno VIII, n. 5, Firenze, 1897.
20. «Di un apparecchio micro-fotografico e di un nuovo metodo per eseguire micro-fotografie colla luce del giorno (con una fig.)». (Mon. zool. Ital.), anno VIII, nn. 7-8, Firenze, 1897.
21. «Observations of sensory nerve-endings in voluntary muscles». (Brain, a Journal of Neurology), Part. LXXXIX, London, 1897.
22. «Sulla fine anatomia dei fusi neuromuscolari del gatto e sul loro significato fisiologico (con due tavole)». Tipogr. ed. S. Bernardino, Siena, 1898.
23. «On the minute anatomy of the neuromuscular spindles of the cat». (Journal Physiology), vol. XXIII, n. 3, 1898.
24. «Sulla presenza di nuove forme di terminazioni nervose nello strato papillare e subpapillare della cute dell'uomo con un contributo allo studio della struttura dei corpuscoli di Meissner (con 4 tavole doppie ed una scempia)». Tipogr. ed. S. Bernardino, Siena, 1898.
25. «Sopra due speciali modi d'innervazione degli organi di Golgi con riguardo speciale alla struttura del tendinetto dell'organo muscolo tendineo ed alla maniera di comportarsi delle fibre nervose vaso motorie nel perimio del gatto. Considerazioni fisiologiche sul senso specifico muscolare (con una tavola doppia)». (Ricerche fatte nel Laboratorio di Anatomia normale della R. Università di Roma ed in altri laboratori biologici). Vol. VI, fasc. IV, Roma, 1898.
26. «Una rivendicazione di priorità a S. Ramon y Cajal nel considerare come organo di senso i fusi neuro-muscolari con qualche considerazione sui recenti studi dell'argomento» (Anat. Anz.), Bd. 16, Jena, 1899.
27. «Di una singolarissima anomalia in un osso temporale dell'uomo (con tre fig.)». (Anat. Anzeiger). Bd. XVI, nn. 15-16, Jena 1899.
28. «Sullo sviluppo della milza nella rana esculenta». (Mon. zool. ital.), anno 10, n. 4, Firenze 1899.
29. «Sullo sviluppo e sul tardivo contegno dello strato glandulare dello stomaco nella rana esculenta (con una tavola)». (Mon. Zool. ital.), anno 10, Firenze 1899.

30. «A proposito di corea. Nota Bibliografica». (Il Policlinico), vol. VII, sez. med., Roma 1900.

31. «Sulle fibrille nervose ultraterminali nelle piastre motrici dell'uomo (con 7 fig.)». (Rivista di Patol. nervosa e ment.), vol. V, f. 10, Firenze 1900 (in collaboraz. con APATHY).

32. «Le fibrille nervose ultraterminali nelle terminazioni nervose di senso e la teoria del neurone». (Riv. di patol. nervosa e ment.), vol. VI, f. 2, Firenze 1900.

33. «Contributo allo studio della vascularizzazione della cute umana». (Monitore zool. ital.), anno XI, n. 3, Firenze 1900.

34. «Contributo allo studio della vascularizzazione della cute umana con proposta di una classificazione più razionale dei suoi diversi strati (con una tavola)». (Monitore zool. ital.), anno XI, Firenze 1900.

35. «Sulla fine anatomia dei fusi neuromuscolari dell'uomo neonato». (Processi verbali della R. Accad. dei Fisiocritici in Siena. Ad. straordinaria del 3 luglio 1901). (Atti R. Accad. dei Fis.), serie IV, vol. VIII, nn. 7-8 (in collaborazione con G. PICCONTI).

36. «La cassa del timpano, il labirinto osseo ed il fondo del condotto auditivo interno dell'uomo (Tecnica di preparazione ed osservazioni anatomiche)». (Atti R. Accad. dei Fis. in Siena), serie IV, vol. XIII, n. 4, 1901.

37. «Un caso di atrofia muscolare neuropatica come prezioso contributo per la conoscenza della struttura e della sostanza attiva nella contrazione delle fibre muscolari striate». (Atti R. Accad. dei Fisiocritici in Siena), serie IV, vol. XIII, n. 5, 1901.

38. «Sull'apparato nervoso di Timofeev od apparato ultraterminale nei corpuscoli del Meissner della cute umana (con 6 fig.)». (Bibliographie anatomique), tome XI, f. 4, Paris-Nancy 1902. Anche col titolo: «Le fibrille ultraterminali nei corpuscoli del Meissner nell'uomo ed in altre terminazioni di senso di alcuni Vertebrati». (Atti R. Accad. dei Fisiocritici in Siena), serie IV, vol. XIII, n. 3, 1901.

39. «Un metodo di reazione al Cloruro d'oro per le fibre e le espansioni nervose periferiche». (Atti R. Accad. dei Fisiocritici in Siena), serie IV, vol. XIV, 1902.

40. «La cassa del timpano, il labirinto osseo ed il fondo del condotto auditivo interno nell'uomo adulto (con 2 figg. e una tavola doppia)». (Zeitsch. f. wiss. Zoologie), Bd. 71, H. 3, Leipzig 1902.

41. «La fine anatomia del tessuto nervoso in rapporto alla teoria del neurone e del circuito chiuso». (Atti R. Accad. dei Fisiocritici in Siena), serie IV, vol. XV, Siena 1903.

42. «Alcuni casi di spostamento in alto del tendine intermedio del muscolo digastrico, in relazione al triangolo ipoglosso-joideo o di Hueter (con 1 fig.)». (Archiv. ital. di Anat. e di Embriol.), vol. II, f. I, Firenze 1903. Anche (Atti R. Accad. dei Fisiocritici in Siena), serie IV, vol. XIV, 1902.

43. «La forma delle cellule tendinee nel gatto e nell'uomo comparata con quella di altre cellule in altri tessuti di origine mesenchimale». (Atti della R. Accad. dei Fisiocritici in Siena), serie IV, vol. XVI, 1904.

44. «Sui primi momenti di sviluppo della lente cristallina negli Anfibi». (Atti della R. Accad. dei Fisiocritici in Siena), serie IV, vol. XVI, 1904.

45. «Sullo sviluppo della milza nei Selaci». (Atti R. Accad. dei Fisiocritici in Siena) serie IV, vol. XVI, 1904.

46. «Un tipo di incubatrice con sorvegliatore elettrico». (Atti R. Accad. dei Fisiocritici in Siena), serie IV, vol. XVI, 1904.

47. «Sui rapporti fra le cellule fisse del connettivo, i vasi capillari e le cellule dello strato germinativo dell'epidermide». (Atti R. Acc. dei Fisiocritici in Siena), Serie IV, vol. XVI, 1904.

48. «Brevi considerazioni intorno alle recenti ricerche del dr. G. Romeo sulle terminazioni nervose nei muscoli pellicciai dorsali della talpa Romana». Oldf. thom. (Bibliographie Anatomique), to. VIII, f. 3, Paris-Nancy 1904.

49. «Un metodo di reazione al Cloruro d'oro per le fibre e le espansioni nervose periferiche». Sec. ediz. Tip. ed. S. Bernardino, Siena 1905.
50. «Sur les expansions nerveuses de la peau chez l'homme et quelques autres mammifères (con 40 figure)». (Revue Générale d'histologie), to. I, f. 3, Lyon-Paris 1905.
51. «Di una nuova guaina (guaina sussidaria) delle fibre nervose di senso nell'uomo (con due tavole)». (Zeitsc. f. wiss. Zoologie), Bd. LXXIX, Leipzig. 1905.
52. «A proposito della guaina sussidaria delle fibre nervose di senso». (Anat. Anzeiger), Bd. XXVIII, nn. 21-22, Jena 1906.
53. «Le espansioni nervose periferiche alla luce dell'analisi moderna (con 4 fig.)». (Monit. Zool. ital.). anno 12, n. 1, Firenze 1906.
54. «Contributo alla conoscenza della ontogenesi degli Anfibi anuri ed urodeli». (Atti R. Acc. dei Fisiocritici in Siena), Serie IV, vol. XVIII, n. 8, 1906.
55. «Appunti di citologia intorno agli elementi ectodermici della gastrula negli Anfibi urodeli. Nota 3 (con due fig.)». (Atti R. Accad. dei Fisiocritici in Siena), Serie IV, vol. XIX, 1907.
56. Contributo alla conoscenza della ortogenesi degli Anfibi anuri ed urodeli (con due tavole)». (Arch. ital. di Anat. ed Embriol.), vol. VI, f. 1, 1907.
57. «Contributo alla conoscenza della ontogenesi degli Anfibi urodeli ed anuri. Nota 2 - (con 10 fig.)». (Anat. Anzeiger), Bd. 31; nn. 17-18. Jena 1907. Anche in Atti R. Acc. dei Fisiocritici in Siena, Serie IV, vol. XIX, 1907.
58. «Di alcune rare anomalie nella *pars* mastoidea del temporale umano (con 4 fig.)». (Bibliographie anatomique) to. 17, f. 2; (Atti R. Acc. dei Fisiocritici in Siena), Serie IV, vol. XIX, 1907.
59. «Riflessioni sulla Nota del Dr. Tello: "La régénération dans les fuseaux de Kühne"». (Atti R. Acc. dei Fisiocritici in Siena), Serie IV, vol. XX, 1908.
60. «La struttura della semiplacenta diffusa di Sus scrofa in rapporto coi fenomeni di assorbimento». (Atti R. Accad. dei Fisiocritici in Siena), Serie IV, vol. XX, 1908.
61. «Sul muscolo interdigastrico di Bianchi e sull'aponevrosi soprajoidea o intermediojoidea. Rarissimo caso di mancanza bilaterale nel ventre anteriore del muscolo digastrico della mandibola (con tre tavole)». (Archivio Ital. di Anat. ed Embriol.), vol. VII, fasc. 4, Firenze 1908. (Atti R. Accad. dei Fisiocritici di Siena), Serie IV, vol. XIV, 1902.
62. «Ricerche anatomiche ed anatomo-comparate sullo sviluppo della *pars* periotico mastoidea del temporale e sul significato dell'apofisi mastoide». (Atti R. Accad. dei Fisiocritici in Siena), Serie IV, vol. XX, 1908.
63. «L'ameboidismo e la secrezione in rapporto con la formazione degli organi e con lo sviluppo delle forme esterne del corpo (con 4 fig.). Nota preventiva». (Anatom. Anzeiger), Bd. 33, Jena 1890; (Atti R. Accad. dei Fisiocritici in Siena), Serie IV, vol. XX, 1908.
- 63 bis. «La fine struttura delle cellule enterodermiche in rapporto col loro potere secretorio». (Atti R. Accad. dei Fisiocritici in Siena), Serie IV, vol. XX, 1908.
64. «La elevazione termica e l'eliotropismo positivo durante lo sviluppo delle uova di Bufo vulgaris». (Atti R. Accad. dei Fisiocritici in Siena), Serie IV, vol. XX, 1908; (Archives Ital. de Biologie), to. LI, f. III, 1908.
65. «Di una singolare anomalia della staffa in un cranio di feto umano. (Residuo ossificato della porzione timpanica della cartilagine di Reichert); con tre fig.». (Anat. Anz.), Bd. 34, n. 18, 1909.
66. «Ricerche anatomiche ed anatomo-comparate sullo sviluppo della *pars* periotico-mastoidea del temporale e sul significato dell'apofisi mastoide». (Atti della Soc. Romana di Antropologia), vol. XV, f. 1, Roma 1909.
67. «Ricerche anatomiche ed anatomo-comparate sullo sviluppo della *pars* periotico-mastoidea del temporale e sul significato dell'apofisi mastoide (con 4 tavole doppie)». (Internaz. monat. f. Anat. und Phys.), Bd. XXVII, H. 4-6, 1910.

68. «L'origine, la sede e le differenziazioni dell'abbozzo del sangue e dei vasi sanguigni nel blastoderma di pollo. Nota preventiva (con una tavola)». (Bios.) vol. I, 1913.

69. «Lo scheletro connettivo muscolare della milza (capsula e trabecole) preparate dalle larve di Batraci (con una tavola)». (Rendic. R. Accad. delle Scienze dell'Istituto di Bologna), n. 8, vol. XIX, 1914-1915.

70. «Le squelette connective musculaire de la rate (capsule et trabecules) préparé par les larves des batraciens». (Archives italienne de Biologie), to. LXVI, f. 1, 1915.

71. «Alcune esperienze sugli effetti della variazione di tensione superficiale. Amebe e comete mercuriali microscopiche». (Rendic. R. Accad. delle Scienze dell'Istituto di Bologna), vol. XX, 1915-16.

72. «Le scariche elettriche attraversanti l'acqua e la loro azione sul corpo degli animali acquatici in essa immersi (con una fig.)». (Rend. R. Accad. delle Scienze dell'Istituto di Bologna), vol. XXI (in collaborazione con AMADUZZI).

73. «Perchè nei tessuti fissati con liquidi contenenti $HgCl_2$ (senza CrO_3) può ripristinarsi il colore quasi naturale dopo trattamento con KJ ». (Rendic. R. Accadem. delle Scienze dell'Istituto di Bologna), vol. XXII, 1917-18.

74. «I processi morfogenetici elementari nello sviluppo embrionale». (Rassegna Scienze biol.), anno I, nn. 5-6, Firenze 1919.

75. «Blastoderma di pollo senza embrione (anidiano) di 173 ore. Studio causale sulla produzione degli anidiani (con una fig.)». (R. Accad. delle Scienze dell'Istituto di Bologna), vol. XXIII, 1918-19.

76. «La secrezione come un fattore di correlazione fisiologica durante i primi momenti dello sviluppo embrionale». (Rassegna Scienze Biologiche), anno II, Firenze 1920.

77. «Sull'organo nervoso paratimpanico di G. Vitali od organo del volo degli Uccelli. Recensione (2 fig.)». (Boll. Scienze med.), Serie IX; (Archivio Ital. di Otologia, Rinologia e Laringologia), vol. XXXI, ff. 5-6, Biella 1920.

78. «La secrezione come fattore di correlazione fisiologica durante l'ontogenesi (risposta a GIGLIO-TOS)». (Rivista di Biologia), vol. II, f. VI, Roma 1920.

79. «L'organizzazione fisico-chimica della cellula e l'essenza delle sue azioni vitali». (La Medicina Ital.), n. 4, 1921.

80. «Sulle espansioni nervose e sulla funzione dei fusi neuro-muscolari (risposta a T. CIPOLLONE)». (Rivista di Biologia), vol. III, f. V, Roma 1921.

81. «Meccanica dello sviluppo embrionale e filogenesi». (Monit. Zool. it.), anno XXXV, nn. 6-7, Firenze 1924.

82. «Fisiogenia. La biodinamica dello sviluppo ed i fondamentali problemi morfologici dell'embriologia generale», pagg. xi-999 con 302 fig. e 2 tav. Casa ed. Dr. Francesco Vallardi, Milano 1925.

83. «Processi di tecnica embriologica ed istologica». Licinio Cappelli editore, Bologna, 1927.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI DI ALLIEVI DI ANGELO RUFFINI (1)

1. MARCHETTI XILO L. «Sui primi momenti dello sviluppo di alcuni organi primitivi nel germe di "Bufo vulgaris". Sviluppo delle ventose. Prima nota preventiva». (Anat. Anz.), 45 Band, n. 14, 1914.

(1) In quest'elenco, che debbo alla cortesia del prof. GASTONE LAMBERTINI, figurano esclusivamente i lavori originali datati dall'Istituto di Istologia di Bologna, non gli altri, più numerosi, di allievi dell'Istituto anatomico di Siena, pubblicati negli anni in cui RUFFINI era settore, e che quasi tutti erano stati da Lui ispirati e diretti.

2. MARCHETTI XILO L. « Sui primi momenti dello sviluppo di alcuni organi primitivi nel germe di "Bufo Vulgaris". Formazione delle tasche branchiali entodermiche e dei villi branchiali, del solco postbranchiale, del peduncolo ottico; vacuolizzazione della notocorda. Seconda nota preventiva ». (Anat. Anz.), 47 Band, nn. 19 e 20, 1914.

3. ID. « Sulla invaginazione attiva del tappo vitellino nelle uova di "Bufo Vulgaris" ». (Monitore Zoologico italiano), n. 6, 1917.

4. ID. « Sui primi momenti dello sviluppo di alcuni organi primitivi nel germe di "Bufo Vulgaris" ». (Arch. Ital. di Anat. e di Embr.), fasc. 20, 1917.

5. ID. « Sul destino del blastoporo durante la formazione del "Canalis Neurentericus", e del "Proctodeum" nel Bufo Vulgaris ». (Arch. Ital. di Anat. e di Embr.), vol. XVI, fasc. 2, 1918.

6. ID. « La secrezione vescicolare durante lo sviluppo delle vescicole cerebrali del "Bufo Vulgaris" ». (Origine embrionale del liquido cefalorachidiano). (Arch. Ital. di Anat. e di Embr.), vol. XX, fasc. 3, 1923.

7. TAVERNARI F. « Alcuni aspetti dei villi intestinali nel periodo dell'assorbimento (nota preliminare) ». (Bollett. delle Scienze mediche), Serie IX, vol. 4, 1916.

8. ID. « Quelques aspects de la villosité intestinale dan la période de l'absorption ». (Arch. Ital. de Biologie), to. LXV, fasc. III, 1916.

9. PALMIERI G. G. « Sulla presenza di noduli linfatici negli organi genitali esterni del cane ». (Comunicazione alla Soc. Medica chirurgica di Bologna il 5 maggio 1916). Bologna, 1917.

10. DALLA VOLTA A., « Studio isto-fisiologico di due fistole intestinali alla Thiry nello stesso cane ». (Comunicazione alla Soc. Medico-chirurgica di Bologna) 2 luglio 1920.

11. ID., « Studio istofisiologico di due fistole intestinali alla Thiry nello stesso cane ». (Arch. di Fisiologia), vol. XVIII, fasc. I-IV, novembre 1919 - settembre 1920.

12. RAPPINI M., « Sul disfacimento autolitico delle ghiandole adesive (ventose) nelle larve di "Bufo Vulgaris" ». (Rivista di Biologia), vol. I, fasc. III-IV, 1919.

13. ID., « Contributo allo studio del substrato anatomico del senso muscolare ». (Rivista di Biologia), vol. II, fasc. IV, 1920.

14. ID., « Sul disfacimento autolitico delle Ghiandole adesive (ventose) nelle larve di "Bufo Vulgaris" ». (Arch. Ital. di Anat. e di Embr.), vol. XX, fasc. III, 1923.

15. RACAH M., « Studio causale sulla formazione delle piccole uova senza tuorlo e dell' "ovum in ovo" nel pollo ». (Rivista di Biologia), vol. IV, fasc. IV-V, 1922.

16. MONARI D., « Sulla tessitura del tubolo seminifero primitivo, sul conseguente ordinamento delle sue cellule e sulla istofisiologia del testicolo in alcuni mammiferi (nota preventiva) ». (Mon. Zool. Ital.), n. 3, 1923.

17. ID., « Il problema delle interstiziali nel testicolo ». (Monit. Zool. Ital.), 1924.

18. ID., « La Istofisiologia del Didimo ». (Arch. Ital. di Anat. e di Embr.), vol. XXIII, fasc. II, 1926.

19. RONDININI R., « Particolarità formative in alcuni organi primitivi e sviluppo della coda nelle larve di "Bufo Vulgaris" ». (Arch. Ital. di Anat. e di Embr.), vol. 25, fasc. I, 1928.

20. OLIVIERI F., « Nuovi contributi all'azione dei raggi X sulle uova e sulle larve di "Bufo Vulgaris" ». (Giornale di Clinica medica), fasc. XI, 1927.

21. ID., « Ricerche intorno all'azione dei raggi Röntgen sulla segmentazione dell'uovo e sui processi morfogenetici e elementari nel "Bufo Vulgaris" ». (Rivista di Radiologia e Fisica medica), vol. I, fasc. V, 1929.

22. VIGNOLI L., « Il testicolo di "Rhinolophus ferrumequinum" nella sua maturazione sessuale e nelle sue variazioni cliniche annuali ». (Arch. Ital. di Anat. e di Embr.), vol. XXVIII, 1930.

23. BAGINI M., « Alcuni effetti della centrifugazione sulle uova segmentate di "Bufo Vulgaris" (nota preliminare) ». (Monit. Zool. Ital.), anno XXXIV, n. 4, 1923.



PROF. ANGELO RUFFINI

24. BAGINI M., « Azione della centrifugazione sullo sviluppo delle uova segmentate di "Anfibi anuri" ». (Arch. Ital. di Anat. e di Embr.), vol. 22, fasc. I, 1925.
25. ID., « Contributo alla conoscenza delle cause che determinano la individualizzazione ed il sollevamento del tubo neurale nelle uova di Anfibi anuri "Bufo Vulgaris" ». (Arch. Ital. di Anat. e di Embr.), vol. 26, fasc. IV, 1929.
26. SCAGLIETTI O., « Di un nuovo procedimento tecnico per la decalcificazione delle ossa ». (Monitore Zoologico Ital.), anno XL, n. 3, 1929.
27. ZAGNI L., « Sul comportamento della sostanza colloide ipercromofila nelle fratture sperimentali aperte e chiuse ». (Arch. Ital. di Chirurgia), vol. 20, fasc. IV, 1928.
28. BERTELLI R., « Ricerche istologiche sulla struttura e sulla funzione degli epiteli del rene ». (Bollett. della Società Italiana di Biologia sperimentale), vol. II, fasc. 9, 1927.
29. LAMBERTINI G., « L'istogenesi delle formazioni e degli organi secondari nell'embrione umano ». (Rendic. R. Accad. dei Lincei), vol. XXXII, s. V, fasc. 11, sed. 2 dic. 1923.
30. ID., « L'origine del corpo vitreo e la causa del rapido allungamento delle fibre del cristallino nell'uomo ». (Mon. Zoolog. Ital.), anno XXXIV, n. 12, 1923.
31. ID., « Ancora sull'istogenesi delle formazioni e degli organi secondari nell'embrione umano ». (Rendic. Accad. Lincei), vol. XXXIII, s. V, fasc. 1, seduta 13 genn. 1924.
32. ID., « I processi morfogenetici elementari nell'istogenesi delle formazioni e degli organi secondari nell'embrione umano ». (Arch. Ital. di Anat. e di Embr.), vol. XXIV, fascicolo I, anno 1927.
33. ID., « Studio comparativo embrionale sulla secrezione vescicolare del cristallino e sulle fibre della lente ». (Arch. Ital. Anat. ed Embr.), vol. XXIV, fasc. 2, 1929.
34. ID., « Studio comparativo sulla formazione dei villi ». (Arch. Ital. Anat. ed Embr.), vol. XXVI, fasc. 3, 1929.
35. ID., « Ricerche fisiomorfologiche sopra il sacco vitellino di embrioni di mammiferi e di uomo ». (Boll. Soc. Ital. di Biol. Sperim.), vol. III, fasc. VI, 1928, seduta 13 giug. 1928.
36. ID., « Ricerche fisio-morfologiche sul sacco vitellino dell'uomo ». (Bollett. Scienze mediche Bologna), anno, LXXXXIX, Serie X, vol. V, 1928.
37. ID., « Sulla differenziazione del reticolo neuro-fibrillare nelle cellule nervose durante la vita embrionale, nell'uomo e nei mammiferi ». (Boll. Soc. Ital. Biol. sperim.), vol. III, fasc. VI, 1928.
38. ID., « Sulla differenziazione del reticolo neurofibrillare nelle cellule nervose embrionali di uomo e di mammiferi ». (Boll. delle Scien. med. Bologna), anno LXXXXIX, Serie X, vol. V, 1928.
39. ID., « Ancora sulla differenziazione del reticolo neurofibrillare nelle cellule nervose embrionali d'uomo ». (Boll. Soc. Ital. di Biol. sperim.), vol. III, fasc. V, 1928.
40. ID., « Studio istologico sulla struttura della vescicola ombelicale negli embrioni umani ». (Arch. Ital. di Anat. e di Embr.), vol. XXVI, fasc. 4, anno 1929.
41. ID., « Aspetti strutturali ed evoluzioni metamorfiche del manicotto glandulare di Rana esculenta ». (Boll. Soc. Ital. Biol. sperim.), vol. IV, fasc. 2, anno 1929.
42. ID., « Il manicotto glandulare di rana esculenta nei suoi aspetti strutturali e nelle sue evoluzioni metamorfiche ». (Ricerche di Morfologia), vol. IX, anno 1929.
43. ID., « Resistenza alla lisi cadaverica del reticolo neurofibrillare nelle cellule nervose dei feti umani ». (Boll. Soc. Ital. di Biol. sperim.), vol. IV, fasc. V, anno 1929.
44. ID., « Gli effetti dei Raggi Röntgen sul reticolo neurofibrillare delle cellule nervose di mammiferi neonati ». (Boll. Soc. Ital. di Biol. sperim.), vol. IV, fasc. V, 1929.
45. ID., « La neuro-rete dei mammiferi neonati in particolari condizioni sperimentali ». (Atti Soc. Ital. Anat.); (Mon. Zoolog. Ital.), anno XL, nn. 11-12, 1929.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente dà l'annuncio della morte del Socio Straniero FRIDTJOF NANSEN e dà l'incarico al Socio DE MARCHI, che è tra i presenti, di farne la commemorazione in una delle prossime sedute.

Il Socio DE MARCHI accetta l'incarico.

Il Socio G. LEVI legge la commemorazione del compianto Socio RUFFINI.

Il Presidente ringrazia il Socio LEVI per la bella commemorazione.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio SACCO presenta in omaggio all'Accademia un notevole gruppo delle sue ultime pubblicazioni.

Il Socio BIANCHI presenta in omaggio i primi due volumi della ristampa delle opere di G. V. SCHIAPARELLI ripubblicate a cura della R. Specola di Brera.

Il Socio LEVI-CIVITA, per incarico dell'Autore, prof. ing. GIULIO DE MARCHI del R. Politecnico di Milano, presenta in omaggio il vol. I di un'opera intitolata *Idraulica*, che ne svolge sia le basi scientifiche che le applicazioni tecniche, costituendo, con notevoli ampliamenti, un eccellente corso della materia. Ma è in pari tempo un vero trattato, che si inizia con una interessantissima introduzione storico-critica e presenta una caratteristica originalità di concezione e di metodo. Tutto è perspicuamente lumeggiato alla stregua dei principi generali della idromeccanica; dovunque domina un sano ed elevato spirito scientifico, che bada all'essenziale, evitando d'altra parte infeconde astrazioni.

Lo studio dei vari ordini di fenomeni è fatto, sapendo, con felice criterio e sicura competenza, collegare alle idee fondamentali i dati di osservazione o di esperienze specifiche più adatti a fornire le relazioni che veramente interessano la tecnica. Anche le più moderne applicazioni sono contemplate, o almeno ricordate attraverso le indicazioni bibliografiche, raccolte con discernimento e misura alla fine di ciascun capitolo.

Il Socio sen. FANTOLI, di cui figura una fervida presentazione in testa al volume, vi riconosce « in felice temperanza, la cognizione ben solida e vasta, la nitida sobrietà espositiva, il retto criterio fisico, il giusto senso di equilibrio nello svolgimento degli argomenti singoli ».

Il Corrispondente CROCCO, presenta in omaggio il 1° volume del suo « Corso d'aviazione ».

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Corrispondente LOMBARDI, legge anche a nome del Corrisp. GIORGI la relazione con la quale si propone la stampa della memoria di M. FEDERICI « Fenomeni del regime transitorio nei trasduttori a impedenza caratteristica costante ».

L'Assemblea approva.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci: BRUNI, CANTONE, CORBINO, DAL PIAZ, FANO, FRANCHI, GARBASSO, LEVI G., LEVI-CIVITA, MARCOLONGO, PALAZZO, PEANO.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 30 maggio 1930

- AGAMENNONE G. — Il « memento » agli italiani in fatto di terremoti. (Estr. dalla « Latina Gens ». Anno 1929). Roma, 1929. 8°, pp. 1-4.
- AGAMENNONE G. — I periodi sismici Parmensi del 1834, 1835 e 1927-28. (Estr. dal « Bollettino della Società Sismologica Italiana ». Vol. XXVIII 1928-1929). Selci Umbra, 1929. 8°, pp. 1-7.
- Annuario serico 1929. (Ente Nazionale serico) Milano, 1930. 4°, pp. 1-66.
- BARELLI L. — Die Wirkung des bestrahlten Ergosterins (antirachitischen Vitamins) auf den Mäusekrebs. (Sonderabd. aus « Zeitsch. f. Krebsforsch. ». Band XXIX, Ss. 376-388). Berlin, 1929. 8°.
- BARELLI L. — Iperglicemia da introduzione parenterale di grassi. (Estr. dal « Bollettino della Società Italiana di Biologia Sperimentale ». Vol. IV). Milano, 1929. 8°, pp. 1-4.
- BARELLI L. — Ricerche sui processi di deidrogenazione nei tessuti normali e neoplastici. (Estr. da « Tumori ». Anno XV). Milano, 1929. 8°, pp. 1-30.
- BETTONI I. — Il valore polarimetrico del siero in rapporto alla reazione di Wassermann. (Estr. dal « Bollettino dell'Istituto Sieroterapico Milanese ». 1929). Milano, 1929. 8°, pp. 1-8.
- BOLAFFI A. — Der Cholesteringehalt der Carcinommäuse, (Sonderabd. aus « Zeitschrift für Krebsforschung ». Band XXX, Ss. 170-179). Berlin, 1929. 8°.
- BONATTI S. — 1. Lo xantogenato di platino. - 2. Nuove forme dello xantogenato di antimonio. (Estr. dai « Processi Verbalì della Società Toscana di Scienze Naturali ». Vol. XXXVIII). Pisa, 1929. 8°, pp. 1-7.
- BORGHI B. — La teoria infettiva dei tumori maligni secondo le più recenti ricerche. (Estr. dalla « Rivista la Clinica Veterinaria ». Anno 1929). Milano, 1929. 8°, pp. 1-24.
- BORGHI B. — Ricerche sperimentali sugli effetti dell'ergosterina irradiata somministrata ad alte dosi. (Estr. da « Biochimica e terapia sperimentale ». 1929). Milano, 1929. 8°, pp. 1-7.
- BORGHI B. — Ricerche sul comportamento dell'apparato reticoloendoteliale nei tumori da innesto. (Estr. da « Tumori ». Anno XV). Milano, 1929. 8°, pp. 1-19.
- BORGHI B. e LUZZATTO G. — Ricerche intorno al potere oncogeno del « B. tumefaciens » e del « B. Paola Meyer » nelle piante e negli animali. (Estr. dal « Bollettino dell'Istituto Sieroterapico Milanese ». 1929). Milano, 1929. 8°, pp. 1-15.
- CAMICHEL CH. — Leçons sur les conduites. Paris, 1930. 8°, pp. 1-101.
- CARMINATI V. — Ricerche interferometriche sul siero, con particolare riguardo alla siero-diagnosi dei tumori. (Estr. da « Tumori ». Anno XV). Milano, 1929. 8°, pp. 1-62.
- CHINI V. — Il ricambio respiratorio nelle artropatie croniche. (Estr. dall'« Archivio di Patologia e Clinica Medica ». Vol. IX). Bologna, 1930. 8°, pp. 1-20.
- CHINI V. — L'indagine in vita della reazione attuale e del potere regolatore degli organi e dei tessuti e loro importanza nella patologia sperimentale e nella clinica. (Estr. da « Biochimica e Terapia Sperimentale ». 1929). Milano, 1929. 8°, pp. 1-12.
- CHINI V. — Reazione attuale e potere re-

- golatore del mezzo quali fattori che influenzano lo sviluppo del bacillo di Koch. (Estr. dal « Bollettino dell'Istituto Sieroterapico Milanese ». 1929). Milano, 1929. 8°, pp. 1-12.
- CHINI V. — Ricerche sperimentali sul meccanismo fisio-patologico d'azione del pneumotorace artificiale. (Estr. dall'« Archivio dell'Istituto biochimico italiano »). Milano, 1930. 8°, pp. 1-72.
- COSTANTINI P. — Studio istologico della tiroide negli animali castrati. (Estr. dalla « Rassegna internazionale di clinica e terapia ». Anno X). Napoli, 1929. 8°, pp. 1-11.
- CROCCO A. G. — Elementi di aviazione. Vol. I. Roma, 1930. 8°, pp. 1-600.
- CUSCIANNA N. — L'anatomia dell'Apis mellifica L. di razza italiana (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria del R. Istituto superiore agrario ». Vol. XXIV, pagine 99-130). Portici, 1930. 8°.
- CUSIMAN R. A. — A revision of the North American Species of Ichneumon-Flies of the Genus Odontomerus. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 77). Washington, 1930. 8°, pp. 1-15.
- D'ACHIARDI G. — Commemorazione del Socio Luigi Brugnatelli. (Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali ». Vol. X, pagine 17-25). Roma, 1929. 8°.
- DEFRISE A. — Ricerche di citologia quantitativa. (Abdruck aus « Archiv für experimentelle Zellforschung besonders Gewebezüchtung [Explantation] » Band X, Ss. 323-340). Jena, 1930. 8°.
- DEFRISE A. — Ueber die bösartige Umwandlung der in vitro gezüchteten Normalzellen. (Sonderabd. aus « Zeitschrift für Krebsforschung ». Band. XXX, pagine 165-169). Berlin, 1929. 8°.
- DE MARCHI G. — Idraulica. Basi scientifiche e applicazioni tecniche. Vol. I. Milano, 1930. 8°, pp. 1-IX, 1-360.
- LORIA G. — Curve piane speciali algebriche e trascendenti. Teoria e storia. Vol. II. Milano, 1930. 8°, pp. 1-XI, 1-439.
- LUYTEN W. J. — On some statistical Properties of Double Stars in Space. I. A Formula for the Estimation of the Period in a relatively Fixed System. II. On the Mean Period of Double Stars in Space. (Reprint from the « Proceedings of the National Academy of Sciences ». Vol. XVI, pp. 252-256, 257-261). Cambridge, 1930. 8°.
- MARSHALL W. B. — New Land and Fresh-Water Mollusks from South America. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 17). Washington, 1930. 8°, pp. 1-2.
- MILLOSEVICH F. — Ematite nello sperone di Trevignano sul lago (Vulcano Sabazio). (Estr. dal « Periodico di Mineralogia ». Anno I). Roma, 1930. 8°, pp. 1-2.
- MILLOSEVICH F. — Leucotefriti e leucofonoliti nel Vulcano Sabazio. (Estr. dal « Periodico di Mineralogia ». Anno I, 1930). Roma, 1930. 8°. pp. 1-7.
- MILLOSEVICH F. — Per l'insegnamento delle scienze naturali. (Estr. dagli « Annali della Scuola media ». 1930, pp. 14-24). Roma, 1930. 8°.
- NOBILE U. — Die Vorbereitungen und die Wissenschaftlichen Ergebnisse der Polarexpedition der « Italia ». Gotha, 1929. 8°, pp. 1-98.
- ONORANZE a ORESTE MATTIROLO. Torino, 1929. 8°, pp. 1-82.
- POHL E. R. — The Middle Devonian Traverse Group of Rocks in Michigan: a Summary of Existing Knowledge. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 76). Washington, 1930. 8°, pp. 1-34.
- PRICE E. W. — Two new species of Trematode Worms of the Genus Eucotyle from North American Birds. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 77). Washington, 1930. 8°, pp. 1-4.
- RONDONI P. — Allergische Entzündung. (Sonderabd. aus « Immunität, Allergie und Infektionskrankheiten ». Band I, Ss. 295-313). München, 1928-29. 8°.
- RONDONI P. — Das Wesen der Tuberkulinreaktion. (Sonderabd. aus « Die Tuberkulose ». 1929). München, 1929. 4°, Ss. 1-8.

- RONDONI P. — Etiologia dei tumori. (Estr. dalla « Rassegna Clinico-Scientifica dell'Istituto Biochimico Italiano ». 1929). Milano, 1929. 8°, pp. 1-18.
- RONDONI P. — Fattori aspecifici individuali agevolanti la infezione e loro meccanismo di azioni. Fattori costituzionali-fattori alimentari, avitaminosi, traumi, perfrigerazioni, intossicazioni, fattori nervosi. Infezioni miste, secondarie e doppie, locali e generali. (Estr. dal volume « Come si contraggono le malattie infettive »). Milano, 1930. 8°, pp. 1-77.
- RONDONI P. — I fenomeni di ossidazione negli organismi. (Estr. dal volume « Conferenze Cliniche e di Scienze Mediche ». 1929). Firenze, 1929. 8°, pp. 1-28.
- RONDONI P. — Il problema biologico dell'artrite deformante. (Estr. dalla « Rinascezza Medica ». 1930). Napoli, 1930. 8°, pp. 1-10.
- RONDONI P. — La patologia generale del ricambio proteico. (Estr. dalla Rivista « Biologie Médicale ». 1929). Milano, 1929. 8°, pp. 1-14.
- RONDONI P. — L'influenza di una dieta a base di timo sul ratto, con particolare riguardo alla reattività infiammatoria. (Reprint. from the « American Journal of Physiology ». Vol. 90). s. l. 1929. 8°.
- RONDONI P. — Ricerche sull'immunità nel cancro del topo. (Estr. dal « Bollettino della Società Italiana di Biologia Sperimentale ». Vol. III, pp. 892-896. Napoli, 1928. 8°.
- RONDONI P. — Sulla precipitazione dell'acido urico in reazione alcalina. (Estr. da « Biochimica e Terapia Sperimentale ». 1930). Milano, 1930. 8°, pp. 1-12.
- RONDONI P. — Vitamine e resistenza immunitaria con speciale riguardo alla tubercolosi. (Estr. della Raccolta « Dieci Lezioni sulle vitamine ». dell'Istituto Biochimico Italiano 1929). Milano, 1929. 8°, pp. 1-21.
- RONDONI P. — Weitere Untersuchungen über die kombinierte Serum - Lipoidbehandlung des Mäusecarcinoms. (Sonderabdr. aus « Zeitschrift für Krebsforschung ». Band XXVII, Ss. 495-502). Berlin, 1928. 8°.
- SACCO F. — Alessandro Roccati. (Estr. dal « Bollettino del Comitato Glaciologico Italiano ». Anno 1929, pp. 5-7). s. l. 1929. 8°.
- SACCO F. — Campioni di rocce corrugate. (Estr. dal « Bollettino del R. Ufficio Geologico d'Italia ». Vol. LIV). Roma, 1930. 8°, pp. 1-24.
- SACCO F. — Come nacquero le Alpi. (Estr. dalla Rivista « Le Vie d'Italia ». 1930). Milano, 1930. 8°, pp. 1-16.
- SACCO F. — Il corrugamento appenninico marginale e subpadano. (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ». Vol. LXV, pp. 157-169). Torino, 1930. 8°.
- SACCO F. — Il glacialismo nelle Valli Sesia, Strona, Anza e nell'Ossola. Roma, 1930. 8°, pp. 1-106.
- SACCO F. — Il Pliocene marino attorno ai colli Torinesi. (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ». Vol. LXV, pp. 86-100). Torino, 1930. 8°.
- SACCO F. — Le meraviglie del monte Bega. (Estr. dal « Bollettino della Società Piemontese di Archeologia e Belle Arti ». Anno XIV). Torino, 1930. 8°, pagine 1-22.
- SACCO F. — L'origine della pianura padana e le sue acque sotterranee. (Estr. dagli « Atti del I Congresso del Po ». Anno 1927). Piacenza, 1928. 4°, pp. 1-7.
- SACCO F. — Note biografiche del prof. Alessandro Roccati. (Estr. dal « Bollettino della Società Geologica Italiana ». Volume XLVII, pp. 153-161). Roma, 1929. 8°.
- SACCO F. — Note illustrative della carta geologica d'Italia. Fogli di Piacenza e Firenzuola d'Arda. Roma, 1930. 16°. pp. 1-27.
- SACCO F. — Note illustrative della carta geologica d'Italia. Fogli di Voghera e Pavia. Roma, 1929. 16°, pp. 1-30.
- SACCO F. — Nuovi dati di fatto riguardo l'età degli Argilloscisti ofiolitiferi dell'Appennino. (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino » Volume LXIV, pp. 11-30). Torino, 1928. 8°.
- SACCO F. — Origine dei soffioni boraciferi. (Estr. dal « Bollettino della Società Geo-

- logica Italiana ». Vol. XLVII). Roma, 1928. 8°.
- SACCO F. — Problemi del massiccio cristallino Savonese. (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ». Vol. LXV, pp. 15-31). Torino, 1929. 8°.
- SCHIAPARELLI G. V. — Le Opere pubblicate per cura della Reale Specola di Brera. Vol. I-II. Milano. 1939. 4°, pp. 1-X, 1-515, 1-496.
- WILSON H. V. and PENNY J. T. — A new Variety of the Hexactinellid Sponge *Rhabdocalyptus Dawsoni* (Lambe) and the Species of *Rhabdocalyptus* (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 76), Washington, 1930. 8°, pp. 1-9.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 15 giugno 1930 (anno VIII)

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Tensori quadrupli isotropi.* Nota ⁽¹⁾ del
Corrisp. U. CISOTTI.

Se σ è il tensore doppio fondamentale di componenti cartesiane δ_{ik} : nulle quando $i \neq k$ e eguali all'unità quando $i = k$, ho dimostrato ⁽²⁾ che il più generale tensore doppio isotropo, cioè tale che le sue componenti cartesiane sono invariantive di fronte a qualunque cambiamento di assi, è del tipo $A\sigma$ qualunque sia lo scalare A .

Sono pure isotropi i tensori quadrupli le cui componenti cartesiane sono definite dalle seguenti relazioni:

$$(I) \quad T_{ikjh} = A\delta_{ik}\delta_{jh} + B\delta_{ij}\delta_{kh} + C\delta_{ih}\delta_{kj},$$

essendo A, B, C scalari qualsiansi ⁽³⁾. Mi propongo di dimostrare in questa Nota che ogni tensore quadruplo isotropo ha necessariamente il tipo di componenti (I), che rappresentano quindi cartesianamente il più generale tensore quadruplo isotropo.

Se, in particolare, si assume il suddetto tensore quadruplo come *tensore di elasticità* ⁽⁴⁾ si ritrovano le classiche relazioni che legano sforzi e deformazioni nei mezzi elastici isotropi.

(1) Presentata nella seduta del 15 giugno 1930.

(2) *Tensori isotropi e tensori emisotropi*, questi « Rendiconti », vol. XI (1° sem., 1930), p. 917.

(3) CISOTTI, *Tensori isotropi*, ibidem, p. 728, n. 3.

(4) CISOTTI, *Lezioni di calcolo tensoriale*, Milano (1928), Tamburini, p. 36, n. 28.

1. Sieno: T_{ikjh} le componenti cartesiane, rispetto a una terna ($O; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$), di un tensore quadruplo \mathbf{T} ; \bar{T}_{pqrs} le sue componenti rispetto a una terna ($\bar{O}; \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3$); si ha:

$$(1) \quad \bar{T}_{pqrs} = T_{ikjh} \alpha_{ip} \alpha_{kq} \alpha_{jr} \alpha_{hs},$$

essendo

$$\alpha_{ik} = \cos(\gamma_i, \bar{\gamma}_k).$$

Se il tensore si suppone isotropo dev'essere $\bar{T}_{pqrs} = T_{pqrs}$ qualunque sia il cambiamento di assi, per cui

$$(2) \quad T_{pqrs} = T_{ikjh} \alpha_{ip} \alpha_{kq} \alpha_{jr} \alpha_{hs}.$$

In particolare, queste devono essere soddisfatte assumendo

$$\alpha_{11} = -1, \quad \alpha_{22} = \alpha_{33} = 1, \quad \alpha_{23} = \alpha_{32} = \alpha_{31} = \alpha_{13} = \alpha_{12} = \alpha_{21} = 0,$$

per cui si ottiene:

$$T_{pqrs} = T_{pprs} \alpha_{pp} \alpha_{qq} \alpha_{rr} \alpha_{ss}.$$

Scende da queste che se l'indice 1 compare un numero dispari di volte in T_{pqrs} , essendo $\alpha_{pp} \alpha_{qq} \alpha_{rr} \alpha_{ss} = -1$, dev'essere $T_{pqrs} = 0$. Dunque, affinchè sussistano le (2) è necessario che sieno nulle tutte le componenti di \mathbf{T} nelle quali l'indice 1 compare un numero dispari di volte. In modo analogo si constata che devono essere nulle tutte le componenti che contengono un numero dispari di volte ciascuno degli altri indici 2 e 3. Ora le componenti di \mathbf{T} che non contengono un numero dispari di volte nessuno degli indici 1, 2, 3 rientrano necessariamente in uno dei seguenti tipi:

$$T_{pppp}, \quad T_{p+1p+2p+1p+2}, \quad T_{p+2p+1p+2p+1}, \\ T_{p+1p+2p+2p+1}, \quad T_{p+2p+1p+1p+2}, \quad (p = 1, 2, 3)$$

considerando, al solito, equivalenti gli indici che differiscono tra di loro di 3 oppure di multipli di 3.

2. Facciamo constatare che dev'essere:

$$(3) \quad T_{1111} = T_{2222} = T_{3333}.$$

Infatti, da (2) si ha, in particolare,

$$T_{1111} = T_{ikjh} \alpha_{i1} \alpha_{k1} \alpha_{j1} \alpha_{h1}.$$

Assumendo

$$\alpha_{11} = 0, \quad \alpha_{12} = 1, \quad \alpha_{13} = 0; \quad \alpha_{21} = 1, \quad \alpha_{22} = 0, \quad \alpha_{23} = 0; \\ \alpha_{31} = 0, \quad \alpha_{32} = 0, \quad \alpha_{33} = 1,$$

dalla precedente segue $T_{1111} = T_{2222}$; in modo analogo, ponendo

$$\alpha_{11} = 0, \alpha_{12} = 0, \alpha_{13} = 1; \alpha_{21} = 0, \alpha_{22} = 1, \alpha_{23} = 0; \\ \alpha_{31} = 1, \alpha_{32} = 0, \alpha_{33} = 0,$$

si ottiene $T_{1111} = T_{3333}$; dunque sussistono le (3), c. v. d.

3. Si ha pure:

$$(4) \quad T_{2323} = T_{3232} = T_{3131} = T_{1313} = T_{1212} = T_{2121}.$$

Infatti, da (2) si ha:

$$T_{2323} = T_{ikh} \alpha_{i2} \alpha_{k3} \alpha_{j2} \alpha_{h3}.$$

In particolare, assumendo

$$(*) \quad \alpha_{11} = 1, \alpha_{12} = 0, \alpha_{13} = 0; \alpha_{21} = 0, \alpha_{22} = 0, \alpha_{23} = 1; \\ \alpha_{31} = 0, \alpha_{32} = 1, \alpha_{33} = 0,$$

si ha $T_{2323} = T_{3232}$, mentre assumendo

$$(**) \quad \alpha_{11} = 0, \alpha_{12} = 1, \alpha_{13} = 0; \alpha_{21} = 0, \alpha_{22} = 0, \alpha_{23} = 1; \\ \alpha_{31} = 1, \alpha_{32} = 0, \alpha_{33} = 0,$$

si ha $T_{2323} = T_{1212}$; e così via. Dunque valgono le (4), c. v. d.

4. Si ha infine:

$$(5) \quad T_{2332} = T_{3223} = T_{3113} = T_{1331} = T_{1221} = T_{2112}.$$

Infatti, da (2) si ottiene:

$$T_{2332} = T_{ikh} \alpha_{i2} \alpha_{k3} \alpha_{j3} \alpha_{h2}.$$

Applicando (*) si ottiene $T_{2332} = T_{3223}$, e applicando (**) si ha $T_{2332} = T_{1221}$, e così via. Dunque valgono le (5), c. v. d.

5. Per (3), (4), (5) si può porre

$$T_{p+1p+2p+1p+2} = T_{p+2p+1p+2p+1} = B, \quad T_{p+1p+2p+2p+1} = \\ = T_{p+2p+1p+1p+2} = C, \quad T_{pppp} = A + B + C,$$

e da queste seguono le (1), le quali pertanto sono le più generali componenti di un tensore quadruplo isotropo, c. v. d.

6. Se si assume il tensore \mathbf{T} come *tensore di elasticità*, tra le componenti cartesiane Φ_{ik} del tensore degli sforzi e quelle ξ_{jh} del tensore di deformazione, si hanno le seguenti relazioni (1):

$$\Phi_{ik} = T_{ikjh} \xi_{jh} = (A\delta_{ik}\delta_{jh} + B\delta_{ij}\delta_{kh} + C\delta_{ih}\delta_{kj}) \xi_{jh} = A\delta_{ik}\Theta + (B + C)\xi_{ik},$$

essendo $\Theta = \xi_{hh}$ il coefficiente di dilatazione cubica. Si ritrovano così le classiche relazioni tra sforzi e deformazioni nei mezzi elastici isotropi.

7. Se ci si riferisce a coordinate generali x_1, x_2, x_3 e

$$ds^2 = a_{ik} dx^i dx^k$$

è l'espressione del quadrato dell'elemento lineare, si hanno le seguenti espressioni, per le componenti covarianti del più generale tensore quadruplo isotropo:

$$T_{ikjh} = Aa_{ik}a_{jh} + Ba_{ij}a_{kh} + Ca_{ih}a_{kj}.$$

Chimica. — *La struttura cristallina del benzolo e le sue relazioni con quella del tiofene* (2). Nota II del Socio G. BRUNI e di G. NATTA (3).

Il benzolo è stato oggetto di esame coi raggi X col metodo delle polveri e recentemente Gordon Cox (4) ha annunciato di avere intrapreso lo studio coi metodi di Laue e del cristallo rotante, ma non ha ancora pubblicato che dei risultati preliminari.

In ordine cronologico le prime ricerche röntgenografiche della forma cristallina del benzene si devono a Broomé (5) che operando con anticatodo di rame a -30° trovò una cella rombica, contenente 4 molecole C_6H_6 , e avente una costante $c = 6.85 \text{ \AA}$ e rapporti assiali

$$a : b : c = 0.757 : 1 : 0.702.$$

Successivamente Eastman (6) studiò il benzolo con il metodo di Hull im-

(1) Cfr. le citate mie *Lezioni di calcolo tensoriale*, p. 36, formule (1).

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale del R. Politecnico di Milano.

(3) Presentato nella seduta del 30 maggio 1930.

(4) E. GORDON COX, «Nature», 122, 401 (1928).

(5) BROOMÉ, «Physik. Zeitschr.», 24, 124 (1823); «Zeitschr. f. Krist.», 62, 325 (1925).

(6) E. D. EASTMAN, «J. Am. Chem. Soc.», 46, 917 (1924).

piegando un anticatodo di molibdeno. Operando a temperature solo di poco inferiori a quella di fusione del benzolo trovò dei rapporti assiali

$$a : b : c = 0.775 : 1 : 0.725.$$

Questi valori sono dedotti calcolando solo le linee corrispondenti agli angoli di riflessione più bassi. Mark ⁽¹⁾ trova per c un valore compreso tra 6.8 e 6.9, quindi accordante con quello di Broomé, deduce dalle sue misure che il gruppo spaziale è Q_h^{12} , o Q_h^{15} , o Q_h^{16} , e che nel cristallo la molecola possiede un centro ma non possiede piani di simmetria, che nella cella elementare se una molecola ne occupa il centro le altre ne occupano il centro delle faccie.

Recentemente Gordon Cox (loc. cit.) ha esaminato il benzolo col metodo del cristallo rotante ad una temperatura di -22° ed ha trovato una cella ortorombica bipiramidale contenente 4 molecole (gruppo spaziale Q_h^{15}) di lati: $a = 7.44$, $b = 9.65$, $c = 6.81$, corrispondenti a rapporti assiali $a : b : c = 0.771 : 1 : 0.704$.

La discordanza tra i valori di Broomé, Eastman e di Gordon Cox deve attribuirsi alla difficoltà che presenta l'interpretazione dei fotogrammi delle polveri nel caso di cristalli a simmetria rombica ed aventi una cella elementare di notevoli dimensioni.

Noi abbiamo ripetuto le determinazioni col metodo di Debye e Scherrer. Abbiamo usato per l'esame dapprima anticatodi di rame e di ferro. I risultati coincidono nelle linee generali con quelli degli autori precedenti e prevalentemente con quelli di Gordon Cox. Dato però il grandissimo numero delle linee visibili e le inevitabili coincidenze di riflessioni, dovute a faccie diverse ed aventi distanze reticolari vicine, non è facile dall'esame di tali fotogrammi giungere a risultati sicuri. Basti pensare che coll'anticatodo di ferro possono raccogliersi sulla film le riflessioni di circa 300 linee dovute a faccie diverse, tanto che gli autori precedenti hanno soltanto tenuto conto, nel calcolo dei fotogrammi, di una parte relativamente piccola di questi.

Per disperdere maggiormente lo spettro di diffrazione röntgenografico del benzolo abbiamo usato la radiazione emessa da un anticatodo di calcio, come abbiamo già annunciato nella Nota precedente sul tiofene. Questo dispositivo è qui ancora più vantaggioso data la più bassa simmetria del benzolo.

Nel fotogramma eseguito con anticatodo di calcio si sono potute leggere circa 30 linee corrispondenti ad angoli di riflessione compresi tra 19° e 78° .

Nella tabella sono riportati i risultati del calcolo di tale fotogramma. Si è trovato il migliore accordo nell'ordinamento delle linee per un rapporto assiale $a : b : c = 0.771 : 1 : 0.708$, che è poco diverso da quello trovato da Gordon Cox ($0.771 : 1 : 0.704$), e come costanti reticolari: $a = 7.34$, $b = 9.52$, $c = 6.74$.

(1) H. MARK, «Ber.», 57, 826 (1924).

Fotogramma del Benzolo a — 170°

(anticatodo di Calcio)

$\text{sen} \frac{\theta}{2}$	I	d	hkl	b $a : b : c =$ $= 0.771 : 1 : 0.704$	b $a : b : c =$ $= 0.771 : 1 : 0.708$
0.3305	m	5.072	020 (β)	—	—
0.3570	ff	4.696	020	9.39	9.39
0.3854	d	4.350	111	9.43	9.41
0.4231	dd	3.963	120	9.44	9.44
0.4344	d	3.860	021	9.46	9.45
0.4582	m	3.658	200	9.49	9.49
0.4988	m	3.361	002	9.55	9.49
0.5224	d	3.209	201	9.49	9.48
0.5476	m	3.062	102	9.56	9.52
0.5508	dd	3.043	211	9.50	9.49
0.5782	d	2.899	130-112 220	9.48-9.51 9.50	9.48-9.47 9.50
0.6110	dd	2.744	022	9.53	9.50
0.6312	m	2.656	131-221	9.46-9.48	9.46-9.47
0.6550	mf	2.560	122	9.50	9.46
0.6893	dd	2.432	300	9.46	9.46
0.7104	ff	2.360	(040)-310	(9.44)-9.48	(9.44)-9.48
0.7333	d	2.286	301	9.47	9.47
0.7450	dd	2.250	140	9.46	9.46
0.7535	d	2.225	311-(041)	9.48-9.45	9.47-(9.44)
0.7717	dd	2.173	013-320	9.51-9.51	9.47-9.51
0.7977	d	2.102	113	9.60	9.54
0.8393	md	1.997	240	9.52	9.52
0.8597	dd	1.950	123-232	9.52-9.52	9.48-9.49
0.8760	md	1.914	241-203	9.52-9.53	9.52-9.50
0.8842	d	1.896	050	9.48	9.48
0.9130	md	1.836	150-051 033	9.48-9.54 9.57	9.48-9.54 9.53
0.9397	d	1.784	410	9.44	9.44
0.9490	ff	1.767	151-133 223-401	9.46-9.47 9.50-9.51	9.46-9.46 9.46-9.51
0.9790	d	1.712	242-420 (340)	9.50-9.52 (9.55)	9.49-9.52 (9.55)

Nella tabella nella penultima colonna sono raccolti i valori calcolati per b secondo il rapporto assiale dato da Gordon Cox. Si nota che le faccie a terzo indice elevato forniscono dei valori di b superiori alla media. Questo inconveniente scompare ponendo il rapporto assiale eguale a $0.771:1:0.708$, come si vede dall'ultima colonna.

Le differenze fra le dimensioni della cella fondamentale trovate da noi e quelle di Gordon Cox sono dovute alla dilatazione termica per la differenza di temperatura tra -22° e -170° . Difatti noi calcoliamo a -170° un volume della cella elementare del benzolo di $471 \cdot 10^{-24}$ cc. a cui corrisponde una densità per il benzolo, ponendo che la cella contenga 4 molecole, 1.099, mentre Gordon Cox trova a -22° una densità di 1.0519.

Come si è già accennato nella Nota precedente circa la forma cristallina del tiofene, non esiste tra questa sostanza ed il benzolo un vero isomorfismo, come si sarebbe potuto supporre dai fatti prima noti. Si osserva però che la cella elementare del benzolo presenta delle notevoli analogie con quella del tiofene, pur appartenendo i due composti a diversi sistemi cristallini. Infatti confrontando i valori assoluti dei lati dei parallelepipedi elementari, e considerando la cella del tiofene come una cella rombica, si osserva, come risulta dalla annessa tabellina, che il lato b' è quasi identico per i due composti ed i lati tra loro eguali a' e c' del tiofene hanno un valore intermedio a quelli del benzolo.

	$a':b':c'$	a'	b'	c'	v
Benzo'o.	0.771:1:0.708	7.34	9.52	6.74	471
Tiofene.	0.757:1:0.757	7.225	9.54	7.225	498

Si potrebbe anzi supporre che la cella elementare del tiofene fosse in realtà rombica pseudo-tetragonale, con un rapporto assiale così vicino a quello del tetragonale da non poter essere distinto col metodo delle polveri.

Tali analogie geometriche tra le celle fondamentali dei due composti potrebbero far prevedere la formazione di soluzioni solide per congelamento delle miscele e quindi giustificare il comportamento crioscopico di queste. È però da prevedere che non si potrà avere una serie continua di soluzioni solide, ma due serie, una del tipo benzolo e una del tipo tiofene; si tratterebbe quindi di un caso di isodimorfismo.

Lo studio completo coi raggi X del sistema benzolo-tiofene sarà oggetto di una prossima Nota.

RIASSUNTO.

1° È stato esaminato coi raggi X, col metodo delle polveri, il benzolo solido ad una temperatura di -170° .

2° È risultato vantaggioso l'impiego delle radiazioni a grande lunghezza d'onda di un anticatodo di calcio metallico.

3° Si è calcolata per il benzolo a -170° una cella elementare rombica bipiramidale di lati $a = 7.34$, $b = 9.52$, $c = 6.74$ corrispondente ad un rapporto assiale $a:b:c = 0.771:1:0.708$ poco diverso da quella determinato da Gordon Cox a -22° .

La densità risulta: 1.099.

4° Non esiste un vero isomorfismo fra benzolo e tiofene.

5° Si sono osservate delle analogie nelle dimensioni delle celle fondamentali del benzolo rombico e del tiofene tetragonale, che presentano dei volumi rispettivamente di 471 e di $498 \cdot 10^{-24}$ cc.

Geologia. — *Sulla causa geologica della scomparsa dell'antica città di Paestum.* Nota ⁽¹⁾ del Socio G. DE LORENZO.

Generalmente si ritiene, che l'antica *Poseidonia*, fondata dai coloni greci nel sesto secolo avanti Cristo, divenuta poi *Paistum* per i lucani, che la conquistarono nel quarto secolo, e quindi *Paestum* per i romani, che la presero nel 273 avanti Cristo e la tennero fino alla caduta dell'impero, fosse durante il medio evo scomparsa per l'imperante malaria, di cui già si lagnavano i romani dopo Augusto, nonchè per le invasioni barbariche e per le incursioni dei saraceni, che costrinsero gli abitanti a ritirarsi dal piano sui monti di Capaccio. Lasciamo da parte queste cause storiche, evidentemente false: nessuna grande città costiera dell'Italia meridionale è stata mai completamente e definitivamente abbandonata per invasioni di barbari od incursioni di saraceni. Resta, come più probabile, la causa naturale della malaria. Ma anche solamente con essa non possiamo spiegarci, come mai abbia potuto in quel luogo esistere e prosperare per un millennio una grande e florida città greca, lucana e romana, che poi è sparita completamente dalla superficie del suolo: sparita a tal punto, che solo da un paio di secoli se ne sono riscoperti i grandiosi templi dorici, che ergono ora di nuovo i loro colonnati sul vasto piano. Dunque la malaria stessa non può essere stata che un fenomeno locale, dovuto ad una causa più profonda e generale, interessante quella parte della crosta terrestre: una causa, quindi, geologica.

(1) Presentata nella seduta del 15 giugno 1930.

Questa causa geologica della scomparsa di Pesto fu intuita da R. T. Günther, il quale, mettendo in relazione i suoi studi sui movimenti della terra nella baia di Napoli con le osservazioni analoghe fatte da altri lungo la costa tirrena d'Italia, chiuse appunto il suo lavoro *Contributions to the Study of Earth-Movements in the Bay of Naples*, Oxford 1903, con queste parole: « E, finalmente, vogliamo attribuire alla stessa causa della subsidenza la presente insalubrità dei bassipiani di Paestum. Noi non crediamo, che una città contenente alcuni dei più magnifici templi greci e che aveva raggiunto il grado di cultura provato dagli affreschi nel Museo di Napoli, sarebbe fiorita nel mezzo di una palude malarica, vivaio di zanzare ed abbandonata ora ai beccaccini e ai bufali ». Io, che ebbi la fortuna, circa trent'anni fa, di accompagnare il Günther nelle sue esplorazioni dell'antica villa del *Pausilypon* e nei suoi scandagli dei ruderi romani sottomarini tra la zona di Marechiano e lo scoglio della Gaiola, posso ora portare una conferma di fatto alla sua intuizione della causa geologica della scomparsa di Pesto.

Tale conferma l'ho avuta in una recente visita a quei nuovi scavi, iniziati sotto la soprintendenza di Vittorio Spinazzola, proseguiti sotto l'attuale soprintendenza del prof. Amedeo Maiuri ed eseguiti, da tre anni in qua, con grande cura e diligenza dell'ispettore, prof. Antonio Marzullo, che mi è stato in essi guida intelligente e preziosa. Con la scorta delle sue indicazioni ho potuto osservare, che i ruderi, venuti ora a giorno, specialmente le due torri di guardia, la rotonda e la quadrata, fiancheggianti la Porta Marina, nel mezzo del tratto occidentale delle mura greche, erano seppelliti sotto tre o quattro metri di interrimento di origine fluviale e palustre, e che l'interrimento stesso è cementato da infiltrazioni di tufo calcareo, che in alcuni punti assume addirittura forme di concrezioni stalattitiche. Ora, come mai le mura, i templi, il teatro e l'anfiteatro, nonchè le vie e le case di Pesto hanno potuto essere seppelliti sotto così ingente massa di terra e di tufo calcareo?

Ecco come può essersi svolto il fenomeno. Attualmente la piattaforma di travertino, su cui fu fondata *Poseidonia* e da cui furono estratti i blocchi ingenti, per la costruzione delle mura e dei templi, si trova a circa 18 metri di altezza sull'attuale livello del mare. Ma, se si tiene conto delle oscillazioni del livello marino, constatate per il periodo storico lungo il litorale tirreno dell'Italia meridionale, bisogna indurre, che nel sesto secolo avanti Cristo il piano di quella piattaforma doveva trovarsi a non meno di 25 metri sul livello del mare. Inoltre la piattaforma stessa era la superficie di un basso promontorio di travertino, di cui l'orlo fu seguito dalla cinta della mura, di forma irregolarmente trapezoidale; e l'orlo occidentale del promontorio, e quindi delle mura, doveva trovarsi assai più vicino al mare, che non sia adesso: perchè allora i materiali alluvionali, portati dal Sele e dai contigui corsi d'acqua minori, non avevano ancora gettato sulla sottostante crosta travertinosa, terrazzata dal mare, la distesa di dune sabbiose, che ora hanno

allontanato da 600 a 1000 metri la linea di spiaggia dalla cinta delle mura. Questo è dimostrato anche dalla rapida pendenza, con cui la pavimentazione poligonale della *via decumana* maggiore sbocca dalla Porta Marina. Analoga pendenza si riscontra allo sbocco della Porta Marina di Pompei e ad Ercolano, dove similmente le città erano più alte e, nel tempo stesso, più prossime al mare.

Ma, già nel sesto secolo avanti Cristo doveva essere cominciato, o doveva continuare da un periodo antecedente, il moto di subsidenza, che al tempo di Augusto principiava a rendere malsana la contrada e che al principio dell'era volgare faceva scrivere a Strabone (V, in fine) essere la città insalubre per le vicine acque fluviali. Tale movimento di subsidenza progredì sempre durante l'impero ed il medio evo, sì che alla fine di questo il livello del mare giunse forse a più di 10 metri sul livello attuale, in modo che la piattaforma di Pesto doveva emergere pochissimo dal livello marino.

In tale condizione i corsi d'acqua, discendenti dal circostante Appennino, cioè il Sele, il Salso o Capodifiume ed il Solofrone, e le acque freatiche del sottosuolo, costrette, per l'equilibrio idrostatico, a seguire il movimento positivo della linea di spiaggia, invasero a poco a poco la piattaforma travertinosa di Pesto, coprendola di acque fluenti e stagnanti e dei loro sedimenti. Questi stessi sedimenti erano a lor volta cementati dal tufo calcareo poroso, depositato da quelle acque, che sono ed erano cariche di carbonato di calcio, come avevano già notato e lo stesso Strabone (*l. c.*) e gli scrittori latini, p. es. Plinio (Hist. Nat. II, 106): *Similiter in Silaro non virgulta modo immersa, verum et folia lapidescunt, alias salubri potu eius aquae*. È il carbonato di calcio, che quelle acque traggono dai calcari del finitimo Appennino e che ha dato origine ai grandi banchi di travertino della campagna pestana, analoghi a quelli, che l'Aniene ha depositati nella campagna romana.

Ora dunque, a causa di tale subsidenza medievale, sull'antica città di Pesto si stese gradatamente una fitta coltre di depositi acquitrinosi e malarici, che, mentre ne esclusero ogni umana dimora, vi fecero crescere una rigogliosa vegetazione di terra umida e calda, che con la sua fitta boscaglia avvolse e celò quel che ancora sporgeva dal suolo degli antichi monumenti, in modo che di questi nel Cinquecento s'era perduta ogni traccia. Similmente, se anche in misura maggiore, la *jungle* ⁽¹⁾, o folta macchia selvaggia tropicale, ha avvolto e coperto i grandi monumenti antichi dell'India, dell'Indocina e dell'Indonesia. Ma, durante il Cinquecento il processo di subsidenza della terra cominciò ad invertirsi in quello di elevazione; per cui il livello del mare cominciò e continuò per circa tre secoli ad abbassarsi, senza peraltro

(1) Fo notare, che il vocabolo inglese *jungle* è una traduzione fonica di quello indiano moderno *jangal*, che deriva a sua volta dall'antico sanscrito *jangala*, e che quindi da noi italiani si deve pronunziare *giàngal* e non *iungla*, come ordinariamente si usa da quelli, che leggono letteralmente la bisbetica grafia inglese.

raggiungere il basso livello del quinto secolo avanti Cristo, giacchè oggi esso è ancora di oltre tre metri più alto di quanto fosse all'epoca di Augusto. Queste oscillazioni secolari della linea di spiaggia, o bradisismi, della regione pestana possono essere sommariamente indicate all'ingrosso dalla qui annessa figura, in cui la linea continua AA indica il livello del mare nel sesto secolo avanti Cristo, la punteggiata BB quello della massima subsidenza, alla fine del medio evo, e la tratteggiata CC il livello attuale.



Col sollevamento, iniziatosi nel Cinquecento, le acque, dilaganti e stagnanti, furono costrette a cercarsi nuovi alvei, per scendere più rapidamente al mare, dopositandovi lungo la spiaggia le sabbie, ondulate poi in dune dai venti; il terreno cominciò a prosciugarsi, permettendo agli animali il pascolo ed agli uomini le prime coltivazioni; sulla terrazza di travertino, sottostante al promontorio di Pesto, sorse, tra le dune di sabbia, che sempre più si allargavano, la torre di guardia seicentesca; e dalla boscaglia diradata emersero a nuova luce i dorici colonnati.

Ora sulla plaga, per circa un millennio abbandonata, fervono nuovamente le opere degli uomini: opere pastorali, agricole, commerciali ed industriali; ed anche opere di scienza, che rivelano al mondo i tesori, qui disseppelliti, dell'antica civiltà greca ed italica. Ma tutte queste opere sono nuovamente, se anche assai lentamente, insidiate da un nuovo moto di abbassamento, che da circa un secolo si è iniziato lungo il nostro litorale tirreno ed ostacola i lavori di bonifica, lungo di esso alacremenente intrapresi; nè si può dire in alcun modo, se tale moto di subsidenza debba arrestarsi od invertirsi: breve è il respiro dell'uomo, e lungo è il palpito della terra.

Questa, dunque, è la causa geologica della scomparsa dell'antica città di Pesto. Io ho voluto qui solo indicarla ai geologi ed agli archeologi, perchè essi possano confermarla, emendarla e precisarla con migliori studi e con più esatte osservazioni.

Biologia (Patologia vegetale). — *Un'estesa infezione di « Pythium » su piante di grano.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. L. PETRI.

Le insistenti piogge del periodo primaverile, insieme a qualche effetto postumo di abbassamenti di temperatura, hanno determinato quest'anno in alcune regioni dell'Alta Italia delle condizioni molto favorevoli all'attacco della base del culmo del grano da parte di microrganismi che ordinariamente non esercitano su queste piante alcuna azione dannosa apprezzabile. In provincia di Padova, ad esempio, ho potuto constatare, nel maggio scorso, che i grani di qualsiasi varietà, precoci o tardivi, sopra terreni argillosi o sciolti, concimati o non concimati, presentavano una infezione fungina nel primo o nel secondo internodio basale del culmo, determinante la necrosi del tessuto epidermico, dell'ipoderma e del perenchima fondamentale. L'alterazione appariva come una macchia bruna, allungata longitudinalmente e situata nella porzione inferiore dell'internodio. In alcuni casi l'infezione era superficiale, ma in molti altri il micelio parassita aveva attraversato tutti i tessuti anzidetti andandosi a svilupparsi nella cavità midollare con abbondanti ife aeree, bianche. Le radici erano sanissime. I caratteri macro e microscopici delle lesioni erano costanti in tutte le varietà di grano esaminate, solo variava l'ubicazione della lesione, che si trovava nel primo internodio basale nelle varietà tardive e nel secondo in quelle precoci. Questo fatto dimostrava che la recettività dei tessuti pel fungo parassita doveva essere in dipendenza diretta o indiretta dell'età dell'internodio. In rapporto a una simile deduzione si presentava anche il fatto che soltanto i grani seminati molto tardi (novembre o dicembre) si mostravano immuni dall'infezione, ciò che, facendo escludere l'effetto dell'umidità eccessiva come causa predisponente all'infezione, rendeva molto probabile che una leggera alterazione prodotta da abbassamenti di temperatura tardivi nella regione in accrescimento degli internodi basali avesse costituito la prima causa necessaria al verificarsi dell'attacco fungino. L'umidità eccessiva e persistente era da considerarsi come una condizione pure necessaria, ma subordinata alla prima e che favoriva solo l'accrescimento saprofitico del fungo sul terreno e l'attacco del culmo.

Gli abbassamenti di temperatura che possono aver causato una leggera alterazione nella porzione del primo o secondo internodio basali in attività di accrescimento si sono verificati alla fine di marzo e nell'ultima decade di aprile. Una simile alterazione sarebbe stata senza alcuna nociva conse-

(1) Presentata nella seduta del 15 giugno 1930.

guenza per le piante se la stagione successiva non fosse stata eccessivamente piovosa.

Nelle suesposte condizioni sulla base dei culmi si sviluppano l'*Ophiobolus*, la *Leptosphaeria herpotrichoides*, o il *Fusarium culmorum*, o specie affini, ed infatti gli isolamenti eseguiti e le osservazioni fatte direttamente sui culmi infetti hanno dimostrato in molti casi la presenza di questi funghi, ma contrariamente ad ogni aspettativa, dalle lesioni caratteristiche dei culmi è stato isolato costantemente un micelio riferibile al gen. *Pythium*.

Non mi consta che fino ad ora un'infezione del grano da parte di *Pythium* sia stata osservata sul culmo e sopra una così vasta estensione di territorio come quella comprendente tutti i terreni coltivati a frumento della provincia di Padova.

Peyronel (1) ha riscontrato più volte dei funghi riferibili al genere *Pythium* fra le forme fungine comunemente presenti nelle micorize del grano e non di rado ha veduto questi funghi attaccare « le porzioni giovani delle radici, penetrando fin presso i fasci fibro-vascolari e comportandosi quali veri parassiti ». Ma in tutti i casi di *mal del piede* del grano mai è stata constatata la presenza prevalente di *Pythium*. Nel caso da me osservato del resto era da escludersi qualsiasi infezione delle radici, mentre, data l'elevata umidità, sarebbe stato naturale trovare i comuni agenti del marciume radicale insieme a forme semisaprofitiche di *Pythium*.

Il fatto di aver trovato invece un attacco del culmo da parte di questo genere di funghi a una certa altezza sul terreno, può indurre ad ammettere che il parassita in questione non faccia parte della abituale micoflora delle radici del grano e che rappresenti una nuova forma parassita. In attesa che apposite ricerche, ora istituite, possano risolvere una simile questione, riferisco qui brevemente sopra i caratteri morfologici del *Pythium* suddetto che, non essendo ancora interamente noti, non permettono di determinarne la posizione sistematica fra le specie conosciute.

Il micelio in coltura costituisce uno strato cotonoso superficiale di ife aeree, bianche, ramificate regolarmente, mostranti spesso la falsa dicotomia e un leggero ingrossamento nel punto della ramificazione. Il contenuto delle ife è costituito in gran parte da sostanze di riserva grasse distribuite in gocce molto rifrangenti rotonde o più o meno allungate. Il diametro delle ife aeree, come di quelle immerse nel substrato nutritivo, è di 2 — 5,5 μ . Gli oogoni sono numerosissimi, apicali o intercalari. Essi misurano, alla maturità, un diametro di 21 — 26 μ ; sono fecondati da un solo anteridio, costituito da un ramo della stessa ifa che ha dato origine all'oogonio, eccezionalmente ho osservato due anteridi per ciascun oogonio. La porzione terminale dell'anteridio è separata da quella basale da un setto. Le oospore hanno parete

(1) PEYRONEL B., *Prime ricerche sulle micorize endotrofiche e sulla micoflora radicolare normale delle Fanerogame*. « Rivista di Biol. » VI, 1924, fasc. 1°, p. 40.

liscia e riempiono completamente l'oogonio e misurano da 16 a 24 μ . Non ho osservato sino ad ora la loro germinazione. Numerosi corpi irregolarmente rigonfiati, e che sono da considerarsi come organi di riserva (*pre-sporangi* di Carpenter), si formano spesso intercalaramente sul micelio. Gli sporangi, sferoidali, sono terminali o intercalari. Non ho ancora potuto determinare il loro comportarsi al momento della differenziazione e liberazione delle zoospore.

Per la sottigliezza delle ife e per alcuni caratteri presentati dagli organi della riproduzione sessuale, il *Pythium* isolato dal grano potrebbe esser riferito al *Pythium gracile* Schenk, un parassita delle alghe, ma trovato da Butler⁽¹⁾ anche sul *Zingiber officinale* e sul *Ricinus*. Questa forma, che è stata trovata poi da Subramaniam⁽²⁾ parassita anche sulla *Carica papaya*, *Nicotiana tabacum*, *Capsicum annum*, *Solanum tuberosum*, è stata ritenuta da questo autore diversa dal *Pythium gracile* Schenk non essendo stata osservata sopra alghe, e quindi è stata descritta come *Pythium Butleri* Subram. Per quanto, come giustamente ha fatto rilevare Riehm⁽³⁾, non possa ritenersi un argomento sufficiente per la creazione di questa nuova specie la mancata constatazione del suo parassitismo sopra alghe, tuttavia è ammissibile che il *Pythium*, descritto da Butler come *P. gracile* e parassita del *Zingiber officinale* e del *Ricinus*, sia sistematicamente diverso dalla forma trovata sull'alghe. Il *P. Butleri* successivamente è stato identificato da Carpenter⁽⁴⁾ con un *Pythium* parassita della canna da zucchero, provvisto di oogoni fecondati da 1 a 5 anteridi e con ife grosse sino a 8 μ ⁽⁵⁾. Ora è certo che la specie da me isolata dal grano non è riferibile a quest'ultima specie e quindi al *P. Butleri*, nè ad altre affini, come il *P. splendens* Braun o al *P. De Baryanum* tipico.

(1) BUTLER E. J., *An account of the genus Pythium and some Chytridiaceae*. «Mem. of the Dept. of Agric. in India», 1907, Bot. Ser., I, n. 5, p. 67.

(2) SUBRAMANIAM L. S., *A Pythium disease of ginger, tobacco and papaya*. «Mem. of the Dept. of Agr. in India», X, 1919, n. 4, p. 181.

(3) RIEHM E., in «*Sorauer Handbuch der Pflanzenkrankheiten*» II, 5° Ed., 1928.

(4) CARPENTER C. W., *Morphological studies of the Pythium-like fungi associated with root rot in Hawaii*. «Bull. of the Exp. Stat. Hawaiian Sugar Planters Assc.» III, 1921, Bot. Ser., part I.

(5) Secondo le osservazioni di DRECHSLER («*Phytopathology*», 1928), il riferimento di questa specie al *P. aphanidermatum* (Edson) Fitz fatto da Carpenter non è esatto.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Le discendenze normali dei gruppi cremoniani geometrici.* Nota II di D. MONTESANO, presentata⁽¹⁾ dal Socio R. MARCOLONGO.

In questa Nota si prosegue lo studio delle proprietà delle discendenze normali dei gruppi cremoniani geometrici.

5. La prima quistione che occorre risolvere, è quella di determinare tutti i gruppi discendenti in derivazione normale da un dato gruppo cremoniano geometrico Γ di ordine v .

Se $v = 1$, i gruppi discendenti sono tutti e soli i gruppi isologici di ordine arbitrario dovuti al modulo $\rho = 0$ e ad un nucleo N formato da termini tutti nulli.

Se invece è $v > 1$, si ricorderà innanzi tutto che per ottenere un gruppo G discendente da Γ , occorre fissare nel gruppo ordinato Γ il *modulo di derivazione* $\rho \leq v - x_1 - x_2$ e poi considerare l'insieme ordinato I dei termini x_u, x_{u+1}, \dots del gruppo, escluso il termine ρ , dei quali due qualunque diano somma minore del numero $i = v - \rho$.

Assunto in tale insieme un termine arbitrario ρ_2 , esisterà nel gruppo dato un nucleo di derivazione N_{2h} corrispondente al modulo ρ , formato da $2h$ termini di cui il secondo sia il termine fissato ρ_2 , se per $h = 1$ è $\rho_2 \leq \rho$, o se per $h > 1$, i restanti termini $\rho_3, \rho_4, \dots, \rho_{2h-1}, \rho_{2h}$ del nucleo, per $\rho_2 \leq \rho_3 \leq \dots \leq \rho_{2h-1} \leq \rho_{2h}$, verifichino la relazione

$$(1) \quad \rho_2 \leq \rho + (i - \rho_3 - \rho_4) + \dots + (i - \rho_{2h-1} - \rho_{2h})$$

equivalente all'altra che

$$\rho_2 + \rho_3 + \rho_4 + \dots + \rho_{2h-1} + \rho_{2h} \leq \rho + (h - 1)i,$$

o che

$$(2) \quad \rho_2 + \rho_3 + \dots + \rho_{2h-1} + \rho_{2h} \leq v + (h - 2)i.$$

In tale modo i vari nuclei di derivazione corrispondenti al modulo ρ che hanno per secondo termine il numero ρ_2 , vengono determinati; e variando il numero ρ_2 nell'insieme $I \equiv x_u, x_{u+1}, \dots$ o si hanno tutti i nuclei di derivazione dovuti al modulo ρ . Infine facendo variare nel gruppo Γ il modulo ρ si hanno tutte le possibili discendenze del gruppo.

(1) Nella seduta del 30 maggio 1930.

La condizione che $\rho_2 \leq \rho$ o che ρ_2 verifichi la (1) è senz'altro soddisfatta se $\rho_2 = 0$ nel qual caso è anche $\rho_1 = 0$; perciò se si stabilisce che in ogni nucleo di derivazione N vi sia al più il solo primo termine ρ_1 nullo, si potrà supporre che assieme con N vi siano nel gruppo gl' infiniti nuclei di derivazione

$$N_1 = 0 \circ N \quad , \quad N_2 \equiv 0 \circ N_1 \quad , \quad N_3 \equiv 0 \circ N_2 \quad , \dots$$

tutti dovuti al modulo ρ .

Corrispondentemente se fra i gruppi discendenti dal gruppo Γ vi è il gruppo G di ordine n che ha il termine principale r ed al più un solo termine r_1 eguale ad $i = n - r$, vi saranno anche i gruppi discendenti G_1, G_2, G_3, \dots nei quali l'ordine sarà rispettivamente $n + i$, $n + 2i$, $n + 3i, \dots$; il termine principale sarà $r + i$, $r + 2i$, $r + 3i, \dots$ ed il numero dei termini eguali ad i sarà $3, 5, 7, \dots$ o $2, 4, 6, \dots$ secondochè nel gruppo G vi è o no un termine i ; mentre i gruppi non differiranno fra loro nei restanti termini.

La serie dei gruppi G, G_1, G_2, \dots si dirà *uniforme di indice i* .

Qualunque sia il modulo ρ nel gruppo Γ , si avrà il nucleo di derivazione $|0 \circ|$, e sarà questo il solo nucleo di derivazione che sarà considerato, nel quale il termine ρ_2 non è positivo.

Inoltre qualunque sia il gruppo Γ , si avrà in esso il modulo di derivazione $\rho = 0$ e il corrispondente insieme I sarà costituito da tutti i termini del gruppo ordinato $\Gamma \equiv x_1, x_2, x_3, \dots, x_p$ o essendo $i = v - \rho = v$, o da tutti i termini del gruppo Γ escluso soltanto il primo se è $v = x_1 + x_2$ e $x_2 > x_3$, o da tutti i termini del gruppo esclusi soltanto i primi due se è $\frac{v}{2} = x_1 = x_2 = x_3$.

Viceversa in ogni gruppo Γ nel quale sia $v = x_1 + x_2$, l'unico valore del modulo di derivazione è $\rho = 0$ e il corrispondente valore di i è v . Ora in un qualsiasi gruppo G_h di una serie uniforme di indice i_0 , il termine principale ed il termine i_0 che sussegue, danno somma eguale all'ordine; sicchè il gruppo ha il solo modulo di derivazione 0 .

Ne segue che in due gruppi G_h, G'_h di una medesima serie uniforme di indice i_0 ogni nucleo di derivazione dell'un gruppo che non comprenda più di $2h$ termini i_0 , per $h < h'$, è anche un nucleo di derivazione dell'altro.

6. A chiarire le proprietà generali indicate sarà opportuno dare qualche esempio numerico.

1° Disponendo i gruppi cremoniani geometrici in modo che di due gruppi ordinati $G_n \equiv r_1, \dots, r_p, G_{n'} \equiv r'_1, \dots, r'_{p'}$, preceda il primo se $n < n'$ o se per $n = n'$ è $r_1 > r'_1$ ovvero è $r_1 = r'_1, \dots, r_i = r'_i, r_{i+1} > r'_{i+1}$, il primo gruppo $G_n \equiv r_1, r_2, \dots, r_i, \dots, r_p$ che si presenta, nel quale

esista un termine $r_i > 0$, per cui si abbia $n - r_1 - r_2 \geq r_i$, è il gruppo di ordine $v = 8$

$$\Gamma \equiv 1/4 \ 5/3 \ 2/1,$$

nel quale la differenza $v - x_1 - x_2$ è eguale al penultimo o all'ultimo termine 1.

Questo gruppo perciò ammette i due moduli di derivazione 1, 0.

Sia proposto di determinare i nuclei di derivazione N_{2h} dovuti al modulo 1.

La differenza $i = v - \rho$ è 7, sicchè l'insieme I formato dai termini del gruppo, distinti dal termine $\rho = 1$, dei quali i due maggiori diano somma inferiore a $i = 7$, è

$$I \equiv 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 1 \ 0.$$

In un nucleo di derivazione $N_2 \equiv |\rho_1 \rho_2|$ del gruppo deve essere $\rho_2 \leq \rho$, cioè ρ_2 può essere 1 o 0; corrispondentemente ρ_1 è 0 o 0, sicchè i nuclei richiesti sono $|0 \ 1|$, $|0 \ 0|$.

In un nucleo di derivazione $N_4 \equiv |\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4|$ del gruppo dovrà aversi per la (2) (§ precedente)

$$(3) \quad \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 \leq v;$$

cioè la somma dei tre numeri ρ_2, ρ_3, ρ_4 non deve superare 8, sicchè ρ_2 ha soltanto il valore 1 e l'unico nucleo N_4 è il nucleo $|0 \ 1 \ 3 \ 3|$.

In un nucleo di derivazione $N_6 \equiv |\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6|$ è

$$\rho_2 + \rho_3 + \rho_4 + \rho_5 + \rho_6 \leq v + i;$$

cioè la somma dei termini ρ_2, \dots, ρ_6 non deve superare 15. Ne segue che i nuclei del tipo richiesto sono $|0 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3|$, $|0 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3|$.

Il numero dei termini dell'insieme I è 7: perciò non è possibile formare altri nuclei di derivazione.

E qui è il caso di notare che: *Assunti ad arbitrio nell'insieme I_{2h} termini ρ_1, \dots, ρ_{2h} , per $h > 2$, per quali si abbia $\rho_1 \leq \rho_2 \leq \dots \leq \rho_{2h}$, se i primi quattro costituiscono una quaterna di derivazione N_4 , tutti i termini considerati formeranno un nucleo di derivazione N_{2h} .*

Infatti essendo N_4 una quaterna di derivazione sarà

$$\rho_2 \leq \rho + i - \rho_3 - \rho_4.$$

D'altra parte le differenze $i - \rho_5 - \rho_6, \dots, i - \rho_{2h-1} - \rho_{2h}$ sono tutte positive; perciò sarà

$$\rho_2 < \rho + i - \rho_3 - \rho_4 + i - \rho_5 - \rho_6 + \dots + i - \rho_{2h-1} - \rho_{2h};$$

cioè il nucleo $N_{24} \equiv |p_1, \dots, p_{24}|$ sarà di derivazione. La proposizione inversa non regge.

Il teorema dimostrato vale per qualsiasi gruppo cremoniano geometrico Γ_v .

2° Infine siano richiesti i nuclei di derivazione N'_{2b} del gruppo dato Γ_8 corrispondenti al modulo $\rho' = 0$.

Per tale modulo è $i' = v = 8$ e l'insieme I' è

$$I' \equiv 4 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 1 \ 1 \ 0.$$

In un nucleo di derivazione $N'_2 \equiv |p'_1 p'_2|$ del gruppo deve essere $\rho'_2 \leq \rho'$, cioè dovrà essere $\rho'_2 = 0$ e quindi anche $\rho'_1 = 0$, sicchè il nucleo richiesto sarà $N' \equiv |0 \ 0|$.

In un nucleo di derivazione N'_4 la somma degli ultimi tre termini non deve superare $v' = 8$, sicchè i detti tre termini possono essere $1, 1, 3$, $0:1, 1, 4$, $0:1, 3, 3$, $0:1, 3, 4$; sicchè i nuclei di derivazione N'_4 sono

$$|0 \ 1 \ 1 \ 3|, |0 \ 1 \ 1 \ 4|, |0 \ 1 \ 3 \ 3|, |0 \ 1 \ 3 \ 4|, |1 \ 1 \ 3 \ 3|, |1 \ 1 \ 3 \ 4|.$$

In un nucleo di derivazione N'_6 la somma degli ultimi cinque termini non deve superare $v' + i' = 2v' = 16$, sicchè i nuclei di derivazione N'_6 sono

$$|0 \ 1 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3|, |0 \ 1 \ 1 \ 3 \ 3 \ 4|, |0 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3|, |0 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3 \ 4|.$$

Infine in un nucleo di derivazione N'_8 la somma degli ultimi sette termini non deve superare $v' + 2i' = 3v' = 24$, cioè i nuclei di derivazione N'_8 sono i quattro formati dai termini dell'insieme I , escluso successivamente un termine eguale a $4, 3, 1, 0$.

7. Si supponga di avere costruiti i vari gruppi cremoniani geometrici di ordine $1, 2, \dots, n$ e di avere determinati i discendenti di ciascuno di essi in derivazione normale.

Fra tali gruppi discendenti vi saranno tutti i gruppi cremoniani geometrici di ordine $n + 1$, ciascuno una sola volta, sicchè questi gruppi risulteranno noti.

Determinando i discendenti di ciascuno di essi, fra tutti i gruppi ottenuti vi saranno i gruppi di ordine $n + 2$ e così di seguito.

Si ha con ciò un modo di determinare i successivi gruppi cremoniani geometrici sino ad un qualsiasi ordine assegnato.

Con costruzioni analoghe si determinano le *matrici caratteristiche* corrispondenti ai singoli gruppi cremoniani costruiti.

È noto che data in un piano una rete omaloidica P di curve di ordine n che abbia per base i punti O_1, \dots, O_p e fissati nel piano altri x punti in posizione generica O_{p+1}, \dots, O_{p+x} , la matrice

$$\begin{array}{ccccccc}
 n & r_1 & \dots & r_p & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \omega_1 & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1p} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 Q \equiv \omega_p & \alpha_{p1} & \dots & \alpha_{pp} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\
 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1,
 \end{array}$$

costituita dai gruppi caratteristici rispetto al gruppo di punti

$$R \equiv O_1, \dots, O_p, O_{p+1}, \dots, O_{p+x}$$

della curva generica della rete data, delle linee fondamentali o_1, \dots, o_p di tale rete e degli intorno dei punti O_{p+1}, \dots, O_{p+x} nel piano π è la *matrice* o *quadro caratteristico* della rete data P rispetto al gruppo di punti $R \equiv O_1 \dots O_p O_{p+1} \dots O_{p+x}$ gruppo che comprende il gruppo dei punti base effettivi O_1, \dots, O_p della rete.

Per $x = 0$ (il che non si esclude) i due gruppi di punti coincidono ⁽¹⁾.

È opportuno anche notare che l'intorno del punto O_{p+i} nel piano π , per $i = 1, 2, \dots, x$, può riguardarsi come una linea di ordine zero che ha in tutti i punti del gruppo $R \equiv O_1 \dots O_p O_{p+1} \dots O_{p+x}$ punti multipli di ordine zero tranne che nel punto O_{p+i} nel quale presenta un punto multiplo di ordine -1 in modo che una retta generica del fascio $(O_{p+i} - \pi)$ ha in comune un punto con la linea.

Inoltre l'intorno del punto O_{p+i} nel piano π può riguardarsi come una linea fondamentale di ordine zero della rete data pel fatto che una curva generica della rete non ha in comune alcun punto con tale intorno.

Perciò le varie orizzontali del quadro Q, esclusa la linea marginale $n \ r_1, \dots, r_p \ 0 \ 0 \ \dots \ 0$, sono i gruppi caratteristici rispetto al gruppo di punti $R \equiv O_1 \dots O_p O_{p+1} \dots O_{p+x}$ delle linee fondamentali di ordine maggiore o eguale a zero della rete.

E fra queste orizzontali intercedono le stesse relazioni che esistono fra le orizzontali del quadro caratteristico della rete P limitato al gruppo dei punti base effettivi $O_1 \dots O_p$.

Inoltre le orizzontali e le verticali del quadro Q, escluse la orizzontale e la verticale marginali, possono permutarsi in qualsiasi modo spostando opportunamente i termini eguali a -1 .

(1) L'importanza della tavola che ne risulta, non sfuggì a Cayley, il quale per altro dichiarò che non sapeva come si potesse costruirla nel caso più generale: *I do not know how a general solution is to be obtained, but most of the foregoing table have been investigated by Cremona-Cayley* On the Rational Transformation between two Spaces. « *Proced. London Math. Soc.* », vol. 3°, 1869-1871, p. 147.

Ciò posto, si stabilisca una corrispondenza isologica K di ordine $h + 1$ fra il piano π della rete P ed un altro piano π' ponendo i punti fondamentali della K in punti qualsiasi $O_a, O_r, O_s, \dots, O_\chi$ del gruppo $R \equiv O_x \dots O_p O_{p+1}, \dots, O_{p+x}$.

Se i punti fondamentali della corrispondenza K nel piano π' sono i punti $O'_a, O'_r, O'_s, \dots, O'_\chi$ in modo che ai punti O_r, \dots, O_χ corrispondano nella K le rette $O'_a O'_r, \dots, O'_a O'_\chi$ e se ai restanti punti O_i del gruppo R' corrispondono nella K i punti O'_i del piano π' , si può dire che con la K si sostituisce al gruppo di punti $R \equiv O_x \dots O_{p+x}$ il gruppo di punti $R' \equiv O'_1 \dots O'_{p+x}$ ora detto.

Nella K alla rete P corrisponderà una rete omaloidica P' del piano π' , nella quale la curva generica c' sarà di ordine

$$n' = (h + 1)n - hr_a - r_s - r_t - \dots - r_v - r_\chi,$$

essendo $r_a, r_s, r_t, \dots, r_v, r_\chi$ gli ordini di molteplicità dei punti $O_a, O_s, O_t, \dots, O_v, O_\chi$ per la curva generica della rete P .

Inoltre la curva c' avrà nel punto O'_a un punto multiplo di ordine

$$r'_a = hn - (h - 1)r_a - r_s - r_t - \dots - r_v - r_\chi \geq 0$$

e nei punti $O'_s, O'_t, \dots, O'_v, O'_\chi$ punti multipli degli ordini

$$r'_s = n - r_a - r_s \geq 0, \quad r'_t = n - r_a - r_t \geq 0, \dots, r'_\chi = n - r_a - r_\chi \geq 0,$$

mentre in ogni altro punto O'_i del gruppo R' avrà un punto multiplo di ordine $r'_i = r_i$, essendo r_i l'ordine di molteplicità del punto O_i per la curva generica c della rete P .

La rete P non presenta alcun punto base fuori del gruppo R ; così la rete P' non presenta alcun punto base fuori del gruppo R' .

Perciò il gruppo R' comprende il gruppo dei punti base effettivi della rete P' , come contiene i punti fondamentali $O'_a, O'_s, O'_t, \dots, O'_v, O'_\chi$ della corrispondenza K^{-1} nel piano π' .

Ulteriormente si noti che ogni linea fondamentale di ordine maggiore o eguale a zero della rete P si muta nella K in una linea fondamentale di ordine maggiore o eguale a zero della rete P' e viceversa.

Infatti la linea indicata nel piano π non ha alcun punto variabile in comune con una curva generica della rete P e però corrispondentemente la seconda linea nel piano π' non ha alcun punto variabile in comune con una curva generica della rete P' e viceversa.

Se la prima linea è di ordine $\omega_i \geq 0$ e nei punti $O_a, O_s, O_t, \dots, O_v, O_\chi$ ha punti multipli di ordine $\alpha_{ia}, \alpha_{is}, \alpha_{it}, \dots, \alpha_{iv}, \alpha_{i\chi}$, la seconda linea sarà di ordine

$$\omega'_i = (h + 1)\omega_i - h\alpha_{ia} - \alpha_{is} - \alpha_{it} - \dots - \alpha_{iv} - \alpha_{i\chi} \geq 0$$

e nei punti $O'_a, O'_s, O'_t, \dots, O'_v, O'_\chi$ avrà punti multipli rispettivamente degli ordini

$$\begin{aligned}\alpha'_{ia} &= h\omega_i - (h-1)\alpha_{ia} - \alpha_{is} - \alpha_{it} - \dots - \alpha_{iv} - \alpha_{i\chi} \geq 0, \\ \alpha'_{is} &= \omega_i - \alpha_{ia} - \alpha_{is} \geq 0, \quad \alpha'_{it} = \omega_i - \alpha_{ia} - \alpha_{it} \geq 0 \dots \\ \alpha'_{iv} &= \omega_i - \alpha_{ia} - \alpha_{iv} \geq 0, \quad \alpha'_{i\chi} = \omega_i - \alpha_{ia} - \alpha_{i\chi} \geq 0.\end{aligned}$$

Sostituendo ai numeri n, ω_i che compaiono nella verticale marginale i numeri n', ω' ora indicati e così nelle verticali di posto a, s, t, \dots, v, χ sostituendo ai numeri $r_a, \alpha_{ia}; r_s, \alpha_{is}; r_t, \alpha_{it}, \dots, r_v, \alpha_{iv}; r_\chi, \alpha_{i\chi}$ rispettivamente i numeri $r'_a, \alpha'_{ia}; r'_s, \alpha'_{is}; r'_t, \alpha'_{it}, \dots, r'_v, \alpha'_{iv}; r'_\chi, \alpha'_{i\chi}$ e lasciando immutati i restanti numeri del quadro Q, questo si trasforma nel quadro caratteristico della rete omaloidica P' rispetto al gruppo di punti R'.

In sostanza se si indicano con $|n|, |r_a|, |r_s|, |r_t|, \dots, |r_v|, |r_\chi|$ le verticali del quadro Q che contengono i termini $n, r_a, r_s, r_t, \dots, r_v, r_\chi$ ed analogamente con $|n'|, |r'_a|, |r'_s|, |r'_t|, \dots, |r'_v|, |r'_\chi|$ le verticali del quadro Q' che contengono rispettivamente i termini $n', r'_a, r'_s, r'_t, \dots, r'_v, r'_\chi$, si può dire che il quadro Q' si ottiene dal quadro Q sostituendo alla verticale marginale $|n|$ ed alle verticali $|r_a|, |r_s|, |r_t|, \dots, |r_v|, |r_\chi|$ la verticale marginale $|n'|$ e le verticali $|r'_a|, |r'_s|, |r'_t|, \dots, |r'_v|, |r'_\chi|$ date dalle eguaglianze simboliche

$$\begin{aligned}|n'| &= (h+1)|n| - h|r_a| - |r_s| - |r_t| - \dots - |r_v| - |r_\chi| \\ |r'_a| &= h|n| - (h-1)|r_a| - |r_s| - |r_t| - \dots - |r_v| - |r_\chi| \\ |r'_s| &= |n| - |r_a| - |r_s| \\ |r'_t| &= |n| - |r_a| - |r_t| \\ &\dots\dots\dots \\ |r'_v| &= |n| - |r_a| - |r_v| \\ |r'_\chi| &= |n| - |r_a| - |r_\chi|.\end{aligned}$$

E brevemente si può dire che il quadro Q' si ottiene dal quadro Q con le stesse operazioni eseguite sulle corrispondenti verticali, con le quali dai termini $n, r_a, r_s, r_t, \dots, r_v, r_\chi$ del gruppo $G_n \equiv r_x \dots r_{p+x}$ si ottengono i termini $n', r'_a, r'_s, r'_t, \dots, r'_v, r'_\chi$ del gruppo $G_n \equiv r'_x \dots r'_{p'+x}$. Le anzidette operazioni possono ridursi ad addizioni e sottrazioni di verticali.

Infatti se si pone

$$i = n - r_a = n' - r'_a, \quad \delta_i = i - r_s - r_t, \dots, \delta_h = i - r_v - r_\chi,$$

sarà

$$\begin{aligned}r'_a &= r_a + \delta_i + \dots + \delta_h \\ n' &= r'_a + i = r_a + \delta_i + \dots + \delta_h + i = n + \delta_i + \dots + \delta_h;\end{aligned}$$

sicchè per ottenere dal quadro Q il quadro Q' si sostituirà da prima alla verticale $|n|$ la verticale data dalla eguaglianza simbolica

$$|i| = |n| - |r_a|,$$

quindi alle verticali $|r_s|, |r_t|, \dots, |r_v|, |r_\chi|$ si sostituiranno le verticali $|r'_s|, |r'_t|, \dots, |r'_v|, |r'_\chi|$ date dalle eguaglianze simboliche

$$|r'_s| = |i| - |r_s|, |r'_t| = |i| - |r_t|, \dots, |r'_v| = |i| - |r_v|, |r'_\chi| = |i| - |r_\chi|;$$

poi alla verticale $|r_a|$ si sostituirà la verticale data dall'eguaglianza simbolica

$$|r'_a| = |r_a| + |\delta_s| + \dots + |\delta_b|$$

e alla verticale $|i|$ si sostituirà la verticale data dall'eguaglianza simbolica

$$|n'| = |i| + |r'_a|.$$

Ciò prova che i valori assoluti dei due determinanti Q, Q' sono eguali.

Se i numeri $r_a; r_s, r_t, \dots, r_v, r_\chi$ sono il modulo ed il corrispondente nucleo di derivazione del gruppo $G_n \equiv r_1 r_2 \dots r_{p+x}$, il gruppo $G_{n'} \equiv r'_1 r'_2 \dots r'_{p'+x}$ che si presenta nel quadro Q' , sarà il gruppo di origine del gruppo G_n .

Perciò il quadro Q' dicesi *quadro di origine* del quadro Q .

Ora se dal quadro Q' si risale al quadro di origine Q'' , se da questo si risale al quadro di origine e così di seguito si arriva al quadro caratteristico della rete di rette

$$Q_1 \equiv \begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{array}$$

Viceversa dal quadro Q_1 ora scritto si ottiene il quadro caratteristico Q della rete data eseguendo sulle verticali del quadro Q_1 quelle stesse operazioni con le quali dal gruppo di ordine 1 formato dai numeri $0 \ 0 \ \dots \ 0$ ottienesi il gruppo caratteristico di ordine n formato dai numeri $r_1 \ \dots \ r_p$ della rete omaloidica data.

Con ciò si ha il modo di costruire il quadro caratteristico di una qualsiasi rete omaloidica.

Il valore assoluto del determinante Q_1 è 1. Questo valore non cambia nei successivi quadri: perciò il determinante dato dal quadro caratteristico di una qualsiasi rete omaloidica è in valore assoluto eguale ad 1⁽¹⁾.

(1) Vegg. D. MONTESANO, *Su i quadri caratteristici delle corrispondenze birazionali piane*, « Rend. Acc. Scienze Napoli », serie 3^a, vol. XXI.

Infine si ha il teorema che: *In un gruppo cremoniano geometrico ordinato* $G_n \equiv r_1 r_2 r_3 r_4 \dots$ *di ordine* $n > 2$, *il terzo termine* r_2 *è maggiore della metà dell'indice principale* $i = n - r$.

Ed invero se fosse $r_2 \leq \frac{i}{2}$, sarebbe anche $r_4 \leq \frac{i}{2}$, sicchè si avrebbe $i - r_2 - r_4 \geq 0$, mentre è $i - r_2 - r_4 = n - r - r_2 - r_4 < 0$.

Perciò nel gruppo ordinato $G_n \equiv r_1 r_2 r_3 r_4 \dots$ di ordine $n > 2$ vi sono almeno due dei termini $r_1, r_2, r_3, r_4 \dots$ che risultano maggiori di $\frac{i}{2}$, essendo $i = n - r$ ⁽¹⁾.

Ne segue che: *In un gruppo cremoniano geometrico* Γ *di ordine* v *ogni nucleo di derivazione* N_{2h} *corrispondente ad un termine* ρ , *ha almeno* i *primi due termini* ρ_1, ρ_2 *minori di* $\frac{i}{2}$, *essendo* $i = v - \rho$.

Matematica. — *Calcolo di* π *colla serie di Leibniz.* Nota di FAUSTA AUDISIO, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. PEANO.

La serie:

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots$$

fu pubblicata da Leibniz, in « Acta Eruditorum », pp. 41-46, l'anno 1682: *De vera proportionem circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus* (Opera, III, p. 140).

Essa, circa dieci anni prima, si trovava nelle corrispondenze fra Leibniz, Huygens, Oldenburg, Gregory ecc.

Si sa che il resto di questa serie, dopo un termine qualunque, ha il segno ed è minore del primo termine trascurato. Quindi con questo criterio la serie è poco convergente e non atta al calcolo numerico.

Così disse Newton in una lettera ad H. Oldenburg del 24 ottobre 1676: « ... Nam si quis vellet per simplex computum hujus seriei $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9$ etc., colligere longitudinem quadrantis ad viginti figurarum loca decimalia, opus esset 5.000.000.000 terminis seriei circiter: ad quorum calculum milleni anni requiruntur ».

E De Lagny (« Hist. Mém. math. phys. Ac. sc. Paris », 1719, edizione 1721, p. 144): « Il faut plus de trois cens opérations et presque un Livre entier, pour trouver seulement le rapport de 100 à 314 ».

(1) Cfr. ALEXANDER. On the factorization of Cremona plane transformations. « Amer. Math. Society Transactions », vol. 17, 1915, p. 295-300.

(2) Nella seduta del 30 maggio 1930.

E così numerosi altri autori. Vedasi: Cassina, *Calcolo numerico*, 1928.

Ma la regola precedente dà solo un limite superiore del resto.

Il prof. Peano, in una sua lezione, indicò come si possa stimare il resto con maggiore approssimazione. Io espongo questo metodo, e sviluppo il calcolo di $\pi/4$ con 5 decimali, servendomi di 14 termini della serie.

La serie supposta convergente:

$$R = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots$$

si può mettere sotto la forma:

$$R = \frac{1}{2} u_0 + \frac{1}{2} (u_0 - u_1) - \frac{1}{2} (u_1 - u_2) + \frac{1}{2} (u_2 - u_3) - \dots$$

Pongo $\Delta u_n = u_n - u_{n+1}$.

(Nella teoria delle differenze il Δ ha il segno cambiato).

Si ha

$$R = \frac{1}{2} u_0 + \frac{1}{2} (\Delta u_0 - \Delta u_1 + \Delta u_2 - \dots).$$

Applico alla serie entro parentesi la stessa trasformazione; ho:

$$R = \frac{1}{2} u_0 + \frac{1}{4} \Delta u_0 + \frac{1}{4} (\Delta^2 u_0 - \Delta^2 u_1 + \Delta^2 u_2 - \dots).$$

Ripeto la stessa operazione:

$$R = \frac{1}{2} u_0 + \frac{1}{4} \Delta u_0 + \frac{1}{8} \Delta^2 u_0 + \frac{1}{8} (\Delta^3 u_0 - \Delta^3 u_1 + \Delta^3 u_2 - \dots).$$

E ripetendo k volte l'operazione:

$$R = \frac{1}{2} u_0 + \frac{1}{4} \Delta u_0 + \frac{1}{8} \Delta^2 u_0 + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} \Delta^k u_0 + \\ + \frac{1}{2^{k+1}} (\Delta^{k+1} u_0 - \Delta^{k+1} u_1 + \Delta^{k+1} u_2 - \dots).$$

Se tutte le Δ sono positive, il resto dopo $k+1$ termini è minore dell'ultimo termine scritto.

Calcolo i primi 8 termini della serie per $\pi/4$, e poi calcolo il resto col metodo precedente.

Prendo dalle comuni tavole per gli ingegneri, i valori dei reciproci dei numeri interi e calcolo le differenze.

Posto:

$$S = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots - 1/15,$$

si ha:

$$\begin{aligned}
 1 - 1/3 &= 0,666\ 666\ 66 = 2/3 \\
 1/5 - 1/7 &= 0,057\ 142\ 85 = 2/35 \\
 1/9 - 1/11 &= 0,020\ 202\ 02 = 2/99 \\
 1/13 - 1/15 &= 0,010\ 256\ 41 = 2/195 \\
 \hline
 S &= 0,754\ 267\ 94
 \end{aligned}$$

Nelle tavole leggo:

	Δ	Δ^2
$1/17 = 0,058\ 823\ 52$	$0,006\ 191\ 95 = 2/323$	$0,001\ 179\ 42$
$1/19 = 0,052\ 631\ 57$	$0,005\ 012\ 53 = 2/399$	$0,000\ 871\ 75$
$1/21 = 0,047\ 619\ 04$	$0,004\ 140\ 78 = 2/483$	$0,000\ 662\ 52$
$1/23 = 0,043\ 478\ 26$	$0,003\ 478\ 26 = 2/575$	$0,000\ 515\ 29$
$1/25 = 0,04$	$0,002\ 962\ 97 = 2/405$	
$1/27 = 0,037\ 037\ 03$		

Δ^3	Δ^4	Δ^5
$0,000\ 307\ 67$	$0,000\ 098\ 44$	$0,000\ 036\ 44$
$0,000\ 209\ 23$	$0,000\ 062\ 00$	
$0,000\ 147\ 23$		

$1/2$ moltiplicato $1/17 = 0,029\ 411\ 76$

$$\Delta/4 = 0,001\ 547\ 98$$

$$\Delta^2/8 = 0,000\ 147\ 42$$

$$\Delta^3/16 = 0,000\ 019\ 22$$

$$\Delta^4/32 = 0,000\ 003\ 07$$

$$\Delta^5/64 = 0,000\ 000\ 56$$

$$\text{Resto} = 0,031\ 130\ 01$$

$$S = 0,754\ 267\ 94$$

$$\text{Quindi } \pi/4 > 0,785\ 397\ 95$$

Aggiungo ancor l'ultimo termine scritto, ed ho:

$$\pi/4 < 0,785\ 398\ 51.$$

Perciò ottengo 5 cifre, e la sesta è 7 od 8.

Si ha d'altronde:

$$\pi/4 = 0,785\ 398\ 16 \dots$$

Se si calcolano 50 termini della serie di Leibniz, si pone cioè:

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - \dots - 1/99 + R$$

ove:

$$R = 1/101 - 1/103 + 1/105 - \dots$$

e si calcolano 10 termini della trasformata di R, colla regola precedente, si ha:

$$R = \frac{1}{2} [1/101 + 1/(101.103) + 2/(101.103.105) + \\ + 2.3/(101.103.105.107) + \dots + 2.3 \dots 10/(101.103 \dots 121) + R'].$$

Calcolo l'ultimo termine qui scritto mediante i logaritmi.

Otengo che quest'ultimo termine vale 1,17 unità decimali di ordine 16, quindi ottengo, con 60 termini della serie di Leibniz, 15 cifre decimali di π .

Si può applicare la trasformazione indicata al primo termine della serie di Leibniz e si ha:

$$\pi/2 = 1 + 1/(1.3) + 1.2/(1.3.5) + 1.2.3/(1.3.5.7) + \dots$$

Ove ogni termine è minore della metà del precedente.

Ma il metodo più rapido per calcolare π colla serie data è di sommare alcuni termini, e poi stimare il resto colla formola scritta.

Matematica. — *Remarques sur les équations intégr-fonctionnelles.* Nota di C. POPOVICI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio V. VOLTERRA.

1. Considérons l'équation intégr-fonctionnelle

$$(1) \quad \int_{x_1(x)}^{x_2} k(x, s) f(s) ds = q(x)$$

où $f(x)$ est la fonction inconnue, k et q fonctions données et la limite inférieure $x_1(x)$ de l'intégrale est une transformation donnée de x , qui s'introduira avec ses itérés dans f (comme nous le verrons au § 3) et c'est pour cela que nous disons que l'équation (1) est *intégr-fonctionnelle*.

(1) Nella seduta del 30 maggio 1930.

Ce genre d'équations se rencontrent dans l'étude des équations aux dérivées partielles⁽¹⁾ et aussi, pour certains cas particuliers, dans la théorie des électrons⁽²⁾.

Il paraît, d'après les méthodes connues⁽³⁾, que cette équation n'admet qu'une solution unique⁽⁴⁾.

Le but de cette note est de montrer que cette solution n'est pas unique et ensuite expliquer d'où vient la contradiction.

2. Montrons d'abord comment est-ce qu'on peut trouver cette solution qu'on croit être unique. On a exposé plusieurs méthodes, nous choisirons celle de Lalesco⁽⁵⁾. Supposons que les itérés de la transformation $x_1(x)$ ont une limite constante⁽⁵⁾: $\lim x_n = c$. Alors faisons successivement dans (1) $x = x_1, x_2, \dots, x_n \dots$ où $x_n = x_1(x_{n-1})$ et en ajoutant toutes les intégrales ainsi obtenues, vu que $\lim x_n = c$, on trouve:

$$(1') \quad \int_c^x K(x, s) f(s) ds = Q(x)$$

où

$$K(x, s) = \sum_{i=0}^{\infty} k(x_i, s), \quad Q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} q(x_i).$$

Supposons, pour simplifier, le rapport de ces sommes convergent⁽⁶⁾.

Cette équation (1') n'est plus fonctionnelle, elle admettra donc une solution $f(s)$ déterminée d'après le méthode classique, donc l'intégrale $f(s)$ de l'équation intégral-fonctionnelle (1) serait elle-même unique.

3. Or ceci n'est pas exact. En effet, prenons le cas

$$(1'') \quad \int_{\lambda x}^x f(s) ds = q(x) \quad \lambda < 1.$$

(1) Voir GOURSAT, « Annales de Toulouse », 1904.

(2) Voir HERTZ, *die Bewegung eines Electrons, etc.* « Math. Annales », t. LXV et aussi.

(3) *Leçons sur les équations intégrales de Vito Volterra*, publiées par Tomassetti et Zarlatti, pp. 98-101.

(4) Voir 4 et aussi: LALESCO, *Sur une équation du type Volterra*. « C.-Rendu », 1^{er} semestre 1911 et PICONE, *Sulle equazioni e le derivate parziali del 2^o ordine, ecc.* « Rendiconti Circolo mat. di Palermo », 2^o sem. 1910 et aussi TH. JONESCO, « Bulletin de la Société Mathématique de France », 1927.

(5) C'est le seul cas envisagé par les auteurs cités, mais il faut remarquer que x_n peut avoir comme limite une fonction périodique par rapport à la transformation $x_1(x)$ et, plus généralement, x_n pourrait avoir plusieurs limites $P_1(x), \dots, P_k(x)$ périodiques par rapport à la transformation $x_k(x)$ où x_k est l'itéré d'ordre k de x_1 , voir C. POPOVICI, « Bulletin des Sciences math. », juillet et août 1929 et « Rendiconti Acc. Lincei », vol. XI, serie 6^a, fasc. 1.

(6) Même s'il ne l'était pas, on peut trouver des solutions pour (1) cela résulte du § 3:

On voit par dérivation que $f(x)$ doit satisfaire à la fonctionnelle

$$(2) \quad f(x) - \lambda f(\lambda x) = q'(x) \quad \lambda < 1$$

et cette fonctionnelle, nous l'avons montré ⁽¹⁾ admet une infinité de solutions que l'on obtient en ajoutant à une solution particulière

$$(3) \quad f = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n q'(\lambda^n x)$$

une solution de l'équation homogène

$$(4) \quad \lambda f_0(\lambda x) - f_0(x) = 0$$

mais il y a une infinité de solutions de cette équation p. ex.:

$$(5) \quad f_0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda^n u(\lambda^n x)$$

qui dépendent d'une fonction arbitraire u .

On peut, plus généralement, prendre

$$(5') \quad f_0 = \frac{d}{dx} P(\lambda x)$$

P fonction arbitraire symétrique des itérés $\lambda^{-n}x, \dots, x, \lambda x, \dots, \lambda^n x$; $n = \infty$.

Nous avons montré ⁽¹⁾ que l'on peut choisir cette fonction arbitraire, u où P , d'une infinité de manières pour avoir une infinité de solutions (5) convergentes et que, même dans le cas lorsque la solution particulière (3) est divergente, on peut compenser cette divergence en y ajoutant une solution de (4) qu'on peut choisir convenablement en profitant de la fonction arbitraire u où P .

On a donc, dans tous les cas une infinité de solutions, dont l'ensemble a la puissance de l'ensemble des fonctions, parceque on dispose d'une fonction arbitraire u (ou P).

Même dans les cas lorsque $q(0) = C \neq 0$, on n'a qu'à ajouter à f l'expression $\frac{C}{xL\lambda}$ (L logarithme népérien). En somme la solution générale de f est donnée pour (1'') par la fonction primitive

$$(6) \quad F = \int_0^x f(s) ds = \sum_{n=0}^{+\infty} (q(\lambda^n x) - q(0)) + \frac{q(0)}{L\lambda} Lx + P(\lambda x)$$

(1) Voir, pour des cas plus généraux, (6) et aussi, C. POPOVICI, *Nouvelles solutions de l'équations de Volterra*. « Circolo matem. di Palermo », 1915.

P fonction arbitraire symétrique des itérés $\lambda^{-n}x, \dots, x, \lambda x, \dots, \lambda^n x$, $n = \infty$.

4. D'autre part, en remplaçant dans (1'') x successivement par $\lambda x, \dots, \lambda^n x$ et ajoutant, d'après la méthode Lalesco, on obtient

$$(7) \quad \int_0^x f(s) ds = \sum_{n=0}^{+\infty} q(\lambda^n x).$$

Il n'y aurait donc, par contre, qu'une solution *unique*

$$(8) \quad f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n q'(\lambda^n x) \quad , \quad q'(x) = \frac{dq(x)}{dx},$$

$f(0)$ constante arbitraire.

Pire encore, il n'existerait aucune solution si $q(0) = C \neq 0$ et nous avons vu qu'il y a une infinité.

5. La contradiction s'explique par ce fait que, si $\lim x_n = c$, nous ne sommes pas autorisés d'écrire

$$(9) \quad \lim \int_x^{x_n} \varphi(x, s) ds = \int_x^{\lim x_n} \varphi(x, s) ds \quad n = \infty.$$

Ceci est faux, car il peut arriver que

$$(10) \quad \lim \int_x^{x_n} \neq \lim \int_x^{x_n + \theta(x_n + 1 - x_n)}; \quad n = \infty, \theta < 1.$$

6. On peut expliquer ça également par une méthode géométrique et s'imposer encore des conditions à la limite, savoir: Il existe des solutions de la fonctionnelle (2) ou (4) qui coïncident entre x_0 et λx_0 avec une fonction donnée et que nous pouvons construire. On n'a qu'à tracer la courbe donnée entre x_0 et λx_0 et construire les points correspondants dans tout autre intervalle $\lambda^n x_0 \dots \lambda^{n+1} x_0$ sur la courbe exponentielle

$$(11) \quad y_n = y \lambda^{-n}$$

y étant la courbe donnée entre x_0 et λx_0 .

Ces solutions forment évidemment un ensemble de dimensions de l'ensemble des fonctions.

Mais il faut remarquer que toutes les solutions de l'équation fonctionnelle ne conviennent pas à l'équation intégr-fonctionnelle. Par exemple toute solution de l'équation fonctionnelle

$$(12) \quad f(x) - \lambda f(\lambda x) = 0$$

ne conviennent pas à l'équation intégr-fonctionnelle

$$(13) \quad \int_x^{\lambda x} f(s) ds = 0$$

ainsi $f = \frac{c}{xL\lambda}$ satisfait à (12) et donne

$$\int_x^{\lambda x} f(s) ds = c.$$

Cela s'explique géométriquement par ce fait que, pour satisfaire à l'équation (12) on peut se donner pour f des conditions arbitraires (une courbe) dans un intervalle $x_0 \dots \lambda x_0$; tandis que, pour satisfaire à (13) il faut choisir parmi ces courbes, celles qui donnent une aire *nulle* entre x_0 et λx_0 (la règle de construction dans tout autre intervalle étant, bien entendu, celle donnée par (11)).

Avec cette restriction (que l'aire (13) soit nulle) la puissance de l'ensemble des solutions de l'équation intégr-fonctionnelle donnée (ici 13) garde quand même la puissance de l'ensemble des fonctions, car on peut assujettir la solution à coïncider avec une courbe arbitraire entre x_0 et $x_0 - \theta(1 - \lambda)x_0$; $\theta < 1$.

7. Résolution de l'équation intégr-fonctionnelle

$$(1) \quad \int_{x_1(x)}^x k(x, s) f(s) ds = q(x).$$

Nous avons choisi le cas particulier (1'') de cette équation pour mettre en évidence la contradiction et l'expliquer. La marche suivie nous conduit à intégrer l'équation plus générale (1).

La fonction inconnue f sera définie pareillement par une fonction F qui remplace la fonction primitive de la formule (6).

$$(6') \quad F(x) = \int_0^x k(x, s) f(s) ds$$

et pour que f satisfasse à l'équation (1) il faut que F soit comme dans (6) une solution de l'équation fonctionnelle

$$F(x) - F(x_1) = q(x).$$

Cette équation (en supposant que $\lim x_n = c$ pour $n = \pm \infty$) admet, dans le cas général $q(c) \neq 0$ la solution générale⁽¹⁾.

(1) Voir form. (8) « Rendiconti Acc. dei Lincei », vol. XI, série 6, 1^o sem., fasc. 1. C. POPOVICI, *Sur les équations intégr-fonctionnelles*. Pour les cas plus généraux, lorsque x_n a plusieurs limites, qui sont nécessairement des fonctions périodiques par rapport à un itéré x_k de x_1 , voir la suite dans le même travail.

$$(6'') \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} [q(x_n) - q(c)] + L \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B^n [u(x_n) - u(c)] + P(x_1)$$

où L désigne logarithme népérien, $LB = q(c)$, u fonction arbitraire (uniforme par rapport à la transformation x_1), P fonction arbitraire symétrique par rapport aux itérés $x_n, \dots, x_{-1}, x, x_1, \dots, x_n$, $n = \infty$ de x_1 et aussi uniforme. On peut disposer de u et P pour la convergence.

On voit que les solutions F constituent un ensemble dont la puissance est celui de l'ensemble des fonctions; à chaque valeur de F l'équation (6') de Volterra, fait correspondre une valeur de f , donc les f constituent également un ensemble dont la puissance est celle de l'ensemble des fonctions.

On pourrait se donner pour F des conditions à la limite, p. ex., assujétir F à coïncider avec un arc de courbe donnée dans un intervalle $\xi \dots x_1(\xi)$; aussi f peut être assujéti à coïncider avec un arc de courbe donné dans un intervalle $\xi \dots \xi + \theta[x_1(\xi) - \xi]$, $\theta < 1$, ξ point choisi arbitrairement.

8. Ces résultats peuvent s'étendre aux équations intégral-fonctionnelles qui contiennent r itérés d'une transformation $x_1(x)$ ex:

$$(14) \quad \sum_{p=0}^r a_p(x) f(x_p) + \int_0^x k(x, s) f(s) ds = q(x)$$

qui peuvent se résoudre en cherchant des solutions de la forme⁽¹⁾.

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \\ \text{où} \\ \sum_{p=0}^r a_p(x) f_i(x_p) = - \int_0^x k(x, s) f_{i-1}(s) ds \quad ; \quad f_0 = q \end{array} \right.$$

chacune des équations fonctionnelles de récurrence (15) admet pour f_i des solutions qu'on peut assujétir à coïncider avec r arcs de courbes données sur r intervalles $\xi_k \dots x_1(\xi_k)$, $k = 1, 2, \dots, r$; $\xi_1 \dots \xi_r$ arbitraires.

9. La généralisation peut s'étendre aussi pour les équations intégral-fonctionnelles à plusieurs variables, comme par exemple celle de M. Picone

$$\varphi(x, y) = u(x, y) + \int_{f_1(x)}^y d\xi \int_{f_2(x)}^x k[x, y; \xi, \eta; u(\xi, \eta)] d\xi d\eta.$$

On verra que l'on peut assujettir la fonction inconnue u à coïncider avec des surfaces données sur certains domaines des variables x, y . Il existe donc, *pas une et une seule solution*⁽²⁾, mais *une infinité de solutions dont la puissance est celle de l'ensemble des fonctions aux deux variables.*

(1) Voir « Bulletin des Sciences Mathématiques », juillet et août 1929. C. POPOVICI, *Les équations fonctionnelles, etc.*

(2) Voir les leçons sur les équations intégrales publiées par TOMASSETTI, op. cit., p. 101.

Meccanica. — *Sull'influenza di più nuclei rigidi immersi in un mezzo elastico.* Nota di ENRICO VOLTERRA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Si abbia un mezzo elastico indefinito ed in esso immersi n nuclei rigidi di forma qualsiasi, al cui contorno aderisca il mezzo elastico. Supponiamo che ciascun nucleo subisca per conto proprio un piccolo spostamento rigido, determinando con ciò una deformazione del mezzo ambiente e un finale stato di equilibrio. Perchè questo rimanga individuato occorre assegnare altresì forze di massa e circostanze all' ∞ . Fisseremo la nostra attenzione sul caso in cui si annullano da un lato le forze di massa, dall'altro gli spostamenti all' ∞ . Indicheremo con $t_{11}, t_{22}, t_{33}, t_{12}, t_{13}, t_{23}$, le caratteristiche delle tensioni del mezzo, con $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ le caratteristiche delle deformazioni; con φ il potenziale elastico unitario che sarà una funzione omogenea di secondo grado delle quantità a_{rs} . Chiameremo col nome di spinte le componenti della rotazione e della traslazione di ciascun nucleo. Saranno in numero di sei per ciascun nucleo, quindi in totale in numero di $6n$.

Avremo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_{rs}} = t_{rs} \quad , \quad \varphi = \frac{1}{2} \sum t_{rs} a_{rs} \quad (r, s = \bar{1}, 2, 3),$$

e l'energia elastica del sistema sarà espressa da:

$$E = - \frac{1}{2} \int_S \sum t_{rs} a_{rs} dS$$

ove S è lo spazio occupato dal mezzo elastico.

Indicheremo con σ_i la superficie dell'*i*esimo nucleo, con u_i, v_i, w_i le componenti dello spostamento dei punti di tale superficie, con $X_{\sigma i}, Y_{\sigma i}, Z_{\sigma i}$ le componenti della tensione unitaria che sollecita ciascun elemento della superficie di tale nucleo.

Avremo classicamente

$$E = - \frac{1}{2} \int_S \sum t_{rs} a_{rs} dS = \frac{1}{2} \sum_i^n \int_{\sigma i} (u_i X_{\sigma i} + v_i Y_{\sigma i} + w_i Z_{\sigma i}) d\sigma_i,$$

(1) Nella seduta del 15 giugno 1930.

e, d'altra parte, indicando con $a_i, b_i, c_i, p_i, q_i, r_i$ le sei caratteristiche delle spinte relative al nucleo rigido generico, varranno le formule:

$$\begin{cases} u_i = a_i + r_i y - q_i z, \\ v_i = b_i + p_i z - r_i x, \\ w_i = c_i + q_i x - p_i y. \end{cases}$$

Dunque

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \sum_i^n \int_{\sigma_i} [(a_i + r_i y - q_i z) X_{\sigma_i} + (b_i + p_i z - r_i x) Y_{\sigma_i} + (c_i + q_i x - p_i y) Z_{\sigma_i}] d\sigma_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_i^n \left[a_i \int_{\sigma_i} X_{\sigma_i} d\sigma + b_i \int_{\sigma_i} Y_{\sigma_i} d\sigma + c_i \int_{\sigma_i} Z_{\sigma_i} d\sigma + p_i \int_{\sigma_i} (Y_i z - Z_i y) d\sigma_i + \right. \\ &\quad \left. + q_i \int_{\sigma_i} (Z_i x - X_i z) d\sigma_i + r_i \int_{\sigma_i} (X_i y - Y_i x) d\sigma_i \right]. \end{aligned}$$

Poniamo

$$A = \int_{\sigma_i} X_{\sigma_i} d\sigma_i, \quad B = \int_{\sigma_i} Y_{\sigma_i} d\sigma_i, \quad C = \int_{\sigma_i} Z_{\sigma_i} d\sigma_i;$$

$$P = \int_{\sigma_i} (Y_i z - Z_i y) d\sigma_i, \quad Q = \int_{\sigma_i} (Z_i x - X_i z) d\sigma_i, \quad R = \int_{\sigma_i} (X_i y - Y_i x) d\sigma_i$$

e potremo scrivere

$$E = \frac{1}{2} \sum_i^n (A_i a_i + B_i b_i + C_i c_i + P_i p_i + Q_i q_i + R_i r_i).$$

Indicando con e_1, e_2, \dots, e_{6n} le $6n$ spinte, con E_1, E_2, \dots, E_{6n} i corrispondenti elementi globali degli sforzi, l'espressione precedente assumerà la forma più comprensiva

$$(I) \quad E = \frac{1}{2} \sum_i^{6n} E_{ihi}.$$

Vogliamo accennare ad un principio di reciprocità che ne discende immediatamente⁽¹⁾.

Consideriamo due sistemi di spinte

$$\begin{aligned} s_1, s_2, \dots, s_{6n}, \\ s'_1, s'_2, \dots, s'_{6n}; \end{aligned}$$

applicate successivamente agli n nuclei nel mezzo.

(1) Vedi BETTI, *Teoria dell'elasticità*. « Nuovo Cimento », 1872-73.

Siano a_{rs} , a'_{rs} ; t_{rs} , t'_{rs} rispettivamente le caratteristiche delle deformazioni e delle tensioni nel mezzo.

Sussiste la relazione

$$\int_S \sum a'_{rs} t_{rs} dS = \int_S a_{rs} t'_{rs} dS,$$

oppure adottando le notazioni della formula (1),

$$(2) \quad \sum_1^{6n} E'_i s_i = \sum_1^{6n} E_i s'_i.$$

Se ne desume il seguente teorema:

Se in un mezzo elastico, nel quale sono immersi corpi rigidi, si producono due sistemi di spinte e quindi due sistemi di sforzi,

la somma dei prodotti delle caratteristiche degli sforzi del primo sistema per le caratteristiche delle spinte del secondo è uguale alla somma dei prodotti delle caratteristiche degli sforzi del secondo sistema per le caratteristiche delle spinte del primo.

Chiameremo spinta elementare, e l'indicheremo con s_h , quella spinta che corrisponde alle seguenti condizioni: $6n - 1$ spinte eguali a zero l'ennesima diversa da zero ed avente per valore l'unità.

Indicheremo con E_{ih} i valori corrispondenti dei coefficienti E_i .

Si vede subito che se i valori delle spinte sono

$$s_1, \dots, s_{6n},$$

avremo

$$E_i = \sum_h^{6n} E_{ih} s_h.$$

Vediamo di rilevare il significato delle quantità

$$E_i \quad \text{ed} \quad E_{ih}.$$

Ricordiamo che A_i , B_i , C_i sono le componenti delle forze, P_i , Q_i , R_i le componenti dei momenti che agiscono sul nucleo *i*esimo. Diremo che E_i, \dots, E_{6n} sono gli sforzi corrispondenti alle spinte s_1, \dots, s_{6n} .

La quantità E_{ih} rappresenterà invece lo sforzo d'ordine *i* indotto dalla spinta elementare d'ordine *h*. Chiameremo i coefficienti E_{ih} coefficienti degli sforzi.

Dalla (2) discende, tenendo conto che le spinte s_1, s_2, \dots, s_{6n} ; $s'_1, s'_2, \dots, s'_{6n}$ sono quantità arbitrarie,

$$(3) \quad E_{ih} = E_{hi}.$$

Sotto la forma (3) il teorema di reciprocità può essere enunciato:

I coefficienti degli sforzi non cambiano di valore per una inversione di indici.

Oppure, in maniera più generale, sotto la quale assume forma simile al teorema fondamentale di induzione elettrostatica:

Lo sforzo d'ordine i indotto da una spinta elementare d'ordine h è uguale allo sforzo d'ordine h indotto da una spinta elementare d'ordine i .

Meccanica. — *Sul tensore di deformazione di un velo.* Nota di B. FINZI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

Un velo continuo sia adagiato sopra una superficie rigida assegnata. Diciamo x_i ($i = 1, 2$) le coordinate generali di un generico punto della superficie, e caratterizziamo la sua metrica assegnando il quadrato dell'elemento lineare:

$$(1) \quad ds^2 = a_{ik} dx^i dx^k.$$

Sia \boldsymbol{v} il vettore superficiale che definisce lo spostamento di un punto del velo sopra la superficie rigida. Assegnato \boldsymbol{v} , risulta univocamente determinato il tensore doppio simmetrico di deformazione ξ :

$$(2) \quad 2 \xi_{ik} = v_{i|k} + v_{k|i}.$$

Consideriamo ora un generico tensore doppio simmetrico, subordinato alla metrica (1). Può esso assumersi come tensore di deformazione del velo? La risposta a tal quesito è manifestamente negativa se si pensa al caso particolare di un velo piano, per cui ξ deve, come è noto, ubbidire alla condizione di Saint-Venant. Mi propongo allora di determinare le condizioni a cui deve soddisfare un tensore doppio simmetrico, subordinato alla generica forma differenziale quadratica (1), perchè esso possa essere assunto come tensore di deformazione di un velo adagiato su di una superficie rigida, la cui metrica è caratterizzata dalla (1). Mi limiterò in questa Nota ad accennare ai risultati, rimandando per la loro discussione e lo sviluppo dei calcoli ad una Nota in corso di stampa presso il R. Istituto Lombardo.

Derivando le (2) e ricordando le formole di commutazione delle derivate seconde covarianti, se K è la curvatura gaussiana della superficie, ϵ il noto tensore doppio, si ha:

$$(3) \quad \epsilon^{hk} \epsilon^{ij} \xi_{bi|jk} = - \operatorname{div} K \boldsymbol{v}.$$

(1) Nella seduta del 15 giugno 1930.

Sia $\theta = \xi_k^k$ il coefficiente di dilatazione cubica, e consideriamo i seguenti invarianti:

$$(4) \quad I = - \varepsilon^{hk} \varepsilon^{ij} \xi_{hijk} - K\theta, \quad J = \frac{I}{\Delta_1 K}.$$

Se k è il versore di grad K , la (3) si scriverà:

$$(5) \quad J = k^h v_h.$$

Se l è il vettore di curvatura geodetica delle linee che ammettono k come versore tangente, posto

$$(6) \quad L = k^b J_{|b} - k^h k^i \xi_{hi},$$

si ha:

$$(7) \quad L = l^h v_h.$$

Si consideri l'invariante

$$(8) \quad H = \varepsilon_{ij} k^i l^j.$$

Per $H \neq 0$, il sistema (5) (7) è risolubile rispetto a v_h . In tal caso le condizioni a cui deve soddisfare ξ per poter essere assunto come tensore di deformazione, così si esprimono:

$$(9) \quad 2 \xi_{ij} = (Jm_i + Ln_i)_{|j} + (Jm_j + Ln_j)_{|i},$$

essendo

$$m_i = \frac{\varepsilon_{ir} l^r}{H}, \quad n_i = \frac{\varepsilon_{ri} k^r}{H}.$$

Se $H = 0$ e K non è costante, la superficie è applicabile sopra una superficie di rotazione, e la condizione

$$(9') \quad L = 0$$

esprime la condizione perchè ξ possa assumersi come tensore di deformazione di un velo adagiato su di una superficie applicabile su di una superficie di rotazione.

Se, in fine, la superficie è a curvatura costante, la condizione cercata per ξ così si esprime:

$$(9'') \quad I = 0.$$

Per una sviluppabile la (9'') si riduce alla seguente relazione:

$$\varepsilon^{hk} \varepsilon^{ij} \xi_{hijk} = 0.$$

Astronomia. — *Sull'orbita del pianeta ultranettuniano.* Nota di M. PIERUCCI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio A. BEMPORAD.

Alcuni anni addietro, in una successione di varie, brevi Note ⁽²⁾, davo come approssimata la regola assai semplice: « Le distanze dei pianeti dal sole (considerati in due gruppi, interni ed esterni) crescono, meno due lacune, ¹/₄ come i numeri interi ». La regola, con pochissime lacune, vale anche per le distanze di tutti i satelliti dal relativo pianeta.

L'error-medio della regola è il più basso fra quelli delle regole finora conosciute; e il progresso nella conoscenza dei dati astronomici ha portato, almeno finora, ad una migliore concordanza con la regola stessa ⁽³⁾.

Migliori risultati ottenevo poi considerando la media geometrica dei semiassi, che per brevità chiamavo « raggio equivalente » (e che sarebbe il raggio di un circolo equivalente all'orbita).

Riporto la tabellina che in quelle note davo per i pianeti; nella quale però, riveduti accuratamente i calcoli, ho spostato lievemente l'unità di misura per i pianeti esterni ($4.95\frac{1}{2}$ invece di 4.93), in modo da render minima la somma dei quadrati degli errori; l'error medio della regola viene così ridotto da 4.58 % a 4.57 %.

Pianeta	Raggio equivalente calcolato	Raggio equivalente osservato	Errore relativo	Errore medio
Mercurio	$0.362 \times 1 = 0.362$	0.383	5.80 %	4.57 %
Venere	$0.362 \times 2 = 0.724$	0.723	0.14 %	
Terra	$0.362 \times 3 = 1.086$	1.000	7.92 %	
Marte	$0.362 \times 4 = 1.448$	1.516	4.70 %	
Giove	$4.95\frac{1}{2} \times 1 = 4.95\frac{1}{2}$	5.199	4.92 %	
Saturno	$4.95\frac{1}{2} \times 2 = 9.91$	9.548	3.65 %	
Urano	$4.95\frac{1}{2} \times 4 = 19.82$	19.207	3.09 %	
Nettuno	$4.95\frac{1}{2} \times 6 = 29.73$	30.109	1.27 %	

Sull'ultimo numero di « Nature » (31 maggio 1930), sulla Colonna Astronomica, leggo per la prima volta i valori necessari per il calcolo del raggio equivalente dell'orbita del pianeta ultranettuniano di Lowell.

(1) Nella seduta del 15 giugno 1930.

(2) *Sulle distanze dei pianeti dal sole.* Note I-VI (« Nuovo Cimento », 1919-22); *Una doppia regolarità nel sistema solare* (« Nuovo Cimento », 1922).

(3) Vedi ad es.: *Sulle distanze dei pianeti dal sole*, Nota III.

Secondo il prof. Banachiewicz, si ha:

$$\log a = 1.6110 ; \log q = 1.4576 ; \text{ da cui si ricava: } \sqrt{ab} = 39.90 ;$$

secondo il dott. Crommelin si ha:

$$\log a = 1.6158 ; \log q = 1.4687 ; \text{ da cui: } \sqrt{ab} = 40.40 .$$

La media dei due valori per \sqrt{ab} è dunque 40.15.

Possiamo ora, prendendo in considerazione anche il nuovo pianeta, formare il seguente quadro:

Pianeta	Raggio equivalente calcolato	Raggio equivalente osservato	Errore relativo	Errore medio
Mercurio	$0.362 \times 1 = 0.362$	0.383	5.80 %	4.33 %
Venere	$0.362 \times 2 = 0.724$	0.723	0.14 %	
Terra	$0.362 \times 3 = 1.086$	1.000	7.92 %	
Marte	$0.362 \times 4 = 1.448$	1.516	4.70 %	
Giove	$4.96 \times 1 = 4.96$	5.199	4.82 %	
Saturno	$4.96 \times 2 = 9.92$	9.548	3.75 %	
Urano	$4.96 \times 4 = 19.84$	19.207	3.19 %	
Nettuno	$4.96 \times 6 = 29.76$	30.109	1.17 %	
Pianeta di Lowell	$4.96 \times 8 = 39.68$	40.15	1.18 %	

dove per l'unità di misura del raggio equivalente per i 5 pianeti esterni si è preso il valore 4.96; per il quale la somma dei quadrati degli errori si riduce minima.

È notevole osservare come:

1° Il valore della unità di misura per cui si rende minima la somma dei quadrati degli errori sia — si può dire — identico quando si considerino soltanto i quattro vecchi pianeti esterni o quando si considerino tutti e cinque (rispettivamente $4.95 \frac{1}{2}$ e 4.96).

2° L'error medio della regola (che era già il più basso fra gli errori medi delle regole finora conosciute) si abbassi ancora sensibilmente dopo lo scoperta del nuovo pianeta.

3° La considerazione del raggio equivalente, che nel caso dei pianeti fino a poco fa conosciuti poteva sembrare una rifinitura della regola, divenga ora di evidente interesse, stante la discreta eccentricità dell'orbita del pianeta di Lowell.

In conclusione, dopo la scoperta del nuovo pianeta, la regola è ancor soddisfatta tanto bene da ricevere, invece di un peggioramento, un miglioramento rispetto a prima.

Geofisica. — *Sullo sviluppo rigoroso in serie di funzioni sferiche del potenziale esterno e della gravità superficiale di un pianeta sferoidico non di rotazione.* Nota di B. GULOTTA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio F. ANGELITTI.

In questa Nota estendo a superficie *non di rotazione* il metodo dato dal prof. Mineo per determinare lo sviluppo rigoroso del potenziale esterno d'un pianeta nel caso che una superficie d'equilibrio *esteriore* del pianeta stesso appartenga a una certa classe di sferoidi di rotazione dipendenti da quanti si vogliano parametri geometrici ⁽²⁾.

Mi limiterò ad accennare il procedimento e la natura degli sviluppi che si ottengono, dei quali mi occuperò più estesamente in altro lavoro.

Per semplicità, con i simboli $A^{m,n}(\varepsilon^2, \eta^2)$, $B^{m,n}(\varepsilon^2, \eta^2)$, ..., indicherò dei polinomi in ε^2 ed η^2 , omogenei di grado m , e privi degli ultimi n ($\leq m + 1$) termini quando si pensino ordinati per le potenze decrescenti di ε^2 . Per generalità converremo che sia $A^{m-1,m} = 0$ per ogni m nullo o intero positivo. Ciò posto, servendoci di coordinate polari r, θ, φ , e supponendo che l'asse polare coincida con l'asse di rotazione diurna del pianeta, consideriamo la superficie di equazione

$$(1) \quad r = a \left\{ 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^m \alpha_{m,p} Y_{2m}^{2p} \right\}$$

dove $Y_{2m}^{2p} = X_{2n}^{2p} \cos 2p\varphi$ è la generica funzione sferica elementare, a è una costante positiva, $\alpha_{m,p}$ sono coefficienti dati da

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{0,0} = \sum_{i=1}^{\infty} A_{0,0}^{i,0}(\varepsilon^2, \eta^2), \\ \alpha_{m,p} = \sum_{i=m}^{\infty} A_{m,p}^{i,p}(\varepsilon^2, \eta^2); \end{array} \right. \quad (\text{per } m \neq 0),$$

essendo ε, η , due costanti positive minori dell'unità.

Per particolari valori dei coefficienti $\alpha_{m,p}$, la (1) comprende un ellissoide a tre assi, del quale ε ed η rappresentano rispettivamente l'eccentricità equatoriale e quella di una delle rimanenti ellissi principali.

(1) Nella seduta del 15 giugno 1930.

(2) Cfr. C. MINEO, *Sullo sviluppo rigoroso in serie di funzioni sferiche del potenziale esterno e della gravità superficiale d'un pianeta*, « Boll. dell'Un. Matem. Italiana », anno V, n. 4, ottobre 1926.

Come risulta da noti teoremi, è

$$(3) \quad Y_{2m}^{2p} Y_{2n}^{2q} = \sum_{r=p+q}^{m+n} \lambda_r Y_{2r}^{2(p+q)} + \sum_{s=p-q}^{m+n} \mu_s Y_{2s}^{2(p-q)}$$

dove le λ_r e μ_s sono determinate costanti. Si deduce che ogni potenza di r ha uno sviluppo della stessa forma del secondo membro di (1).

Detta ora M la massa totale del pianeta, ω la velocità angolare di rotazione, ed f la costante di gravitazione universale, la funzione potenziale esterna V , armonica fuori della (1) regolare e nulla all'infinito, sulla (1) deve ridursi, come si sa, a

$$V_s = c - \frac{\omega^2}{2f} r^2 \sin^2 \theta,$$

essendo c una costante. E poichè $\sin^2 \theta = \frac{2}{3}(1 - Y_2^0)$, risulta

$$(4) \quad V_s = c - \frac{\omega^2 a^2}{3f} (1 - Y_2^0) \left\{ 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^m \alpha_{m,p}^{(2)} Y_{2m}^{2p} \right\}$$

indicando con $\alpha_{m,p}^{(2)}$ il coefficiente generico nello sviluppo di r^2 .

Tenendo presente la (3) si trova subito, per V , uno sviluppo della seguente natura

$$(5) \quad V = \frac{M}{r} + \sum_{b=1}^{\infty} \sum_{k=0}^b \frac{\beta_{b,k}}{r^{2b+1}} Y_{2b}^{2k}$$

con

$$(6) \quad \beta_{b,k} = \sum_{j=b-1}^{\infty} B_{b,k}^{j,k} (\varepsilon^2, \eta^2).$$

Ciò si prova agevolmente per induzione completa e si mostra, nello stesso tempo, che i coefficienti dei polinomi $B_{b,k}^{j,k}$ si ottengono, in funzione dei coefficienti degli $A_{m,p}^{i,p}$ dei secondi membri delle (2), mediante equazioni *lineari*.

Volendo lo sviluppo dell'accelerazione di gravità g sulla (1) ricordiamo che

$$(7) \quad g = \frac{1}{\cos r n} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)_s$$

dove $\left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)_s$ è la derivata, rispetto ad r , calcolata sulla (1), della funzione

$$(8) \quad W = fV + \frac{\omega^2}{2} r^2 \sin^2 \theta$$

ed \widehat{rn} l'angolo che il raggio vettore r che va a un punto della (1) forma con la normale interna alla superficie nel punto.

Si ha

$$\frac{1}{\cos \widehat{rn}} = - \left\{ 1 + \frac{1}{r^2} \left[\left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Ricordando la (1) si vede che

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi} \right)^2 = \sum_{m,p;n,q} \frac{\partial Y_{2m}^{2p}}{\partial \theta} \frac{\partial Y_{2n}^{2q}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial Y_{2m}^{2p}}{\partial \varphi} \frac{\partial Y_{2n}^{2q}}{\partial \varphi}.$$

E poichè

$$\frac{\partial Y_{2m}^{2p}}{\partial \theta} \frac{\partial Y_{2n}^{2q}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial Y_{2m}^{2p}}{\partial \varphi} \frac{\partial Y_{2n}^{2q}}{\partial \varphi} = \sum_{r=p+q}^{m+n} \alpha_r^{p+q} Y_{2r}^{2(p+q)} + \sum_{s=p-q}^{m+n} \beta_s^{p-q} Y_{2s}^{2(p-q)}$$

dove le α_r^{p+q} , β_s^{p-q} sono determinate costanti, si prova facilmente che

$$(9) \quad \frac{1}{\cos \widehat{rn}} = -1 + \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^v m_{v,\mu} Y_{2v}^{2\mu}$$

essendo, per le (2):

$$(10) \quad \begin{cases} m_{v,\mu} = \sum_{j=2}^{\infty} M_{v,\mu}^{j,\mu}(\varepsilon^2, \eta^2) & (v=0, 1), \\ m_{v,\mu} = \sum_{j=v}^{\infty} M_{v,\mu}^{j,\mu}(\varepsilon^2, \eta^2) & (v > 1). \end{cases}$$

Infine, tenendo presenti le (5), (6), (7), (8), (9), (10), si trova, per la gravità:

$$(11) \quad g = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=0}^u \gamma_{u,v} Y_{2u}^{2v}$$

dove

$$(12) \quad \gamma_{u,v} = \sum_{j=u-1}^{\infty} C_{u,v}^{j,v}(\varepsilon^2, \eta^2).$$

Il problema inverso, di risalire, cioè, dall'espressione (11) della gravità all'equazione (1) dello sferoide, comporta, come nel caso di una g dipendente solo da θ , delle limitazioni dipendenti dal fatto che il numero delle costanti che compariscono nell'espressione della gravità supera quello delle costanti contenute nell'equazione dello sferoide ⁽¹⁾.

(1) Cfr. B. GULOTTA, *Sulla determinazione del Geotide, supposto di rotazione e di tipo ellissoidale mediante le misure di gravità*. « Atti della R. Accademia di Scienze. Lettere e Belle Arti di Palermo », vol. XV, 1929.

Fisica. — *Velocità caratteristiche degli elettroni diffusi dalle superfici metalliche.* Nota di G. BERNARDINI presentata ⁽¹⁾ dal Socio A. GARBASSO.

1. Nell'emissione elettronica secondaria prodotta quando superfici metalliche sono bombardate con elettroni primari, generalmente si distinguono:

a) gli elettroni riflessi, che non hanno subito perdite sensibili di velocità;

b) gli elettroni diffusi, che hanno subito piccole perdita di velocità,

c) gli elettroni secondari, strappati alla superficie metallica, aventi velocità molto minori di quella degli elettroni primari.

In generale non si sono trovati dei valori caratteristici per la velocità; nè in quelli diffusi nè in quelli secondari. E si è trovato che l'intensità degli elettroni diffusi e di quelli secondari (la cui distinzione è peraltro artificiosa) varia in modo continuo col variare della velocità, crescendo uniformemente per valori decrescenti di questa.

Recentemente però Brown e Whiddington ⁽²⁾ con elettroni di 150 volt e recentissimamente Rudberg ⁽³⁾ con elettroni di 300-500 volt su metalli incandescenti hanno osservato, nello spettro magnetico dell'emissione secondaria, delle discontinuità che indicherebbero la prevalenza di alcuni urti anelastici.

In quel che segue sono brevemente esposti i primi risultati di ricerche dirette a mettere in evidenza l'esistenza o meno di queste discontinuità con elettroni primari da 34 a 50 volt.

2. Il dispositivo sperimentale è rappresentato schematicamente in sezione nella figura 1.

Dal filamento di tungsteno toriato O ⁽⁴⁾ vengono emessi degli elettroni la cui velocità è regolabile mediante la differenza di tensione stabilita fra esso e la placca T che è, come tutte le altre parti del dispositivo, a terra. La fenditura f_1 (4×0.8 mm.) limita un fascetto di questi elettroni che deflesso magneticamente incide sulla piastrina P (25×1 mm.).

Gli elettroni diffusi limitati in fascio dalla fenditura f_2 (12×0.2 mm.) cadono sulla lastra MN dando il loro spettro magnetico, foccheggiato in

(1) Nella seduta del 30 maggio 1930.

(2) BROWN e WHIDDINGTON, «Leeds Phil. Lit. Soc. Proc.», vol. 1, p. 162 e WHIDDINGTON, *ibid.*, vol. 1, p. 242.

(3) E. RUDBERG, «Proc. Roy. Soc.», vol. 127, p. 111.

(4) Gentilmente fornitomi dalla ditta Zenith di Monza.

ogni punto della lastra, giacendo la piastrina P e la fenditura f_2 in un piano normale al piano MN.

Il fascio di elettroni incidente ha una larghezza, definita dalla fenditura f_1 , tale da aver la certezza che solo la piastrina e non i suoi sostegni sono colpiti dagli elettroni incidenti. Al disotto della piastrina è situato un pozzetto di Faraday così fatto che tutti gli elettroni del fascio incidente che non vanno a colpire la piastrina, vengono da esso raccolti, senza possibilità di ulteriori riflessioni.

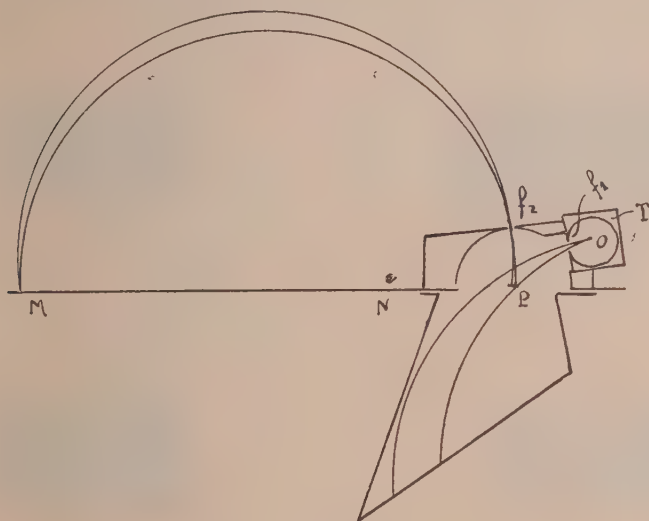


Fig. 1.

Le varie parti del dispositivo sono annerite con nerofumo, così come tutto l'interno della cassetta cilindrica di bronzo in cui esso è racchiuso. In questa cassetta è praticato un alto vuoto per mezzo di una pompa a diffusione a 3 stadi.

3. Numerose prove sono state eseguite su Cu, Al, Zn. Nella tavola ne sono riprodotte due relative al rame e due allo zinco. Quelle su alluminio, che hanno dato risultati analoghi ma con qualche incertezza, non sono riprodotte. Sono state necessarie delle pose di un'ora e un'ora e mezza. Poichè le parti prossime al filamento riscaldandosi emettevano dei gas che alteravano i risultati, queste pose non furono continue ma alternate di cinque in cinque minuti con un periodo di riposo, per impedire il riscaldamento.

La corrente rivelata dalla piastrina era dell'ordine di 10^{-8} amp. Ritengo che sulla lastra incidesse una corrente dell'ordine di 10^{-10} ampère.

In queste ricerche ho usato il metodo fotografico perchè trovo che questo, dato l'altissimo potere fotografico degli elettroni e la possibilità di intensificare gli effetti con pose sufficientemente lunghe, sia assai opportuno.

Le lastre sono state sensibilizzate con olio minerale ⁽¹⁾. La luce diffusa dal filamento è stata il più possibile eliminata mediante una camera oscura posta davanti alla fenditura f_1 . L'effetto di questa luce diffusa è stato peraltro studiato; con una posa di due ore si ottiene un debole annerimento della lastra, pressochè uniforme.

4. Come si può vedere dalle lastre riprodotte nella figura 2, nella regione di spettro relativa ai cosiddetti elettroni diffusi sono state effettivamente osservate delle discontinuità che sembrano mettere in evidenza delle perdite caratteristiche di velocità negli elettroni primari.

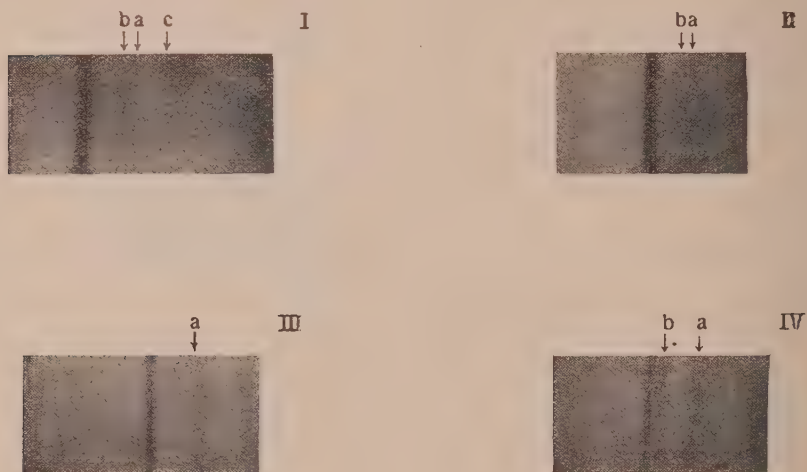


Fig. 2.

Le lastre I e II sono state ottenute con una piastrina di rame, rispettivamente con elettroni incidenti di 34 e 50 volt; le lastre III e IV con una piastrina di zinco, rispettivamente per 34 e 40 volt.

Nelle lastre le righe corrispondenti sono indicate con una stessa lettera minuscola.

Nella seguente tabella sono riportati i valori in volt delle relative velocità.

	Cu		Zn	
	I	II	III	IV
<i>b</i>	4.5	5	2.2	—
<i>a</i>	6.9	6.8	7.2	7.5
<i>c</i> (?)	11	—	—	—

(1) ROSSI e BERNARDINI. Questi « Rendiconti », vol. X, p. 182.

L'errore probabile delle misure è dell'ordine di $1/2$ volt e tale è anche il potere risolutivo dell'apparecchio nelle condizioni in cui è stato usato.

5. Non credo possibile per il momento di poter dare una spiegazione sicura di questi risultati. Questi potenziali critici possono essere relativi ai gas assorbiti o al metallo.

In due prove fatte dopo aver scaldato al rosso per due ore la piastrina di rame non ho potuto constatare una differenza sensibile ma solo un indebolimento della riga *b*. Ritengo che questa, e la riga *b* per lo zinco, siano dovute ai gas assorbiti, mentre credo che le righe *a*, più intense e presenti in ogni prova, siano dovute ai metalli.

Il mettere in chiaro questa questione ha un certo interesse poichè se tali righe fossero dovute ai gas assorbiti, questo potrebbe essere un metodo per conoscere le condizioni delle molecole nello stato di assorbimento, mentre se fossero dovute al metallo permetterebbero di determinare i valori di potenziali critici cristallini.

Ulteriori ricerche sono perciò ora in corso per convalidare e precisare quanto è stato esposto in questa Nota preliminare e per decidere della questione suaccennata.

Tengo a ringraziare i dottori B. Rossi e G. Occhialini per l'aiuto prestatomi nell'esecuzione di questo lavoro.

Fisica (Teorica). — *Sopra l'elettrodinamica quantistica.* Nota di G. RACAH, presentata ⁽¹⁾ dal Socio A. GARBASSO.

L'elettrodinamica quantistica di Dirac considera, come è noto, i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier del campo elettromagnetico racchiuso dentro ad una cavità Ω come coordinate di tanti oscillatori, ed applica le equazioni della meccanica ondulatoria ed il metodo delle perturbazioni di Schrödinger al sistema formato da questi oscillatori e dall'atomo (o dagli atomi) che si trova nel campo. Si arriva così a dei coefficienti $a_{n,n_1,\dots,n_N,\dots}$ variabili nel tempo, il cui modulo al quadrato ci indica la probabilità ad ogni istante che l'atomo si trovi nello stato quantico n , e gli oscillatori rispettivamente negli stati quantici n_1, \dots, n_N . Queste $a_{n,n_1,\dots,n_N,\dots}$ soddisfano ⁽²⁾ alle equazioni differenziali

$$(1) \quad \dot{a}_{n,n_1,\dots,n_s,\dots,n_N,\dots} = -\frac{4\pi^{1/2}e}{\sqrt{\Omega b}} \sum_{m,s} \frac{v(mn)}{\sqrt{v_s}} \mathbf{B}_s \times \mathbf{Q}(mn) \cdot \\ \cdot \left\{ a_{m,n_1,\dots,n_s+1,\dots,n_N,\dots} \sqrt{n_s+1} e^{2\pi i[v(mn)+v_s]t} + \right. \\ \left. + a_{m,n_1,\dots,n_s-1,\dots,n_N,\dots} \sqrt{n_s} e^{2\pi i[v(mn)-v_s]t} \right\},$$

con ⁽³⁾

$$(2) \quad \mathbf{B}_s = -\mathbf{A}_s \sin 2\pi v_s \frac{S a_{sx} x + \delta_s}{c}.$$

Noi vogliamo confrontare le $a_{n,n_1,\dots,n_N,\dots}$ con i coefficienti di Fourier che si ottengono per le varie componenti con l'elettrodinamica classica.

Dirac considera dunque il potenziale-vettore sviluppato nella serie

$$(3) \quad \mathbf{U} = \sqrt{\frac{8\pi c^2}{\Omega}} \sum_s q_s \mathbf{B}_s$$

e tratta le q_s come coordinate di oscillatori di frequenza v_s ; nel problema dell'emissione della luce determina l'ampiezza della probabilità che l'essesimo oscillatore venga eccitato allo stato quantico 1 quando l'atomo passa dallo stato n allo stato m , cioè il valore di $a_{m,0,\dots,1_s,\dots,0,\dots}(t)$ quando per $t=0$ sia $a_{n,0,\dots,0,\dots} \equiv 1$, e le altre a uguali a 0. Noi invece calcoleremo effet-

(1) Nella seduta del 30 maggio 1930.

(2) AMALDI, «Rend. R. Acc. Lincei», vol. IX, p. 877, 1929.

(3) RACAH, «Rend. R. Acc. Lincei», vol. XI, p. 837, 1930.

tivamente i coefficienti $q_s(t)$, quando il potenziale vettore ha l'espressione classica

$$\mathbf{U} = -v \frac{\dot{\mathbf{q}}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{cr},$$

attribuendo al momento \mathbf{q} dell'atomo emittente il valore

$$(4) \quad \mathbf{q} = a_{n,0}, \dots, a_{n,n} \dots \mathbf{Q}(nm) e^{2\pi i v(nm)t}.$$

Moltiplicando scalarmente i due membri della (3) per $\mathbf{B}_r d\tau$ e integrando,

poichè $\int_{\Omega} \mathbf{B}_r \times \mathbf{B}_s d\tau = 0$ e $\int_{\Omega} \mathbf{B}_r^2 d\tau = \frac{\Omega}{2}$, abbiamo

$$\int_{\Omega} \mathbf{U} \times \mathbf{B}_r d\tau = \sqrt{\frac{8\pi c^2}{\Omega}} \frac{\Omega}{2} q_r,$$

e perciò

$$q_s = \frac{1}{c\sqrt{2\pi\Omega}} \int_{\Omega} \mathbf{U} \times \mathbf{B}_s d\tau;$$

ma se indichiamo con $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, le coordinate del centro dell'atomo, abbiamo dalla (2) che

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_s(xy\bar{z}) &= -\mathbf{A}_s \left\{ \sin 2\pi v_s \frac{S\alpha_s \bar{x} + \delta_s}{c} \cos 2\pi v_s \frac{S\alpha_s (x - \bar{x})}{c} + \right. \\ &\quad \left. + \cos 2\pi v_s \frac{S\alpha_s \bar{x} + \delta_s}{c} \sin 2\pi v_s \frac{S\alpha_s (x - \bar{x})}{c} \right\} = \\ &= \mathbf{B}_s(\bar{x}\bar{y}\bar{z}) \cos 2\pi v_s \frac{S\alpha_s (x - \bar{x})}{c} + \text{un termine dispari che si} \end{aligned}$$

elimina per simmetria nell'integrazione:

perciò

$$q_s = \frac{1}{c\sqrt{2\pi\Omega}} \mathbf{B}_s(\bar{x}\bar{y}\bar{z}) \times \int_{\Omega} \mathbf{U} \cos 2\pi v_s \frac{S\alpha_s (x - \bar{x})}{c} d\tau,$$

ed usando coordinate polari,

$$\begin{aligned} q_s &= -\frac{e}{c\sqrt{2\pi\Omega}} \mathbf{B}_s \times \int_0^{ct} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\dot{\mathbf{q}}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{cr} \cos \frac{2\pi v_s r \cos \vartheta}{c} r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = \\ &= -\frac{2e}{c\sqrt{2\pi\Omega}} \frac{\mathbf{B}_s}{v_s} \times \int_0^{ct} \dot{\mathbf{q}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \sin \frac{2\pi v_s r}{c} dr = \\ &= -\frac{ie}{c\sqrt{2\pi\Omega}} \frac{\mathbf{B}_s}{v_s} \times \left\{ \int_0^{ct} \dot{\mathbf{q}}\left(t - \frac{r}{c}\right) e^{2\pi i v_s \frac{r}{c}} dr - \int_0^{ct} \dot{\mathbf{q}}\left(t - \frac{r}{c}\right) e^{-2\pi i v_s \frac{r}{c}} dr \right\}, \end{aligned}$$

e introducendo come nuova variabile $t' = t - \frac{r}{c}$,

$$(5) \quad q_s = \frac{ie}{\sqrt{2\pi\Omega}} \frac{\mathbf{B}_s}{v_s} \times \left\{ e^{2\pi i v_s t} \int_0^t \dot{\mathbf{q}}(t') e^{-2\pi i v_s t'} dt' - e^{-2\pi i v_s t} \int_0^t \dot{\mathbf{q}}(t') e^{2\pi i v_s t'} dt' \right\}.$$

Siccome è dalla (4)

$$(4') \quad \dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{Q} 2\pi i v a_{n,0,\dots,0,\dots} e^{2\pi i v t} + \mathbf{Q} \dot{a}_{n,0,\dots,0,\dots} e^{2\pi i v t},$$

trascurando il secondo termine perchè $\dot{a} \ll |2\pi i v a|$, abbiamo

$$(5') \quad q_s = -\frac{\sqrt{2\pi} e}{\Omega} \frac{v}{v_s} \mathbf{B}_s \times \mathbf{Q} \left\{ e^{2\pi i v_s t} \int_0^t a_{n,0,\dots,0,\dots} e^{2\pi i (v-v_s)t'} dt' - \right. \\ \left. - e^{-2\pi i v_s t} \int_0^t a_{n,0,\dots,0,\dots} e^{2\pi i (v+v_s)t'} dt' \right\};$$

anche qui il secondo termine è trascurabile in confronto al primo, perchè ha un divisore $2\pi i (v + v_s)$ in confronto a $2\pi i (v - v_s)$; e perciò, tenendo conto che

$$q_s(10) = \sqrt{\frac{h}{8\pi^2 v_s}},$$

resta

$$(6) \quad q_s = -\frac{4^{3/2}\pi e}{\sqrt{\Omega} h} \frac{v}{v_s} \mathbf{B}_s \times \mathbf{Q} \int_0^t a_{n,0,\dots,0,\dots}(t') e^{2\pi i (v-v_s)t'} dt' \cdot q_s(10) e^{2\pi i v_s t}.$$

Confrontando questa espressione con la (1) si vede che i coefficienti di Fourier cercati hanno la forma

$$(7) \quad q_s = a_{m,0,\dots,i_s,\dots,0,\dots} q_s(10) e^{2\pi i v_s t}$$

e perciò l'espressione del potenziale-vettore coi simboli di Dirac è

$$(8) \quad \mathbf{U} = \sqrt{\frac{8\pi c^2}{\Omega}} \sum_s a_{m,0,\dots,i_s,\dots,0,\dots} q_s(10) e^{2\pi i v_s t} \mathbf{B}_s.$$

*
* *

Consideriamo ora il caso particolare della (1) per l'assorbimento, cioè l'equazione

$$(9) \quad a_{n,0,\dots,0,\dots} = \frac{4\pi^{3/2} e v}{\sqrt{\Omega} h} \sum_s \frac{\mathbf{B}_s \times \mathbf{Q}}{v_s} a_{m,0,\dots,i_s,\dots,0,\dots} e^{2\pi i (v_s - v)t},$$

che, data la probabilità che ha ciascun oscillatore del campo elettromagnetico di essere eccitato al primo stato quantico, serve a calcolare la probabilità che questo quanto venga assorbito dall'atomo nel passare dallo stato m allo stato n . Questa equazione, tenendo conto della (8) diventa semplicemente

$$(10) \quad \dot{a}_{n,0,\dots,0,\dots} e^{2\pi i \nu t} = \frac{4\pi^2 e \nu}{hc} \mathbf{U} \times \mathbf{Q},$$

od anche per la (4) e (4')

$$(10') \quad \dot{q} - 2\pi i \nu q = \frac{4\pi^2 e \nu Q^2}{hc} U_q = \frac{e}{2mc} \frac{8\pi^2 m \nu Q^2}{b} U_q.$$

Siccome vogliamo confrontare il risultato quantistico con quello classico dell'eccitazione di un oscillatore, daremo a $Q(nm)$ l'espressione della $Q(10)$ dell'oscillatore, espressione che riduce a 1 il valore della seconda frazione. L'equazione di Dirac equivale dunque a

$$(11) \quad \dot{q} - 2\pi i \nu q = \frac{e}{2mc} U_q,$$

ed ha per integrale

$$(12) \quad q = \frac{e}{2mc} e^{2\pi i \nu t} \int_0^t U_q e^{-2\pi i \nu t} dt$$

mentre l'equazione classica dell'oscillatore

$$\ddot{q} + 4\pi^2 \nu^2 q = -\frac{e}{m} E_q = \frac{e}{mc} \dot{U}_q$$

ha per integrale

$$(12') \quad q = \frac{e}{2mc} e^{2\pi i \nu t} \int_0^t U_q e^{-2\pi i \nu t} dt - \frac{e}{2mc} e^{-2\pi i \nu t} \int_0^t U_q e^{2\pi i \nu t} dt - \\ - \frac{e}{mc} U_q(0) \frac{\sin 2\pi \nu t}{2\pi \nu}.$$

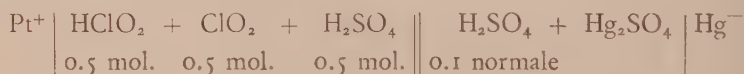
Perchè tanto la (12) che la (12') abbiano valori notevolmente diversi da 0, è necessario che il campo elettromagnetico oscilli con una frequenza $\bar{\nu}$ vicina a ν : in tal caso gli ultimi due termini della (12') sono però sempre trascurabili, perchè hanno rispettivamente i divisori $2\pi i(\bar{\nu} + \nu)$ e $2\pi \nu$, mentre il primo termine, che ha il divisore $2\pi i(\bar{\nu} - \nu)$ è proprio quello che ci dà la (12).

L'aver potuto considerare separatamente le equazioni di Dirac per l'emissione e per l'assorbimento, e l'averle potute collegare per mezzo dell'espressione classica del campo elettromagnetico, ci induce a ritenere che in tutti i fenomeni di trasmissione e interferenza della luce, e non soltanto in quelli più semplici già trattati⁽¹⁾, la teoria di Dirac debba dare i medesimi risultati del metodo classico.

Chimica. — *Pile di riduzione dei cloriti alcalini*⁽²⁾. Nota di G. R. LEVI e D. GHIRON, presentata⁽³⁾ dal Socio G. BRUNI.

Uno di noi ha avuto occasione di mostrare alcuni anni fa⁽⁴⁾ il comportamento delle soluzioni dei cloriti con diversi reattivi: nella grande maggioranza di casi si tratta di reazioni in cui il clorito si riduce a cloruro; più raramente si ha ossidazione del clorito a ClO_2 o a clorato. Recentemente abbiamo studiato appunto l'ossidazione dei cloriti coi permanganati (questi « Rendiconti », seduta del 2 giugno u. s.).

A quanto ci risulta, finora, la sola pila studiata con l'acido cloroso è quella di Dolch⁽⁵⁾:



per la quale questo autore ha trovato 0.368 volta.

Pile in soluzione neutra, contenenti ad uno degli elettrodi il solo anione ClO_2^- puro, non sono state studiate a tutt'oggi e perciò noi abbiamo pensato di utilizzare a questo scopo la tecnica da tempo acquistata da uno di noi per l'ottenimento dei cloriti puri.

Come si rileverà dai dati sotto riportati, sono numerosi gli esempi nei quali si realizzano rapidamente delle pile perfettamente costanti in ambiente neutro: ciò differenzia nettamente i cloriti dai clorati, per i quali occorre operare, nella maggior parte dei casi, in soluzioni acide per avere costanza di differenza di potenziale⁽⁶⁾.

Questo comportamento è dovuto alla maggiore reattività dei cloriti: per essi, data l'alterabilità delle soluzioni di acido cloroso libero, non pos-

(1) FERMI, « Rend. R. Acc. Lincei », vol. X, p. 72, 1929; RACAH, loc. cit.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale e Chimica fisica della R. Università di Milano.

(3) Nella seduta del 15 giugno 1930.

(4) G. R. LEVI, « Rend. Lincei », 31 (5), 1°, p. 370 (1922).

(5) *Dissert.*, Dresden, 1912, p. 46.

(6) NEUMANN, « Zeitschr. f. phys. Chem. », 14, p. 228 (1894).

sono interessare che pile in ambiente neutro od alcalino. Come vedremo in seguito, anche dalla misura del potenziale in funzione del tempo, è possibile rendersi conto dell'alterabilità dell'acido cloroso libero.

Nella grande maggioranza dei casi, e cioè nei processi di riduzione dei cloriti, il platino bianco, che funziona da elettrodo del comparto clorito, si carica positivamente: il rovescio naturalmente avviene nei processi di ossidazione dei cloriti, di cui riferiremo quanto prima.

Tutte le pile sotto riportate sono state misurate con potenziometro ad 1/10000 di volta della Ditta Allocchio, Bacchini e C.; è stato fatto due volte al giorno il controllo con la pila campione. Le misure sono state condotte a 20° in termostato elettrico auto regolabile della Ditta Terzano con un serpentino raffreddante ad acqua che permetteva, anche nei giorni caldi, la costante regolazione della temperatura.

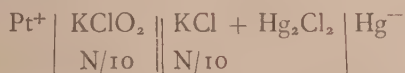
I valori osservati sono dati con l'approssimazione di ± 0.001 volta; sebbene l'istrumento permetta una maggiore esattezza, non ne abbiamo tenuto conto, perchè essa supera le cause di errore delle nostre esperienze: nessuna lettura fu presa come definitiva se non si manteneva costante per almeno un'ora nei limiti sopra detti.

Le concentrazioni sono date sotto ad ogni pila: generalmente fu usato clorito potassico N/10, ottenuto per doppio scambio da clorito di calcio purissimo e carbonato potassico di fresco arroventato, mescolati nei dovuti rapporti. La soluzione, come il prodotto di partenza, era perfettamente esente da cloruri; si lasciava conservare all'oscuro per diversi giorni perfettamente inalterata.

Il clorito di calcio, a differenza di quello di bario, si ha facilmente esente da cloruri, data la grande solubilità del CaCl_2 in alcool ed etere; ciò è importante, essendo, talvolta, il ClO_2 usato nella preparazione non completamente esente di cloro.

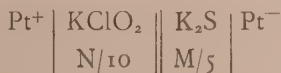
Il clorito di calcio, dopo essiccamento nel vuoto su CaCl_2 aveva un titolo del 99.9 % ed era perfettamente esente da cloruri.

1° Pila clorito potassico-calomelano.



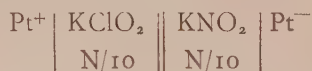
La pila, in cui il sale mercurioso passa a mercurico e il clorito a cloruro, si stabilizza rapidamente a 0.363 volta a 20°.

2° Pila clorito potassico-solfuro potassico.



La pila si stabilizza rapidamente a 1.119 volta a 20°: il solfuro si ossida nettamente a solfato: la corrispondente pila al clorato comincia con un potenziale di circa 1 volta, poi discende notevolmente e non si stabilizza.

3° *Pila clorito potassico-nitrito potassico.*



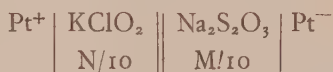
La pila, in cui il nitrito passa a nitrato e il clorito a cloruro, si stabilizza rapidamente a 0.3905 volta a 20°.

4° *Pila clorito potassico-ferrocianuro potassico.*



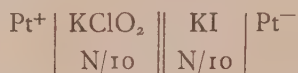
In questa reazione mentre il clorito passa a cloruro il ferrocianuro si ossida a ferricianuro liberando alcali: si hanno inizialmente 0.480 volta poi il voltaggio cala a 0.450 volta ed oltre, e la pila non si stabilizza. Aggiungendo del solfato di magnesio (2% circa) si neutralizza l'alcalinità caustica prodotta dalla reazione e la pila stessa si stabilizza a 20° facilmente sul valore 0.476 volta.

5° *Pila clorito potassico-tiosolfato sodico.*



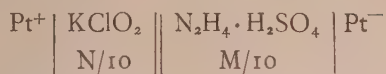
Poichè in questa reazione il tiosolfato passa a solfato acido si ha inizialmente il valore 0.437 volta a 20°: il potenziale sale poi abbastanza rapidamente a 0.490 volta ed oltre e la pila non si stabilizza. In presenza di 2% di borato sodico il valore 0.437 volta si ottiene invece abbastanza rapidamente e si conserva poi perfettamente costante in funzione del tempo.

6° *Pila clorito potassico-ioduro potassico.*



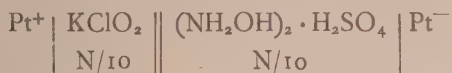
Poichè nell'ossidazione ad iodio si libera alcali caustico si hanno valori variabili; in presenza di acido borico il valore è inizialmente 0.297 e si porta a 0.294 in diverse ore, cioè varia poco; la pila si stabilizza meglio in presenza di solfato di magnesio, aggiunto nella dose del 2% ai diversi liquidi, come nella pila al ferrocianuro: si ottiene così, dopo un po' di tempo, il valore 0.285 volta a 20° perfettamente costante.

7° Pila clorito potassico-solfato di idrazina.



La reazione fu condotta con solfato di idrazina anzichè col cloridrato per evitare l'azione dell'acido cloridrico sul cloroso: si ha stabilizzazione subito a 20° sul valore 0.370 volta.

8° Pila clorito potassico-solfato di idrossilammina.



Si usò il solfato per la stessa ragione della pila precedente, essa si stabilizza rapidamente a 20° sul valore 0.350 volta.

La pila clorito-solfocianato non si stabilizza per l'acidità dovuta alla reazione stessa che fa aumentare il potenziale. L'aggiunta di borato sodico non ci ha permesso di ottenere valori costanti, verosimilmente perchè la reazione non procede secondo un unico schema di reazione, come si fece osservare a suo tempo (loc. cit., p. 378).

Delle pile di ossidazione dei cloriti alcalini come pure di alcune altre pile di riduzione dei cloriti stessi verrà riferito in una prossima Nota.

RIASSUMENDO :

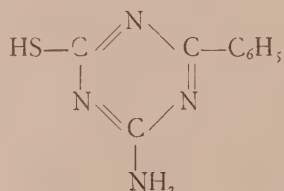
Vengono dati i potenziali di riduzione a 20° dei cloriti con alcuni reattivi in soluzione praticamente neutra. La neutralità, quando ciò era necessario, veniva mantenuta con soluzioni tampone di borato sodico o di solfato di magnesio. Si usarono elettrodi di platino bianco e soluzioni di cloriti assolutamente esenti da cloruri e clorati; i valori ottenuti possono così venire riassunti :

	Hg_2Cl_2 saturo + Hg	K ₂ S M/5	KNO ₂ N/10	K ₄ Fe(CN) ₆ M/40
KClO ₂ N/10	0.363	1.119	0.3905	0.476
	Na ₂ S ₂ O ₃ M/10	KI N/10	N ₂ H ₄ ·H ₂ SO ₄ M/10	(NH ₂ ·OH) ₂ ·H ₂ SO ₄ N/10
KClO ₂ N/10	0.437	0.285	0.370	0.350

Chimica. — *Ricerche sulle γ -triazine. Sintesi di aril-amino-tiol-triazine* ⁽¹⁾. Nota di A. OSTROGOVICH e V. GALEA ⁽²⁾, presentata ⁽³⁾ dal Socio R. NASINI.

Nella Nota che precede ⁽⁴⁾ abbiamo indicato le condizioni per produrre la condensazione fra la *cianguanidina* ed un *tioacido* diverso dal tioacetico, senza essere obbligati a isolarlo come tale, ciò che spesso è assai incomodo, soprattutto nei casi in cui questi composti si alterano con grande facilità. Ed è appunto il primo dei due metodi, descritti nella Nota che precede, che abbiamo adoperato per tutte le sostanze di cui sarà questione nella presente. Essendo esse ben poco solubili a freddo in acqua e in alcool, cristallizzano quasi totalmente insieme col solfato potassico, che si forma per doppio scambio quando si mette in libertà il tioacido, dal suo sale potassico, con acido solforico. Nel liquido filtrato rimane, è vero, una piccola quantità di sostanza, la quale si può recuperare; ma spesso non conviene occuparsene, perchè è sempre colorata più o meno intensamente in giallo ed è abbastanza difficile a purificarsi completamente.

Fenil-amino-tiol-triazina.



Precipitata con acido acetico diluito dalla sua soluzione alcalina ciò che permette di separarla dal solfato potassico, essa si presenta in aghettini microscopici aventi una leggera tinta giallina la quale sparisce quasi completamente per riscaldamento con un miscuglio di etere etilico e cloroformio e quindi con un nuovo trattamento con idrossido di sodio e successiva riprecipitazione con acido acetico diluito.

Si può ottenerla ben cristallizzata in aghetti sottili, per raffreddamento lento della sua soluzione bollente in alcool metilico, in alcool etilico, oppure

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale dell'Università di Cluj.

(2) Questo lavoro fa pure parte della tesi di laurea del signor GALEA.

A. OSTROGOVICH.

(3) Nella seduta del 30 maggio 1930.

(4) Questi « Rendiconti ».

anche in acqua. La sua solubilità in questi solventi non è grande neppure a caldo e decresce per di più dall'alcool metilico all'acqua. Dall'acqua bollente, *se la soluzione è satura*, si depone in fiocchi bianchi formati da aghettini microscopici. In benzene, etere etilico, cloroformio, estere acetico è pochissimo solubile anche a caldo.

Così purificata si fonde con decomposizione a 281–282° dando un liquido vischioso bruno. Peraltro, mettendo il tubicino nel bagno previamente scaldato a circa 275°, il punto di fusione si alza a 287–288°, ciò che spiega il perchè esso vari alquanto col variare del modo di riscaldamento.

	Trovato	Calcolato per $C_9H_8N_4S$
C %	52.83	52.91
H	3.95	3.95
N	27.50	27.45
S	15.74	15.71

Essa è facilmente solubile negli idrossidi alcalini, da cui si riprecipita sia con l'acido carbonico, sia con l'acido acetico diluito. Si scioglie pure facilmente in ammoniacca, anche diluita, e può dare una serie numerosa di sali insolubili con molti dei metalli pesanti: Ag, Cu, Hg, Pb, Fe, ecc.

Per brevità, diamo soltanto, per adesso, l'analisi del SALE D'ARGENTO, bianco, quasi insensibile alla luce, insolubile in NH_3 e poco solubile in NO_3H :

	Trovato	Ag %	34.91
per $C_9H_7N_4S \cdot Ag$	Calcolato		34.70

e quella del SALE RAMICO, ottenuto come il sale d'argento dalla soluzione ammoniacale della sostanza con la quantità necessaria di solfato di rame. Sale di un color giallo-terra-verdastro che, per prosciugamento all'aria, diventa giallastro-pallido, leggermente verdolino.

Una volta asciutto contiene *mezza molecola d'acqua*.

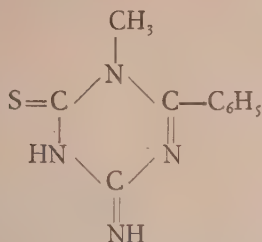
	Trovato	H_2O %	2.03
per $C_{18}H_{14}N_8S_2 : Cu + \frac{1}{2} H_2O$	Calcolato		1.84

Peraltro, quel cambiamento di colore durante il prosciugamento ci fa pensare che almeno l'altra mezza molecola si sia eliminata. Cercheremo, se sarà possibile, di verificare questa supposizione.

La determinazione del rame nel SALE ANIDRO ha dato:

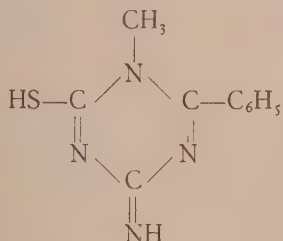
	Trovato	Cu %	13.63
per $C_{18}H_{14}N_8S_2 : Cu$	Calcolato		13.54

Una terza formula che potrebbe anche prevedersi teoricamente:



(Fenil-imino-tion- N^1 -metil-triazina)

non ci pare possa essere attribuita al nostro derivato perchè, se ciò fosse, esso dovrebbe poter passare nuovamente in una *forma tiolica acida*, in presenza di idrossilioni,

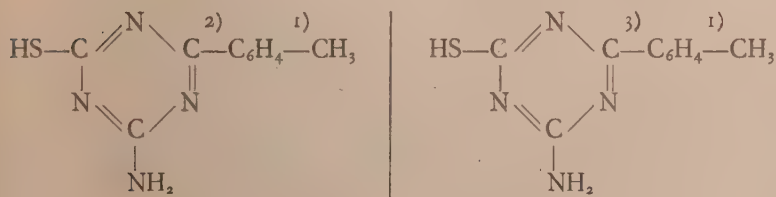


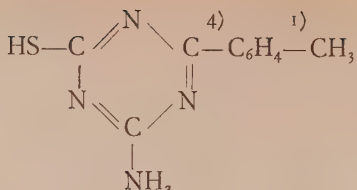
(Fenil-imino-tiol- N^1 -metil-triazina)

e dovrebbe quindi esser solubile negli alcali, ciò che non è.

Rimangono perciò in discussione i due primi schemi; ma per ora non siamo in grado di precisare quale dei due sia realmente da attribuire al nostro derivato metilico. È nostra intenzione peraltro di continuarne lo studio, estendendolo anche ai derivati metilici di tutte le altre *tiol-triazine*, compresa la metil-amino-tiol-triazina già descritta da uno di noi. Desideriamo inoltre di applicare altri mezzi di metilazione, con la speranza di poter ottenere entrambe le serie dei composti metilati.

Orto-, meta- e para-tolil-amino-tiol-triazine.





Questi tre isomeri tolilici si preparano nello stesso modo dell'omologo inferiore fenilico. La loro separazione dal solfato potassico, con cui si trovano mescolati alla fine della reazione, si fa sempre sciogliendo il tutto in idrossido di sodio o di potassio e riprecipitando la tiol-triazina con acido acetico diluito.

Una certa quantità di sostanza (e specialmente del derivato orto-tolilico) si trova nelle acque madri alcooliche del prodotto primitivo; ma, come abbiamo detto a proposito del derivato fenilico, non conviene per lo più occuparsene, visto soprattutto che è piuttosto difficile di ottenere un prodotto ben purificato.

Dei tre isomeri, l'orto-tolilico è relativamente il più solubile; anzi è il più solubile di tutte le *aril-amino-tiol-triazine* che abbiamo preparato. Poi viene il *meta*-, mentre il derivato para-tolilico assomiglia molto, con le sue proprietà, all'omologo inferiore fenilico.

Orto-tolil-amino-tiol-triazina. - Ricristallizzata dall'acqua, in cui è parecchio solubile a caldo, molto meno a freddo, si ha in prismetti acicolari incolori, fusibili con decomposizione a 243-244°, dando un liquido *giallo*. Il punto di fusione può variare di alcuni gradi a seconda del modo come si riscalda.

Dall'alcool metilico e dall'etilico, in cui è pure abbastanza solubile specialmente a caldo, cristallizza in bellissimi prismetti microscopici appiattiti e trasparenti. È facilmente solubile *a caldo* in acetone e in acido acetico, difficilmente solubile in cloroformio, insolubile in etere etilico e in estere acetico.

	Trovato	Calcolato per $\text{C}_{10}\text{H}_{10}\text{N}_4\text{S}$
C %	55.35	55.00
H	5.01	4.62
N	25.74	25.68
S	14.81	14.70

Si scioglie facilmente, come tutte le altre tiol-triazine, negli idrossidi alcalini, come pure in ammoniacca. Dalla soluzione ammoniacale diluita, con la quantità calcolata di NO_3Ag , si precipita un SALE D'ARGENTO bianco

fioccoso, praticamente insolubile in NH_3 , ed assai poco solubile anche in NO_3H . Una volta asciutto è una polvere amorfa.

	Trovato	Ag %	33.31
per $\text{C}_{10}\text{H}_9\text{N}_4\text{S} \cdot \text{Ag}$	Calcolato		33.19

Dà pure un sale ramico di color giallo-terra-verdastro, che verrà descritto nella memoria complessiva.

Aggiungendo alla soluzione alcoolica della sostanza un piccolo eccesso di soluzione acquosa satura di acido picrico, si precipita il PICRATO corrispondente in prismetti acicolari di color giallo, pochissimo solubili e che si fondono con decomposizione a $224-225^\circ$. Diamo di esso il solo dosaggio dello zolfo, per i motivi già menzionati:

	Trovato	S %	7.28
per $\text{C}_{10}\text{H}_{10}\text{N}_4\text{S} \cdot \text{C}_6\text{H}_3\text{N}_3\text{O}_7$	Calcolato		7.17

Il cloridrato e il solfato verranno descritti altrove.

Meta-tolil-amino-tiol-triazina. - Prismetti microscopici appiattiti dall'alcool, in cui è poco solubile a freddo, parecchio di più a caldo. Dall'acqua si ha in prismetti acicolari microscopici. Negli altri solventi si scioglie pure un po' meno dell'isomero orto-tolilico. Si fonde con decomposizione a $272-273^\circ$ dando un liquido arancione, che poi si imbrunisce rapidamente. Se si riscalda presto, il punto di fusione si alza di alcuni gradi.

	Trovato	Calcolato per $\text{C}_{10}\text{H}_{10}\text{N}_4\text{S}$
C %	55.00	55.00
H	4.79	4.62
N	25.63	25.68
S	15.07	14.70

È facilmente solubile negli idrossidi alcalini, ma un po' meno nell'ammoniaca e può dare essa pure diversi sali metallici insolubili.

Il SALE D'ARGENTO, bianco fioccoso, precipita dalla soluzione ammoniacale con la quantità calcolata di NO_3Ag . È insolubile in NH_3 , e assai poco anche in NO_3H .

	Trovato	Ag %	33.21
per $\text{C}_{10}\text{H}_9\text{N}_4\text{S} \cdot \text{Ag}$	Calcolato		33.19

Fra i diversi sali che la sostanza può dare con gli acidi, abbiamo analizzato per ora il PICRATO, che si prepara come quello del derivato orto-tolilico. Prismetti acicolari gialli assai poco solubili in acqua e che si fondono con decomposizione a $210-211^\circ$.

Sempre per il solito motivo diamo soltanto il dosaggio del zolfo.

	Trovato	S %	7.05
per $C_{10}H_{10}N_4S \cdot C_6H_3N_3O_7$	Calcolato		7.17

Para-tolil-amino-tiol-triazina. — È una sostanza assai difficilmente solubile nei diversi solventi; dall'alcool bollente si può ricristallizzare, ottenendola in aghettini minutissimi aventi una leggerissima tinta giallina, che è assai difficile eliminare completamente. Tuttavia, siamo riusciti ad averla perfettamente incolore. Si fonde con decomposizione a 279–280° se si riscalda nel modo ordinario; se si riscalda rapidamente, si fonde 6 o 7 gradi più alto.

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_{10}N_4S$
C %	55.34	55.00
H	4.59	4.62
N	25.41	25.68
S	14.39	14.70

Si scioglie facilmente, come le altre, negli idrossidi alcalini, ma un po' meno nell'ammoniaca. Dalla soluzione ammoniacale si possono ottenere diversi sali insolubili con alcuni metalli pesanti.

Il SALE D'ARGENTO, bianco gelatinoso, si prepara nello stesso modo descritto per gli altri derivati.

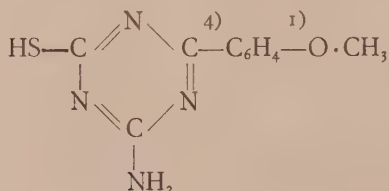
	Trovato	Ag %	33.34
per $C_{10}H_9N_4S \cdot Ag$	Calcolato		33.19

Con gli acidi dà pure facilmente i sali corrispondenti, in generale assai solubili nell'acqua.

Il PICRATO è invece difficilmente solubile e cristallizza dall'acqua bollente in aghettini prismatici appiattiti, di color giallo, che si rondono a 191–192°, con decomposizione, dando un liquido arancione che imbrunisce rapidamente.

	Trovato	S %	6.92
per $C_{10}H_{10}N_4S \cdot C_6H_3N_3O_7$	Calcolato		7.17

Para anisil-amino-tiol-triazina.



Si prepara come le altre aril-amino-tiol-triazine ed è, essa pure, pochissimo solubile in acqua ed in alcool, specialmente a freddo. È difficilmente solubile in acetone, ancora meno in cloroformio e nell'acqua; praticamente insolubile in etere etilico e in estere acetico. Il meglio è di ricristallizzarla dall'alcool bollente; ottenendo così aghettini sottili incolori, fusibili a 282–283°, tenendo presente l'osservazione già fatta per le altre tiol-triazine.

Data la sua insolubilità in acqua fredda si può averla molto pura anche con ripetute precipitazioni dalla sua soluzione alcalina con acido acetico diluito. Si ha così una polvere cristallina bianca, formata da aghettini microscopici raggruppati a rosetta, che si lavano bene con acqua, con alcool e poi con etere etilico.

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_{10}ON_4S$
C %	50.99	51.24
H	4.42	4.31
N	23.95	23.93
S	13.87	13.68

È facilmente solubile negli idrossidi alcalini ma un po' meno nell'ammoniacca. Da questa soluzione si può avere il SALE D'ARGENTO, con la quantità necessaria di NO_3Ag , sotto forma di prismetti microscopici incolori, insolubili in NH_3 e assai poco solubili anche in NO_3H .

	Trovato	Ag %
per $C_{10}H_9ON_4S \cdot Ag$	31.41	
	Calcolato	31.54

Si scioglie pure facilmente negli acidi minerali, dando i sali rispettivi assai solubili. Con l'acido picrico dà, invece, un PICRATO in aghetti lunghi e sottili, raggruppati concentricamente, pochissimo solubili tanto nell'acqua quanto nell'alcool, e che si fondono con decomposizione a 198–199° dando un liquido rosso ciliegia.

Ne diamo, al solito, la sola determinazione dello zolfo.

	Trovato	S %
per $C_{10}H_{10}ON_4S \cdot C_6H_5N_3O_7$	7.13	
	Calcolato	6.92

RIASSUNTO.

In questa Nota descriviamo cinque nuove *aryl-amino-tiol-triazine*, preparate col primo dei metodi descritti nella Nota precedente e cioè, facendo condensare a freddo la *cianguanidina* coll'*aryl-tiol-acido* corrispondente messo in libertà con acido solforico diluito dal suo sale potassico, in atmosfera d'anidride carbonica.

Questi cinque derivati sono: la *fenil-amino-tiol-triazina*, fusibile con decomposizione a 281-282°; la *orto-tolil-amino-tiol-triazina*, fusibile con decomposizione a 243-244°; la *meta-tolil-amino-tiol-triazina*, fusibile con decomposizione a 272-273°; la *para tolil-amino-tiol-triazina*, fusibile con decomposizione a 279-280° e infine la *para anisil-amino-tiol-triazina*, fusibile con decomposizione a 282-283°. Descriviamo quindi alcuni dei loro *sali*, tanto coi metalli, quanto con gli acidi e, per il *derivato fenilico*, descriviamo inoltre un *etere metilico* il cui studio verrà continuato, procurando di generalizzarlo anche alle altre *tiol-triazine*.

Fisiologia. — *La rigenerazione del sistema nervoso centrale prima e dopo la nascita* ⁽¹⁾. Nota di A. MIGLIAVACCA, presentata ⁽²⁾ dal Socio F. BOTTAZZI.

La rigenerazione del sistema nervoso centrale nei mammiferi è stata oggetto di studi insistenti da parte dei biologi, che si sono sforzati di indagare se e fino a qual punto questa potesse verificarsi, e se eventualmente fosse seguita da un evidente ripristino funzionale.

Queste ricerche in gran parte sono state eseguite sul midollo spinale, che offre difficoltà relativamente scarse all'esperimento, ed in periodi di sviluppo non molto avanzati, per poter più agevolmente sorprendere in questo tessuto a elementi perenni delle attività neoformative vivaci.

Gli studi sulla neurogenesi secondaria sono stati inoltre diretti a indagare i fatti piuttosto precoci della rigenerazione, come quelli più interessanti dal punto di vista morfologico.

I risultati, a parte alcuni interessanti dettagli, sono stati costantemente negativi, ed ormai il sistema nervoso centrale viene universalmente considerato come un tessuto incapace di rigenerazione, documentabile dal lato fisiologico dal ripristino della funzionalità.

Le mie ricerche, dirette a studiare la rigenerazione del midollo spinale nei mammiferi e controllare se eventualmente anche dal lato fisiologico questa possa portare a effetti utili, sono state compiute oltrechè su mammiferi neonati, come già hanno fatto precedenti autori, anche su feti di mammiferi ancora contenuti nell'utero materno.

Ecco in breve la tecnica seguita per la rachiotomia nei topi e ratti neonati: un coltellino di Graefe veniva infisso per un tratto ben determi-

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto « Camillo Golgi » di Patologia generale e Istologia della R. Università di Pavia.

(2) Nella seduta del 30 maggio 1930.

nato perpendicolarmente e lateralmente alla colonna vertebrale in corrispondenza del terzo superiore del segmento lombare, e quindi con un unico movimento di lateralità si sezionava trasversalmente la colonna vertebrale avendo cura di assicurarsi subito dopo della completa rachiotomia avvenuta, controllando i possibili spostamenti dei due segmenti sezionati. Solo in tal modo si può essere certi che la lesione midollare è stata completa.

Tale piccolo atto operatorio esige però una particolare cura in quanto bisogna evitare che la lesione interessi anche l'aorta discendente; in tal caso si produce una emorragia rapidamente mortale. Si può anche, nei primi tentativi di lesione, compiere la sezione con un coltellino munito di arresto.

La rachiotomia nei feti esige un procedimento meno semplice: aperto l'addome della madre per un certo tratto sulla linea mediana, si estraeva l'utero gravido e individualizzato per transilluminazione uno dei feti, con lievi spinte e contropinte se ne fissava il dorso contro la parete uterina, indi dopo aver inciso per brevissimo tratto l'utero, si procedeva alla rachiotomia del feto, seguendo lo stesso metodo sopra descritto, e si suturava poi la ferita lineare prodotta nell'utero con seta finissima.

La mortalità dei feti è stata maggiore di quella dei neonati: questo facilmente si spiega, quando si pensi alle notevoli difficoltà di ledere con un tratto unico la colonna vertebrale del feto, dovendo in certo qual modo procedere alla cieca e nella necessità di lasciar defluire dalla breccia uterina la minor quantità possibile di liquido amniotico.

Ogni colonna vertebrale prelevata in tutta la sua lunghezza era immersa nella miscela di De Castro per la opportuna decalcificazione della parte ossea, quindi trattata secondo il metodo fotografico di Cajal: le sezioni di ogni colonna vertebrale erano eseguite in serie completa.

Gli animali operati di rachiotomia presentavano tutti una paraplegia flaccida del treno posteriore, disturbi funzionali a carico della vescica (iscuria paradossa) e talvolta fatti distrofici agli arti posteriori.

In molti animali la paraplegia e i disturbi vescicali continuarono immutati per tutto il tempo in cui gli animali furono lasciati in vita.

In due animali ho potuto invece osservare il ristabilirsi dei riflessi e di movimenti volontari agli arti posteriori.

I processi rigenerativi da me osservati non si sono tutti svolti secondo una modalità unica, ma hanno presentato variazioni di una certa entità.

Le ragioni di tali diverse modalità di rigenerazione a noi sfuggono in gran parte.

Si può pensare che al loro determinismo abbia contribuito il particolare comportamento del tessuto che in un primo tempo ha stabilito il collegamento fra i due monconi midollari.

Sembra logico ammettere che tale tessuto debba avere influito sull'impulso formativo delle fibre in via di rigenerazione, pur senza escludere che

altre condizioni possano intervenire in qualsiasi momento ad influire sui processi rigenerativi.

Riporto qui i reperti istologici riferentisi a due animali che avevano subita la rachiotomia, rispettivamente dopo e prima della nascita.

In un animale neonato operato di rachiotomia e ucciso dopo 45 giorni da questa, allorchè era in grado di sorreggersi sul treno posteriore ed eseguire movimenti deambulatori validi ma non coordinati, si nota che la soluzione di continuo fra il moncone prossimale e il distale, che sembra essere stata di oltre un millimetro è colmata da fibre rigenerate le quali appaiono in diretta e insensibile continuazione colle fibre del moncone centrale e seguono un decorso pressochè rettilineo fino al punto di penetrazione nel moncone periferico.

Tali fibre rigenerate costituiscono complessivamente un grosso fascio di notevole compattezza che inizialmente ha lo stesso volume e spessore del midollo spinale da cui proviene e si continua, e che si riduce lievemente di ampiezza e si fa più compatto nel suo percorso verso il moncone distale.

Le fibre rigenerate penetrando nel moncone distale si confondono con le fibre già esistenti in quest'ultimo in un intreccio così complicato e disordinato di fibre nervose per cui riesce spesso difficile il seguirle ulteriormente nel loro decorso entro la zona mediana del moncone distale stesso, tanto più che nel punto d'incontro i fasci di fibre partenti dal moncone distale sembrano irradiarsi a ventaglio verso il fascio di fibre rigenerate provenienti dal moncone prossimale, quasi a denotare un tentativo di rigenerazione successivamente e per cause ignote arrestatosi da parte del moncone distale stesso.

Nelle parti laterali del midollo è invece più facile seguire, e in alcuni casi per un lungo tratto, le fibre rigenerate nel loro decorso nei fasci, frammisti alle fibre più periferiche del moncone distale.

La maggior parte delle fibre rigenerate è ancora allo stato di fibre amieliniche: purtuttavia sono già abbondanti le fibre in stato di mielinizzazione avanzata.

Tra le fibre nervose rigenerate si possono osservare cellule presentanti chiaramente i caratteri di elementi giovani, con nuclei grandi chiari rotondeggianti, circondati da un alone di protoplasma scarso e scarsamente colorabile.

Nel fascio di fibre rigenerate non è possibile osservare cellule nervose. Le caratteristiche cellule nervose del midollo spinale si vedono arrestarsi nelle regioni proximiori alla lesione tanto nel moncone distale che nel prossimale a un livello ben determinato, corrispondente probabilmente a quella parte di midollo spinale rimasto integro e non danneggiato nè dalla lesione, nè dalla successiva inevitabile degenerazione. Tali cellule appaiono

in perfetto stato di conservazione ed alcune sicuramente ipertrofiche: nel moncone distale i prolungamenti di queste cellule ripiegandosi su se stessi, compongono un complicato intreccio.

Da ambo i lati del midollo e parallelamente ad esso decorrono due fasci di fibre evidentemente rigenerate, che stabiliscono le connessioni fra i monconi rispettivamente della radice motoria e di quella sensitiva.



Microfotografia della colonna vertebrale interessante la zona di lesione. Si osserva distintamente che il moncone periferico (in basso) presenta un brusco arresto, emettendo brevi fibre che si irradiano a ventaglio verso il fascio di fibre rigenerate provenienti dal moncone centrale; queste costituiscono nel loro insieme un grosso fascio che ha pressoché lo stesso volume del midollo spinale da cui proviene, e appaiono in diretta e insensibile continuazione colle fibre del moncone centrale.

Intorno alla zona midollare lesa si possono osservare i vari tessuti (ossa, muscoli, ecc.) già interessati dalla lesione in uno stato di perfetta riorganizzazione. Il tessuto osseo dei corpi vertebrali si è completamente rigenerato e non presenta alcuna irregolarità né nella disposizione né nello spessore delle travate ossee: le fibre muscolari si sono pure rigenerate in un modo completo, e presentano soltanto una maggiore quantità di nuclei:

le fibre nervose rigenerate portantisi alle fibre muscolari seguono un decorso alquanto irregolare, ed appaiono notevolmente ingrossate.

In un animale operato di rachiotomia mentre ancora era contenuto nell'utero materno si rileva dopo 36 giorni da questa (ventinove dalla nascita) che la soluzione di continuo tra moncone prossimale e distale è colmata da elementi cellulari presentanti un nucleo ovale e tondeggiante con cromatina disposta a piccoli blocchetti e protoplasma scarsissimo.

Fra questi elementi si spingono le fibre nervose rigenerate, in numero notevolissimo, la maggior parte delle quali attraversa completamente il tessuto di cicatrice e si perde nelle fibre del moncone opposto.

Tali fibre rigenerate penetrano per lo più nel tessuto neoformato in fascetti di 4 o 5 fibre, a decorso pressochè rettilineo, ed emettono biforcazioni soltanto in vicinanza del moncone opposto. Le fibre rigenerate sono fortemente argentofile e terminano talora in piccoli bottoni o rigonfiamenti a struttura omogenea. La maggior parte delle fibre è allo stato di fibre amieliniche e proviene dal moncone prossimale del midollo.

Alcune fibre si presentano straordinariamente grosse, nastriformi, con ingrossamenti nodosi, da cui partono grosse biforcazioni, che si possono seguire per lunghissimo tratto, spesso a decorso ricorrente. Qualcuna di queste fibre, dopo aver attraversato completamente il tratto cicatriziale (fibre perforanti) compie bizzarre volute nella parte del moncone più prossima alla lesione e quasi si esaurisce suddividendosi a più riprese.

Seguendo il decorso di queste fibre nastriformi, si osserva che gli ingrossamenti presentano talora una struttura nettamente fibrillare, talora granulosa. Le cellule nervose in vicinanza della lesione appaiono come ipertrofiche, con un nucleo voluminoso, e rete fibrillare evidente. Alcuni elementi cellulari del moncone distale si presentano però male impregnati, a protoplasma uniformemente granuloso e a contorni mal precisati. I tessuti circostanti (ossa, muscoli, ecc.) alla lesione, si sono perfettamente riformati, come nel caso precedente.

Questi due casi per la loro notevole rassomiglianza nel reperto istologico e nel decorso post-operatorio (le differenze sono essenzialmente quantitative) si prestano ad alcune considerazioni.

Anzitutto l'unione dei due monconi midollari è avvenuta in via diretta, cioè le fibre hanno seguito il più breve tratto per poter effettuare il loro incontro. Si deve notare qui che mentre nel primo caso, pur essendo risultata la lesione più ampia che non nel secondo, la rigenerazione delle fibre nervose è stata molto più intensa: qui manca completamente o quasi il tessuto di cicatrice.

Nel secondo caso invece, pur essendo stata la lesione di minor conto, la rigenerazione delle fibre risulta quantitativamente di minor entità: e in questo caso il tessuto di cicatrice appare molto abbondante.

Si potrebbe nel primo caso affacciare l'ipotesi che l'abbondante rigenerazione si debba attribuire alla scarsissima formazione di un tessuto cica-

triziale, non escludendo che altre condizioni abbiano contribuito a creare circostanze più favorevoli.

Si potrebbe quindi pensare che il tessuto cicatriziale possa limitare il processo rigenerativo, forse per le notevoli difficoltà meccaniche opposte alla penetrazione delle fibre in via di rigenerazione.

Nelle lesioni dei ganglii spinali sono stati descritti ricchi apparati fibrillari pericellulari e fibrille spesso terminanti in un piccolo anello chiuso, apparati a struttura alquanto diversa da quella normale. Tali anelli terminali sono stati da Nageotte identificati agli anelli di Dogiel riscontrabili in condizioni normali, e ritenuti da taluni (Cajal) espressione di un processo rigenerativo, per il fatto di averli ritrovati nei ganglii trapiantati sopra un nervo sezionato, generandosi essi a spese di fibre neoformate del moncone centrale del nervo.

Nelle mie ricerche, nei casi in cui la lesione ha interessato il ganglio spinale, non ho mai potuto osservare nidi pericellulari, e solo eccezionalmente la presenza degli occhielli di Dogiel, probabilmente per il fatto che tali formazioni si riscontrano solo dopo alcuni giorni dalla lesione.

In tutti i casi di lesione dei ganglii ho notato che esistono degli elementi nervosi a protoplasma omogeneamente chiaro, a nucleo bene evidente spesso con due nucleoli, ed elementi sicuramente degenerati, a protoplasma fortemente ed irregolarmente impregnato, spesso a struttura spugnosa, a limiti mal definiti, a nucleo non impregnabile.

Da molte di queste cellule partono grosse fibre mal impregnate che a breve distanza dal corpo cellulare si risolvono in un glomerulo più o meno intrecciato.

Fra i singoli elementi cellulari si scorgono spesso, accanto a grossi tratti di fibre degenerate, sottili ramuscoli costituiti da fibre esilissime suddividentisi a più riprese, fortemente impregnate.

Il tessuto di cicatrice nel ganglio è costituito da giovani elementi connettivali fusati, a disposizione irregolare: in questo tessuto si possono più agevolmente seguire le fibre amidollate, a successive suddivisioni, spesso raggruppate in fascetti, sicuramente rigenerate, che sono in continuazione con quelle riscontrate tra le cellule, dai cui prolungamenti probabilmente derivano.

In un caso in cui la lesione ha colpito il ganglio nella zona di emergenza delle fibre, lesione poco profonda, ma certamente estesa in quanto ha distrutto completamente il fascio di fibre, oltre alla presenza di numerosi glomeruli attorno a cellule degenerate, si osservano fascetti di fibre di estrema delicatezza percorrere con decorso regolare per buon tratto il tessuto cicatriziale, e quindi suddividersi a Y.

Questi fascetti di fibre così esili, colle loro biforcazioni, sembrano ricordare la formazione delle fibre a T.

In molti casi le radici spinali lese, in corrispondenza del tratto midollare sezionato si trovano accollate al midollo stesso, facendo corpo con esso, per cui riesce difficile potere distintamente studiare i fatti rigenerativi a carico delle fibre radicolari.

Queste si presentano solitamente ingrossate, malamente impregnate e frequentemente terminanti in una bolla o in una massa talora reticolata. Fra queste grosse fibre si possono scorgere fini fibre amidollate percorrenti spesso lunghi tratti al di sopra della lesione. Queste fibre, che si possono ritenere per i loro caratteri sicuramente rigenerate, emettono spesso sul loro percorso fini ramificazioni, a decorso per lo più ricorrente.

Nei casi in cui la lesione ha colpito la radice in un tratto più lontano dal midollo, è più facile studiarne i fatti rigenerativi, consistenti in ricche neoformazioni di fibre irregolarmente ondulate, disponentisi spesso a fasci.

In un caso in cui esisteva un ostacolo nell'interno del canale midollare, dovuto alla frapposizione di un frammento di sostanza ossea tra i due monconi del midollo, ho osservato un curioso ed interessante fatto: l'unione di due ganglii spinali di uno stesso lato e situati rispettivamente alle due estremità del frammento osseo, effettuata da un grosso fascio di fibre nervose rigenerate in cui si possono osservare intrecci complicati e talora anche formazioni a spirale piuttosto semplici, ma tuttavia ricordanti quelle riscontrabili nelle lesioni dei nervi periferici.

Al ganglio inferiore le fibre arrivano evidentemente dalla periferia: da quello superiore parte un fascio che mi è stato possibile di seguire per un certo tratto.

Si potrebbe pensare che le fibre sensitive giunte al ganglio inferiore dalla periferia invece di continuare la via per la loro radice, che le immetterebbe in un tratto midollare in degenerazione, devino per raggiungere il ganglio superiore, da cui poi, imboccando la radice propria di questo ganglio, potranno continuare il loro percorso, assicurando in tal modo un effetto utile alla funzione.

Sarebbe in tal caso questo un esempio di possibile formazione di una breve vita sussidiaria della sensibilità nei processi di neurogenesi secondaria, qualora venga impedito da un ostacolo meccanico di una certa entità il collegamento dei neuroni interrotti.

Le ricerche compiute su neonati e feti di mammiferi, mi autorizzano a trarre le seguenti conclusioni:

1° Le lesioni del midollo spinale, in condizioni del tutto particolari ed eccezionalmente favorevoli, possono ripararsi per vera e propria rigenerazione di fibre nervose, che giungono talora a costituire dei voluminosi fasci;

2° La rigenerazione si compie per opera di fibre nervose provenienti quasi sempre dal moncone midollare prossimale: in casi speciali le fibre rigenerate possono originarsi anche dal moncone distale;

3° Alla rigenerazione anatomica delle fibre nervose corrisponde in qualche raro caso dal lato fisiologico un accentuato ripristino della funzionalità;

4° In nessun caso si osservano nel tessuto rigenerato cellule nervose neoformate;

5° In corrispondenza di un ostacolo di una certa entità, frapposto ai due monconi midollari, le fibre rigenerate cercano di aprirsi una strada girando attorno all'ostacolo, per poter in tal modo assicurare la possibilità di una riunione dei monconi, utile dal punto di vista fisiologico;

6° Nei ganglii spinali si osservano fatti rigenerativi talora notevoli a carico esclusivamente delle fibre nervose;

7° Nelle radici spinali i fatti rigenerativi sono molto evidenti soprattutto nelle radici sensitive, e possono persino giungere alla neoformazione di grossi fasci di fibre stabili il collegamento dei neuroni interrotti.

N. P.

INDICE DEL VOLUME XI, SERIE VI. — RENDICONTI

1930

INDICE PER AUTORI

A

- ABETTI G. — « Altezza della cromosfera nel 1929 ed andamento del presente ciclo solare ». 921.
- AIROLDI M. — « Sull'età delle eruzioniandesitiche dell'Isola di Capraia ». 416.
- AMALDI U. — Vedi LEVI-CIVITA T.
- ANDREATTA C. — « Bianchite, nuovo minerale ». 760.
- ANDREOLI G. — « Limite e pseudo-limite di una successione ». 946.
- ANDRISSI G. L. — « Sul sistema 61 Cygni ». 899.
- ANELLI M. — « A proposito di una sezione geologica nell'Appennino Reggiano ». 79, 202.
- ANGELI A. — « Sopra i neri di pirrolo ». 439.
- ID. — « Sopra alcune relazioni fra costituzione ed odore ». 442, 535.
- ID. — « Ricerche e considerazioni sopra la struttura dei diazocomposti ». 442.
- ID. e POLVERINI A. — « Il potere ossidante dei diazoidrati e le loro analogie con l'acido nitroso ». 442, 542.
- ID. — « Sopra la costituzione e le reazioni dei diazoidrati isomeri ». 923.
- APOLLONI N. — Vedi BRUNELLI G.
- ARMELLINI G. — « Sopra la distanza del nuovo pianeta ultranettuniano ». 645.
- ID. — « Sopra la teoria moderna dell'evoluzione delle stelle ». 232.
- ARTOM C. — « L'origine e l'evoluzione della partenogenesi nell'Artemia salina diploide di Sète (Cette) ». 699.

ASCOLI G. — « Ancora sulla rappresentazione lineare delle funzioni continue ». 351.

AUDISIO F. — « Calcolo di π colla serie di Leibniz ». 959, 1077.

B

BALDONI RINA. — « Sistemi di normali principali ad una varietà nel suo Π_3 ». 149, 261.

BARBA G. — « Sopra l'equazione funzionale $f(x)f'(x)=f[f(x)]$ collegata ad un problema geometrico ». 655, 735.

BARBIERI G. A. — « Sulla riduzione del ferricianuro di argento mediante solfato ferroso ». 685.

BARBIERI N. A. — « La cultura fisiologica migliora il metabolismo delle piante senza alterare il terreno ». 712.

BARBIERI U. — « Stazione astronomico-geodetica compiuta nel vertice di 1° ordine Eremo di Cherasco, nel luglio 1928 ». 293, 404.

BARGELLINI G. e GRIPPA A. — Sulla 2-5-dibromo-anisidina ». 673.

ID. e ID. — « Sulla 2-5-dibromo-fenetidina ». 489.

ID. e MADESANI F. — « 3-5-dibromo-anisidina e 2-6-dibromo-anisidina ». 676.

ID. e MONTI LYDIA. — « 2-6-dibromo-fenetidina e 3-5-dibromo-fenetidina ». 493, 574.

BARONI A. — « Polisolfori, solfodiseleniuro e selendisolfuro difenilici ». 579.

- BARONI A. — « Azione del bromuro di etilmagnesio e degli ossidanti sui polisolfuri dietilici ». 905.
- BEDARIDA A. M. — « L'infinità dei numeri primi nelle forme quadratiche ». 650.
- BELLUIGI A. — « Sulla tectonica di alcune strutture profonde scoperte gravimetricamente nella pianura padana ». 467.
- ID. — « Sulle caratteristiche fisiche della pianura marginale appenninica modenese ». 769.
- ID. — « Sulle correzioni topografiche nei rilievi eötvössiani ». 668.
- BEMPORAD G. — « Il significato del principio della media aritmetica ». 789.
- BERNARDINI G. — « Velocità caratteristiche degli elettroni diffusi dalle superfici metalliche ». 1004, 1096.
- BERTOLINI FAUSTA. — « Rigenerazione dell'apparato digerente nelle Oloturie ». 600.
- BETTI M. — « Sullo sdoppiamento ottico delle aldeidi racemiche ». 493, 587.
- BIANCHI E. — Presenta in omaggio i primi due volumi della ristampa delle opere di G. V. Schiaparelli ». 1048.
- BINI G. — « Un nuovo metodo per l'identificazione ed il dosaggio dei nitrati nelle acque ». 593.
- BOMPIANI E. — « Interpretazione proiettiva di alcune equazioni differenziali ordinarie del 2° ordine ». 33.
- BONVICINI D. — « Su alcuni teoremi fondamentali dell'elettrodinamica e della statica dei solidi elastici ». 974.
- BOSSA E. — « L'effetto "Hall" per i metalli Ni, Fe, Cu in campi magnetici deboli ». 482.
- BRACALONI L. — Vedi CASSINIS U.
- BRELOT M. — « Sopra gli integrali della (1) $\Delta u = c(M) u (M) (c \neq 0)$ nelle vicinanze di un punto singolare O della $c(M)$ ». 800.
- ID. — « Sopra la nozione di sorgente puntuale del calore in un piano irradiante in equilibrio termico ». 268.
- ID. — « Sopra l'equazione (1) $\Delta u = c(x, y) u(x, y) c \neq 0$ ». 283, 371.
- ID. — « Sopra le sorgenti puntuali del ca-

lore in un piano irradiante in equilibrio termico ». 458.

- BRUNELLI G. — « L'eutrofismo da stagnazione nei laghi artificiali ». 495.
- ID. e APOLLONI N. — « Su alcune caratteristiche delle associazioni lagunari mediterranee ». 515, 607.
- BRUNI G. e NATTA G. — « La struttura cristallina del tiofene ». 929.
- ID. e ID. — « La struttura cristallina del benzolo e le sue relazioni con quella del tiofene ». 934, 1058.

C

- CACCIAMALI G. B. — « Possibili ricerche nel sottosuolo lombardo ». 308.
- ID. — « Problemi di tectonica lombarda (a proposito di ricerche nel sottosuolo) ». 80, 206.
- CACCIOPPOLI R. — « Sulle serie di Laplace ». 283, 357.
- ID. — « Una questione di stabilità ». 251.
- ID. — « Un teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale ». 744, 794.
- CAGNASSO A. — Vedi CAMBI L.
- CALDONAZZO B. — « Moti piani irrotazionali di liquidi perfetti in presenza di ostacoli mobili ». 400.
- ID. — « Moti piani irrotazionali di liquidi perfetti in presenza di un disco mobile ». 807.
- CALONGHI M. — « Sulla curvatura media delle superficie ». 554.
- CAMBI L. e CAGNASSO A. — « Le reazioni fra composti ferrosi ed ossido d'azoto ». 26, 133.
- ID. e RICCI T. — « Su gli arilnitroso-ferropentacianuri: formazione dalle arildrosilammine e nitroprussiato ». 443.
- CANNICCI G. — « Contributo allo studio del glutatione nei teleostei. — Osservazioni sul metodo di dosaggio ». 509, 601.
- CARAFOLI E. — « Considerazioni teoriche sul "girante a paletta" ». 288.
- CASSINIS U. e BRACALONI L. — « Curva idremica provocata nel riposo e negli esercizi fisici ». 324, 515.

- CASTELNUOVO G. — Presenta la Memoria della signora *Margherita Piazzolla-Beloch*: «Sulle superficie iperelittiche di rango 3». 107.
- CATTANEO P. — «Sopra una classe di varietà cicliche». 659.
- CHECCHIA-RISPOLI G. — «Su di un caso di tetrameria in un Echinide exocisto». 596.
- CHERUBINO S. — «Alcune osservazioni suggerite da un teorema sulle varietà abeliane reali». 179, 254.
- ID. — «Un teorema generale sulle varietà abeliane reali». 154.
- ČECH E. — «Une démonstration du théorème de Cauchy et de la formule de Gauss». 884.
- CIORANESCU N. — «L'approximation d'une fonction par une autre fonction appartenant à une fonctionnelle linéaire donnée, et l'approximation d'un champ vectoriel quelconque par un champ irrotationnel». 159.
- CIBRARIO M. — «Sulla non esistenza di congruenze W di rette iperspaziali che abbiano per prime due falde focali delle varietà luoghi di spazi». 59, 170.
- CISOTTI U. — «Azioni dinamiche di correnti circolatorie intorno a una lastra bilatera e intorno a una lastra arcuata». 11, 122.
- ID. — «Azioni dinamiche di correnti traslocircolatorie intorno a una lastra arcuata». 335.
- ID. — «Elettrostatica piana». 243.
- ID. — «Tensori isotropi». 727.
- ID. — «Tensori isotropi e tensori emisotropi». 917.
- ID. — «Tensori quadrupli isotropi». 1055.
- COLLA S. — «Variazioni del contenuto in O_2 nelle vesciche idrostatiche di alcune alghe brune». 614.
- COLLA C. — Vedi FERRARI A.
- COMEL M. — «Se lo stronzio possa fissarsi nei tessuti». 321.
- ID. — «Studi sulla sindrome paratireopriva. II. Azione preventiva dell'ergasterolo irradiato in dosi eccessive». 857.
- CONSIGLIO A. — «Ancora una eccezione del teorema di Kutta-Joukowski». 813.
- COTRONEI G. e SPIRITO A. — «Costituzione zoologica e trapianti. Esperienze tra Anuri e Urodeli». 425.
- ID., ID. — «Costituzione zoologica e trapianti. Nuove esperienze tra Anuri e Urodeli». 854.
- CROCCO G. A. — «L'importanza dei momenti di cerniera nella sicurezza del volo meccanico». 11.
- ID. — Presenta in omaggio il volume I del suo «Corso d'aviazione». 1048.
- CURZI M. — «Prime osservazioni su la mutazione di un ifomicete». 506.

D

- DAINELLI G. — Vedi MILLOSEVICH F.
- D'ASCIA MARIA. — «Saggio del metodo dei minimi quadrati per l'integrazione numerica delle equazioni differenziali lineari». 450.
- DE ANGELIS G. — Vedi TIZZONI G.
- DEBENEDETTI A. — «Sulla determinazione dei plagioclasti per mezzo della misura degli angoli d'estinzione nella zona normale a (0.10)». 848.
- DE CARO L. — «Sul potere regolatore dei principali costituenti del succo muscolare». 98.
- DE FAZI R. e PIRRONE F. — «Studi intorno agli indoni. - Nuove reazioni dell' α - etil- β - fenil-indone e dell' α - metil- β - fenil-indone». 70.
- DE FAZI R. — «Azione dei raggi ultravioletti sulla germinazione dell'orzo, per la fabbricazione del malto». 1022.
- DELLA MOGLIE G. — «Studio e tabellazione di una particolare funzione definita da un integrale improprio». 951.
- DE LORENZO G. — «Sulla causa geologica della scomparsa dell'antica città di Paestum». 1062.
- DEL REGNO W. — «Sulla legge di emissione del Nichel». 986.
- DE MARCHI L. — «Commemorazione del Socio *Hermann Wagner*». 102.
- DESIO A. — «Sulla presenza del siluriano fossilifero nell'isola di Coo (Egeo)». 1020.

DI FRANCO S. — «La lava dell'eruzione dell'Etna del 1928». 212.

E

FREDIA ANNA. — «Sul coefficiente di persistenza dei giorni piovosi». 821.

F

FANO GINO. — «Reti di complessi lineari dello spazio S_5 aventi una rigata assegnata di rette centri». 227.

ID. — «Sulle sezioni spaziali della varietà grassmanniana delle - rette dello spazio a cinque dimensioni». 232, 329.

FANO GIULIO (Presidente). — Ringrazia il Socio DE MARCHI per la commemorazione del Socio straniero *H. Wagner*. 107.

ID. — Formula per S. A. R. il Principe di Piemonte e la Sua Augusta Sposa i più fervidi voti di felicità. 107.

FAZZARI M. — «Le arterie del cervello». 326.

FEDERICI M. — «Fenomeni del regime transitorio nei trasduttori a impedenza caratteristica costante». 821.

FENOGLIO M. — «Sulla presenza della nequehonite nella serpentina di Viù in Val di Lanzo». 310.

FERMI E. — «L'interpretazione del principio di causalità nella meccanica quantistica». 980.

FERRARI A. e COLLA C. — «La struttura chimica e cristallina di alcuni nitrili complessi». 691, 755.

FERRARI A. — Vedi ZAMBONINI F.

FINIKOFF S. — «Sur les suites de M. Fubini». 959.

FINZI B. — «Azioni dinamiche relative a moti piani irrotazionali di liquidi viscosi». 59, 184.

ID. — «Potenza relativa ad una corrente traslo-circolatoria in cui è immersa una lamina arcuata». 395.

ID. — «Sul tensore di deformazione di un velo». 1089.

FRANCHI S. — «La inesistenza della "nappe de l'Embrunais" in territorio italiano, indicata, a sud del M. Bianco, in una carta geologica da Léon Moret». 780.

ID. — «Uniformità di caratteri della zona ad "Helmynthoida labyrinthica" dall'Ubaye alle Alpi e alle Riviere liguri, e conseguente suo grande valore cronologico». 935.

FRERI M. — Vedi QUILICO A.

G

GARBASSO A. (Presidente). — Ringrazia vivamente il Socio MARCHIAFAVA per le alte parole dette presentando le opere di *C. Golgi* e manifesta il plauso dell'Accademia alla signora *Golgi*. 723.

GARBASSO A. (Presidente). — Presenta un plico suggellato inviato dall'ing. *Pietro Pisa*. 861.

ID. — Si congratula con i Soci *R. Nasini* e *P. Ginori Conti* per la presentazione del volume su «I Soffioni e i Lagoni di Toscana, ecc.». 861.

ID. — Comunica la morte del Socio *Lomonaco* e del Socio straniero *T. B. Robertson*. 860.

ID. — Ringrazia il Socio G. LEVI per la bella commemorazione del compianto Socio *A. Ruffini*. 1048.

ID. — Annuncia la morte del Socio Straniero *Fridtjof Nansen* e dà l'incarico al Socio L. DE MARCHI di commemorarlo in una delle prossime sedute. 1048.

GELFOND A. — «Sur le développement des fonctions entières d'ordre fini en série d'interpolation de Newton». 283, 377.

GERONIMUS J. — «Sur une formule de Tchebycheff». 275.

GHERARDELLI G. — «Le sestiche sghembe razionali con sei flessi». 173.

GINORI-CONTI P. — Vedi NASINI R.

GODEAUX L. — «Sur une propriété de l'enveloppe de certaines familles de quadriques». 54.

GOLGI C. — Vedi MARCHIAFAVA E.

GOMES L. R. — «Sur les mouvements isoénergétiques». 63, 180.

- GRIPPA A. — Vedi BARGELLINI G.
 GUGINO E. — «Sul moto incipiente dei sistemi a legami reversibili». 284.
 GUARESCHI C. — «Primi risultati sperimentali sullo sviluppo dell'otocisti degli Anfibii urodeli». 1024.
 GUIDI C. — «Sollecitazioni termiche nelle volte da ponte». 326.

- ID. — Presenta un suo opuscolo. 723.
 GULOTTA B. — «Sullo sviluppo rigoroso in serie di funzioni sferiche del potenziale esterno e della gravità superficiale di un pianeta sferoidico non di rotazione». 1093.

H

- HAGEN G. S. J. — «Oscillazioni del pendolo libero fotografate». 633.
 HARRISON R. G. e PASQUINI P. — «Esperimenti d'innesto sul cestello branchiale di "Clavelina lepadiformis" (Müller)». 139.

I

- ISRAEL P. S. — «Ricerche sulla cronassia. — III. Azione del litio sulla cronassia del preparato neuromuscolare di rana». 498.

J

- JOLLES Z. e KRUGLIAKOFF J. — Ricerche sopra i diazoidrati, gli azossicomposti ed i nitroni». 197.
 JUCCI C. — «Sui pigmenti del sangue, del bozzolo e delle uova nei bachi da seta (B. m.)». 86.
 ID. — «La distribuzione del pigmento negli strati del bozzolo degli incroci reciproci (F₁) tra due razze di bachi da seta, Oro cinese e Giallo Indigeno». 909.

K

- KRALL G. — «Intorno ai carichi di punta per aste a momento d'inerzia variabile». 467, 564.
 ID. — Un metodo generale di valutazione

approssimata dai carichi critici per aste di tipo qualunque». 668, 745.

- KRUGLIAKOFF J. — Vedi JOLLES Z.
 KUSNETZOFF W. — «Sulla regolarizzazione del problema generale dei tre corpi». 568.

L

- LABOCCETTA L. — «Sulla interpolazione segmentale e la classificazione delle funzioni poligonali». 41.
 LAMBERTI B. — «Indagini circa i momenti baricentrici, scalare e vettore, delle quantità di moto per un sistema materiale». 969.
 LA ROSA M. e SESTA L. — «Un circuito a due valvole emittente treni d'onda discontinui». 645, 731.
 LENTATI G. — «Primo contributo allo studio del tessuto endocrino primario del pancreas degli uccelli». 90.
 LEVI G. — Commemorazione del Socio Nazionale prof. *Angelo Ruffini*. 1027, 1048.
 LEVI-CIVITA T. — «Ancora sul moto di un corpo di massa variabile». 626.
 ID. — «Caratteristiche e bicaratteristiche delle equazioni gravitazionali di Einstein». 3, 113.
 ID., anche a nome del Socio AMALDI U., presenta la 2ª edizione del vol. I delle loro: «Lezioni di meccanica». 531.
 ID. — Per incarico dell'autore prof. ing. *Giulio De Marchi* presenta in omaggio il volume I dell'opera: «Idraulica» e ne parla. 1048.
 LEVI G. e DOGLIOTTI G. C. — «Struttura e proprietà delle fibrille a graticcio e reticolari in alcuni tessuti viventi». 940.
 LEVI G. R. e GHIRON D. — «Ossidazione dei cloriti a clorati con i permanganati». 1005.
 ID. — «Pile di riduzione dei cloriti alcalini». 1104.
 LEWY H. — «Sulla unicità della soluzione del problema di Cauchy per un'equazione ellittica del secondo ordine in due variabili». 59, 162.

- LINCIO G. — «Sull'Artinite di Monte Ramazzo (Liguria)». 420.
- LOMBARDI L. — a nome anche del Corrisp. GIORGI G., propone la stampa della Memoria di M. Federici: «Fenomeni del regime transitorio nei trasduttori a impedenza caratteristica costante» 1049.
- LUSIS M. A. — «Sur la recherche des fonctions permutables de 1^{ère} espèce avec une fonction donnée». 59, 166.

M

- MADDALENA L. — «Studio di un fenomeno che presenta la pietra di Aurisina adoperata per rivestimenti murari». 695.
- MADESANI F. — Vedi BARGELLINI G.
- MAGGINI M. — «Il tipo spettrale delle componenti una stella doppia determinato con l'interferometro». 888.
- MARCHIAFAVA E. — Presenta il quarto volume delle «Opere» di C. GOLGI, e ne parla. 720.
- ID. — Presenta in omaggio una sua monografia. 531.
- MASINI R. — «Il retico della valle della Lima». 302.
- MATTIOLI G. D. — «Sulla determinazione delle varietà riemanniane che ammettono gruppi semplicemente transitivi di movimenti». 369.
- MAZZA L. — Vedi ROLLA L.
- MELDOLESI G. — V. PASQUINI P.
- MEZZADROLI G. e VARETON E. — «Azione dei raggi ultravioletti sulla germinazione dei semi e sull'accrescimento delle piante». 316.
- ID. e ID. — «Azione esercitata dalle onde elettromagnetiche ultracorte sul potere catalasico dei semi». 321, 429.
- ID. e ID. — «Ulteriori ricerche sull'azione esercitata da un Radio-oscillatore per onde ultracorte di $\lambda = 2 - 3$ m., sulla germinazione dei semi e sull'accrescimento delle piante». 93, 219.
- MIGLIAVACCA A. — «La rigenerazione del sistema nervoso centrale prima e dopo la nascita». 1026, 1116.

- MILLOSEVICH F. — Presenta a nome del Socio G. DAINELLI il «X volume della spedizione italiana de Filippi» a cura di R. Panpanini e D. Vinciguerra. 723.
- MONTEROSSO B. — «Struttura e funzione dell'intestino medio di "Peroderma cylindricum"». 433.
- ID. — Studi cirripedologici - IV. Sul comportamento di «Chthamalus stellatus» in diverse condizioni sperimentali». 501.
- MONTESANO D. — «Le discendenze normali dei gruppi cremoniani geometrici». 872.
- ID. — «Le discendenze normali dei gruppi cremoniani geometrici». 959, 1069.
- MONTI L. — Vedi BARGELLINI G.

N

- NALLI PIA. — «Derivazioni generalizzate e classificazione degli spazi di Riemann». 59, 265.
- NASINI A. e NATTA G. — «La struttura cristallina dei gas inerti. - II. Esame del Kripto». 1019.
- NASINI R. — Presenta il volume: «I Sofioni ed i Lagoni della Toscana e la industria boracifera» e ne parla. 860.
- NATTA G. — «La struttura cristallina dell'idrogeno solforato e dell'idrogeno seleniato». 691, 749.
- ID. — «Sugli idruri dei metalloidi. - I. La struttura cristallina dell'idrogeno solforato e dell'idrogeno seleniato». 493, 679.
- ID. e NASINI A. — «Struttura dei gas inerti. I. Esame dello Xeno». 1009.
- NICOLADZÉ G. — «Sur une méthode générale de recherches des propriétés invariantes des figures géométriques». 802, 879.
- NICOLESKO M. — Théorème de moyenne pour les fonctions de deux variables réelles». 960.
- NOBILE V. — «Sui triedri intermediari di riferimento per la dinamica stellare. Criteri di scelta». 12, 18, 128.

O

- ODDONE E. — « A quali profondità sono attivi gli ipocentri dei terremoti laziali e a quali cause devono attribuire quei sismi ». 74.
- OSTROGOVICH A. — « Ricerche sulle γ -triazine. Sintesi della fenil-amino-idrossitriazina ». 843.
- ID. e GALFA V. — « Ricerche sulle γ -triazine. Sintesi della etil- e della propil-amino-tiol-triazina con alcuni nuovi dati sulla metil-amino-tiol-triazina ». 1012.
- ID. ID. — « Ricerche sulle γ -triazine. Sintesi di aril-amino-tiol-triazine ». 1019, 1108.
- ID. ID. — « Ricerche sulle γ -triazine. Sintesi di due alcaril-amino-tiol-triazine ». 1019.

P

- PALAZZO L. — Presenta in omaggio il volume di Memorie col quale si celebra il cinquantesimo anniversario della fondazione del R. Ufficio centrale di Meteorologia e Geofisica; un suo rapporto sulla « Proprietà e condizioni delle rocce magnetiche » e una Nota del prof. Tenani: « Sulla compensazione stabile della deviazione quadrantile delle bussole magnetiche ». 326.
- PAMPANINI R. — V. MILLOSEVICH F.
- PARRAVANO N. (Segretario). — Presenta i libri giunti in dono segnalandone alcuni. 107.
- ID. — Presenta le opere giunte in dono segnalandone alcune. 531.
- ID. — presenta le opere giunte in dono segnalandone alcune. 723.
- ID. — Presenta i libri giunte in dono, segnalando fra gli altri, le « Œuvres complètes de Christiaan Huygens ». 861.
- PASQUINI P. e MELDOLESI G. — « Ricerche sulla radiosensibilità nello sviluppo delle ova d'Anfibi. - Alterazioni specifiche e malformazioni secondarie da radiosuscettibilità differenziale in "Rana esculenta" ». 705.

- PASQUINI P. — Vedi HARRISON R. G.
- PATERNÒ E. — « Origini della Stereochimica ». 773.
- PELOSI LUISA. — « Generalizzazione di un teorema di F. Neumann sul calcolo di certi integrali ». 463, 549.
- ID. — « Nuova dimostrazione di un teorema di Painlevé-Levi-Civita sulle equazioni dinamiche ». 819.
- PERSICO E. — « Sulla relazione $E = h\nu$ nella meccanica ondulatoria ». 985.
- PETRI L. — « La riproduzione sperimentale del "mal del secco" dei limoni ». 146.
- PETRI L. — « Un'estesa infezione di "Pythium" su piante di Grano ». 1066.
- PFEIFFER G. — « Sur les integrales de S. Lie ». 463, 558.
- PIAZZOLLA-BELOCH M. — « Le superficie iperelittiche di rango 3 ». 326.
- ID. — Vedi CASTELNUOVO G.
- PIERUCCI M. — « Sull'orbita del pianeta ultranettuniano ». 1092.
- PIRRONE F. — Vedi DE FAZI R.
- PISA P. — Vedi GARBASSO A.
- PISTOLESI E. — « Un metodo rapido per il calcolo dell'effetto dinamico di una corrente traslatoria sopra un cilindro in vicinanza di una parete piana indefinita ». 389.
- POLVERINI A. — Vedi ANGELI A.
- POPOVICI C. — « Sur les équations intégrationnelles ». 47.
- ID. — « Remarques sur les équations intégrationnelles ». 964, 1080.
- PRATESI P. — Vedi SCAGLIARINI C.
- PRINCIPI P. — « Alcune osservazioni intorno all'età dei travertini di Ellera nei dintorni di Perugia ». 493.

Q

- QUILICO A. e FRERI M. — « Un nuovo modo di formazione di neri di pirrolo ». 296, 409.

R

- RACAH G. — « Sopra un esempio di trattazione quantistica di un fenomeno di interferenza ». 837.

- RACAH G. — «Sopra l'elettrodinamica quantistica». 1004, 1100.
- RESTAINO S. — Vedi ZAMBONINI F.
- RICCI T. — Vedi CAMBI L.
- RIVERA V. — «Onde cosmiche e moltiplicazione cellulare (semi germinanti)». 527.
- ID. — «Radiazione ed accrescimento nei vegetali (piante in sviluppo sotto schermo di piombo)». 718.
- ID. — «Sulla azione biologica della radiazione penetrante (raggi cosmici o ultra- γ) sopra lo sviluppo di semi di vegetali terrestri». 530, 612.
- ROLLA L. e MAZZA L. — «Sistemi di telegrafia e di telefonia per mezzo di fasci di radiazioni infrarosse». 19.
- RONCHI V. — «Le frange d'ombra nello studio delle aberrazioni sferiche piccolissime». 998.
- ROSSI B. — «Sul funzionamento dei contatori a tubo di Geiger e Müller». 831.
- ID. — «Un metodo per lo studio della deviazione magnetica dei raggi penetranti». 478.
- RUSSO A. — «Dualismo nucleare e sessualità in "Chriptochilum echini" Maupas». 344.

S

- SACCO F. — Presenta in omaggio un gruppo delle sue ultime pubblicazioni. 1048.
- SBRANA F. — «Sull'operazione infinitesimale nel gruppo delle derivazioni». 283, 364.
- ID. — «Proprietà caratteristiche dell'operazione infinitesimale nel gruppo delle derivazioni». 741.
- SCAGLIARINI G. e PRATESI P. — «Determinazione potenziometrica dei solfuri alcalini». 74, 193.
- SCHWATT I. J. — «Lo sviluppo di $\sec^p x$ in serie di Maclaurin». 665.
- SCORZA-DRAGONI G. — «Un problema sui minimi e sui massimi parziali di una funzione». 865.
- SEGRE B. — «Sulla costruzione delle biseptuple di rette». 448.
- SEGRÈ E. — «Calcolo statistico dello spettro di un atomo ionizzato». 670.

- SEGRÈ E. — «Intensità delle righe negli effetti Raman di molecole biatomiche». 825.
- SESTA L. — Vedi LA ROSA M.
- SILVA G. — «Sulla formola della gravità normale». 641.
- SIRACUSANO N. — «Nuovi fenomeni osservati nella scarica anulare. 64.
- SOMAINI F. — Vedi SOMIGLIANA C.
- SOMIGLIANA C. — «Sul campo gravitazionale esterno del geoide ellissoidico». 237.
- ID. — Presenta a nome dell'autore on. Francesco Somaini la pubblicazione «Il tempio Voltiano in Como» e ne parla. 325.
- SORRENTINO S. — «Sulle più antiche formazioni del Monte S. Calogero e del Nadure presso Sciacca». 692.
- SPIRITO A. — Vedi COTRONEI G.
- STRANEO S. L. — «Sul galvanometro a vibrazione di Moll». 472.
- SUPINO G. — «Ancora sulla scelta tra soluzioni elastiche a risultanti eguali». 392.

T

- TENANI. — Vedi PALAZZO L.
- TERRACINI A. — «Le quasi-applicabilità proiettive di una superficie sul piano». 544.
- THÉODORESCO N. — «Quelques pas dans une théorie des fonctions de variable complexe au sens général». 59, 279, 382.
- TIZZONI G. e DE ANGELIS G. — «Sopra alcune cause che possono indebolire o distruggere il potere immunizzante del nostro vaccino anticanceroso fenolato». 27.
- ID. ID. — «Sulla immunità contro l'adenocarcinoma del topino conferita mediante la poltiglia dello stesso tumore con aggiunta di formolo». 645.
- TIRELLI M. — «Mutamento irreversibile nella viscosità delle uova di "Bombyx mori L."». 80.
- TONOLO A. — «Forma intrinseca delle equazioni dell'equilibrio dei mezzi elastici». 247, 347, 652.

V

- VARETON E. — Vedi MEZZADROLI G.
- VERCELLI F. — « Metodo generale per l'analisi delle periodicità nei diagrammi statistici e sperimentali ». 635.
- VINCIGUERRA D. — Vedi MILLOSEVICH F.
- VIOLA G. — « Le fluttuazioni della curva di luce di "U. Cephei" ». 64, 189.
- ID. — « Orbita circolare di "U. Cephei" ». 892_{1/2}.
- VISCO S. — « Azione del lattice del "ficus carica" sulle proteine ». 688.
- ID. « Isteresi di conduttività elettrica di soluzioni di colloidi organici ». 530, 583.
- ID. — « Reazione proteica e reazione energetica ». 522.
- VOLTERRA E. — « Sulla deformazione di un mezzo elastico dovuta ad un piccolo spostamento di una sfera rigida immersa ». 803.
- ID. — « Determinazione delle tensioni in un mezzo elastico dovute ad un piccolo spostamento di una sfera rigida immersa ». 964.

- VOLTERRA E. — « Sull'influenza di più nuclei rigidi immersi in un mezzo elastico ». 1086.
- VOLTERRA V. — « Sulla meccanica ereditaria ». 619.
- VRANCEANU G. — « Sulle condizioni di rigidità di una V_m in un S_n ». 283, 385.

W

- WATAGHIN G. — « Sulla cattura degli elettroni da parte degli ioni ». 993.
- WINTNER A. — « Sur l'analyse anharmonique des inégalités séculaires fournies par l'approximation de Lagrange ». 464.

Z

- ZAMBONINI F. e FERRARI A. — Sulla identità di struttura cristallina della cancrinite del Monte Somma con quella di Mias ». 782.
- ID e RESTAINO SILVIA. — « I solfati doppi dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini. — XIII: Solfati di praseodimio e ammonio ». 774.

INDICE PER MATERIE

A

- Astronomia.** — «Sui triedri intermediari di riferimento per la dinamica stellare. Criteri di scelta». NOBILE V. 12, 18, 128.
- «Le fluttuazioni della curva di luce di "U. Cephei"». VIOLA G. 64, 189.
- «Sopra la teoria moderna dell'evoluzione delle stelle». ARMELLINI G. 232.
- «Sopra la distanza del nuovo pianeta ultranettuniano». ID. 645.
- «Il tipo spettrale delle componenti una stella doppia determinato con l'interferometro». MAGGINI M. 888.
- «Orbita circolare di "U. Cephei"». VIOLA G. 892.
- «Sul sistema 61 Cygni». ANDRISSI G. L. 899.
- «Altezza della cromosfera nel 1929 ed andamento del presente ciclo solare». ABETTI G. 921.
- «Sull'orbita del pianeta ultranettuniano». PIERUCCI M. 1091.

B

- Biologia.** — «Azione dei raggi ultravioletti sulla germinazione dei semi e sull'accrescimento delle piante». MEZZADROLI G. e VARETON E. 316.
- «Azione esercitata dalle onde elettromagnetiche ultracorte sul potere catalasico dei semi». ID., ID. 321, 429.
- «L'eutrofismo da stagnazione nei laghi artificiali». BRUNELLI G. 495.
- «Ricerche sulla cronassia. — III. Azione del litio sulla cronassia del preparato neuromuscolare di rana». ISRAEL P. S. 498.

- Biologia.** — «Studi cirripedologici. — VI. Sul comportamento di «Chthamalus stellatus» in diverse condizioni sperimentali». MONTEROSSO B. 501.
- «Prime osservazioni su la mutazione di un ifomicete». CURZI M. 506.
- «Contributo allo studio del glutatione nei teleostei. — Osservazioni sul metodo di dosaggio». CANNICCI G. 509, 601.
- «Su alcune caratteristiche delle associazioni lagunari mediterranee». BRUNELLI G. e APOLLONI N. 515, 607.
- «L'origine e l'evoluzione della partenogenesi nell'Artemia salina diploide di Sète (Cette)». ARTOM C. 699.
- «Struttura e proprietà delle fibrille a graticcio e reticolari in alcuni tessuti viventi». LEVI G. e DOGLIOTTI G. C. 940.
- «Primi risultati sperimentali sullo sviluppo dell'otocisti degli Anfibi urodeli». GUARESCHI C. 1024.
- (Embriologia sperimentale). — «Costituzione zoologica e trapianti. Esperienze tra Anuri e Urodeli». COTRONEI G. e SPIRITO A. 425.

- «Ricerche sulla radiosensibilità nello sviluppo delle ova d'Anfibi. — II. Alterazioni specifiche e malformazioni secondarie da radiosuscellibilità differenziale in "Rana esculenta"». PASQUINI P. e MELDOLESI G. 705.

Bollettino bibliografico. — 109-111, 327-328, 533-534, 724-726, 863-864, 1051-1054.

- Botanica.** — «Ulteriori ricerche sull'azione esercitata da un Radio-oscillatore per onde ultracorte di $\lambda = 2 - 3$ m., sulla germinazione dei semi e sull'accresci-

mento delle piante». MEZZADROLI G. e VARETON E. 93, 219.

Botanica. — «La riproduzione sperimentale del "mal del secco" dei limoni». PETRI L. 146.

- «La cultura fisiologica migliora il metabolismo delle piante senza alterare il terreno». BARBIERI N. A. 712.
- «Un'estesa infezione di "Pythium" su piante di grano». PETRI L. 1066.

C

Chimica. — «Le reazioni fra composti ferrosi ed ossido d'azoto». CAMBI L. e CAGNASSO A. 26, 133.

- «Studi intorno agli indoni. - Nuove reazioni dell' α -etil- β -fenil-indone e dell' α -metil- β -fenil-indone». DE FAZI R. e PIRRONI F. 70.
- «Determinazione potenziometrica dei solfuri alcalini». SCAGLIARINI G. e PRA-
TESI P. 74, 193.
- «Ricerche sopra i diazoidrati, gli azosicomposti ed i nitroni». JOLLES Z. e KRUGLIAKOFF J. 197.
- «Un nuovo modo di formazione di neri di pirrolo». QUILICO A. e FRERI M. 296, 409.
- «Sopra i neri di pirrolo». ANGELI A. 439.
- «Sopra alcune relazioni fra costituzione ed odore». ANGELI A. 442, 535.
- «Ricerche e considerazioni sopra la struttura dei diazocomposti». Id. 442.
- «Il potere ossidante dei diazoidrati e le loro analogie con l'acido nitroso». Id. e POLVERINI A. 442, 542.
- «Su gli arilnitroso-ferro-pentacianuri: formazione dalle arilidrossilammine e nitroprussiato». CAMBI L. e RICCI T. 443.
- «Sulla 2-5-dibromo-fenetidina». BARGELLINI G. e GRIPPA A. 489.
- «2-6-dibromo-fenetidina e 3-5-dibromo-fenetidina». Id. e MONTI LYDIA. 493, 574.
- «Sugli idruri dei metalloid. - I. La struttura cristallina dell'idrogeno solfo-

rato e dell'idrogeno seleniato». NATTA G. 493, 679.

Chimica. — «Polisolfuri, solfodiseleniuri e selendisolfuro difenilici». BARONI A. 579.

- «Sullo sdoppiamento ottico delle aldeidi racemiche». BETTI M. 493, 587.
- «Un nuovo metodo per l'identificazione ed il dosaggio dei nitrati nelle acque». BINI G. 593.
- «Sulla 2-5-dibromo-anisidina». BARGEL-
LINI G. e GRIPPA A. 673.
- «3-5-dibromo-anisidina e 2-6-dibromo-anisidina». Id. e MADESANI F. 676.
- «Sulla riduzione del ferricianuro di argento mediante solfato ferroso». BARBIERI G. A. 685.
- «La struttura chimica e cristallina di alcuni nitriti complessi». FERRARI A. e COLLA C. 691, 755.
- «La struttura cristallina dell'idrogeno solforato e dell'idrogeno seleniato». NATTA G. 691, 749.
- «Origini della Stereochimica». PATERNO E. 773.
- «I solfati doppi dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini. - XIII. Solfati di praseodimio e ammonio». ZAMBONINI F. e RESTAINO SILVIA. 774.
- «Ricerche sulle γ -triazine. Sintesi della fenil-amino-idrossi-triazina». OSTROGOVICH A. 843.
- «Azione del bromuro di etilmagnesio e degli ossidanti sui polisolfuri dietilici». BARONI A. 905.
- «Sopra la costituzione e le reazioni dei diazoidrati isomeri». ANGELI A. 923.
- «La struttura cristallina del tiofene». BRUNI G. e NATTA G. 929.
- «La struttura cristallina del benzolo e le sue relazioni con quella del tiofene». Id. e Id. 934, 1058.
- «Ossidazione dei cloriti a clorati con i permanganati». LEVI G. R. e GHIRON D. 1005.
- «Struttura dei gas inerti. - I. Esame dello Xeno». NATTA G. e NASINI A. 1009.
- «Ricerche sulle γ -triazine. Sintesi della

etil- e della propil-amino-tiol-triazina con alcuni nuovi dati sulla metil-amino-tiol-triazina ». OSTROGOVICH A. e GALEA V. 1012.

Chimica. — « Ricerche sulle γ -triazine. Sintesi di aril-amino-tiol-triazine ». ID. e ID. 1009, 1108.

— « Ricerche sulle γ -triazine. Sintesi di due alcaril-amino-tiol-triazine ». ID. e ID. 1019.

— « La struttura cristallina dei gas inerti. — II. Esame del Kripto ». NASINI A. e NATTA G. 1019.

— « Azione dei raggi ultravioletti sulla germinazione dell'orzo, per la fabbricazione del malto ». DE FAZI R. 1022.

— « Pile di riduzione dei cloriti alcalini ». LEVI G. R. e GHIRON D. 1104.

— « Azione del lattice del " ficus carica " sulle proteine ». VISCO S. 688.

Comunicazioni varie. — FANO G. (Presidente) formula per S. A. R. il Principe di Piemonte e la sua Augusta Sposa i più fervidi voti di felicità. 107.

F

Fisica. — « Sistemi di telegrafia e di telefonia per mezzo di fasci di radiazioni infrarosse ». ROLLA L. e MAZZA L. 19.

— « Nuovi fenomeni osservati nella scarica anulare ». SIRACUSANO N. 64.

— (Fisica-matematica). — « Elettrostatica piana » CISOZZI U. 243.

— « Sul galvanometro a vibrazione di Moll ». STRANEO S. L. 472.

— « Un metodo per lo studio della deviazione magnetica dei raggi penetranti ». ROSSI B. 478.

— « L'effetto " Hall " per i metalli Ni, Fe, Cu in campi magnetici deboli ». BOSSA E. 482.

— « Un circuito a due valvole emittente treni d'onda discontinui ». LA ROSA M. e SESTA L. 645, 731.

— « Calcolo statistico dello spettro di un atomo ionizzato ». SEGRÈ E. 670.

— « Intensità delle righe negli effetti Raman di molecole biatomiche ». ID. 825.

Fisica. — « Sul funzionamento dei contatori a tubo di Geiger e Müller ». ROSSI B. 831.

— « Sopra un esempio di trattazione quantistica di un fenomeno di interferenza ». RACAH G. 837.

— « Tensori isotropi e tensori emisotropi ». CISOZZI U. 917.

— « L'interpretazione del principio di causalità nella meccanica quantistica ». FERMI E. 980.

— « Sulla legge di emissione del Nichel ». DEL REGNO W. 989.

— « Sulla cattura degli elettroni da parte diffusi ioni ». WATAGHIN G. 993.

— « Le frange d'ombra nello studio delle aberrazioni sferiche piccolissime ». RONCHI V. 998.

— « Sopra l'elettrodinamica quantistica ». RACAH G. 1004, 1100.

— « Velocità caratteristiche degli elettroni diffusi dalle superfici metalliche ». BERNARDINI G. 1004, 1096.

— « Tensori quadrupli isotropi ». CISOZZI U. 1055.

Fisiologia. — « Sul potere regolatore dei principali costituenti del succo muscolare ». DE CARO L. 98.

— « Se lo stronzio possa fissarsi nei tessuti ». COMEL M. 321.

— « Curva idremica provocata nel riposo e negli esercizi fisici ». CASSINIS U. e BRACALONI L. 324, 515.

— « Le arterie del cervelletto ». FAZZARI M. 326.

— « Reazione proteica e reazione energetica ». VISCO S. 522.

— « Isteresi di conduttività elettrica di soluzioni di colloidi organici ». ID. 530, 583.

— « Studi sulla sindrome paratireopriva. — II. Azione preventiva dell'ergasterolo irradiato in dosi eccessive ». COMEL M. 857.

— « La rigenerazione del sistema nervoso centrale prima e dopo la nascita ». MIGLIAVACCA A. 1026, 1116.

Fisiologia vegetale. — « Onde cosmiche e moltiplicazione cellulare (seni germinanti) ». RIVERA V. 527.

Fisiologia vegetale. — «Sulla azione biologica della radiazione penetrante (raggi cosmici o ultra- γ) sopra lo sviluppo di semi di vegetali terrestri». ID. 530, 612.

— «Variazioni del contenuto in O_2 nelle vesciche idrostatiche di alcune alghe brune». COLLA S. 614.

— «Radiazione ed accrescimento nei vegetali (piante in sviluppo sotto schermo di piombo)». ID. 718.

G

Geodesia. — «Stazione astronomico-geodetica compiuta nel vertice di 1° ordine Eremo di Cherasco, nel luglio 1928». BARBIERI U. 293, 404.

— «Sulle correzioni topografiche nei rilievi eötvössiani». BELLUIGI A. 668.

Geofisica. — «Sul campo gravitazionale esterno del geoide ellissoidico». SOMIGLIANA C. 237.

— «Sulla tectonica di alcune strutture profonde scoperte gravimetricamente nella pianura padana». BELLUIGI A. 467.

— «Sulla formola della gravità normale». SILVA G. 641.

— «Sulle caratteristiche fisiche della pianura marginale appenninica modenese». BELLUIGI A. 769.

— «Sul coefficiente di persistenza dei giorni piovosi». EREDIA ANNA 821.

— «Sullo sviluppo rigoroso in serie di funzioni sferiche del potenziale esterno e della gravità superficiale di un pianeta sferoidico non di rotazione». GULOTTA B. 1093.

— «A quali profondità sono attivi gli ipocentri dei terremoti laziali e quali cause devono attribuire quei sismi». ODDONE E. 74.

Geologia. — «A proposito di una sezione geologica nell'Appennino Reggiano». ANELLI M. 202.

— «Problemi di tectonica lombarda (a proposito di ricerche nel sottosuolo)». CACCIAMALI G. B. 80, 206.

Geologia. — «Possibili ricerche nel sottosuolo lombardo». ID. 308.

— «Il retico della valle della Lima». MASINI R. 302.

— «Sull'età delle eruzioni andesitiche dell'Isola di Capraia». AIROLDI M. 416.

— «Alcune osservazioni intorno all'età dei travertini di Ellera nei dintorni di Perugia». PRINCIPI P. 493.

— «Sulle più antiche formazioni del Monte S. Calogero e del Nadure presso Sciacca». SORRENTINO S. 692.

— «La inesistenza della "nappe de l'Embrunais" in territorio italiano, indicata, a sud del M. Bianco, in una carta geologica da Léon Moret». FRANCHI S. 780.

— «Uniformità di caratteri della zona ad "Helmynthoida labyrinthica" dall'Ubaye alle Alpi e alle Riviere liguri, e conseguente suo grande valore cronologico». ID. 935.

— «Sulla presenza del siluriano fossilifero nell'isola di Coe (Egeo)». DESIO A. 1020.

— «Sulla causa geologica della scomparsa dell'antica città di Paestum». DE LORENZO G. 1062.

M

Matematica. — «Interpretazione proiettiva di alcune equazioni differenziali ordinarie del 2° ordine». BOMPIANI E. 33.

— «Sulla interpolazione segmentale e la classificazione delle funzioni poligonali». LABOCETTA L. 41.

— «Sur les équations intégral-fonctionnelles». POPOVICI C. 47.

— «Sur une propriété de l'enveloppe de certaines familles de quadriques». GODEAUX L. 54.

— «Sulla unicità della soluzione del problema di Cauchy per un'equazione ellittica del secondo ordine in due variabili». LEWY H. 59, 162.

— «Sulla non esistenza di congruenze W di rette iperspaziali che abbiano per prime due falde focali delle varietà luoghi di spazi». CIBRARIO M. 59, 170.

Matematica. — « Sur la recherche des fonctions permutables de 1^{ère} espèce avec une fonction donnée ». LŪSIS M. A. 59, 166.

— « Derivazioni generalizzate e classificazione degli spazi di Riemann ». NALLI PIA. 59, 265.

— « Quelques pas dans une théorie des fonctions de variable complexe au sens général ». THÉODORESCO N. 59, 279, 382.

— « Sistemi di normali principali ad una varietà nel suo Π_3 ». BALDONI RINA. 149, 261.

— « Un teorema generale sulle varietà abeliane reali ». CHERUBINO S. 154.

— « L'approximation d'une fonction par une autre fonction appartenant à une fonctionnelle linéaire donnée, et l'approximation d'un champ vectoriel quelconque par un champ irrotationnel ». CIORANESCU N. 159.

— « Le sestiche sghembe razionali con sei flessi ». GHERARDELLI G. 173.

— « Reti di complessi lineari dello spazio S_5 aventi una rigata assegnata di rette centri ». FANO GINO. 227.

— « Sulle sezioni spaziali della varietà grassmanniana delle rette dello spazio a cinque dimensioni ». ID. 232, 329.

— « Alcune osservazioni suggerite da un teorema sulle varietà abeliane reali ». CHERUBINO S. 179, 254.

— « Forma intrinseca delle equazioni dell'equilibrio dei mezzi elastici ». TONOLO A. 247, 347, 652.

— « Una questione di stabilità ». CACCIOPOLI R. 251.

— « Sopra la nozione di sorgente puntuale del calore in un piano irradiante in equilibrio termico ». BRELOT M. 268.

— « Sur une formule de Tchebycheff ». GERONIMUS J. 275.

— « Sulle serie di Laplace ». CACCIOPOLI R. 283, 357.

— « Sull'operazione infinitesimale nel gruppo delle derivazioni ». SBRANA F. 283, 364.

— « Sopra l'equazione (1) $\Delta u = c(x, y)u(x, y) \equiv 0$ ». BRELOT M. 283, 371.

— « Sur le développement des fonctions entières d'ordre fini en série d'interpo-

lation de Newton ». GELFOND A. 283, 377.

Matematica. — « Sulle condizioni di rigidità di una V_m in un S_n ». VRANCEANU G. 283, 385.

— « Le superficie iperellittiche di rango 3 ». PIAZZOLLA-BELOCH, M. 326.

— « Ancora sulla rappresentazione lineare delle funzioni continue ». ASCOLI G. 351.

— « Sulla determinazione delle varietà riemanniane che ammettono gruppi semplicemente transitivi di movimenti ». MATTIOLI G. D. 369.

— « Sulla costruzione delle bisestuple di rette ». SEGRE B. 448.

— « Saggio del metodo dei minimi quadrati per l'integrazione numerica delle equazioni differenziali lineari ». D'ASCIA MARIA. 450.

— « Sopra le sorgenti puntuali del calore in un piano irradiante in equilibrio termico ». BRELOT M. 458.

— « Generalizzazione di un teorema di F. Neumann sul calcolo di certi integrali ». PELOSI LUISA. 463, 549.

— « Sur les intégrales de S. Lie ». PFEIFFER G. 463, 558.

— « Le quasi-applicabilità proiettive di una superficie sul piano ». TERRACINI A. 544.

— « Sulla curvatura media della superficie ». CALONGHI M. 554.

— « Sulla meccanica ereditaria ». VOLTERRA V. 619.

— « Metodo generale per l'analisi delle periodicità nei diagrammi statistici e sperimentali ». VERCELLI F. 635.

— « L'infinità dei numeri primi nelle forme quadratiche ». BEDARIDA A. M. 650.

— « Sopra l'equazione funzionale

$$f(x)f'(x) = f[f(x)]$$
 collegata ad un problema geometrico ». BARBA G. 655, 735.

— « Sopra una classe di varietà cicliche ». CATTANEO P. 659.

— « Lo sviluppo di $\sec p x$ in serie di Maclaurin ». SCHWARTT I. J. 665.

— « Tensori isotropi ». CISOTTI U. 727.

— « Proprietà caratteristiche dell'operazione infinitesimale nel gruppo delle derivazioni », SBRANA F. 741.

Matematica. — «Un teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale». CACCIOPOLI R. 744, 794.

— «Il significato del principio della media aritmetica». BEMPORAD G. 789.

— «Sopra gli integrali della (1) $\Delta u = c(M)u(M)$ ($c \equiv 0$) nelle vicinanze di un punto singolare O della $c(M)$ ». BRELOT M. 800.

— «Sur une methode générale de recherches des propriétés invariantes des figures géométriques». NICOLADZÉ. 802, 879.

— «Un problema sui minimi e sui massimi parziali di una funzione». SCORZADRAGONI G. 865.

— «Le discendenze normali dei gruppi cremoniani geometrici». MONTESANO D. 872, 959, 1069.

— «Une démonstration du théorème de Cauchy et de la formule de Gauss». ČECH E. 884.

— «Limite e pseudo-limite di una successione». ANDREOLI G. 946.

— «Studio e tabellazione di una particolare funzione definita da un integrale improprio». DELLA MOGLIE G. 951.

— «Sur les suites de M. Fubini». FINIKOFF S. 959.

— «Calcolo di π colla serie di Leibniz». AUDISIO F. 959, 1077.

— «Théorèmes de moyenne pour les fonctions de deux variables réelles». NICOLESCO M. 960.

— Remarques sur les équations intégrationnelles». POPOVICI C. 964, 1080.

Meccanica. — «Caratteristiche e bicaatteristiche delle equazioni gravitazionali di Einstein». LEVI-CIVITA T. 3, 113.

— «L'importanza dei momenti di cerniera nella sicurezza del volo meccanico». CROCCO G. A. 11.

— «Azioni dinamiche di correnti circolatorie intorno a una lastra bilaterale e in-

torno a una lastra arcuata». CISOTTI U. 11, 122.

Meccanica. — «Azioni dinamiche relative a moti piani irrotazionali di liquidi viscosi». FINZI B. 59, 184.

— «Sur les mouvements isoénergétiques». GOMES L. R. 63, 180.

— «Sul moto incipiente dei sistemi a legami reversibili». GUGINO E. 284.

— «Considerazioni teoriche sul "girante a paletta"». CARAFOLI E. 288.

— «Azioni dinamiche di correnti traslo-circolatorie intorno a una lastra arcuata». CISOTTI U. 335.

— «Un metodo rapido per il calcolo dell'effetto dinamico di una corrente traslatoria sopra un cilindro in vicinanza di una parete piana indefinita» PISTOLESI E. 389.

— «Ancora sulla scelta tra soluzioni elastiche a risultanti eguali». SUPINO G. 392.

— «Potenza relativa ad una corrente traslo-circolatoria in cui è immersa una lamina arcuata». CISOTTI U. 395.

— «Moti piani irrotazionali di liquidi perfetti in presenza di ostacoli mobili». CALDONAZZO B. 400.

— «Intorno ai carichi di punta per aste a momento d'inerzia variabile». KRALL G. 467, 564.

— «Ancora sul moto di un corpo di massa variabile». LEVI-CIVITA T. 626.

— «Oscillazioni del pendolo libero fotografate». HAGEN G. S. J. 633.

— «Un metodo generale di valutazione approssimata dai carichi critici per aste di tipo qualunque». KRALL G. 668, 745.

— «Sulla deformazione di un mezzo elastico dovuta ad un piccolo spostamento di una sfera rigida immersa». VOLTERRA E. 803.

— «Moti piani irrotazionali di liquidi perfetti in presenza di un disco mobile». CALDONAZZO B. 807.

— «Ancora una eccezione del teorema di Kutta-Joukowski». CONSIGLIO A. 813.

— «Nuova dimostrazione di un teorema di Painlevé-Levi-Civita sulle equazioni dinamiche». PELOSI LUISA. 819.

Meccanica. — « Fenomeni del regime transitorio nei trasduttori a impedenza caratteristica costante ». FEDERICI M. 821.

— Indagini circa i momenti baricentrici, scalare e vettore, delle quantità di moto per un sistema materiale ». LAMBERTI F. 969.

— « Determinazione delle tensioni in un mezzo elastico dovute ad un piccolo spostamento di una sfera rigida immersa ». VOLTERRA E. 964.

— « Su alcuni teoremi fondamentali dell'elettrodinamica e della statica dei solidi elastici ». BONVICINI D. 974.

— « Sulla relazione $E = h\nu$ nella meccanica ondulatoria ». PERSICO E. 985.

— « Sull'influenza di più nuclei rigidi immersi in un mezzo elastico ». VOLTERRA E. 1086.

— « Sul tensore di deformazione di un velo ». FINZI B. 1089.

Meccanica celeste. — « Sur l'analyse anharmonique des inégalités séculaires fournies par l'approximation de Lagrange ». WINTNER A. 464.

— « Sulla regolarizzazione del problema generale dei tre corpi ». KUSNETZOFF W. 568.

Mineralogia. — « La lava dell'eruzione dell'Etna del 1928 ». DI FRANCO 80, 212.

— « Sulla presenza della nesquehonite nella serpentina di Viù in val di Lanzo ». FENOGLIO M. 310.

— « Sull'artinite di Monte Ramazzo (Liguria) ». LINCIO G. 420.

— « Studio di un fenomeno che presenta la pietra di Aurisina adoperata per rivestimenti murari ». MADDALENA L. 659.

— « Bianchite, nuovo minerale ». ANDREATTA C. 699, 760.

— « Sulla identità di struttura cristallina della cancrinite del Monte Somma con quella di Mias ». ZAMBONINI F. e FERRARI A. 782.

— « Sulla determinazione dei plagioclasti per mezzo della misura degli angoli d'estinzione nella zona normale o (0.10) ». DEBENEDETTI A. 848.

N

Necrologie. — « Commemorazione del Socio *Hermann Wagner* ». DE MARCHI L. 102.

— Annunzio della morte del Socio *Lomonaco D.* e del Socio straniero *Robertson T. B.* 860.

— « Commemorazione del Socio Nazionale prof. *Angelo Ruffini* ». LEVI G. 1027, 1048.

— Annunzio della morte del Socio Straniero *Fridtjof Nansen*. 1048.

P

Paleontologia. — Su di un caso di tetrameria in un *Echinide exocisto* ». CHECCHIA-RISPOLI G. 596.

Patologia. — « Sopra alcune cause che possono indebolire o distruggere il potere immunizzante del nostro vaccino anticanceroso fenolato ». TIZZONI G. e DE ANGELIS G. 27.

— « Sulla immunità contro l'adenocarcinoma del topino conferita mediante la poltiglia dello stesso tumore con aggiunta di formolo ». ID. ID. 645.

Personale accademico. — 107, 325, 860, 1048.

Presentazione di libri. — 107, 325, 531, 720-723, 860-861, 1048.

Presentazione di note e memorie. — 107, 326, 531, 723, 861, 1049.

Presentazione di plichi suggellati. — 861.

R

Relazioni di Commissioni. — 326, 1049.

Z

Zoologia. — « Mutamento irreversibile nella viscosità delle uova di "*Bombyx mori* L." ». TIRELLI M. 80.

— « Sui pigmenti del sangue, del bozzolo e delle uova nei bachi da seta (B. m.) ». JUCCI C. 86.

— « Primo contributo allo studio del tes-

suto endocrino primario del pancreas degli uccelli ». LENTATI G. 90.

Zoologia. — « Esperimenti d'innesto sul cestello branchiale di "Clavelina lepadiformis" (Müller) ». HARRISON R. G. e PASQUINI P. 139.

— « Dualismo nucleare e sessualità in "Criptochilum echini" Maupas ». Russo A. 344.

— « Struttura e funzione dell'intestino medio di "Peroderma cylindricum" ». MONTEROSSO B. 433.

Zoologia. — « Rigenerazione dell'apparato digerente nelle Oloturie ». BERTOLINI FAUSTA. 600.

— « La distribuzione del pigmento negli strati del bozzolo degli incroci reciproci (F_1) tra due razze di bachi da seta, Oro cinese e Giallo Indigeno ». JUCCI C. 909.

— « Costituzione zoologica e trapianti. Nuove esperienze tra Anuri e Urodeli ». COTRONEI G. e SPIRITO A. 854.

ERRATA CORRIGE

PRESENTAZIONE DI LIBRI

omessa nel « Rendiconto » della Seduta del 31 maggio 1930.

Il Socio PALAZZO presenta in omaggio all'Accademia, anche a nome dell'Ing. Umberto NOBILE, un volume edito dall'Istituto Geografico Perthes di Gotha, col titolo: *Die Vorbereitungen und die wissenschaftlichen Ergebnisse der Polarexpedition der « Italia »*.

La pubblicazione racchiude gli studi preparatori ed i risultati scientifici della spedizione italiana nell'Artide con dirigibile; le diverse parti furono sviluppate da autori delle varie speciali competenze. Il Socio Palazzo, che pure vi ha contribuito, mette in rilievo i pregi e l'importanza dell'opera compiuta dalla sfortunata, e pur gloriosa spedizione Nobile, nella quale trovarono tragica fine, tra altri, due giovani e già illustri scienziati: il Malgreem e il Pontremoli. Alla memoria di questo ultimo il Socio rivolge speciali parole di profondo cordoglio.



3 8198 304 934 696

UNIVERSITY OF ILLINOIS AT CHICAGO

